Resolução pelo método da Matriz Inversa

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ -x + 3y + z = 1, \\ y + z = 3. \end{cases}$$

Na forma matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. Determinante de A

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + \big((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0\big) = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, A é inversível.

2. Matriz adjunta e inversa

Cofatores de A:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A adjunta é $\mathrm{adj}(A) = C^{\mathsf{T}}$:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = 1$, segue que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Solução $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{x = -4, \quad y = -3, \quad z = 6.}$$