Abgabe: Termine siehe unten bei den Aufgaben. Abgabe jeweils als PDF Upload in Moodle-Aufgabe

- Abzugeben sind die handschriftlichen Ausarbeitungen mit ausführlichen, nachvollziehbaren Lösungswegen.
- Schreiben Sie jede Aufgabe auf eine eigene Seite.
- Die Abgabe erfolgt im PDF-Format als Moodle-Abgabe. (Scan der Papier-Ausarbeitung oder PDF mit Tablet beschreiben)
- Eine Korrektur erfolgt nur bei Angabe der Matrikelnummer.
- Sofern nichts anderes gesagt wird, rechnen Sie bitte exakt oder auf 4 Nachkommastellen genau.

Nr.	1	2	$\sum$
Max.	75	25	100
Erg.			

ACHTUNG: Ersetzen Sie in den folgenden Aufgaben a jeweils durch die letzte Stelle Ihrer Matrikelnummer (Das ist die 6. Ziffer, ignorieren Sie die hintere Versionsnummer -01!). Anstelle von 0 bzw. 1 wählen Sie bitte 5 bzw. 6.

Aufgabe 1 Ableitungen – Abgabe bis Do 25.04.24 22:00 Uhr (75 P)

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen nach ihrer unabhängigen Variablen. Sie dürfen alle Grundableitungen aus der Formelsammlung verwenden.

Darstellung des Ergebnisses:

- Keine gebrochenen oder negative Exponenten (Ausnahme: in der e-Funktion können gebrochene und negative Exponenten stehen bleiben)
- Soweit wie möglich kürzen
- Es dürfen mehrere Brüche vorkommen, aber keine Doppelbrüche.

a) $f(x) = \frac{1}{ax^2} + (ax)^2 + \sqrt[a]{x^7} + \frac{a}{x}$ (15 P)

b) $h(x) = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{a}{x^2+1} + \frac{1}{1+e^{-ax}}$ (15 P)

c) $i(x) = \frac{x^2-a^2}{x+a}$ (15 P)

d) $j(x) = \arctan(ax) \cdot \operatorname{artanh}(\sqrt{ax+1})$ (15 P)

e) $k(x) = \ln\left(\frac{a \cdot e^x}{x}\right) + \ln(1 - ax^2)$ (15 P)

Tipp: Logarithmusgesetze anwenden

Aufgabe 2: Grenzwerte – Abgabe bis Do 25.04.24 22:00 Uhr (25 P)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte. Wenden Sie, wenn die Vorrausetzungen erfüllt sind, die Regel von l'Hospital an.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\mathrm{ax} \cdot \cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^{-5x}}{5x \cdot \cos(x)} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{5e^{5x}+5e^{-5x}}{5 \cdot -\sin(x)}$ f $= \frac{10}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{25e^{5x} \cancel{- e^{-5x}}}{5 \cdot \cancel{-\cos(x)}} = \frac{50}{-5} = \underline{\underline{-10}}$ (15 P)

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \ln(ax^2)}{\ln(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \ln(5x^2)}{\ln(1-\frac{1}{x})} = \frac{\infty}{0}$ f $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} = \frac{2x\ln(5x^2)+2x}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\infty}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\ln(5x^2)+6}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{\infty}{0} \overset{L'H}{=}$ (10 P)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{0}{0}$?

1a) $f(x) = \frac{1}{5x^2} + 5x^2 + \sqrt[5]{x^7} + \frac{5}{x}$

$= 5x^{-2} + 5x^2 + x^{\frac{7}{5}} + 5x^{-1}$

$= -10x^{-3} + 10x + \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} + (-5x^{-2})$

$f'(x) = -\frac{1}{10x^3} + 10x + \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5x^2}$

b) $h'(x) = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{1+e^{-5x}}$

$= \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{-5(1+e^{-5x}) + x^2+1}{(x^2+1)\cdot(1+e^{-5x})}$

$= (1-x)^{-3} + \frac{-4-5e^{-5x}+x^2}{x^2+x^2e^{-5x}+1+e^{-5x}}$

$= 3(1-x)^{-4} + \frac{(-5e^{-5x}\cdot(-5)+2x)(x^2+x^2e^{-5x}+1+e^{-5x}) - (-4-5e^{-5x}+x^2)(2x+2xe^{-5x}\cdot(-5)+e^{-5x}\cdot(-5))}{(x^2+x^2e^{-5x}+1+e^{-5x})^2}$

$= \frac{3}{(1-x)^4} + \frac{10x^2e^{5x}+5e^{5x}+10xe^{10x}+20xe^{5x}+10x+5x^4e^{5x}}{(x^2e^{5x}+x^2+1+e^{5x})^2}$

c) $i'(x) = \frac{x^2-5^2}{x+5}$

$= \frac{(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}{\cancel{x+5}}$

$= 1$

d) $j'(x) = \arctan(5x)\cdot \operatorname{artanh}(\sqrt{5x+1})$ $\quad a'\cdot b + a\cdot b'$

$= \frac{1}{1+5x^2}\cdot 5\cdot \operatorname{artanh}(\sqrt{5x+1}) + \arctan(5x)\cdot\frac{1}{1-\sqrt{5x+1}^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5x+1}}\cdot 5$

$= \frac{5\operatorname{artanh}(\sqrt{5x+1})}{1+25x^2} - \frac{\arctan(5x)}{2x\sqrt{5x+1}}$

e) $k'(x) = \ln\left(\frac{5e^x}{x}\right) + \ln(1-5x^2)$

$= \frac{1}{\frac{5e^x}{x}}\cdot\frac{5e^xx-5e^x}{x^2} + \frac{1}{1-5x^2}\times(-5\cdot 2x)$

$= 1 - \frac{1}{x} - \frac{10x}{1-5x^2}$