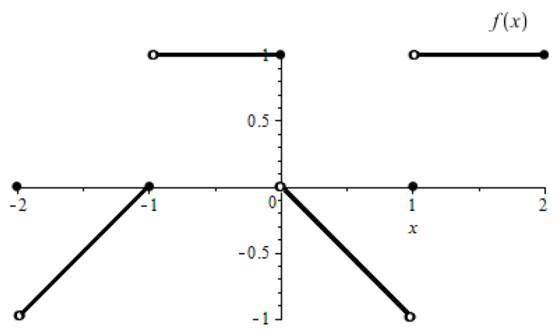
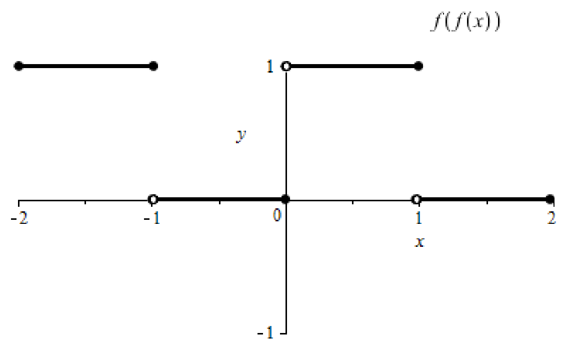
Vzorové řešení zadání <u>G</u>

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\{-2,-1,1\} \\ x+1 & x\in(-2,-1\rangle \\ 1 & x\in(-1,0\rangle\cup(1,2\rangle \\ -x & x\in(0,1) \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle -2,-1\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{1\}\right)$.





$\underline{f\left(\langle -2,-1\rangle\right)=(-2,0\rangle}$ $\underline{f^{-1}\left(\{1\}\right)=(-1,0\rangle\cup(1,2\rangle}$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}:\ \sin x>7\right) \Rightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}:\ y^2<-3\right)$ ***<u>pravdivý</u>*** ***~~nepravdivý~~ protipříklad:***

b)) ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternující řada, $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost a $\lim_{n\to\infty} a_n=0$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

<u>pravdivý</u> ***~~nepravdivý~~ protipříklad:***

c)) Funkce f je v bodě x_0 spojitá $\Rightarrow$ f má v bodě x_0 derivaci. ***~~pravdivý~~*** ***<u>nepravdivý</u> protipříklad:*** $f(x)=|x|, x_0=0$

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-12}$, $I=\langle -4,4\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-12}=\left(x^2+4x-12\right)^{\frac{1}{3}},\quad f'(x)=\frac{2}{3}\,\frac{x+2}{(x+6)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2,\quad f'(x)\ \nexists \Leftrightarrow x=-6 \vee x=2 \qquad -2\in I,\quad -6\notin I,\quad 2\in I$$

$$f(-4)=-\sqrt[3]{12}$$

$$f(-2)=-\sqrt[3]{16} \qquad \text{min}$$

$$f(2)=0$$

$$f(4)=\sqrt[3]{20} \qquad \text{max}$$

maximum v bodě $x=4$, $f_{\max}=\sqrt[3]{20}$, ***minimum v bodě*** $x=-2$, $f_{\min}=-\sqrt[3]{16}$.

4) Vypočítejte integrál $I=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}+\frac{7}{x^2+1}\right)dx$

$$I=\left[\ln(x+6)-\ln(x+10)+7\operatorname{arctg}x\right]_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+6}{x+10}+7\operatorname{arctg}x\right)-\ln\frac{6}{10}-7\operatorname{arctg}0=\ln 1+\frac{7}{2}\pi+\ln\frac{5}{3}=$$

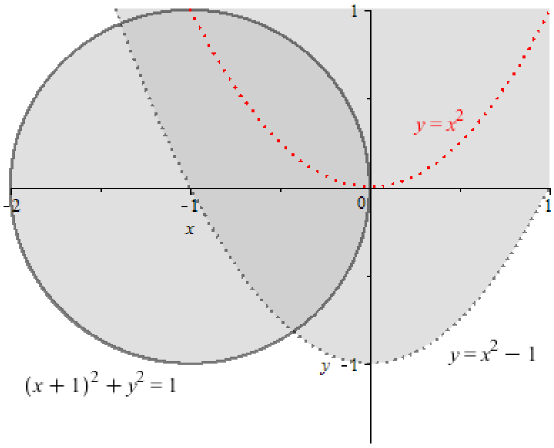
$$=\underline{\frac{7}{2}\pi+\ln\frac{5}{3}}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*, je-li $f(x,y)=\frac{\sqrt{-2x-x^2-y^2}}{\ln(1-x^2+y)}$

$$D_f: -2x-x^2-y^2\geq 0\wedge 1-x^2+y>0\wedge 1-x^2+y\neq 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2+y^2\leq 1\wedge y>x^2-1\wedge y\neq x^2$$

$$\underline{D_f=\left\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\leq 1\wedge y>x^2-1\wedge y\neq x^2\right\}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I=\iint_M f(x,y)\,dxdy$, je-li

$$f(x,y)=x^2+y^2 \text{ a } M=\left\{(x,y)\,|\,-x\leq y\leq x\wedge 2\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$$

$$\Phi^{-1}(M)=\left\{(\rho,\varphi)\,|\,\sqrt{2}\leq\rho\leq 2\wedge -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$I=\iint_M\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{\Phi^{-1}(M)}\rho^2\cdot\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\sqrt{2}}^{2}\rho^3\cdot d\rho=\left[\varphi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\sqrt{2}}^{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}(16-4)=$$

$$=\underline{\frac{3\pi}{2}}$$