Resolução do sistema linear

Considere o sistema linear:

$$S_5 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad (A|0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema de Rouché–Capelli

Um sistema linear só admite solução se e somente se

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b).$$

Além disso:

- Se $p > q$, o sistema é impossível;
- Se $p = q = n$, o sistema é possível e determinado;
- Se $p = q < n$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de liberdade $n - p$.

onde $p = \text{rank}(A|b)$, $q = \text{rank}(A)$ e n é o número de variáveis.

Escalonamento da matriz

Aplicando o método de Gauss, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{11} \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|0) = 3.$$

Classificação da solução

O número de variáveis é $n = 3$. Como

$$p = q = n = 3,$$

o sistema é **possível e determinado**.

Assim, a única solução é a trivial:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$