# *Vzorové řešení zadání* ***H***

**1)** U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Platí-li pro každé reálné číslo $x$ $\cos x \le -11$, potom $\sin 0 = 2$. ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

b) Je-li funkce $f$ periodická, potom je sudá. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = \sin x$

c) Je-li $f''(x_0) = 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ inflexní bod. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = x^4, x_0 = 0$

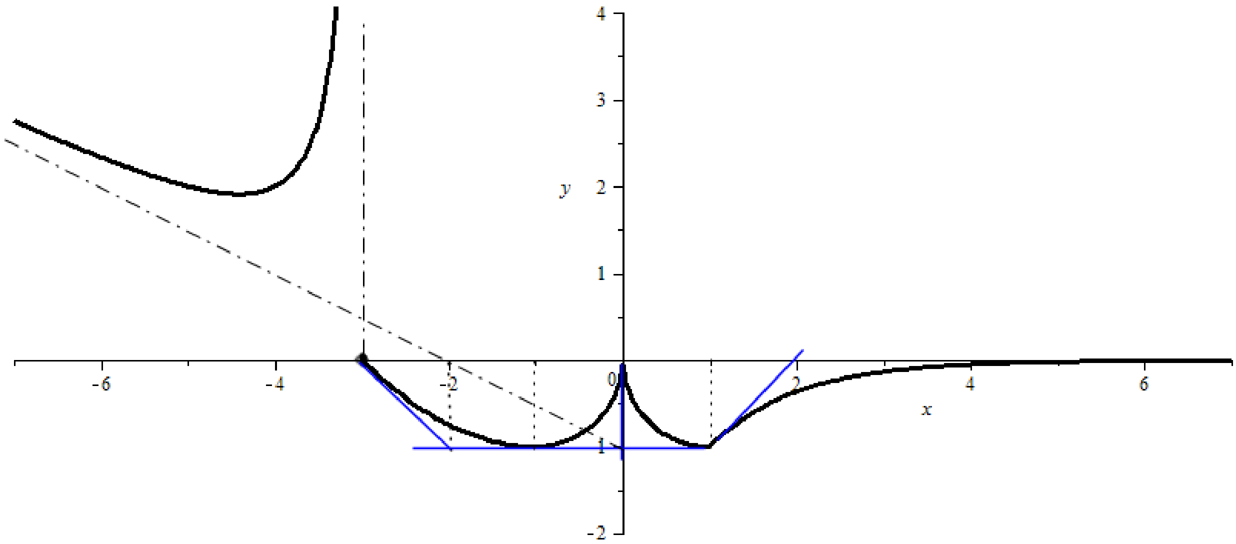
**2)** Načrtněte graf funkce $f$, pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, přímka $y = -\frac{1}{2}x - 1$ je asymptota pro $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

$f(-3) = f(0) = 0$, $f(-1) = f(1) = -1$, pro $x = -3$ má nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zprava,

$\lim\limits_{x\to -3^+} f'(x) = -1, \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \infty, \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 1,$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -3), x \in (-3, 0), x \in (0, 1)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (1, \infty)$.




**3)** Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-2x}$ v bodě, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou $4x - 2y + 5 = 0$.

$4x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$ - hledáme body na grafu zadané funkce, ve kterých je $f'(x) = 2$:

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-2x}\right)' = \frac{1}{1 + \dfrac{4x^2}{(1-2x)^2}} \cdot \frac{2\left[(1-2x) - x\cdot(-2)\right]}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2 + 4x^2}$$

$$\frac{2}{(1-2x)^2 + 4x^2} = 2 \quad 1 = (1-2x)^2 + 4x^2 = 1 - 4x + 8x^2 \Leftrightarrow -4x\left(1-2x\right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2} \qquad f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \frac{1}{2} \notin D_f$$

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right) \quad t: y = 2x \quad n: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\left(x - x_0\right) \quad n: y = -\frac{x}{2}$$

***Výsledek:*** $\underline{\underline{t: y = 2x}}, \quad \underline{\underline{n: y = -\dfrac{x}{2}}}$

**4** Vypočítejte $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{5}\cdot\ln\left(x+1\right)^5 dx$

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{5}\cdot\ln\left(x+1\right)^5 dx=\int\limits_0^1 x\cdot\ln\left(x+1\right)dx=\begin{vmatrix} u=\ln\left(x+1\right) & u'=\dfrac{1}{x+1} \\ v'=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(x+1\right)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 2-0\right)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2-0\right)=\frac{1}{2}\left(\ln 2+\frac{1}{2}-\ln 2\right)=\frac{1}{4}$$

***Výsledek:*** $\underline{\underline{I=\frac{1}{4}}}$

**5)** Najděte $x\in\mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{4}{3}x(x-1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{1-(x-1)}=\frac{x-1}{2-x},\quad |x-1|<1\Leftrightarrow x\in(0,2)$$

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{4}{3}x(x-1)\quad 1)\ x-1=0\Rightarrow x_1=1$$

$$2)\ 3=4x(2-x)\Leftrightarrow 4x^2-8x+3=0\quad x_{2,3}=\left\langle\begin{matrix}\frac{3}{2}\in(0,2)\\ \frac{1}{2}\in(0,2)\end{matrix}\right.$$

***Výsledek:*** $\underline{\underline{x=1\vee x=\tfrac{1}{2}\vee x=\tfrac{3}{2}}}$

**6)** $f(x,y,z)=xz+\ln\frac{y}{z^2}$. Najděte bod $A$, ve kterém platí $\operatorname{grad} f(A)=\left(2,2,2\right)$.

$$f'_x=z,\quad f'_y=\frac{z^2}{y}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{y},\quad f'_z=x+\frac{z^2}{y}\cdot\frac{-2\cdot y}{z^3}=x-\frac{2}{z}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\left(z,\frac{1}{y},x-\frac{2}{z}\right)=\left(2,2,2\right)\quad\Rightarrow\quad z=2,y=\frac{1}{2},x=3$$

***Výsledek:*** $\underline{\underline{A=\left[3,\tfrac{1}{2},2\right]}}$