opg 3.2

a) $y(n) = -\frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}(n-2) = -x(n-1) + 5x(n-2)$

Vi opstiller en overførings funktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-z^{-1} + 5z^{-2}}{-\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} + 1}$$

vi forlænger teller og nævner med z^2

$$= \frac{z^2 \cdot (-z^{-1} + 5z^{-1})}{z^2 \cdot (-\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} + 1)} = \frac{-z + 5}{-\frac{1}{4}z - \frac{1}{8} + z^2}$$

b)

opstil et udtryk for $Y(z) = H(z)X(z)$ når $x(n)$ er en en enhedsspringsekvens $u(n)$

$$Y(z) = H(z) \cdot Z(u(n))$$

$$= \frac{-z+5}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(-z+5) \cdot z}{(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8})(z-1)}$$

c) Lav invers z-transformation. partialbrøk opdeling

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z+5}{(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8})(z-1)}$$

$$\frac{-z+5}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})(z-1)} = \frac{R_1}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{R_2}{(z-\frac{1}{4})} + \frac{R_3}{(z-1)}$$

$$-z-5 = R_1 \cdot (z+\tfrac{1}{4})(z-1) + R_2 \cdot (z-\tfrac{1}{2})(z-1) + R_3 \cdot (z-\tfrac{1}{2})(z+\tfrac{1}{4})$$

$z = 1$

$$-1-5 = R_3 \cdot (1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{4})$$

$$-6 = R_3 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{4})$$

$$-6 = R_3 \cdot \tfrac{5}{8}$$

$$-48 = 5R_3$$

$$-\frac{48}{5} = R_3$$

$$-z-5 = R_1 \cdot (z+\tfrac{1}{4})(z-1) + R_2 \cdot (z-\tfrac{1}{2})(z-1) - \frac{48}{5} \cdot (z-\tfrac{1}{2})(z+\tfrac{1}{4})$$

$$-\frac{1}{2} - 5 = R_1 \cdot (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{2}-1)$$

$$-\frac{11}{2} = R_1 \cdot (\tfrac{3}{4} \cdot -\tfrac{1}{2})$$

$$-\frac{11}{2} = R_1 \cdot -\frac{3}{8}$$

$$-\frac{88}{2} = -3R_1$$

$$\frac{-88}{2} = R_1$$

$$\frac{44}{3} = R_1$$

$$-z-5 = \tfrac{44}{3} \cdot (z+\tfrac{1}{4})(z-1) + R_2 \cdot (z-\tfrac{1}{2})(z-1) - \frac{48}{5} \cdot (z-\tfrac{1}{2})(z+\tfrac{1}{4})$$

$$-\frac{1}{4} - 5 = R_2 \cdot (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4} - 1)$$

$$-\frac{21}{4} = R_2 \cdot (-\tfrac{1}{4})$$

$$\frac{84}{4} = R_2$$

$$21 = R_2$$

$$\frac{-z+5}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})(z-1)} = \frac{\frac{44}{3}}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{21}{(z-\frac{1}{4})} + \frac{-\frac{48}{5}}{(z-1)}$$

$$\frac{-z+5}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})(z-1)} = \frac{44}{3(z-\frac{1}{2})} + \frac{21}{(z-\frac{1}{4})} - \frac{48}{5(z-1)}$$

vi kan nu finde den inverse z-transformation

vi bruger $\frac{1}{z+a} = (-a)^n \cdot u(n)$ hvor $u(n)$ er stepsunktionen som er 1 når $n \geq 0$ og 0 når $n < 0$. og $\frac{1}{z-a} = a^n \cdot u(n)$

$$H(z) = \frac{44}{3} \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{2})} + 21 \cdot \frac{1}{(z-\frac{1}{4})} - \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{(z-1)}$$

$$= \frac{44}{3} \cdot (\tfrac{1}{2})^n \cdot u(n) + 21 \cdot (\tfrac{1}{4})^n \cdot u(n) - \frac{48}{5} \cdot 1^n \cdot u(n)$$

Dermed har vi den inverse z-transsormation

$$H(z) = \frac{44}{3} \cdot (\tfrac{1}{2})^n \cdot u(n) + 21 \cdot (\tfrac{1}{4})^n \cdot u(n) - \frac{48}{5}^n \cdot u(n)$$