 Robin Adler | 717845

Abgabe: Termine siehe unten bei den Aufgaben. Abgabe jeweils als PDF Upload in Moodle-Aufgabe

- Abzugeben sind die handschriftlichen Ausarbeitungen mit ausführlichen, nachvollziehbaren Lösungswegen.
- Schreiben Sie jede Aufgabe auf eine eigene Seite.
- Die Abgabe erfolgt im PDF-Format als Moodle-Abgabe. (Scan der Papier-Ausarbeitung oder PDF mit Tablet beschreiben)
- Eine Korrektur erfolgt nur bei Angabe der Matrikelnummer.
- Sofern nichts anderes gesagt wird, rechnen Sie bitte exakt oder auf 4 Nachkommastellen genau.

Nr.	**1**	**2**	**3**	$\sum$
Max.	30	30	40	100
Erg.				

ACHTUNG: Ersetzen Sie in den folgenden Aufgaben a jeweils durch die letzte Stelle Ihrer Matrikelnummer (Das ist die 6. Ziffer, ignorieren Sie die hintere Versionsnummer -01!). Anstelle von 0 bzw. 1 wählen Sie bitte 5 bzw. 6.

Aufgabe 1– Taylorpolynom Abgabe Do 20.6.24 22:00 Uhr

a) Berechnen Sie für $f(x)$ das Taylorpolynom 2. Grades um $x_0 = 1$ (hier explizite Berechnung der Taylorkoeffizienten notwendig). (25 P)

$$f(x) = \sqrt{\cos(a \cdot (1-x))}$$

b) Was zeichnet dieses Polynom unter allen anderen Polynomen 2. Grades aus? Weshalb ist es global (auf ganz D) keine gute Näherung für $f(x)$? (5 P)

Aufgabe 2– Talyorreihe - Abgabe Do 20.6.24 22:00 Uhr

a) Bestimmen Sie für die folgende Funktion $f(x)$ die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt x_0 (20 P)

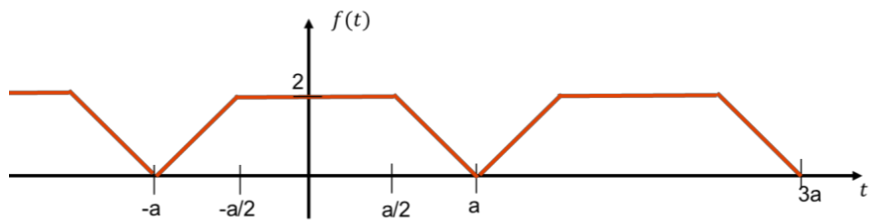
$$(\mathrm{a.1})\quad f(x) = xe^{-\frac{x}{a}} \text{ für } \mathrm{x}_0 = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{a.2})\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \text{ für } \mathrm{x}_0 = 0 \text{ und } -1 < x < 1$$

jeweils durch Verwendung einer bekannten (Standard-)Taylorreihe, Substitution, ggf. Multiplikation.

b) Brechen Sie die Reihen nach dem 3. Glied (Summand), das (der) von Null verschieden ist, ab. Geben Sie für das so ermittelte Taylorpolynom von $f(x)$ den Grad an und berechnen Sie jeweils dessen Wert für $x = 0{,}1$ als Näherungswert für $f(0{,}1)$. (10 P)

Aufgabe 3 – Fourierreihe Abgabe Mo 24.6.24 22:00 Uhr

Gegeben sei die abgebildete Funktion $f(t)$. Den Graph können Sie sich periodisch fortgesetzt denken.



a) f sei periodisch fortgesetzt. Geben Sie für das ganze Intervall $[-a, a]$ die explizite Funktionsvorschrift für $f(t)$ an. (10 P)

b) Berechne Sie die Fourierkoeffizienten von $f(t)$. Der Rechenweg soll möglichst **effizient mit Ausnutzen der Symmetrie** sein. (20 P)
Bei a_n $(n \geq 1)$ ist es ausreichend die Berechnung nur soweit durchzuführen, bis die Stammfunktion ermittelt wurde.
Für Aufgabenteil c) kann mit $a_n = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - (-1)^n\right)$ weitergerechnet werden.

c) Geben Sie das Fourierpolynom 5. Grades an. Skizzieren Sie den groben Verlauf von $F_5(x)$ in das Schaubild. (Funktionsplotter zu Hilfe nehmen oder den Verlauf auch nur grob argumentieren). In welchem Sinn ist $F_5(x)$ das „beste" trigonometrische Polynom 5. Grades zu f? (10 P)

1a) $f(x) = \sqrt{\cos(5-5x)}$ $\qquad g = \cos(5-5x) \qquad x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \cos(5-5x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot (-\sin(5-5x) \cdot -5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos(5-5x)}} \cdot -\sin(5-5x) \cdot -5)$$

$f(1) = 0{,}7351$

$f'(1) = 0$

$f''(1) = \frac{25}{2}$

$$f'(x) = \frac{5\sin(5-5x)}{2\sqrt{\cos(5-5x)}}$$

$$f''(x) = \frac{5\sin(5-5x)}{2\sqrt{\cos(5-5x)}}$$

$$= \frac{5\cos(5-5x)(-5) \cdot 2\sqrt{\cos(5-5x)} - 5\sin(5-5x) \cdot 2\frac{1}{2\sqrt{\cos(5-5x)}} \cdot (-\sin(5-5x) \cdot -5)}{(2\sqrt{\cos(5-5x)})^2}$$

$$f''(x) = -\frac{25 + 25\cos(5-5x)^2}{4\sqrt{\cos(5-5x)}\cos(5-5x)}$$

$$T_3(x) = \frac{0{,}7351}{0!}(x-1)^0 + \frac{0}{1!}(x-1)^1 + \frac{25}{2!}(x-1)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{4}(x-1)^2$$

2a)

$f(x) = xe^{-\frac{x}{5}} \qquad x_0 = 0$

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{5}} + xe^{-\frac{x}{5}}\left(-\frac{x}{5}\right)$$

$$f'(x) = \frac{5-x}{5e^{\frac{x}{5}}}$$

$$f''(x) = \frac{-10e^{\frac{x}{5}} + xe^{\frac{x}{5}}}{25e^{\frac{2x}{5}}}$$

$$f'''(x) = \frac{75e^{\frac{3}{5}x} - xe^{\frac{3}{5}x}}{125e^{\frac{4x}{5}}}$$

$$T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-\frac{2}{5}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{25}}{3!}x^3 + \dots$$