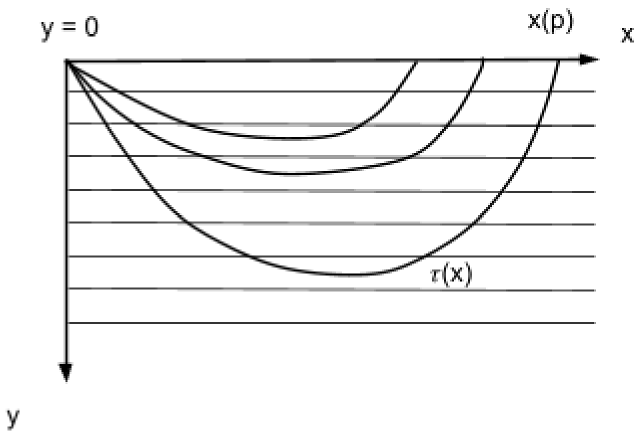
Лабораторная работа №3

Выполнили Светалкова Ульяна и Сурикова Дарья 4-ПМИ 2 подгр.

Задание

1. Выберите $n(y)$ так, чтобы $n'(y) < 0$, и постройте несколько соответствующих лучей.
2. Найдите $X(p)$ с использованием (1) для 50 или более значений p.
3. Найдите обратную функцию к $n(y)$ с использованием (2).
4. Постройте исходную $n(y)$ и восстановленную $\tilde{n}(y)$ на одном графике.

Прямая кинематическая задача



Рассмотрим поверхность $y = 0$. Мы производим физические измерения, фиксируя время возвращения луча-функцию τ – время прихода лучей из одной точки в другую. Из-за того что много источников и приемников, мы получаем большое количество таких измерений времени. Нас интересуют линии уровня функции $\tau(x)$.

Будем рассматривать простейшую ситуацию, когда источник только один, а n зависит только от y.

Пусть $n(y), y \geq 0$ — положительная гладкая функция (показатель преломления), такая что $n'(y) < 0$. Рассмотрим задачу Коши для лучей:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{n^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{q}{n^2}$$

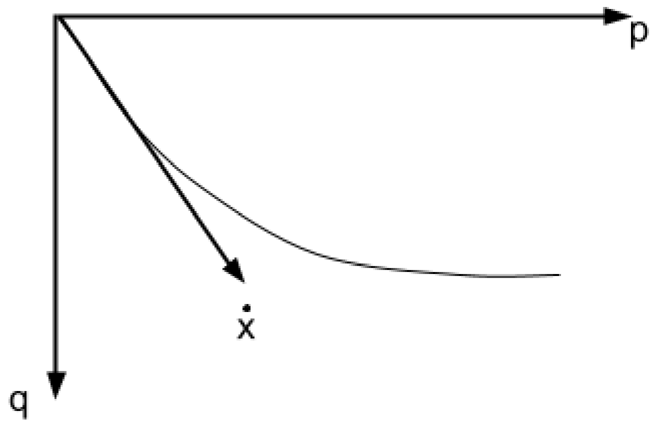
$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{n'(y)}{n}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad p(0) = p, \quad q(0) = \sqrt{n^2(0) - p^2}.$$

Условие $n'(y) < 0$ означает, что любой луч, кроме луча с $p = 0$, возвращается на линию $y = 0$. Пусть $X(p)$ — точка возврата. Необходимо доказать, что

$$X(p) = 2p \int_0^{n^{-1}(p)} \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}}, \quad p_0 \leq p \leq n(0),$$

где $n^{-1}(p)$ — обратная функция к $n(y)$.



Где p – горизонтальная компонента вектора скорости, а q - вертикальная, $\dot{p} = 0$ т.к. n не зависит от x.

Чтобы луч был не прямым, а возвращался назад потребуем чтобы n' было отрицательным, т.е. монотонно убывало (чем глубже тем плотнее).

Проверим будет ли действительно луч возвращаться. Направим ось $0y$ вниз, это значит что $q(0) > 0$, но после выпуска луча q убывает. И в вершине луча в какой-то точке t^* получается q(t^*)=0. Дальше она становится отрицательной и значит луч будет смотреть вверх и далее он вернется назад (из-за положенного условия монотонности).

Имеем - все лучи выходят из начала координат при $t = 0$, $p(0)$ – $const$ – лучевой параметр, а q находится из соотношения (из уравнения эйконала) $p^2 + q^2 = n^2$ $q(0) = \sqrt{n^2(0) - p^2}$.

При изменении лучевого параметра p мы будем получать разные лучи. И для них мы измеряем точку выхода луча на границу $X(p)$ - данные обратной задачи.

Из соотношения $p^2 + q^2 = n^2(y)$ вытекает, что это произойдет при $n\left(y(t^*)\right)$ = p. В этой точке луч будет касаться прямой y=y(t^*).

Из уравнения лучей: $\frac{dy}{dt} = \frac{q}{n^2}$, найдем вторую производную:

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q'}{n^2} - \frac{2q}{n^3}n'$

При $t = t^*$, q(t^*) = 0, тогда $\frac{d^2y}{dt^2}(t^*) = \frac{q'}{n^2(y(t^*))} < 0$, так как $\frac{dq}{dt} < 0$. Это означает, что после t = t^*, $\frac{dy}{dt}$ убывает, и таким образом - луч возвращается.

Для каждого значения $p\in[p_0, n(0)]$ соответствует своя точка возврата луча $(X(p),\ 0)$.

Найдем точку возврата луча $(X(p),\ 0)$:

Из равенств: $\frac{dx}{dt} = \frac{p}{n^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{q}{n^2}$, $p^2 + q^2 = n^2(y)$

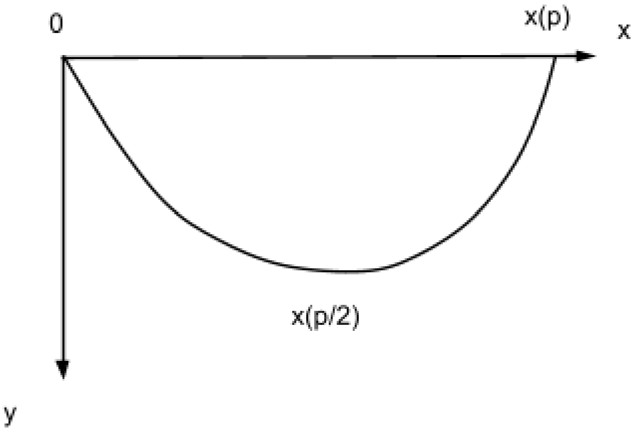
Получаем: $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q} = \frac{p}{\sqrt{n^2(y)-p^2}}$

Выражаем x(y):

$x(y) = p\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{n^2(y)-p^2}}$

Пусть $(\hat{x}(p),\ \hat{y}(p))$ – точка поворота луча. В этой точке $n\left(\hat{y}\right) = p$.
Тогда

$\hat{x}(p) = p\int\limits_{0}^{\hat{y}} \frac{dy}{\sqrt{n^2-p^2}}$



И в силу симметрии луча относительно точки

$(\hat{x}(p),\ \hat{y}(p))$, получаем $X(p) = 2p \int\limits_{0}^{n^{-1}(p)} \frac{dy}{\sqrt{n^2 - p^2}}$

Обратная задача.

Дано $X(p)$ - косвенные измерения, нужно восстановить функцию показателя преломления n.

Рассмотрим распространение лучей в среде с переменным показателем преломления . Уравнения движения лучей записываются следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{n^2},\ \frac{dy}{dt} = \frac{q}{n^2},\ \frac{dp}{dt} = 0,\ \frac{dq}{dt} = \frac{n'(y)}{n}$$

Начальные условия:

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ p(0) = p,\ q(0) = \sqrt{\frac{p^2}{n^2(0)} - p^2}$$

Положение точки возврата $X(p)$ определяются через интеграл:

$$X(p) = 2p \int\limits_{0}^{n^{-1}(p)} \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - p^2}},\ p_0 \le p \le n(0)$$

Таким образом, если известны значения $X(p)$, можно вычислить $n(y)$, используя численное интегрирование.

В данной лабораторной работе для вычисления интегралов используется метод Симпсона.

Выбирается показатель преломления: $n(y) = e^{-y}$

Шаги решения лабораторной работы:

1. Вычислить значения $X(p)$ с использованием первой формулы для 50 значений p.

2. Использовать вторую формулу для нахождения обратной функции $n^{-1}(p)$.
3. Построить графики исходной и восстановленной функций $n(y)$.

Код программы