## 2.14 Exercícios

### ♦ Definição

**Exercício 1.** *Considere o conjunto* $\mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, 0), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad e \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Nessas condições,* $\mathbb{R}^2$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial? Justifique.*

**Exercício 2.** *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*.* $V$ *não é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial em relação a cada um dos dois seguintes pares de operações sobre* $V$*:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) &= (x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1, y_1), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad e \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Em cada caso, quais dos oito axiomas não se verificam?*

**Exercício 3.** *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Com essas operações,* $V$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

**Exercício 4.** *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) &= (3\alpha y, -\alpha x), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Com essas operações,* $V$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

**Exercício 5.** *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Com essas operações,* $V$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

**Exercício 6.** *Seja* $V = \mathbb{R}^3$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \forall\ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y, z) &= (\alpha x, y, z), \quad \forall\ (x, y, z) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Com essas operações,* $V$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

**Exercício 7.** *Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais reais, com as operações usuais.*

*a)* *Matrizes diagonais* $n \times n$.

*b)* *Matrizes escalares* $n \times n$, *ou seja, matrizes diagonais cujos elementos da diagonal principal são iguais.*

*c)* $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

*d)* $\{(a, a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$

*e)* $\{(1, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

*f)* $\{(x, x+3) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

*g)* $\{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

**Exercício 8.** *Seja* $V = \mathbb{C}^2$. *Mostre que* $V$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial com a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, assim definidas:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ \ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Exercício 9.** *Seja* $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. *Considerando sobre* $\mathbb{R}^\infty$ *as operações de adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, dadas por:*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots), \quad \forall\ (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \quad e \\ \alpha(x_1, x_2, \ldots) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots), \quad \forall\ (x_1, x_2, \ldots) \in V\ \ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*mostre que* $\mathbb{R}^\infty$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial.*

**Exercício 10.** *Mostre que o conjunto* $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\ \ e\ \ x, y > 0\}$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial com as operações de adição e mutiplicação por escalar definidas por:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha \odot (x, y) &= (x^\alpha, y^\alpha), \quad \forall\ (x, y) \in V\ \ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Exercício 11.** *Sejam* $U$ *e* $V$ *dois* $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais. Considere o produto cartesiano* $U \times V = \{(u, v) \mid u \in U\ \ e\ \ v \in V\}$ *desses dois conjuntos. Defina as seguintes operações em* $U \times V$*:*

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) + (u_2, v_2) &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad \forall\ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \times V \quad e \\ \alpha(u, v) &= (\alpha u, \alpha v), \quad \forall\ (u, v) \in U \times V\ \ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

*Mostre que* $U \times V$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar, acima definidas, é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Este espaço vetorial é chamado de* ***Espaço Produto de*** $U$ ***por*** $V$.

**Exercício 12.** *Mostre que todo* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial também é* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial.*

## ⧫ Propriedades

**Exercício 13.** *No espaço vetorial $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, considere os vetores:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcular $2A + B - 3C$.*

b) *Determinar $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{A+X}{2} - \dfrac{X-B}{3} = C$.*

c) *Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $A = \alpha B + \beta C$?*

**Exercício 14.** *Sejam $p_1(x) = x^3 - 1$, $p_2(x) = x^2 + x - 1$ e $p_3(x) = x + 2$ vetores de $P_3(\mathbb{R}$.*

a) *Calcular $2p_1 + 3p_2 - 4p_3$.*

b) *Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p_1 + \alpha p_2 = p_3$?*

c) *Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $p_1 = \alpha p_2 + \beta p_3$?*

**Exercício 15.** *Seja $\mathbb{C}^2$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Considere os vetores $u, v, w \in \mathbb{C}$, onde $u = (1+i, i)$, $v = (1-i, 2i)$ e $w = (2, 3+i)$.*

a) *Calcular $(3+i)u - iv - (2-i)w$.*

b) *Existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $v = zu$?*

**Exercício 16.** *Considere $u = (1,1)$ e $v = w = (3,-2)$, vetores de $\mathbb{R}^2$. Resolva o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & u \\ 2x & - & y & + & z & = & v \\ x & + & y & - & 2z & = & w \end{cases}$$

*nas incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.*

## ⧫ Subespaço Vetorial

**Exercício 17.** *Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços. Nos casos em que o subconjunto não é subespaço, quais propriedades não se verificam?*

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 0\}$

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \in \mathbb{Z}\}$

c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$

d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 3z = 0\}$

e) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ ax + by + cz = 0\}$

f) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 1\}$

g) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y + z = 0\}$

h) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \leq y \leq z\}$

i) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y \in \mathbb{Q}\}$

**Exercício 18.** *Mostre que os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^4$ *são subespaços:*

*a)* $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y = 0 \text{ e } z - w = 0\}$

*b)* $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x + y - w = 0 \text{ e } z = 0\}$

**Exercício 19.** *Verifique quais dos seguintes subconjuntos de* $M_2(\mathbb{R})$ *são subespaços:*

*a)* $W = \{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$

*b)* $W = \left\{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} = 0\right\}$

*c)* $W = \{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\}$

*d)* $W = \{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ a_{21} = 0\}$

**Exercício 20.** *Verifique quais dos seguintes subconjuntos de* $M_n(\mathbb{R})$ *são subespaços:*

*a)* $W = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ \operatorname{tr} A = 0\}$

*b) Todas as matrizes* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tais que o sistema linear* $AX = 0$ *tenha apenas a solução trivial.*

*c)* $W = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ AB = BA,\ B \in M_n(\mathbb{R}) \textit{ fixada}\}$

**Exercício 21.** *Verifique quais dos seguintes conjuntos a seguir são subespaços de* $P(\mathbb{R})$*.*

*a)* $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ gr(p) \geq 2\}$

*b)* $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p(0) = 2p(1)\}$

*c)* $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p(x) > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$

*d)* $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p(x) + p'(x) = 0\}$

**Exercício 22.** *Verifique, em cada caso, se o conjunto* $W$ *é subespaços de* $C([0, 1], \mathbb{R})$*.*

*a)* $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ f(0) = 0\}$

*b)* $W = \left\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 0\right\}$

*c)* $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ f(0) = f(1)\}$

*d)* $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ f(x) = 0 \textit{ em todos os pontos de } [0, 1] \textit{ menos num número finito deles}\}$

**Exercício 23.** *Mostre que:*

*a)* $W = \{f \in F(\mathbb{R}) |\ f \textit{ é diferenciável e } f'(x) + 2f(x) = 0\}$ *é um subespaços de* $F(\mathbb{R})$*;*

*b)* $W = \left\{f \in C([a, b], \mathbb{R}) |\ \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0\right\}$ *é um subespaços de* $C([a, b], \mathbb{R})$*.*

**Exercício 24.** *Determine, em cada caso, se o espaço-solução do sistema linear homogêneo* $AX = 0$ *é um plano pela origem, uma reta pela origem ou apenas a origem. Se for um plano, obtenha uma equação para este plano; se for uma reta, obtenha as equações paramétricas dessa reta.*

*a)* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

**Exercício 25.** *Uma reta $L$ pela origem em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada por equações paramétricas da forma:* $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$*, $t \in \mathbb{R}$. Use estas equações para mostrar que $L$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.*

## ⧫ Operações com Subespaços

**Exercício 26.** *Sejam $W_1$, $W_2$ e $W_3$ subespaços de $\mathbb{R}^3$ dados por:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = z\Big\} \\ W_2 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\Big\} \\ W_3 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0\Big\} \end{aligned}$$

*Verifique que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 + W_3 = \mathbb{R}^3$ e $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?*

**Exercício 27.** *Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$, $W_s = \{A = [a_{1j}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A^t = A\}$ o subconjunto das matrizes simétricas e $W_a = \{A = [a_{1j}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A^t = -A\}$ o subconjunto das matrizes antissimétricas.*

*a) Mostre que $W_s$ e $W_a$ são subespaços de $V$.*

*b) Mostre que $V = W_s \oplus W_a$.*

**Exercício 28.** *Seja $V = F(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sejam ainda $W_p = \{f \in F(\mathbb{R}) |\ f(-x) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$ o subconjunto das funções pares e $W_i = \{f \in F(\mathbb{R}) |\ f(-x) = -f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$ o subconjunto das funções ímpares.*

*a) Mostre que $W_p$ e $W_i$ são subespaços de $V$.*

*b) Mostre que $W_p + W_i = V$.*

*c) Mostre que $W_p \cap W_i = \{0\}$.*

*d) Conclua que $V = W_p \oplus W_i$.*

**Exercício 29.** *Sejam $W_1$ e $W_2$ subespaços do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V$. Mostre que:*

*a)* $W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 + W_2 = W_2$

*b)* $W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 = W_1$

*c)* $W_1 + W_2 = W_1 \quad \Rightarrow \quad W_2 \subset W_1$

*d)* $W_1 \cap W_2 = W_1 \quad \Rightarrow \quad W_1 \subset W_2$

**Exercício 30.** *Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dado um subconjunto $S \neq \emptyset$ de $V$, mostre que a intersecção de todos os subespaços vetoriais de $V$ que contêm $S$ também é um subespaço vetorial de $V$, sendo este o menor subespaço de $V$ que contém $S$.*

**Exercício 31.** *Sejam $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W_1$,$W_2$ e $W_3$ subespaços de $V$. Mostre que*

$$(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subset W_1 \cap (W_2 + W_3)$$

*Dê um exemplo para o qual o primeiro dessa relação é diferente do segundo e um exemplo onde ocorre a igualdade.*

**Exercício 32.** *Sejam $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W_1$,$W_2$ e $W_3$ subespaços de $V$. Verifique com um exemplo que se*

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 \quad e \quad W_1 + W_2 = W_1 + W_3$$

*não se tem necessariamente $W_2 = W_3$.*

**Exercício 33.** *Sejam $W_1$ e $W_2$ subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V$. Mostre que:*

*a)* $W_1 \cup W_2$ *é subespaço se, e somente se,* $W_1 \subseteq W_2$ *ou* $W_2 \subseteq W_1$;

*b)* $W_1 + W_2 = W_1 \cup W_2$ *se, e somente se,* $W_1 = W_2$.

**Exercício 34.** *Sejam $W_1$, $W_1'$, $W_2$ e $W_2'$ subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V$ tais que $V = W_1 \oplus W_2 = W_1' \oplus W_2'$. Se $W_1 \subset W_1'$ e $W_2 \subset W_2'$, mostre que $W_1 = W_1'$ e $W_2 \subset W_2'$.*

## ⧫ Combinação Linear

**Exercício 35.** *Expresse os vetores de $\mathbb{R}^3$ a seguir como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 3)$ e $v_3 = (3, 2, 5)$.*

*a)* $(6, 11, 6)$ *b)* $(0, 0, 0)$ *c)* $(7, 8, 9)$

**Exercício 36.** *Sejam $v_1 = (2, -3, 2), v_2 = (-1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$.*

*a) Escrever o vetor $v = (7, -11, 2)$ como combinação linear de $v_1$ e $v_2$;*

*b) Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(-8, 14, \alpha)$ é combinação linear de $v_1$ e $v_2$;*

*c) Determinar uma condição entre $x$, $y$ e $z$ para que o vetor $(x, y, z)$ seja uma combinação linear de $v_1$ e $v_2$.*

**Exercício 37.** *Considere no espaço $P_2(\mathbb{R})$ os vetores $p_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $p_2(x) = x + 2$ e $p_3(x) = 2x^2 - x$.*

*a) Escrever o vetor $p(x) = 5x^2 - 5x + 7$ como combinação linear de $p_1$, $p_2$ e $p_3$;*

*b) Escrever o vetor $p(x) = 5x^2 - 5x + 7$ como combinação linear de $p_1$ e $p_2$;*

*c) Determinar uma condição entre $a$, $b$ e $c$ de modo que o vetor $ax^2 + bx + c$ seja uma combinação linear de $p_2$ e $p_3$;*

*d) É possível escrever $p_1$ combinação linear de $p_2$ e $p_3$?*

**Exercício 38.** *Quais dos seguintes vetores de $M_2(\mathbb{R})$ são combinações lineares de*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

## ⧫ Subespaço Gerado

**Exercício 39.** *Considere o subespaço do* $\mathbb{R}^4$

$$W = [(1,1,-2,4),(1,1,-1,2),(1,4,-4,8)]$$

a) *O vetor* $\left(\frac{2}{3},1,-1,2\right)$ *pertence a* $W$*?*

b) *O vetor* $(0,0,1,1)$ *pertence a* $W$*?*

**Exercício 40.** *Em cada caso, determine se os seguintes vetores geram o* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $v_1 = (2,2,2)$, $v_2 = (0,0,3)$ *e* $v_3 = (0,1,1)$

b) $v_1 = (2,-1,3)$, $v_2 = (4,1,2)$ *e* $v_3 = (8,-1,8)$

c) $v_1 = (3,1,4)$, $v_2 = (2,-3,5)$, $v_3 = (5,-2,9)$ *e* $v_4 = (1,4,-1)$

d) $v_1 = (1,2,6)$, $v_2 = (3,4,1)$, $v_3 = (4,3,1)$ *e* $v_4 = (3,3,1)$

**Exercício 41.** *Verifique se as matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*geram o espaço vetorial* $M_2(\mathbb{R})$*.*

**Exercício 42.** *Seja* $W$ *o subespaço do* $M_2(\mathbb{R})$ *definido por* $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$*?* b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$*?*

**Exercício 43.** *Mostre que os polinômios* $1-x^3$, $(1-x)^2$, $1-x$ *e* $1$ *geram o espaço* $P_3(\mathbb{R})$*.*

**Exercício 44.** *Determinar um conjunto gerador para cada um dos seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y=0\}$

b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0 \text{ e } x-2y=0\}$

c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$

d) $W_1 \cap W_2$

e) $W_2 + W_3$

**Exercício 45.** *Determine uma equação para o plano gerado pelos vetores* $u = (-1,1,1)$ *e* $v = (3,4,4)$*.*

**Exercício 46.** *Determine as equações paramétricas para a reta gerada pelo vetor* $v = (3,-2,5)$*.*

**Exercício 47.** *Mostre que os dois conjuntos geram o mesmo subespaço de* $\mathbb{R}^3$*.*

*a)* $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ *e* $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$

*b)* $\{(1,6,4),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$ *e* $\{(1,-2,-5),(0,8,9)\}$

**Exercício 48.** *Sejam* $u$ *e* $v$ *dois vetores não nulos do* $\mathbb{R}^2$*. Se não existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $u = \alpha v$*, mostre que* $\mathbb{R}^2 = [u] \oplus [v]$*.*

**Exercício 49.** *Mostre que se* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* $S_1$ *e* $S_2$ *subconjuntos de* $V$ *tais que* $S_1 \subset S_2$*, então* $[S_1] \subset [S_2]$*.*

**Exercício 50.** *Mostre que se* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* $S_1$ *e* $S_2$ *subconjuntos de* $V$*, então* $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$*.*

**Exercício 51.** *Sejam* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *e* $S_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ *subconjuntos de* $V$*. Sejam* $W_1 = [S_1]$ *e* $W_2 = [S_2]$*, mostre que* $W_1 = W_2$ *se, e somente se, cada vetor em* $S_1$ *é uma combinação linear dos vetores de* $S_2$ *e cada vetor em* $S_2$ *é uma combinação linear dos vetores de* $S_1$*.*

**Exercício 52.** *Mostre que os conjuntos* $\{\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{sen} x \cdot \cos x\}$ *e* $\{1, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x\}$ *geram o mesmo subespaço do* $C(\mathbb{R})$*.*

**Exercício 53.** *Determine, em cada caso, um sistema de equações lineares homogêneas para o qual a solução seja exatamente o subespaço gerado pelos vetores* $u, v \in V$*.*

*a)* $V = \mathbb{R}^3$*,* $u = (-1,0,1)$ *e* $v = (3,4,-2)$*;*

*b)* $V = \mathbb{R}^4$*,* $u = (1,0,1,2)$ *e* $v = (0,0,1,0)$*.*

**Exercício 54.** *Mostre que o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) |\ x_i \in \mathbb{R}\}$ *não é finitamente gerado.*

## ⧫ (In)dependência Linear

**Exercício 55.** *Verifique se os subconjuntos do* $\mathbb{R}^3$ *são linearmente independentes.*

*a)* $\{(4,-1,2),(-4,10,2)\}$

*b)* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,3,5)\}$

*c)* $\{(3,2,-1),(1,5,-3),(5,-1,1)\}$

*b)* $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

**Exercício 56.** *Verifique se os subconjuntos do* $\mathbb{R}^4$ *são linearmente independentes.*

*a)* $\{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$

*b)* $\{(3,0,-3,6),(0,2,3,1),(0,-2,-2,0),(-2,1,2,1)\}$

**Exercício 57.** *Verifique se os subconjuntos do* $P_2(\mathbb{R})$ *são linearmente dependentes.*

*a)* $\{2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2\}$

*b)* $\{6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$

*c)* $\{1+3x+3x^2, x+4x^2, 5+6x+3x^2, 7+2x-x^2\}$

**Exercício 58.** *Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Determine, em cada caso, se os vetores então num plano.*

*a)* $v_1 = (2,-2,0)$, $v_2 = (6,1,4)$ *e* $v_3 = (2,0,-4)\}$

*b)* $v_1 = (-6,7,2)$, $v_2 = (3,2,4)$ *e* $v_3 = (4,-1,2)\}$

**Exercício 59.** *Determine, em cada caso, se os vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ então numa mesma reta.*

*a)* $v_1 = (-1,2,3)$, $v_2 = (2,-4,-6)$ *e* $v_3 = (-3,6,0)\}$

*b)* $v_1 = (2,-1,4)$, $v_2 = (4,2,3)$ *e* $v_3 = (2,7,-6)\}$

*c)* $v_1 = (4,6,8)$, $v_2 = (2,3,4)$ *e* $v_3 = (-2,-3,-4)\}$

**Exercício 60.** *Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, conforme as figuras a seguir.*

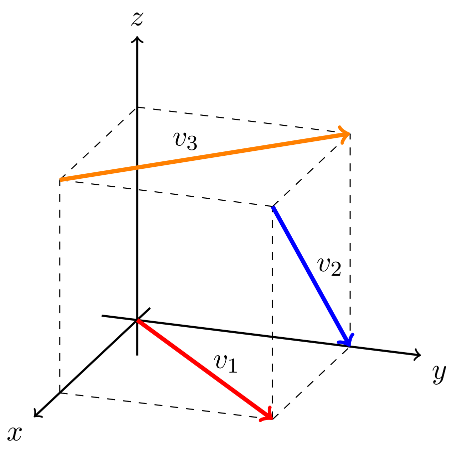


Figura 2.15

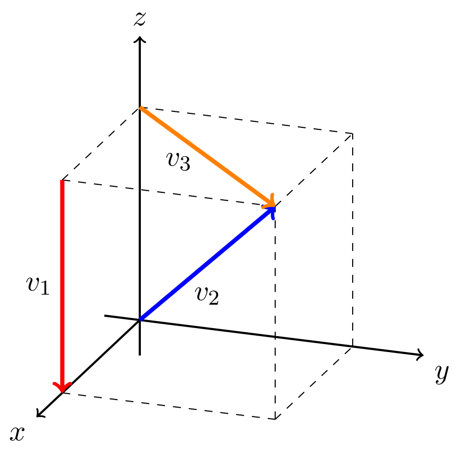


Figura 2.16

*Na Figura 2.15, os vetores são linearmente independentes? E na Figura 2.16? Justifique.*

**Exercício 61.** *Verifique se os subconjuntos do $\mathbb{C}^3$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.*

*a)* $\{(i,1,0), (1+i,2,0), (3,1,0)\}$

*b)* $\{(i,1,0), (0,1,i), (0,i,i)\}$

**Exercício 62.** *Determine o valor de $k$ para que os vetores*

$$v_1 = \left(k, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, k, -\frac{1}{2}\right) \quad e \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k\right)$$

*forme um conjunto linearmente dependentes em $\mathbb{R}^3$.*

**Exercício 63.** *Mostre que o conjunto $\{1, e^x, xe^x\}$ de vetores do $C([0,1],\mathbb{R})$ é linearmente independentes.*

**Exercício 64.** *Sejam $u = (a,b), v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que:*

*a)* *Se* $ad - bc = 0$*, então* $u$ *e* $v$ *são linearmente dependentes.*

*b)* *Se* $ad - bc \neq 0$*, então* $u$ *e* $v$ *são linearmente independentes.*

**Exercício 65.** *Mostre que o conjunto*

$$\left\{1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^{n-1}\right\}$$

*de vetores do* $P_{n-1}(\mathbb{R})$ *é linearmente independentes, onde* $\alpha$ *é um número real arbitrário.*

**Exercício 66.** *Seja* $\{u, v, w\}$ *um conjunto linearmente independente de um espaço vetorial* $V$*. Mostre que o conjunto*

$$\{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w\}$$

*é linearmente dependente.*

**Exercício 67.** *Sejam* $u$*,* $v$ *e* $w$ *vetores de um espaço vetorial* $V$*, mostre que o conjunto* $\{u - v, v - w, w - u\}$ *é linearmente dependente.*

**Exercício 68.** *Utilize identidades apropriadas, onde necessário, para determinar quais dos seguintes conjuntos de vetores em* $F(\mathbb{R})$ *são linearmente dependentes.*

*a)* $\{6, 3\operatorname{sen}^2 x, 2\cos^2 x\}$

*b)* $\{x, \cos x\}$

*c)* $\{1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x\}$

*d)* $\{\cos 2x, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$

*e)* $\{(3-x)^2, x^2 - 6x, 5\}$

*f)* $\{0, \cos^3 \pi x, \operatorname{sen}^5 3\pi x\}$

**Exercício 69.** *Mostre que* $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ *é linearmente independente no espaço* $C^\infty(\mathbb{R})$*.*

**Exercício 70.** *Sejam* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *números reais 2 a 2 distintos. Mostre que o conjunto de funções* $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$ *é linearmente independente.*

**Exercício 71.** *Mostre que o conjunto de funções* $\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\operatorname{sen} bx\}$ *é linearmente independente, onde* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0$*.*

**Exercício 72.** *Mostre que os seguintes conjuntos de vetores em* $F(\mathbb{R})$ *são linearmente independentes.*

*a)* $\{1, x, e^x\}$

*b)* $\{\operatorname{sen} x, \cos x, x\operatorname{sen} x\}$

*c)* $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$

*d)* $\{1, x, x^2\}$

**Exercício 73.** *Seja* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Mostre que se* $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ *é linearmente independente, então* $[u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s] = \{0\}$*.*

**Exercício 74.** *Seja* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Mostre que se* $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n\} \subset V$ *é linearmente independente, então* $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_n\}$ *também é linearmente independente, para todo escalar* $\alpha$*.*

### ♦ Base

**Exercício 75.** *Verifique quais dos conjuntos a seguir são bases de* $\mathbb{R}^2$*.*

*a)* $\{(2,1), (3,0)\}$

*b)* $\{(4,1), (-7,-8)\}$

*c)* $\{(0,0), (1,3)\}$

*d)* $\{(3,9), (-4,-12)\}$

**Exercício 76.** *Verifique quais dos conjuntos a seguir são bases de* $\mathbb{R}^3$.

*a)* $\{(1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\}$

*b)* $\{(1,6,4),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$

*c)* $\{(2,-3,1),(4,1,4),(0,-7,1)\}$

*d)* $\{(3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)\}$

**Exercício 77.** *Mostre que os matrizes formam uma base de* $M_2(\mathbb{R})$.

*a)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

*b)* $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

**Exercício 78.** *Verifique quais dos conjuntos a seguir são bases de* $P_2(\mathbb{R})$.

*a)* $\{(1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$

*b)* $\{-4+x+3x^2, 6+5x+2x^2, 8+4x+x^2\}$

*c)* $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$

*d)* $\{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5+2x-x^2\}$

**Exercício 79.** *Mostre que os polinômios* $1$, $1+x$, $1-x^2$ *e* $1-x-x^2-x^3$ *formam uma base de* $P_3(\mathbb{R})$.

**Exercício 80.** *Justifique por que os seguintes conjuntos não são bases dos espaços vetoriais indicados.*

*a)* $\{(1,2),(0,3),(2,7)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*;*

*b)* $\{(-1,3,2),(6,1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*;*

*c)* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \right\}$ *de* $M_2(\mathbb{R})$*;*

*d)* $\{1+x+x^2, x-1\}$ *de* $P_2(\mathbb{R})$.

**Exercício 81.** *Para que valores de* $k \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $B = \{(k,1,0),(1,k,1),(0,1,k)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*?*

**Exercício 82.** *Exiba uma base para cada um dos espaços vetoriais reais.*

*a)* $V = \{(a,2a,3a) |\ a \in \mathbb{R}\}$

*b)* $V = \{(a,a,\ldots,a) \in \mathbb{R}^n |\ a \in \mathbb{R}\}$

*c)* $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$

*d)* $V = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ a_{ij} = 0,\ \text{se } i \neq j\}$

*e)* $V = \left\{ A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ a_{ij} = \begin{cases} k, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases} \right\}$

**Exercício 83.** *Determine uma base dos seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$.

*a)* *O plano* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 3x - 2y + 5z = 0\}$;

*b)* *O plano* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y = 0\}$.

**Exercício 84.** *Determine uma base dos seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^4$.

*a)* $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x + 2y + 2z = 0 \text{ e } 2z - w = 0\}$

*b)* $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y = y \text{ e } x - 3y + w = 0\}$

**Exercício 85.** *Determine uma base para o subespaço* $W$ *de* $P_2(\mathbb{R})$ *gerado pelos vetores:*

*a)* $-1 + x - 2x^2$, $3 + 3x + 6x^2$ *e* $2x$;

*b)* $1 + x$, $x^2$ *e* $-2 + 2x$;

*c)* $1 + x - 3x^2$, $2 + 2x - 6x^2$ *e* $3 + 3x - 9x^2$.

**Exercício 86.** *Considere o subespaço* $W = [(1, 0, i), (1, 1 + i, 1 - i), (1, -1 - i, -1 + 3i)]$ *de* $\mathbb{C}^3$. *Determine uma base de* $W$.

**Exercício 87.** *Seja* $V = [\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x]$. *Mostre que* $\{\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x\}$ *não é uma base e encontre uma base de* $V$.

**Exercício 88.** *Considere o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $U \times V = \{(u, v) |\ u \in U \text{ e } v \in V\}$, *onde as dimensões de* $U$ *e* $V$ *são* $m$ *e* $n$, *respectivamente. Admitindo que* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *são bases de* $U$ *e* $V$, *respectivamente, mostre que*

$$\{(u_i, 0); 1 \leq i \leq m\} \cup \{(0, v_j); 1 \leq j \leq n\}$$

*é uma base de* $U \times V$.

**Exercício 89.** *Suponha que* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de um espaço vetorial. Mostre que* $\{u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \cdots + u_n\}$ *é também uma base desse espaço.*

**Exercício 90.** *Sejam* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *e* $B$ *uma base de* $V$. *Mostre que:*

*a)* $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *é linearmente independente em* $V$ *se, e somente se,* $\{[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_r]_B\}$ *é linearmente independente em* $\mathbb{R}^n$.

*b)* $[v_1, v_2, \ldots, v_r] = V$ *se, e somente se,* $[[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_r]_B] = \mathbb{R}^n$.

**Exercício 91.** *Mostre que os polinômios*

$$1\ ,\ x\ ,\ x(x-1)\ ,\ x(x-1)(x-2)\ ,\ \ldots\ ,\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

*formam uma base de* $P_{n+1}(\mathbb{R})$.

## ♦ Dimensão de Um Espaço Vetorial

**Exercício 92.** *Determine a dimensão de* $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ w = x + y \text{ e } z = x - y\}$, *subespaço de* $\mathbb{R}^4$.

**Exercício 93.** *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$ *e o subespaço* $W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, *onde*

$$v_1 = (1, -1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1, 1), v_3 = (-2, 2, 1, 1), v_4 = (1, 0, 0, 0)$$

*a)* $v = (2, -3, 2, 2) \in W$*?*

*b) Exiba uma base para* $W$*? Qual a sua dimensão?*

*c)* $W = \mathbb{R}^4$*? Justifique.*

**Exercício 94.** *Considere* $W = [(1, 1, 0), (0, -1, 1), (1, 1, 1)]$, *subespaço de* $\mathbb{R}^3$. $W = \mathbb{R}^3$*? Justifique.*

**Exercício 95.** *Determine a dimensão do subespaço* $W_{ts} = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R}) |\ a_{ij} = 0,\ \text{se } i > j\}$ *das matrizes triangulares superiores do* $M_3(\mathbb{R})$.

**Exercício 96.** *Determine uma base e a dimensão do subespaço* $W_a = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R}) |\ A^t = -A\}$ *das matrizes antissimétricas do* $M_3(\mathbb{R})$.

**Exercício 97.** *Sejam* $V = M_2(\mathbb{R})$ *e* $W$ *o subespaço gerado por*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

*Determine a dimensão de* $W$.

**Exercício 98.** *Seja* $W$ *o subespaço de* $M_2(\mathbb{R})$ *dado por* $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) |\ a = d \text{ e } c = a + b \right\}$.

*a) Qual a dimensão de* $W$*?*

*b) O conjunto* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ *é uma base de* $W$*? Justifique.*

**Exercício 99.** *Determine a dimensão do subespaço*

$$W = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R}) |\ a_0 = 0\right\}$$

*de* $P_3(\mathbb{R})$.

**Exercício 100.** *Determine a dimensão do espaço vetorial*

$$W = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in P_4(\mathbb{R}) |\ p(1) = 0\right\}$$

**Exercício 101.** *Determine as dimensões dos seguintes subespaços de* $M_n(\mathbb{R})$:

*a)* $W_s = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A^t = A\}$;

*b)* $W_a = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A^t = -A\}$;

*c)* $W = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A = 2A^t\}$;

*d)* $W = \left\{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\right\}$.

**Exercício 102.** *Determinar uma base e a dimensão do espaço-solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:*

$$a)\ \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x - \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x + 2y - z + 3w = 0 \\ 2x - y + z - w = 0 \\ 4x + 3y - z + 5w = 0 \end{cases}$$

### ♦ Coordenadas

**Exercício 103.** *Determine as coordenadas do vetor $v \in \mathbb{R}^2$ em relação à base $B$ do $\mathbb{R}^2$.*

*a)* $v = (3, -7)$ *e $B$ a base canônica;*

*b)* $v = (1, 1)$ *e* $B = \{(2, -4), (3, 8)\}$;

*c)* $v = (x, y)$ *e* $B = \{(1, 1), (0, 2)\}$.

**Exercício 104.** *Determine o vetor-coordenada do vetor $v = (4, -5, 3)$ em relação às seguintes bases:*

*a) Canônica;*

*b)* $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;

*c)* $C = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

**Exercício 105.** *Determine as coordenadas de* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *em relação à base*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

*do* $M_2(\mathbb{R})$.

**Exercício 106.** *Determine a matriz-coluna do vetor $p \in P_2(\mathbb{R})$ em relação à base $B$ do $P_2(\mathbb{R})$.*

*a)* $p(x) = 4 - 3x + x^2$ *e $B$ a base canônica;*

*b)* $p(x) = 2 - x + x^2$ *e* $B = \{1, 1 + x, x + x^2\}$.

**Exercício 107.** *Determine as coordenadas do vetor $x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ em relação à base $B = \{1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3\}$.*

**Exercício 108.** *Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{C}$ e a base $B = \{1 - i, 1 + i\}$. Determine as coordenadas do vetor $v = 1 - 2i \in \mathbb{C}$ em relação à base $B$.*

**Exercício 109.** *Seja $\mathbb{C}^3$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Determine as coordenadas do vetor $v = (1, 1, i) \in \mathbb{C}^3$ em relação à base $B = \{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, i, 1 + i)\}$.*

**Exercício 110.** *Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $B$ uma base de $V$. Mostre que:*

*a)* $[u+v]_B = [u]_B + [v]_B$, $\forall\, u, v \in V$;

*b)* $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\forall\, v \in V$.

**Exercício 111.** *Seja* $B = \{(1,1,0), (0,1,-1), (2,0,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

*a)* *$B$ é linearmente independente ou dependente? Justifique.*

*b)* *Obtenha $B' \subset B$ tal que $B'$ é linearmente independente e que $[B'] = [B]$.*

*c)* *Qual a dimensão de $[B']$? Justifique.*

**Exercício 112.**

*a)* *Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $v_1 = (-1,2,-3)$ e $v_2 = (3,1,-1)$;*

*b)* *Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo os vetores $v_1 = (1,-3,1,5)$ e $v_2 = (4,-12,-3,2)$.*

## ⧫ Dimensão da Soma de Dois Subespaços

**Exercício 113.** *Sejam $W_1$ e $W_2$ os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\; y+z+w=0\Big\} \quad e \\ W_2 &= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\; x+y=0 \ e \ z=2w\Big\} \end{aligned}$$

*Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: $W_1$, $W_2$, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.*

**Exercício 114.** *Consideremos os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\; x=0\Big\} \quad , \\ W_2 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\; y-2z=0\Big\} \quad e \\ W_3 &= [(1,1,0),(0,0,2)] \end{aligned}$$

*Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: $W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_1 \cap W_2$, $W_2 + W_3$ e $W_1 + W_2 + W_3$.*

**Exercício 115.** *Sejam*

$$\begin{aligned} W_1 &= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\; x+y=0 \ e \ z-w=0\Big\} \quad e \\ W_2 &= \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\; x-y-z+w=0\Big\} \end{aligned}$$

*subespaços de $\mathbb{R}^4$.*

*a)* *Determine $W_1 \cap W_2$.*

*b)* *Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.*

*c)* *Determine $W_1 + W_2$.*

*d)* *$W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.*

**Exercício 116.** *Sejam*

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) |\ a = d \ e \ b = c \right\} \quad e \\ W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) |\ a = c \ e \ b = d \right\} \end{aligned}$$

*subespaços de* $M_2(\mathbb{R})$.

*a) Determine* $W_1 \cap W_2$ *e exiba uma base.*

*b) Determine* $W_1 + W_2$. *É soma direta?* $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$*?*

**Exercício 117.** *Sejam* $W_1$ *e* $W_2$ *subespaços de um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $V$ *de dimensão finita tais que* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. *Mostre que*

$$dim_{\mathbb{K}}\ (W_1 + W_2) = dim_{\mathbb{K}}\ W_1 + dim_{\mathbb{K}}\ W_2$$

**Exercício 118.** *Sejam* $V$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *e* $W_1$ *e* $W_2$ *subespaços de* $V$. *Supondo que* $\dim_{\mathbb{K}} W_1 > \dfrac{n}{2}$ *e que* $\dim_{\mathbb{K}} W_2 > \dfrac{n}{2}$, *mostre que* $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

## Soluções do Capítulo 2

**1** Não.

**2** No primeiro não se verifica o axioma $3a$. No segundo não se verificam os axiomas $1a$, $1c$, $1d$ e $3a$.

**3** Não.

**4** Não.

**5** Sim.

**6** Não.

**7** a) Sim

b) Sim

c) Sim

d) Sim

e) Não

f) Não

g) Sim

**13** a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

c) Não.

**14** a) $2x^3 + 3x^2 - x - 13$

b) Não.

c) Não.

**15** a) $(-3 + 5i, -6 + 4i)$

b) Não.

**16** $x = \left(\dfrac{16}{9}, -1\right)$, $y = \left(-\dfrac{1}{9}, 1\right)$ e $z = \left(-\dfrac{2}{3}, 1\right)$

**17** a) Sim.

b) Não, 2.

c) Não, 2.

d) Sim.

e) Sim.

f) Não, 1 e 2.

g) Não, 1 e 2.

h) Não, 2.

i) Não, 2.

**19** a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

**20** a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

**21** a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

**22** a) Sim.

b) Sim.

c) Sim.

d) Sim.

**24** a) Reta pela origem.

$$L : \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Origem.

c) Plano pela origem.

$$\alpha : \; x - 3y + z = 0$$

**26** $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ e $\mathbb{R}^3 = W_2 \oplus W_3$.

**27** Sugestão: Tome $A \in M_n(\mathbb{R})$ como $A = B + C$, onde $B = \dfrac{A + A^t}{2}$ e $C = \dfrac{A - A^t}{2}$.

**28** Sugestão: Tome $f \in F(\mathbb{R})$ como $f(x) = g(x) + h(x)$, onde $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

**31** $W_1 = \{(x, x)|\ x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ e $W_3 = \{(x, 0)|\ x \in \mathbb{R}\}$.

**32** $W_1 = \{(x, x)|\ x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ e $W_3 = \{(x, 0)|\ x \in \mathbb{R}\}$.

**35** a) $(6, 11, 6) = 4v_1 - 5v_2 + v_3$.

b) $(0, 0, 0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$.

c) $(7, 8, 9) = 0v_1 - 2v_2 + 3v_3$.

**36** a) $v = 3v_1 - v_2$.

b) $\alpha = 12$.

c) $16x + 10y - z = 0$.

**37** a) $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$.

b) Impossível.

c) $a + 2b - c = 0$.

d) Não.

**38** a) Sim.

b) Sim.

c) Não.

**39** a) Sim.

b) Não.

**40** a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

**41** Sim.

**42** a) Sim.

b) Não.

**44** a) $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

b) $\{(2, 1, -2)\}$.

c) $\{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$.

d) $\{(2, 1, -2)\}$.

e) $\{(2, 1, -2), (3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$.

**45** $-7y - 7z = 0$.

**46** $L : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

**53** a) $\begin{cases} -4x + y - 4z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & & - & w & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \end{cases}$

**54** Sugestão: Ver exemplo apresentado na Seção 2.9.

**55** a) Sim.

b) Não.

c) Não.

d) Sim.

**56** a) Sim.

b) Sim.

**57** a) Não.

b) Não.

c) Sim.

**58** a) Não.

b) Sim.

**59** a) Não.

b) Não.

c) Sim.

**60** Sim, pois não são coplanares quando dispostos com seus pontos iniciais na origem. Não, pois são coplanares quando dispostos com seus pontos iniciais na origem.

**61** a) Não.

b) Sim.

**62** $k = -\dfrac{1}{2}$ ou $k = 1$.

**65** Sugestão: Considere o desenvolvimento em série de Taylor de um polinômio em uma vizinhança do ponto $x = \alpha$.

**68** a) LD.

b) LI.

c) LI.

d) LD.

e) LD.

f) LD.

**69** Sugestão: Dada uma combinação linear nula, derive-a, depois divida por $e^x$. Repita o processo.

**70** Sugestão: Empregue a indução matemática.

**75** a) Sim.

b) Sim.

c) Não.

d) Não.

**76** a) Sim.

b) Não.

c) Não.

d) Sim.

**78** a) Não.

b) Sim.

c) Sim.

d) Não.

**80** a) É LD.

b) Não gera.

c) É LD.

d) Não gera.

**81** $k \neq -\sqrt{2}$, $k \neq 0$ e $k \neq \sqrt{2}$.

**82** a) $\{1, 2, 3\}$.

b) $\{1, 1, \ldots, 1\}$.

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \right.$

$\left. \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right\}.$

e) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right\}.$

**83** a) $\{(5,0,-3),(0,5,2)\}$.

b) $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$.

**84** a) $\{(-2,1,0,0),(-2,0,1,2)\}$.

b) $\{(2,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.

**85** a) $\{-1+x-2x^2, 1+x+2x^2\}$.

b) $\{1,x,x^2\}$.

c) $\{1+x-3x^2\}$.

**86** $\{(1,0,i),(1,1+i,1-i)\}$.

**87** Quaisquer dois dos vetores.

**91** Sugestão: Empregue a indução matemática.

**92** $\dim W = 2$.

**93** a) Sim.

b) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ e $\dim W = 3$.

c) Não, pois $\dim W < \dim \mathbb{R}^4$.

**94** Sim, pois $\dim W = \dim \mathbb{R}^3$.

**95** $\dim\ W_{ts} = 6$.

**96** $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$

$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim W_a = 3$.

**97** $\dim W = 2$.

**98** a) $\dim W = 2$.

b) Não, pois $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W$.

**99** $\dim W = 3$.

**100** $\dim W = 4$.

**101** a) $\dim W_s = \dfrac{n^2+n}{2}$.

b) $\dim W_a = \dfrac{n^2-n}{2}$.

c) $\dim W = 0$.

d) $\dim W = n-1$.

**102** a) $\emptyset$, $\dim W = 0$.

b) $\{(1,0,-1),(0,1,3)\}$, $\dim W = 2$.

c) $\{(4,-5,1)\}$, $\dim W = 1$.

d) $\{(-1,3,5,0),(-1,-7,0,5)\}$, $\dim W = 2$.

**103** a) $3$ e $-7$.

b) $\dfrac{5}{28}$ e $\dfrac{3}{14}$.

c) $x$ e $\dfrac{-x+y}{2}$.

**104** a) $[v]_{Can} = (4,-5,3)$.

b) $[v]_B = (3,-5,2)$.

c) $[v]_C = (\frac{21}{11}, -\frac{40}{11}, \frac{23}{11})$.

**105** $-1$, $1$, $-1$ e $3$.

**106** a) $[p]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $[p]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**107** $-3$, 1, 0 e 1.

**108** $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

**109** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

**111** a) LD, pois $(2,0,2) = 2 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (0,1,-1)$.

b) $B' = \{(1,1,0),(0,1-1)\}$.

c) $\dim[B'] = 2$, pois $B'$ é uma base.

**112** a) $\{(-1,2,-3),(3,1,-1),(0,0,1)\}$.

b) $\{(1,-3,1,5),(4,-12,-3,2),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.

**113** $B_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ e $\dim W_1 = 3$,
$B_2 = \{(1,-1,0,0),(0,0,2,1)\}$ e $\dim W_2 = 2$,
$C = \{(3,-3,2,1)\}$ e $\dim W_1 \cap W_2 = 1$,
Base canônica do $\mathbb{R}^4$ e $\dim W_1 + W_2 = 4$.

**114** $B_1 = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$ e dim $W_1 = 2$,
$B_2 = \{(1,0,0),(0,2,1)\}$ e dim $W_2 = 2$,
$B_3 = \{(1,1,0),(0,0,2)\}$ e dim $W_3 = 2$,
$C = \{(0,2,1)\}$ e dim $W_1 \cap W_2 = 1$,
Base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\dim W_2 + W_3 = 3$,
Base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\dim W_1 + W_2 + W_3 = 3$.

**115** a) $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \ z = w\}$.

b) $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

c) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

d) Não, pois $\dim W_1 \cap W_2 \neq 0$.

**116** a) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} | \ a \in \mathbb{R} \right\}$ e $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) $W_1 + W_2 =$
$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | \ a + b - c - d = 0 \right\}$.
Não, pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.
Não, pois $\dim W_1 + W_2 < \dim M_2(\mathbb{R})$.

## Soluções do Capítulo 3

**1** a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

e) Não.

f) Sim.

**3** a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

e)

f)

**4** a) $T(x,y,z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$.

b) $u = (1, 6 - z, z)$.

c) $u = (0, -z, z)$.

**5** $T(a + bx + cx^2) = b + (a + c)x + (-b + 2c)x^2$.

**6** a) Núcleo:
$Nuc(T) = \{(0,0)\}$, $B = \emptyset$, $dim\ Nuc(T) = 0$, injetora.

Imagem:
$Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ 2x - 2y - z = 0\}$, $B = \{(1,0,2),(0,1,-2)\}$. $dim\ Im(T) = 2$, não é sobrejetora.