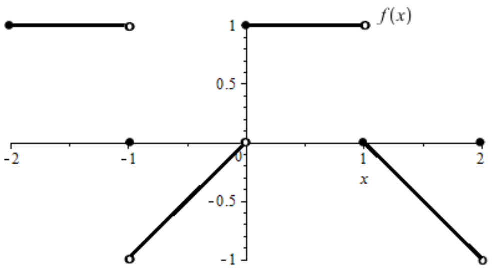
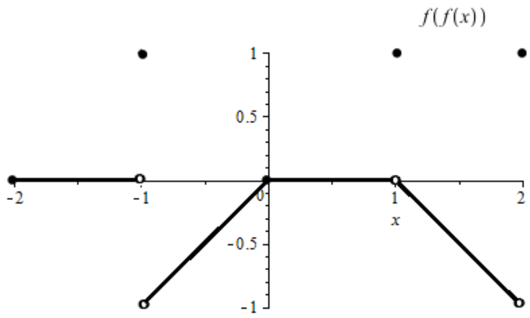
Vzorové řešení zadání **H**

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\{-1,1,2\} \\ 1 & x\in\langle -2,-1)\cup\langle 0,1) \\ x & x\in(-1,0) \\ 1-x & x\in\langle 1,2) \end{cases}$

Nakreslete graf funkce *f*, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle 1,2\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{0\}\right)$.





$f\left(\langle 1,2\rangle\right)=(-1,0\rangle$ $\qquad$ $f^{-1}\left(\{0\}\right)=\{-1,1,2\}$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}:\ \cos x\le -3\right)\ \Rightarrow\ \left(\exists y\in\mathbb{R}:\ |y|<-8\right)$ $\qquad$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b)) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right.$ alternující řada, $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost a $\left.\lim_{n\to\infty} a_n=0\right)\Rightarrow\left|s_n-s\right|<\left|a_{n+1}\right|$.

pravdivý ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

c)) Ke každé liché funkci existuje funkce inverzní. $\qquad$ ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x)=\sin x$ na $\mathbb{R}$

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-12}$, $\quad I=\langle -8,0\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-12}=\left(x^2+4x-12\right)^{\frac{1}{3}},\quad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x+2}{(x+6)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2,\quad f'(x)\not\exists\Leftrightarrow x=-6\vee x=2\qquad -2\in I,\quad -6\in I,\quad 2\notin I$$

$f(-8)=\sqrt[3]{20}$ $\qquad$ max

$f(-6)=0$

$f(-2)=\sqrt[3]{-16}=-\sqrt[3]{16}$ min

$f(0)=\sqrt[3]{-12}$

maximum v bodě $x=-8$, $f_{\max}=\sqrt[3]{20}$, ***minimum v bodě*** $x=-2$, $f_{\min}=-\sqrt[3]{16}$.

4) Vypočítejte integrál $I=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+13}+\frac{9}{x^2+1}\right)dx$

$$I=\left[\ln(x+8)-\ln(x+13)+9\,\mathrm{arctg}\,x\right]_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+8}{x+13}+9\,\mathrm{arctg}\,x\right)-\ln\frac{8}{13}-9\,\mathrm{arctg}\,0=\ln 1+\frac{9}{2}\pi+\ln\frac{13}{8}=$$

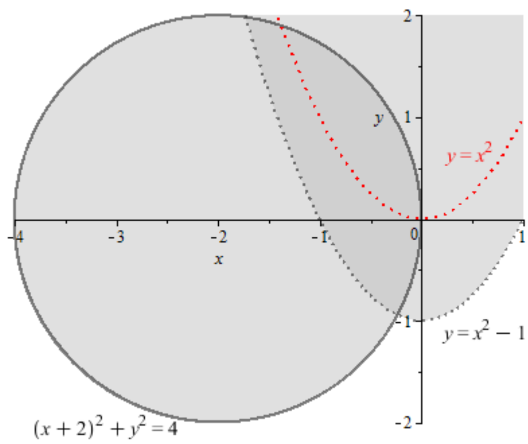
$$=\underline{\frac{9}{2}\pi+\ln\frac{13}{8}}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*, je-li $f(x,y)=\frac{\sqrt{-4x-x^2-y^2}}{\ln(1-x^2+y)}$

$$D_f:-4x-x^2-y^2\geq 0\wedge 1-x^2+y>0\wedge 1-x^2+y\neq 1\quad\Leftrightarrow$$

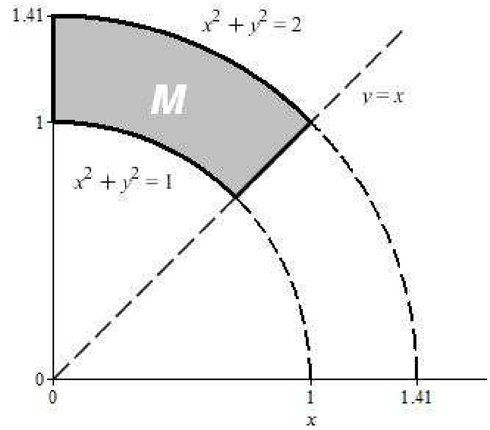
$$(x+2)^2+y^2\leq 4\wedge y>x^2-1\wedge y\neq x^2$$

$$\underline{D_f=\left\{(x,y)\,|\,(x+2)^2+y^2\leq 4\wedge y>x^2-1\wedge y\neq x^2\right\}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I=\int_M f(x,y)\,dxdy$, je-li

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{ a } M=\left\{(x,y)\middle|\,0\leq x\leq y\wedge 1\leq x^2+y^2\leq 2\right\}.$$



$$\Phi^{-1}(M)=\left\{(\rho,\varphi)\middle|\,1\leq\rho\leq\sqrt{2}\wedge\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$I=\int_M\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\Phi^{-1}(M)}\frac{1}{\rho}\cdot\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}d\rho=\left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\rho\right]_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=\underline{\frac{\pi}{4}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}$$