

z-Transformation

Eksempel 1

Betrakt enhedssamplen

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n=0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Enhedssamplen z-transformeres som

$$Z\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \delta(n)$$

$$= z^0 \cdot 1$$

$$\boxed{Z\{\delta(n)\} = 1} \quad (\text{ZT1})$$

Eksempel 2

Betrakt enhedsspringsekvensen

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Enhedsspringsekvensen z-transformeres som

$$Z\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} u(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z^{-1}| < 1$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1 \right]$$

$$\boxed{Z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z^{-1}| < 1} \quad (\text{ZT2})$$

z-Transformation

Eksempel 3

Betrakt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Sekvensen $x(n)$ z-transformeres som

$$Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} a^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}a)^n$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, |r| < 1 \right]$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}a}, |z^{-1}a| < 1$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-a}, |z^{-1}a| < 1} \quad (ZT4)$$

Eksempel 4

Betrakt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} e^{anT} & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Sekvensen $x(n)$ z-transformeres som

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e^{anT}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}e^{aT})^n$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}e^{aT}}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-e^{aT}}} \quad (ZT5)$$

z-Transformation

Eksempel 5

Betrakt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} \cos(\omega n T) & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Sekvensen $x(n)$ z-transformeres som

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \cos(\omega n T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e^{j\omega n T} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e^{-j\omega n T} \right) \quad \left[\cos(\omega n T) = \frac{1}{2} (e^{j\omega n T} + e^{-j\omega n T}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \quad [ZT5] \\ &= \frac{1}{2} \frac{z(z - e^{-j\omega T}) + z(z - e^{j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})} \end{aligned}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z^2 - z \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}} \quad (ZT7)$$

Eksempel 6

Betrakt sekvensen $x(n)$, som kaldes $X(z)$ efter z-transformation. Sekvensen $x(n-a)$ z-transformeres som (det er $x(n)$ forsinket a sample)

$$Z\{x(n-a)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x(n-a), \quad x(n) \text{ er en kausal sekvens, dvs. } x(n) = 0 \text{ for } n < 0.$$

$$= \sum_{n=a}^{\infty} z^{-n} x(n-a), \quad \text{Definer } m := n-a \Rightarrow n = m+a$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} z^{-(m+a)} x(m+a-a)$$

$$= z^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} x(m)$$

$$\boxed{Z\{x(n-a)\} = z^{-a} X(z)} \quad (Z2)$$

z-Transformation

Eksempel 7

Betrakt følgende differensligning

$$y(n) - y(n-1] = 3x(n-2)$$

Ligningen z-transformeres som (ved brug af (2.2))

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = 3z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = 3z^{-2}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{3}{z^2 - z}$$

$$= \frac{3}{z(z-1)}$$

Poler i $z=0$ og $z=1$.

z-Transformation

Eksempel 8

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-0,5}$$

Vi finder udgangssekvensen $y(n)$, når enhedsspringsekvensen er indgangssekvens.

1) $Y(z)$ opskrives på faktoreret form

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$= \frac{z}{z-0,5} \cdot \frac{z}{z-1} \quad [ZT2]$$

$$= \frac{z^2}{(z-0,5)(z-1)}$$

2) $Y(z)/z$ opskrives

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-1}$$

3) Find k_1 og k_2

$$k_1 = \left. \frac{z}{z-1} \right|_{z=0,5} = \frac{0,5}{-0,5} = -1$$

$$k_2 = \left. \frac{z}{z-0,5} \right|_{z=1} = \frac{1}{0,5} = 2$$

4) Opskriv partialbrøksopløst udtryk for $Y(z)$

$$Y(z) = -\frac{1}{z-0,5} \cdot z + 2 \frac{1}{z-1} \cdot z$$

$$= -\frac{z}{z-0,5} + 2 \frac{z}{z-1}$$

$$= - (0,5)^n + 2 \cdot 1^n$$

$$= 2 - 0,5^n$$

$$= \underline{2 - e^{-0,693n}}$$