Vzorové řešení zadání ***B***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : e^x = 0\right) \Rightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R} : \cos y = \pi\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$, je na $\langle a,b\rangle$ monotonní. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x) = \sin x,\ \langle a,b\rangle = \langle 0, 2\pi\rangle$

c) Má-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R = a$, potom pro $x = a$ diverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},\ R = 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ***konverguje***

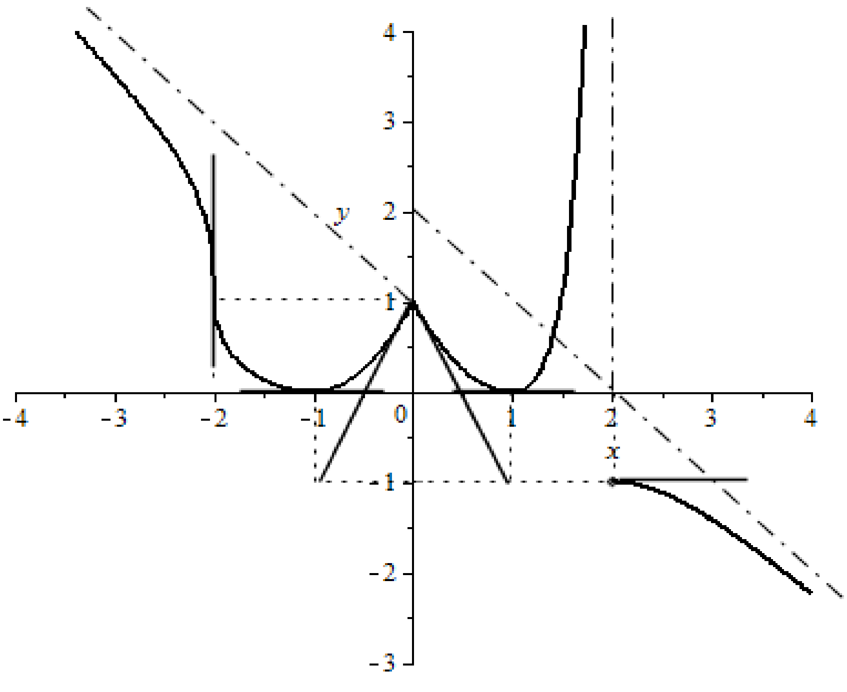
2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, pro $x = 2$ nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zprava,

$f(-2) = f(0) = 1,\ f(-1) = f(1) = 0,\ f(2) = -1,$

$f'(-1) = f'(1) = 0,\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2,\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -2,\ \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 0,$

přímka $x = -2$ je inflexní tečna, $f''(x) < 0$ pro $x < -2$ a $x > 2$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (-2,0)$ a $x \in (0,2)$, přímka $y = 1 - x$ je asymptota pro $x \to -\infty$, přímka $y = 2 - x$ je asymptota pro $x \to \infty$.



3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)(x-1)^2}$

$$f'(x) = \left(\left((2x+1)(x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{2(x-1)^2 + (2x+1)\cdot 2(x-1)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}} = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(x-1)\left(x-1+2x+1\right)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}} = \tfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot x}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x) = 0\ pro\ x = 0,\ f'(x)\ \nexists\ pro\ x = 1 \vee x = -\tfrac{1}{2}.$

Znaménko derivace:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
f'(x) & + & & + & & - & & + \\
\hline
 & \nearrow & -\tfrac{1}{2} & \nearrow & 0 & \searrow & 1 & \nearrow \\
 & & & & \text{max} & & \text{min} &
\end{array}
$$

Lokální maximum v $x=0$, $f_{\max} = f(0)=1$, lokální minimum v $x=1$, $f_{\min} = f(1)=0$.

4) Řešte rovnici $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(x+1)^n = 2\cdot(x+1)$

Obor konvergence řady: $|x+1|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-2,0)$.

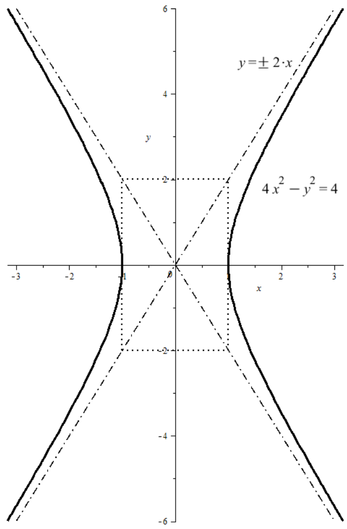
$$\sum_{n=3}^{\infty}(x+1)^n = (x+1)^3\cdot\frac{1}{1-(x+1)} = -\frac{(x+1)^3}{x}$$

$$-\frac{(x+1)^3}{x} = 2(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-1}} \vee (x+1)^2 = -2x$$

$$x^2+4x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2\pm\sqrt{3} = \begin{cases} -2-\sqrt{3}\notin(-2,0) \\ -2+\sqrt{3}\in(-2,0) \end{cases}$$

Řešení rovnice: $\underline{\underline{x=-1}} \vee \underline{\underline{x=-2+\sqrt{3}}}$

5) Je dána funkce $f(x,y)=e^{4x^2-y^2}$ a bod $[1,0]$.



a) Najděte a nakreslete vrstevnici funkce f procházející bodem A

$$f(1,0)=e^4, \quad e^{4x^2-y^2}=e^4 \Leftrightarrow 4x^2-y^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\tfrac{y^2}{4}=1$$

- hyperbola s reálnou poloosou $x=1$, imaginární $y=2$

a s asymptotami $y=\pm 2x$

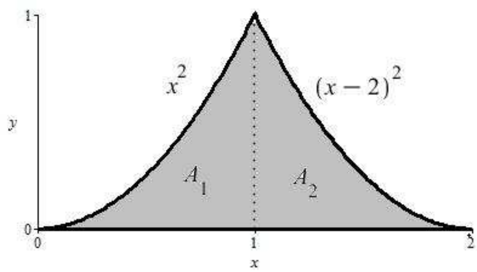
b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě A.

$$f'_x(x,y)=e^{4x^2-y^2}\cdot 8x,\ f'_x(1,0)=8e^4, \quad f'_y(x,y)=e^{4x^2-y^2}\cdot(-2y),\ f'_y(1,0)=0,$$

$$\mathbf{grad} f(1,0) = \underline{\underline{\left(8e^4,0\right)}}$$

$\iint\limits_A y\,dx\,dy$, kde A je omezena křivkami o rovnicích $y=x^2, y=(x-2)^2, y=0$.

Množinu A načrtněte.



$$A = A_1\cup A_2, \quad A_1 = \left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x^2\right\},$$
$$A_2 = \left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x\le 2 \wedge 0\le y\le (x-2)^2\right\}$$

$$\iint\limits_A y\,dx\,dy = \iint\limits_{A_1} y\,dx\,dy + \iint\limits_{A_2} y\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^{x^2} y\,dy + \int_1^2 dx\int_0^{(x-2)^2} y\,dy = \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^4dx + \tfrac{1}{2}\int_1^2 (x-2)^4\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 + \tfrac{1}{10}\left[(x-2)^5\right]_1^2 = \tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$