Vzorové řešení zadání ***A***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.
U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

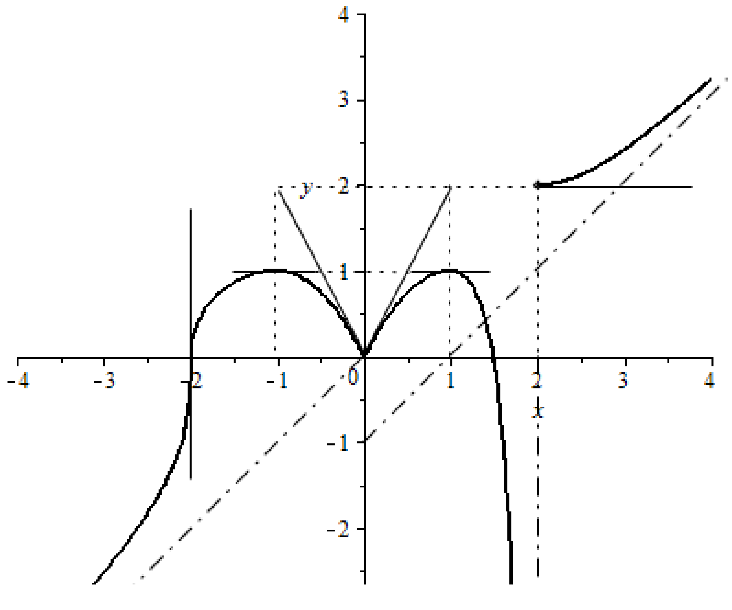
a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \pi\ \right) \;\Rightarrow\; \left(\exists y \in \mathbb{R} : e^y = 0\right)$ — ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$, je na $\langle a,b\rangle$ diferencovatelná. — ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***
$f(x) = |x|,\ \langle a,b\rangle = \langle -1,1\rangle$

c) Má-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R = a$, potom pro $x = a$ konverguje. — ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ R = 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ ***diverguje***

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:
$D_f = \mathbb{R}$, pro $x = 2$ nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zprava,
$f(-2) = f(0) = 0,\ \ f(-1) = f(1) = 1,\ \ f(2) = 2,$
$f'(-1) = f'(1) = 0,\ \ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -2,\ \ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 2,\ \ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = 0,$
přímka $x = -2$ je inflexní tečna, $f''(x) > 0$ pro $x < -2$ a $x > 2$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-2,0)$ a $x \in (0,2)$,
přímka $y = x$ je asymptota pro $x \to -\infty$, přímka $y = x - 1$ je asymptota pro $x \to \infty$.



3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)(x-4)^2}$

$$f'(x) = \left(\left((2x+1)(x-4)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{2(x-4)^2 + (2x+1)\cdot 2(x-4)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{4}{3}}} = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(x-4)\left(x-4+2x+1\right)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{4}{3}}} = \tfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot(x-1)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x) = 0\ \mathit{pro}\ x = 1,\ \ f'(x)\ \not\exists\ \mathit{pro}\ x = 4 \vee x = -\tfrac{1}{2}.$

Znaménko derivace:

$$\begin{array}{lccccccc} f'(x) & + & & + & & - & & + \\ \hline & \nearrow & -\tfrac{1}{2} & \nearrow & 1 & \searrow & 4 & \nearrow \\ & & & & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

Lokální maximum v $x = 1$, $f_{\max} = f(1) = 3$, lokální minimum v $x = 4$, $f_{\min} = f(4) = 0$.

4) Řešte rovnici $\sum_{n=3}^{\infty}(x-1)^n = \frac{4}{3}(x-1)$

Obor konvergence řady: $|x-1|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0,2).$

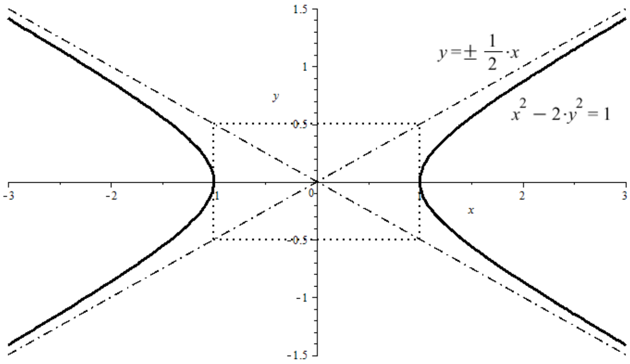
$$\sum_{n=3}^{\infty}(x-1)^n = (x-1)^3 \cdot \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{(x-1)^3}{2-x}$$

$$\frac{(x-1)^3}{2-x} = \frac{4}{3}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1}} \vee 3(x-1)^2 = 4(2-x)$$

$$3x^2-2x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\pm 4}{3} = \begin{cases} -1 \notin (0,2) \\ \frac{5}{3} \in (0,2) \end{cases}$$

Řešení rovnice: $\underline{\underline{x=1}} \vee \underline{\underline{x=\frac{5}{3}}}$

5) Je dána funkce $f(x,y) = e^{x^2-4y^2}$ a bod $[1,0]$.



a) Najděte a nakreslete vrstevnici funkce f procházející bodem A

$f(1,0)=e, \quad e^{x^2-4y^2} = e \Leftrightarrow x^2-4y^2=1$

- hyperbola s reálnou poloosou $x=1$, imaginární $y=\frac{1}{2}$

a s asymptotami $y=\pm\frac{1}{2}x$

b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě A.

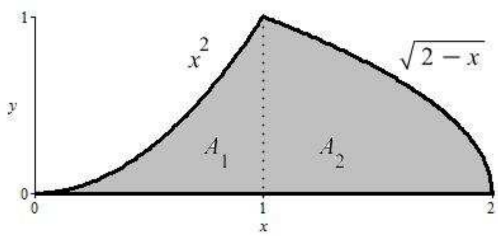
$f'_x(x,y) = e^{x^2-4y^2}\cdot 2x,\ f'_x(1,0)=2e, \quad f'_y(x,y) = e^{x^2-4y^2}\cdot(-8y),\ f'_y(1,0)=0,\ \mathbf{grad}f(1,0) = \underline{\underline{(2e,0)}}$

6) Vypočítejte $\int_A y\,dx\,dy$, kde A je omezena křivkami o rovnicích $y=x^2, y=\sqrt{2-x}, y=0$. Množinu A načrtněte.

Průsečíky:

$x^2=\sqrt{2-x} \Rightarrow x^4+x-2=0 \quad x^4+x-2=(x-1)\left(x^3+x^2+x+2\right)$

nemá další kladné kořeny.



$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 = \left\{(x,y)\middle| 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x^2\right\},\ A_2 = \left\{(x,y)\middle| 1\le x\le 2 \right.$

$$\int_A y\,dx\,dy = \int_{A_1} y\,dx\,dy + \int_{A_2} y\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^{x^2} y\,dy + \int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2-x}} y\,dy = \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{x^2}dx + \int_1^2\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{2-x}}dx =$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^1 x^4dx + \tfrac{1}{2}\int_1^2(2-x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\left[2x-\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{2}\left(4-2-2+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{7}{20}}}$$