Vzorové řešení zadání ***C***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.
U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $(\exists x \in \mathbb{R} : \sin x = \pi\ ) \ \Rightarrow\ (\exists y \in \mathbb{R} : 2^y = 0)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

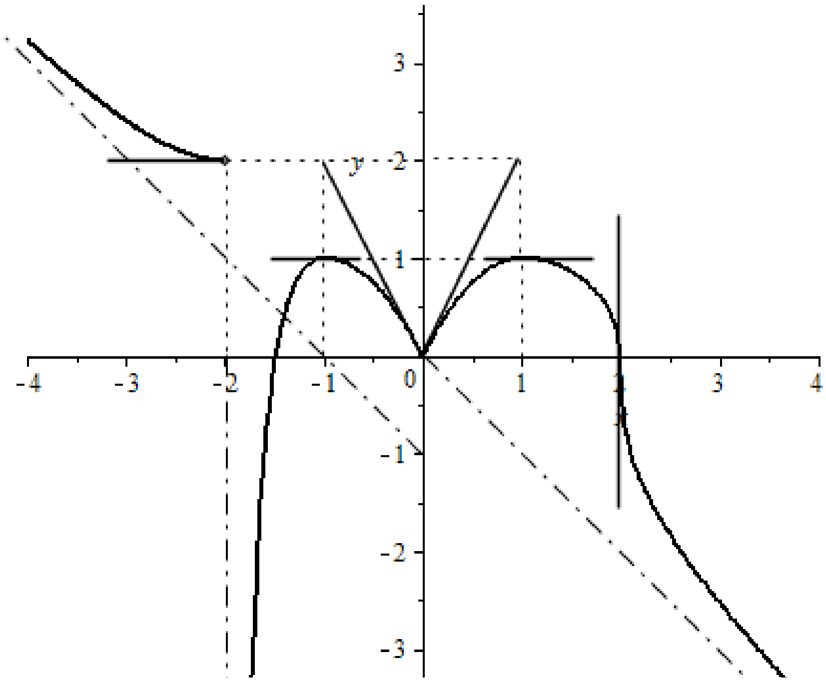
b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b \rangle$, je na $\langle a,b \rangle$ spojitá. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x) = \operatorname{sgn} x, \langle a,b\rangle = \langle -1,1\rangle$

c) Má-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R = a$, potom pro $x = -a$ konverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ R = 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ***diverguje***

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:
$D_f = \mathbb{R}$, pro $x = -2$ nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zleva,
$f(0) = f(2) = 0,\ f(-1) = f(1) = 1,\ f(-2) = 2,$
$f'(-1) = f'(1) = 0,\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2,\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2,\ \lim_{x\to -2^-} f'(x) = 0,$
přímka $x = 2$ je inflexní tečna, $f''(x) > 0$ pro $x < -2$ a $x > 2$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-2,0)$ a $x \in (0,2)$,
přímka $y = -1 - x$ je asymptota pro $x \to -\infty$, přímka $y = -x$ je asymptota pro $x \to \infty$.



3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)(x+1)^2}$

$$f'(x) = \left(\left((1-2x)(x+1)^2\right)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2(x+1)^2 + (1-2x)\cdot 2(x+1)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x+1)\left(-x-1+1-2x\right)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{-\cancel{3}\cdot x}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x) = 0$ *pro* $x = 0,\ f'(x)\ \nexists$ *pro* $x = -1 \vee x = \frac{1}{2}.$

Znaménko derivace:

$$\begin{array}{c|ccccccc} f'(x) & - & & + & & - & & - \\ \hline & \searrow & -1 & \nearrow & 0 & \searrow & \tfrac{1}{2} & \searrow \\ & & \text{min} & & \text{max} & & & \end{array}$$

Lokální maximum v $x=0$, $f_{\max} = f(0)=1$, lokální minimum v $x=-1$, $f_{\min} = f(-1)=0$.

4) Řešte rovnici $\sum_{n=2}^{\infty}(x+2)^n = \frac{1}{2}(x+2)(x+3)$

Obor konvergence řady: $|x+2|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-3,-1).$

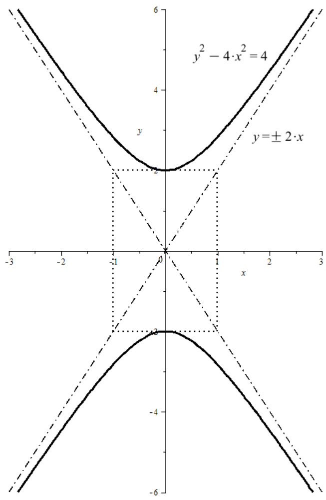
$$\sum_{n=2}^{\infty}(x+2)^n = (x+2)^2\cdot\frac{1}{1-(x+2)} = -\frac{(x+2)^2}{x+1}$$

$$-\frac{(x+2)^2}{x+1} = \frac{1}{2}(x+2)(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-2}} \vee 2(x+2) = -(x+1)(x+3)$$

$$x^2+6x+7=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3\pm\sqrt{2} = \begin{cases} -3-\sqrt{2}\notin(-3,-1) \\ -3+\sqrt{2}\in(-3,-1) \end{cases}$$

Řešení rovnice: $\underline{\underline{x=-2}} \vee \underline{\underline{x=-3+\sqrt{2}}}$

5) Je dána funkce $f(x,y)=e^{y^2-4x^2}$ a bod $[0,2]$.



a) Najděte a nakreslete vrstevnici funkce f procházející bodem A

$f(0,2)=e^4, \quad e^{y^2-4x^2}=e^4 \quad \Leftrightarrow \quad y^2-4x^2=4$

- hyperbola s reálnou poloosou $y=2$, imaginární $x=1$

a s asymptotami $y=\pm 2x$

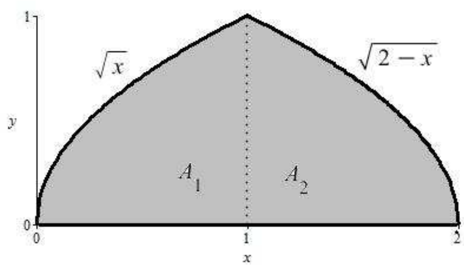
b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě A.

$f'_x(x,y)=e^{y^2-4x^2}\cdot(-8x),\ f'_x(0,2)=0, \quad f'_y(x,y)=e^{y^2-4x^2}\cdot 2y,\ f'_y(0,2)=4e^4,$

$\mathbf{grad} f(0,2) = \underline{\underline{\left(0,4e^4\right)}}$

6) Vypočítejte $\int_A y\,dx\,dy$, kde A je omezena křivkami o rovnicích $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{2-x},\ y=0$.

Množinu A načrtněte.



$$A=A_1\cup A_2, \quad A_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1\wedge 0\le y\le\sqrt{x}\right\},$$
$$A_2=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2\wedge 0\le y\le\sqrt{2-x}\right\}$$

$$\int_A y\,dx\,dy = \int_{A_1} y\,dx\,dy + \int_{A_2} y\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy + \int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2-x}} y\,dy = \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{x}}dx + \int_1^2\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{2-x}}dx =$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \tfrac{1}{2}\int_1^2(2-x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\left[2x-\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\left(4-2-2+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$