Udregn udgangssekvensen $y(n)$ for overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0{,}4z^{-1}}{1 - 0{,}7z^{-1} + 0{,}1z^{-2}}$$

Når indgangssekvensen $x(n)$ er enhedssamplen $\delta(n)$.

Først opskrives $H(z)$ med positive eksponenter i tæller og nævner

$$H(z) = \frac{z^2 + 0{,}4z}{z^2 - 0{,}7z + 0{,}1}$$

Poler og nulpunkter findes.

Nulpunkter: $z^2 + 0{,}4z = z(z+0{,}4) \Downarrow$

Nulpunkter i $z=0$ og $z=-0{,}4$

Poler : $z^2 - 0{,}7z + 0{,}1 = 0 \Rightarrow$

poler i $z=0{,}5$ og $z=0{,}2$

Da $Z\{\delta(n)\} = 1$ er

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= H(z) \\ &= \frac{z(z+0{,}4)}{(z-0{,}5)(z-0{,}2)} \qquad (1) \end{aligned}$$

Der laves invers z-transformation på $Y(z)/z$ som følger

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{k_1}{z-0{,}5} + \frac{k_2}{z-0{,}2}$$

$$k_1 = (z-0{,}5)\cdot \frac{Y(z)}{z}\Bigg|_{z=0{,}5} \overset{(1)}{=} \frac{z+0{,}4}{z-0{,}2}\Bigg|_{z=0{,}5} = 3$$

$$k_2 = (z-0{,}2)\cdot \frac{Y(z)}{z}\Bigg|_{z=0{,}2} \overset{(1)}{=} \frac{z+0{,}4}{z-0{,}5}\Bigg|_{z=0{,}2} = -2$$

Dette medfører at

$$Y(z) = \frac{3z}{z-0{,}5} - \frac{2z}{z-0{,}2}$$

Tabelopslag ZT4

$$\begin{aligned} y(n) &= 3\cdot 0{,}5^n - 2\cdot 0{,}2^n \\ &= \underline{\underline{3e^{-0{,}693n} - 2e^{-1{,}609n}}} \end{aligned}$$

Udregn udgangssekvensen $y(n)$ for overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2 + 1{,}697z + 1{,}44}$$

når indgangssekvensen $x(n)$ er enhedssamplen $\delta(n)$.

Poler for systemet er

$$z = 1{,}2 \angle 3\pi/4 \quad \text{og} \quad z = 1{,}2 \angle -3\pi/4$$

$$= 1{,}2\, e^{j3\pi/4} \qquad\qquad = 1{,}2\, e^{-j3\pi/4}$$

Nulpunkt for systemet er $z = 0$.

Invers z-transform af $Y(z)/z$ udføres $\left(Z\{\delta(n)\} = 1 \right)$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + 1{,}697z + 1{,}44} = \frac{k_1}{z - 1{,}2e^{j3\pi/4}} + \frac{k_2}{z - 1{,}2e^{-j3\pi/4}}$$

$$= \frac{1}{(z - 1{,}2e^{j3\pi/4})(z - 1{,}2e^{-j3\pi/4})}$$

$$k_1 = \left.\frac{1}{z - 1{,}2e^{-j3\pi/4}}\right|_{z = 1{,}2e^{j3\pi/4}} = \frac{1}{1{,}2\left(e^{j3\pi/4} - e^{-j3\pi/4}\right)}$$

$$= \frac{1}{-2 \cdot 1{,}2 j \sin(3\pi/4)} = \frac{1}{-2 \cdot 1{,}2 j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \left[\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right]$$

$$= \frac{1}{1{,}2\sqrt{2}}\, j = \frac{1}{1{,}2\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi/2}$$

$$k_2 = k_1^* = \frac{1}{1{,}2\sqrt{2}}\, e^{-j\pi/2}$$

Dette medfører at

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{1{,}2\sqrt{2}} e^{j\pi/2}}{z - 1{,}2e^{j3\pi/4}}\, z + \frac{\frac{1}{1{,}2\sqrt{2}} e^{-j\pi/2}}{z - 1{,}2e^{-j3\pi/4}}\, z$$

$$y(n) = \frac{1}{1{,}2\sqrt{2}} \left(e^{j\pi/2} \left(1{,}2^n e^{j3\pi n/4}\right) + e^{-j\pi/2}\, 1{,}2^n e^{-3\pi n/4} \right) \quad \text{Tabelopslag ZT4}$$

$$= \frac{1}{1{,}2\sqrt{2}} \cdot 1{,}2^n \cdot 2 \left(\frac{e^{j(3\pi n/4 + \pi/2)} + e^{-j(3\pi n/4 + \pi/2)}}{2} \right) \qquad \left[\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right]$$

$$= \frac{2}{1{,}2\sqrt{2}} \cdot 1{,}2^n \cos\left(\frac{3\pi}{4} n + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2}\; 1{,}2^{n-1} \sin\left(\frac{3\pi}{4} n \right)$$

Udregn impulsresponset for overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z}{z - p_0}$$

når polen p_0 er $p_0 = e^{s_0 T} = e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\omega_0 T}$.

Fra relationen $z = e^{sT}$ svarer dette til en pol i $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$.

$$h(n) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z - p_0}\right\}$$ Tabelopslag ZT4

$$= p_0^n$$

$$= e^{\sigma_0 T n} \cdot e^{j\omega_0 T n}$$

$$= e^{\sigma_0 T n} \underline{/\omega_0 T n}$$ $$T = \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$= e^{\sigma_0 T n} \underline{/2\pi \frac{\omega_0}{\omega_s} n}$$