

# Simulación y Análisis de la Dinámica de un Protón en un Modelo de Ciclotrón

Jorge Ramírez López<sup>1</sup> Asesor: Mario Bolívar Gaeta Verdín<sup>2</sup>

<sup>1</sup> jorge.ramirez9331@alumnos.udg.mx <sup>2</sup> mario.gaeta@academicos.udg.mx Modular I

## Resumen

Se simuló la trayectoria de un protón en un ciclotrón utilizando un modelo físico con campos magnético uniforme y eléctrico de radiofrecuencia. Se abordó el problema mediante una solución analítica por tramos y una simulación numérica usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Ambas aproximaciones fueron comparadas en términos de posición, energía, número de vueltas y radio de curvatura, mostrando una concordancia casi perfecta. Se identificaron variaciones significativas en el campo eléctrico, indicando la necesidad de ajustar la frecuencia del voltaje RF para mantener una aceleración eficiente a medida que la partícula gana velocidad.

## Introducción

Este proyecto simula la dinámica de un protón en un ciclotrón con campos magnético y eléctrico alternante, mediante el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden (RK4) en Python.

Como partículas cargadas, los protones obedecen la fuerza de Lorentz [1]:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1)$$

donde el campo magnético curva la trayectoria sin alterar la energía, y el campo eléctrico alternante (de radiofrecuencia) acelera al protón en la región entre los *Dees*.

El movimiento se modela con la segunda ley de *Newton*:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2)$$

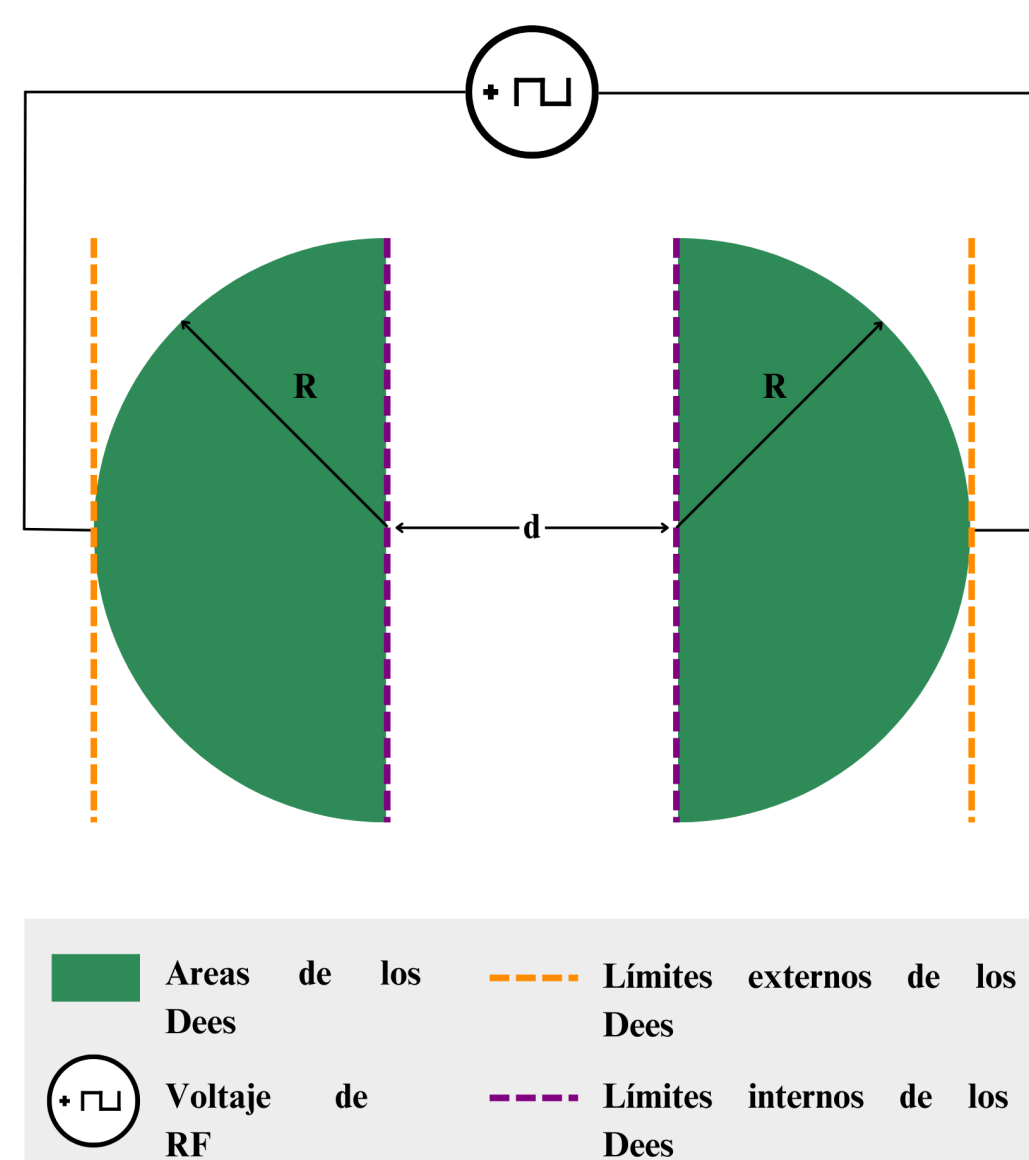
y se analizan trayectorias circulares con radio de Larmor:

$$r = \frac{mv}{qB}, \quad (3)$$

y frecuencia ciclotrónica:

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (4)$$

Se usa un modelo con dos *Dees* y un voltaje alternante para simular el proceso de aceleración en un ciclotrón, evaluando energías alcanzadas y número de vueltas necesarias. A continuación se presenta un diagrama del modelo utilizado:



**Figura 1:** Esquema de un ciclotrón, mostrando sus principales regiones: los *Dees* (semicírculos en verde con radio  $R$ ) y la región de vacío entre ellos, con una separación  $d$ . Se indica también el voltaje de radiofrecuencia (RF) aplicado y los límites internos y externos de los *Dees*.

## Metodología

Se simuló el movimiento de un protón en un ciclotrón con campos magnético y eléctrico definidos por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B_0 \hat{k}, & \text{en los Dees,} \\ 0, & \text{fuera de ellos.} \end{cases} \quad \vec{E}(\vec{r}, \vec{v}) = E_0 \text{sgn}(v) \hat{i} = \begin{cases} \pm E_0 \hat{i}, & \text{en la región de vacío,} \\ 0, & \text{en los Dees.} \end{cases} \quad (5)$$

La dinámica se resolvió mediante dos enfoques:

**1. Analítico:** En la región de vacío, se obtuvo una trayectoria parabólica:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{x0}t + x_0,$$

donde  $a = \frac{qE_0}{m}$ . En los *Dees*, el movimiento fue circular, de acuerdo a la ecuación cartesiana encontrada:

$$(x - x_0)^2 + \left(y - \frac{v_{x0}}{\omega} - y_0\right)^2 = \left(\frac{v_{x0}}{\omega_c}\right)^2.$$

**2. Numérico (RK4):** Se implementó un algoritmo en Python que evalúa las ecuaciones de movimiento usando *Runge-Kutta* de 4° orden, identificando la región donde se encuentra el protón en cada paso de tiempo.

**Condiciones de simulación:**

- Paso temporal:  $10^{-12}$  s, 1 048 575 iteraciones.
- Voltaje RF: 60 kV,  $E_0 = 1,2 \times 10^6$  V/m.
- Campo magnético:  $B_0 = 2$  T.
- Radio de los *Dees*:  $R = 1$  m.

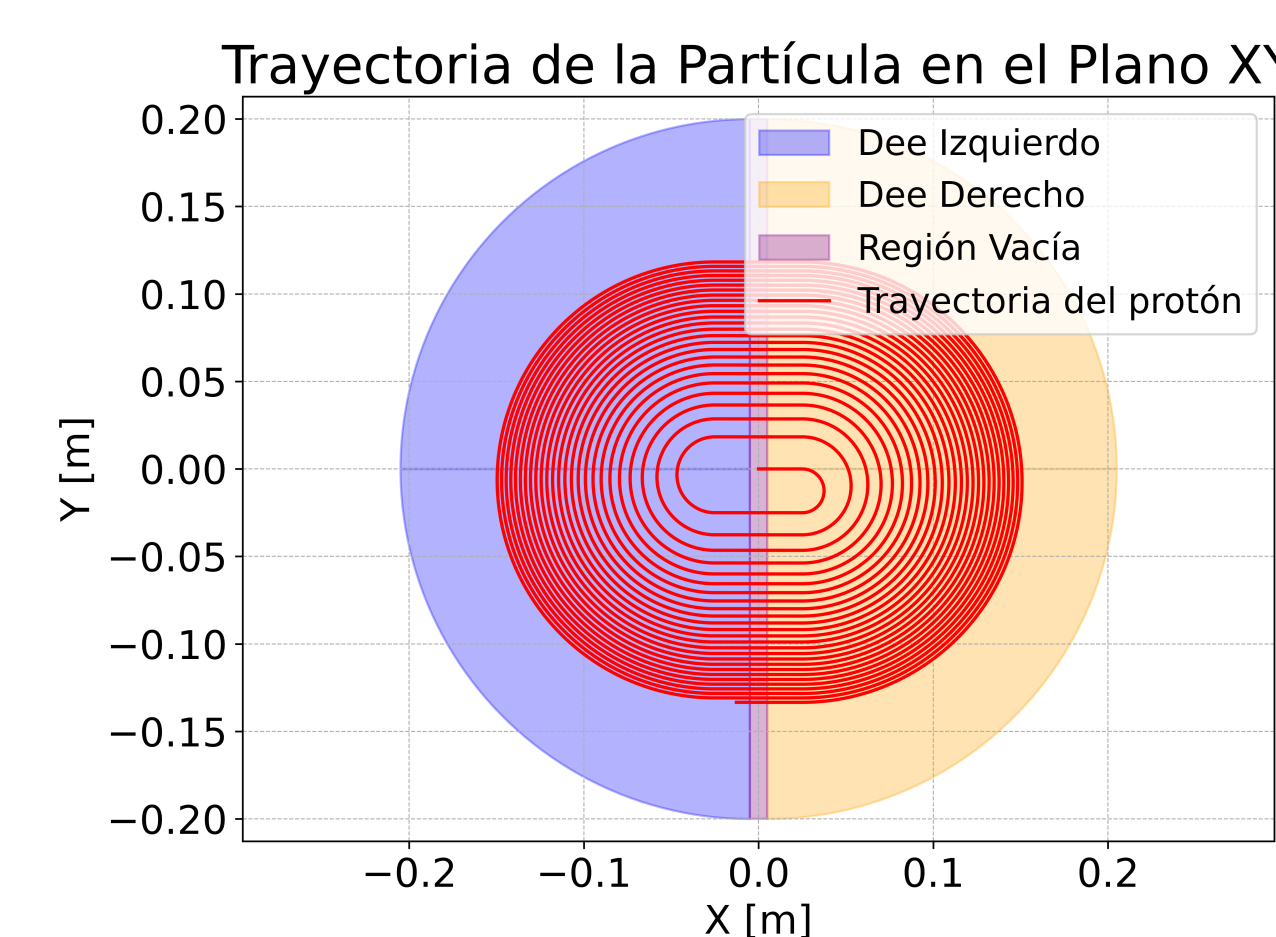
- Cálculo de posición, energía cinética y campo eléctrico a lo largo del tiempo.

Parámetro	Valor
$m$	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
$q$	$1,6 \times 10^{-19}$ C
$d$	0,05 m
$\omega_c$	191,51 MHz

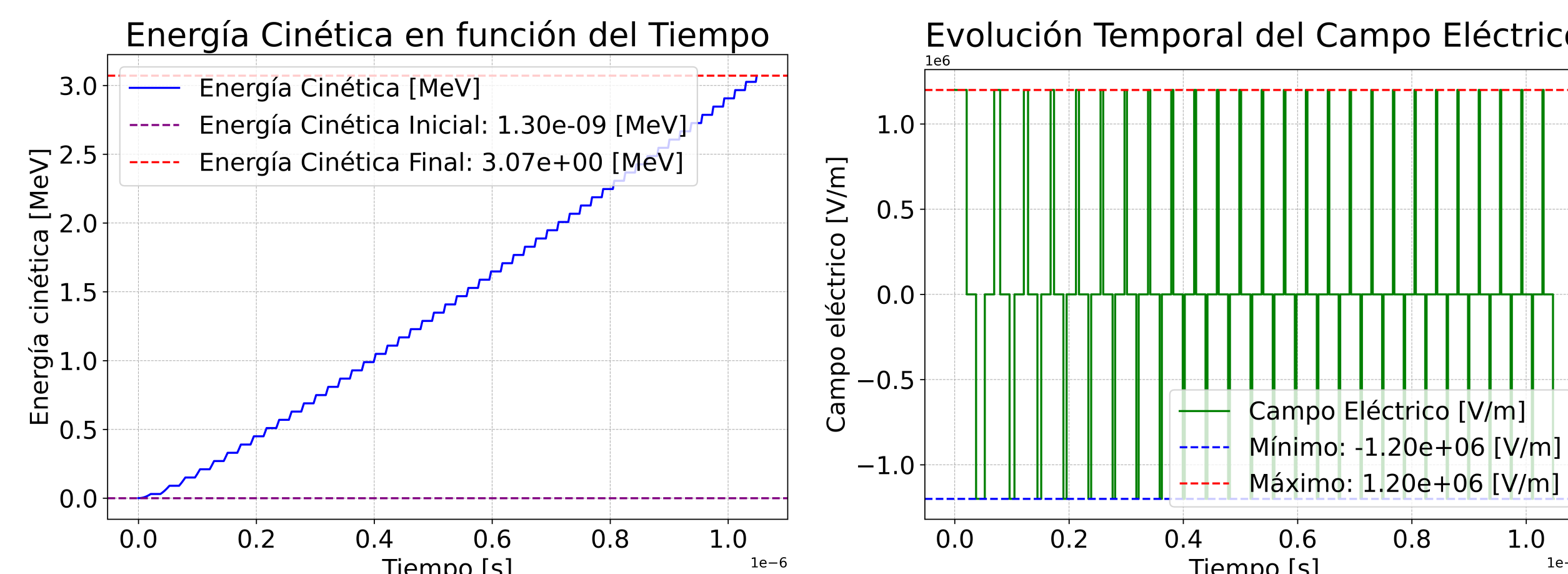
**Cuadro 1:** Constantes utilizadas.

Posteriormente, se calcularon coeficientes estadísticos entre los resultados de ambas soluciones para validar cuantitativamente la precisión del modelo numérico frente a la solución analítica.

## Resultados



**Figura 2:** Representación espacial del recorrido de la partícula cargada dentro del sistema. Se observa su trayectoria curva influenciada por el campo eléctrico aplicado, confinada entre los electrodos tipo *Dee* y una región vacía central.



**Figura 3:** Variación de la energía cinética de la partícula conforme se aleja del centro del sistema. Este comportamiento refleja el efecto del campo eléctrico acelerador, que incrementa la energía conforme la partícula gana distancia radial.

Variable	Correlación	Desviación Estándar	$R^2$
Tiempo [s]	1,0	0,0	1,0
Posición en X [m]	1,0	0,077	1,0
Posición en Y [m]	1,0	0,065	1,0
Energía Cinética [MeV]	1,0	0,912	1,0
Campo Eléctrico [V/m]	0,981	538551,976	0,962

**Cuadro 2:** Correlación, Desviación Estándar, Covarianza y Coeficiente de Determinación ( $R^2$ ) para las Variables de Tiempo, Posiciones, Energías y Campo Eléctrico.

Caso / Variable	Vueltas	Valor
Sol. Analítica	25,265	N/A
Sol. Numérica	25,270	N/A
Correlación entre radios	N/A	1,0
Desfase de Fases	N/A	0,69°

**Cuadro 3:** Comparación entre los resultados de la solución analítica y numérica, incluyendo el número de vueltas, la correlación entre los radios y el desfase de fases.

## Conclusiones

Se obtuvo una excelente concordancia entre el modelo analítico y la simulación numérica, con correlaciones de 1,0 en tiempo, posición y energía cinética (ver Cuadro 2). Aunque el campo eléctrico presentó una alta correlación (0,981), mostró grandes fluctuaciones, lo que sugiere que la frecuencia del voltaje RF debe aumentar conforme la partícula gana velocidad.

El número de vueltas y el radio de trayectoria coinciden casi exactamente en ambos casos (Cuadro 3), y el desfase de solo 0,012 rad = 0,69° confirma la alineación casi perfecta entre ambas trayectorias.

## Referencias

- [1] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 10 2023.
- [2] Jerry B. Marion. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Reverté, 1992.