# *Vzorové řešení zadání* ***F***

**1)** U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x \in \mathbb{R}: \ (|-2x| \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x \ge 2)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce $f$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá a $f(a)\cdot f(b)<0$,
potom existuje právě jeden bod $c\in(a,b)$ tak,že $f(c)=0$ . ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x)=\sin x, \langle a,b\rangle = \left\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle, \sin(-\pi)=\sin(0)=\sin(\pi)=0$$

c) Funkce $f$ je prostá $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f$ platí $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

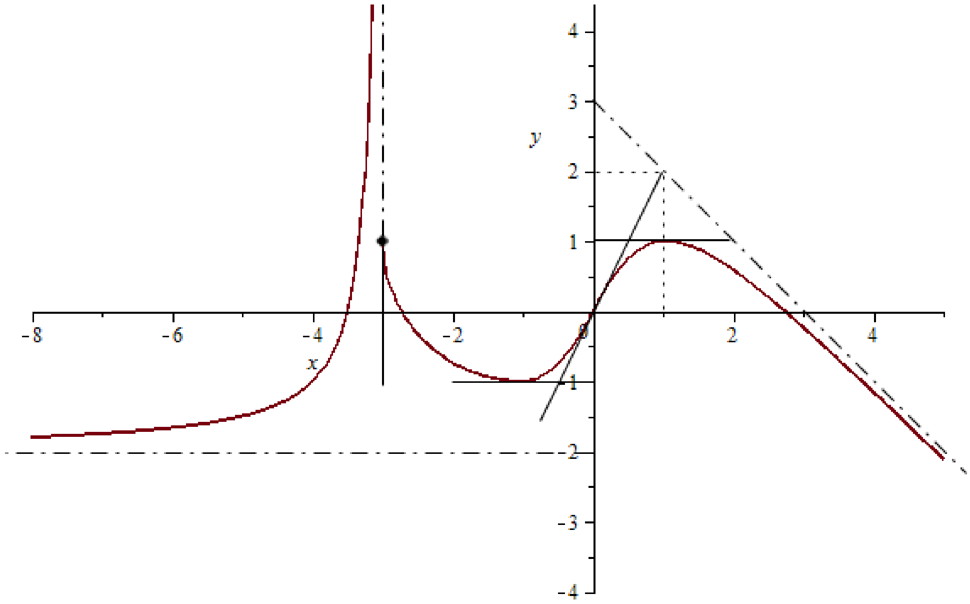
$f(x)=x^2$ není prostá, ale $\forall x_1, x_2 \in D_f$ platí $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

**2)** Načrtněte graf funkce $f$, pro kterou platí:
$D_f = \mathbb{R}$, v bodě $x=-3$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,

$f(-3) = f(1) = 1,\ f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\quad f'(-1) = f'(1) = 0,\ f'(0) = 2,\ \lim\limits_{x\to -3^+} f'(x) = -\infty,$

$f''(x) > 0$ pro $x < -3$ a pro $x \in (-3, 0)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 0$

přímka $x + y = 3$ je asymptota pro $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$.

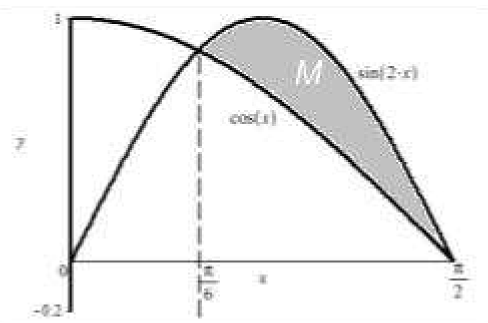



**3)** Určete obsah části roviny

$M = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \cos x \le y \le \sin 2x \wedge x \le \frac{\pi}{2} \right\}$ $(x > 0)$. Množinu načrtněte.

Určíme průsečíky:
$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x \cos x$

1. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ 2. $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$




$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x)\,dx = \left[ -\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - 1 - \left( -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

**4)** Pomocí rozvoje integrované funkce do nekonečné řady, pravidla o záměně sumy a integrálu a vhodného pravidla pro numerickou sumaci vypočítejte integrál

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^4+81}\,dx = \frac{1}{81}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^4}\,dx$$

s chybou menší než $10^{-6}$. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují. Pomůcka: $3^{13}=1594323$.

Výraz $\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^4}$ je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x}{3}\right)^4\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{4n}$ s kvocientem $q=-\left(\frac{x}{3}\right)^4$, která konverguje

pro $|q|=\left|\left(\frac{x}{3}\right)^4\right|<1 \Leftrightarrow |x|^4<3^4 \Leftrightarrow x\in\langle -3,3\rangle$. Protože $\left\langle 0,\frac{1}{3}\right\rangle \subset \langle -3,3\rangle$, můžeme integrovat člen po členu.

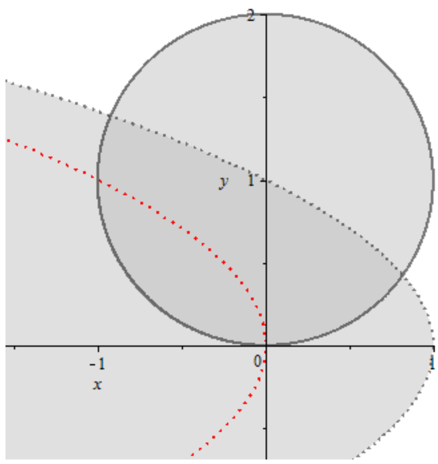
$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^4+81}\,dx = \frac{1}{81}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^4}\,dx = \frac{1}{81}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{4n}}x^{4n}\right)dx = \frac{1}{81}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^{4n}}\int_0^{\frac{1}{3}}x^{4n}dx\right) = \frac{1}{81}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^{4n}}\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{81}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{4n}}\cdot\frac{1}{3^{4n+1}(4n+1)} = \frac{1}{3^4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^9\cdot 5}+\frac{1}{3^{17}\cdot 17}-\cdots\right) = \frac{1}{3^5}-\frac{1}{3^{13}\cdot 5}+\frac{1}{3^{21}\cdot 17}-\cdots$$

Dostali jsme alternující číselnou řadu, pro jejíž součet platí $|s-s_n|<|a_{n+1}|$ - chyba součtu je menší než první vynechaný člen (v absolutních hodnotách). Protože je $3^{13}=1594323$, platí $\dfrac{1}{3^{13}\cdot 5}<10^{-6}$, tedy

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^4+81}\,dx = \frac{1}{243}+R, \text{ kde } |R|<10^{-6}$$

**5)** Určete a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2y-x^2-y^2}}{\ln(1-x-y^2)}$




$$D_f=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2y-x^2-y^2\ge 0\ \wedge\ 1-x-y^2>0\ \wedge\ 1-x-y^2\ne 1\right\}$$

$2y-x^2-y^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y\le 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2\le 1$ - kruh se středem $[0,1]$ a poloměrem $1$

$1-x-y^2>0 \Leftrightarrow y^2<-(x-1)$ - „vnitřek“ paraboly s vrcholem $[1,0]$ otevřené doleva

$1-x-y^2=1 \Leftrightarrow y^2=-x$ - parabola s vrcholem v počátku otevřená doleva

Definiční obor je průnik kruhu $x^2+(y-1)^2\le 1$ s vnitřkem paraboly $y^2<-(x-1)$, ze kterého jsou vyňaty body paraboly $y^2=-x$

**6)** Najděte vázané lokální extrémy funkce $f(x,y)=2x^3+22x-4xy+9$ za podmínky $3x-y+1=0$.

Vazba je v explicitním tvaru, $3x-y+1=0 \Leftrightarrow y=3x+1$, můžeme do účelové funkce dosadit a vyšetřovat extrémy vzniklé funkce jedné proměnné:

$u(x)=f(x,3x+1)=2x^3+22x-4x(3x+1)+9=2x^3-12x^2+18x+9$

$u'(x)=6x^2-24x+18=6\left(x^2-4x+3\right)=6(x-1)(x-3)$

$u'(x)=0$ pro $x_1=1,\ x_2=3;\quad y_1=4,\ y_2=10$. Stacionární body jsou $A=[1,4],\ B=[3,10]$.

$u''(x)=12x-24,\quad u''(1)=-12<0$ max, $\quad u''(3)=12>0$ min.

$f_{max}=f(1,4)=17,\quad f_{min}=f(3,10)=9$