Vzorové řešení zadání ***N***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x_0 \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(x_0)=0$, potom funkce f nabývá na intervalu $\langle a,b\rangle$ kladných i záporných hodnot.

~~***pravdivý***~~ <u>***nepravdivý***</u>

protipříklad: $f(x)=x^2, \quad \langle a,b\rangle = \langle -1,1\rangle$

b) Je-li $\forall x\in\mathbb{R}: \cos x = 1$, potom $\exists y\in\mathbb{R}: \sin y = \frac{\pi}{2}$

<u>***pravdivý***</u> ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

~~***pravdivý***~~ <u>***nepravdivý***</u> ***protipříklad:*** $a_n = \frac{1}{n^2}$

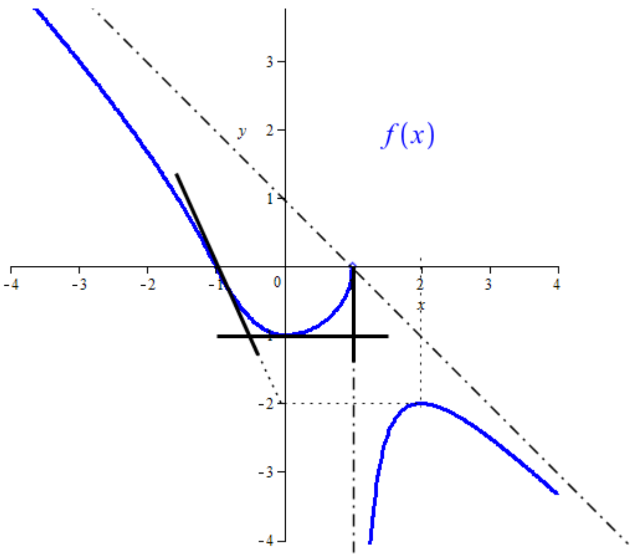
2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:

$D_f=\mathbb{R}$, je spojitá pro $x\neq 1$, v bodě $x=1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zleva,

$f(-1)=f(1)=0,\ \ f(2)=-2,\ \ f(0)=-1,\ \ f'(0)=f'(2)=0,\ \ f'(-1)=-2,\ \ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\infty,$

$f''(x)<0$ pro $x\in(-\infty,-1)$ a pro $x\in(1,\infty)$, $f''(x)>0$ pro $x\in(-1,1)$,

přímka $y=1-x$ je její asymptota.



3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$ na intervalu $\langle -2,\frac{1}{2}\rangle$.

$$f'(x)=\tfrac{1}{3}\cdot\left(x(x^2-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(x^2-1+x\cdot 2x\right)=\frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2(x+1)^2}}$$

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}\notin\langle -2,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$f'(x)\ \nexists \quad\Leftrightarrow\quad x=0\vee x=1\vee x=-1, \quad 1\notin\langle -2,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$f(-2)=\sqrt[3]{-2\cdot 3}=-\sqrt[3]{6} \qquad \text{min}$$

$$f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{3}-1\right)}=\sqrt[3]{\tfrac{2}{3\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\tfrac{2}{\sqrt{3}^3}}=\tfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \qquad \text{max}$$

$$f(-1)=f(0)=0,$$

$$f(\tfrac{1}{2})=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}-1\right)}=-\sqrt[3]{\tfrac{3}{8}}=-\tfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Výsledek: $\underline{\underline{f_{\min}=f(-2)=-\sqrt[3]{6}}}$, $\underline{\underline{f_{\max}=f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\tfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}}}$,

4) Najděte $x \in \mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{2^n} = 2-3x$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x-1}{2}\right)^n \text{ - geometrická řada, } q = \frac{3x-1}{2}, \quad a_0 = 0$$

obor konvergence: $\left|\frac{3x-1}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < 3x-1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 3x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-\tfrac{1}{3} < x < 1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x-1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3x-1}{2}} = \frac{2}{2-3x+1} = \frac{2}{3-3x}$$

$$\frac{2}{3(1-x)} = 2-3x \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 3(1-x)(2-3x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 9x^2 - 15x + 4 = (3x-4)(3x-1) \quad \Rightarrow x = \tfrac{4}{3} \vee x = \tfrac{1}{3}$$

$x = \frac{4}{3}$ nevyhovuje, $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$ je řešení rovnice.

5) Najděte rovnici tečné roviny a normálový vektor ke grafu funkce $f(x,y) = x^{y^x}$ v bodě $[1,2,?]$.

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ má tvar

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$f(1,2) = 1^{2^1} = 1$$

$$f'_x(1,2) = \left(f(x,2)\right)'\Big|_{x=1}; \qquad f(x,2) = x^{2^x} = e^{2^x \ln x}, \ \left(e^{2^x \ln x}\right)'\Big|_{x=1} = e^{2^x \ln x}\left(2^x \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \tfrac{1}{x}\right)\Big|_{x=1} = e^0 \cdot 2 = 2$$

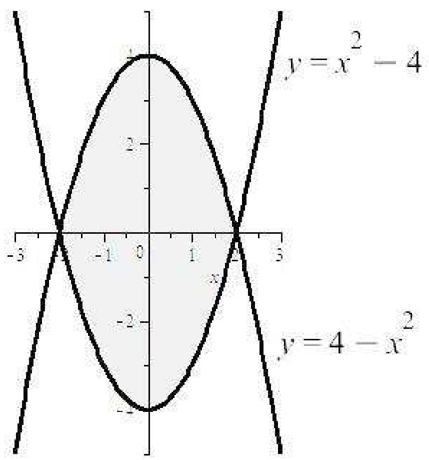
$$f'_y(1,2) = \left(f(1,y)\right)'\Big|_{y=2}; \qquad f(1,y) = 1^{y^1} = 1, \ \left(f(1,y)\right)' = 0$$

Rovnice tečné roviny: $z - 1 = 2\cdot(x-1) + 0\cdot(y-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{2x - z - 1 = 0}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{n} = (2,0,-1)}}$

6) Vypočítejte $\int_M x e^{\frac{y}{2}} dx\, dy$, kde $M = \left\{(x,y) \middle| x^2 - 4 \le y \wedge y \le 4 - x^2\right\}$. Množinu M nakreslete.

Průsečíky: $x^2 - 4 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

$$M = \left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 \le y \le 4 - x^2 \end{array}\right\}$$



$$\int_M x e^{\frac{y}{2}} dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2-4}^{4-x^2} x e^{\frac{y}{2}} dy = \int_{-2}^{2} x\, dx \left[2e^{\frac{y}{2}}\right]_{x^2-4}^{4-x^2} = 2\int_{-2}^{2} x\left(e^{2-\frac{1}{2}x^2} - e^{\frac{1}{2}x^2-2}\right) dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}x^2 = t \\ x\, dx = dt \end{array}\right| = 2\int_{2}^{2}\left(e^{2-t} - e^{t-2}\right) dt = \underline{\underline{0}}$$