Vzorové řešení zadání ***D***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \cos x \le -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R} : |\sin y| > 1\right)$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

b) Jestliže $f'(a) \nexists$, má funkce f v bodě a extrém. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0$

c) Platí-li $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \ge b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

~~pravdivý~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{2n}$

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:

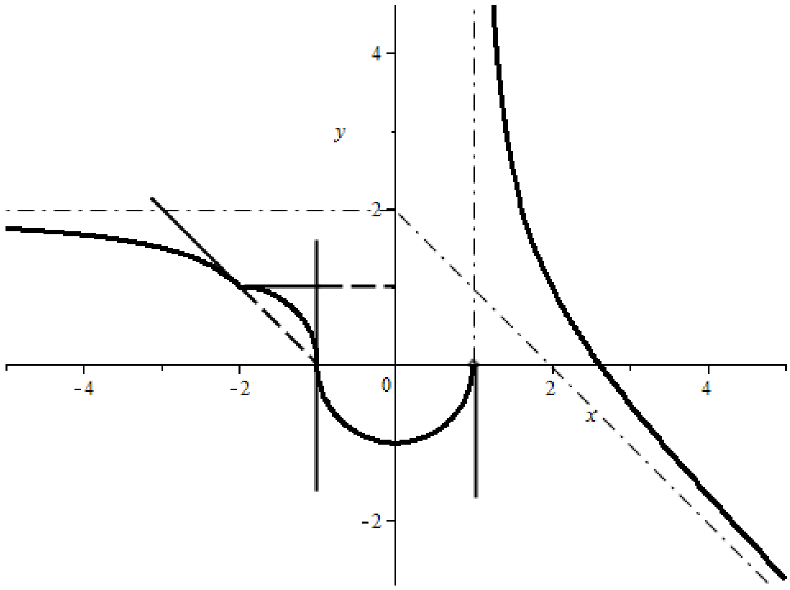
Je spojitá na $\mathbb{R} - \{1\}$, pro $x = 1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zleva,

$f(-1) = f(1) = 0,\ f(-2) = 1,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2,$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \infty,\ \lim_{x \to -1} f'(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -2^+} f'(x) = 0,\ \lim_{x \to -2^-} f'(x) = -1,$

$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -2)$ a $x \in (-2, -1)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (-1, 1)$ a $x \in (1, \infty)$,

přímka $y = -x + 2$ je asymptota grafu funkce pro $x \to \infty$.

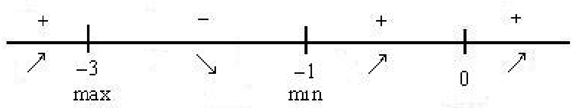


3) Najděte lokální extrémy funkce $\sqrt[3]{x(x+3)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 + 2x(x+3)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x+3)^4}} = \frac{\cancel{(x+3)}\,(x+3+2x)}{3\,\cancel{(x+3)}\,\sqrt[3]{x^2(x+3)}} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = -1$, $f'(x) \nexists$ pro $x = -3 \vee x = 0$.

Znaménko 1. derivace:



$\underline{\underline{f_{\max} = f(-3) = 0,}}$ $\underline{\underline{f_{\min} = f(-1) = -\sqrt[3]{4}.}}$

4) Zjistěte, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5\sqrt{n}}$ konvergentní nebo divergentní. V případě konvergence zjistěte, kolik členů je třeba sečíst, aby platilo $|s-s_n|<10^{-3}$.

Řada je alternující, použijeme Leibnizovo kriterium: má platit $|a_n|>|a_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty}|a_n|=0$:

$$\sqrt{n}<\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{5\sqrt{n}}>\frac{1}{5\sqrt{n+1}} \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5\sqrt{n}}=0 \quad \Rightarrow$$ řada je konvergentní.

V konvergentní alternující řadě platí $|s-s_n|<|a_{n+1}|$ - hledáme n, pro které je $\frac{1}{5\sqrt{n+1}}<10^{-3}$.

$$\frac{1}{5\sqrt{n+1}}<10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{n+1}>10^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1}>2\cdot 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad n+1>4\cdot 10^4=40\,000$$

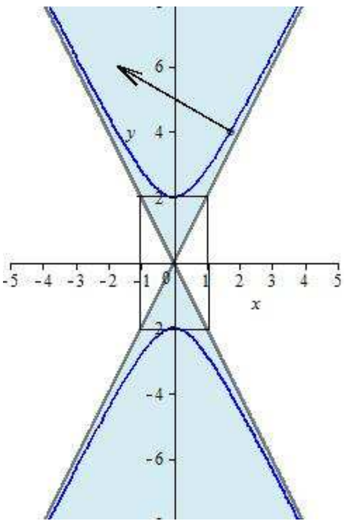
Pro požadovanou přesnost je třeba sečíst alespoň 40 000 členů řady.

5) Je dána funkce $f(x,y)=\sqrt{y^2-4x^2}$ a bod $A=\left[\sqrt{3};4\right]$.

a) Najděte a nakreslete definiční obor funkce f.

b) Najděte rovnici vrstevnice funkce f procházející bodem A a tuto vrstevnici nakreslete do předchozího obrázku.

c) Vypočítejte a do stejného obrázku zakreslete $\operatorname{grad} f(A)$.



a) $y^2-4x^2\ge 0 \Leftrightarrow y^2\ge 4x^2 \Leftrightarrow |y|\ge 2|x|$

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y|\le 2|x|\right\}$$

b) Funkční hodnota v bodě A: $f(A)=\sqrt{16-4\cdot 3}=2$

Rovnice vrstevnice $\sqrt{y^2-4x^2}=2 \Rightarrow -4x^2+y^2=4 \Rightarrow -x^2+\frac{y^2}{4}=1$

- hyperbola s poloosami $a=1,\ b=2$.

c) $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(-\frac{4x}{\sqrt{y^2-4x^2}},\frac{y}{\sqrt{y^2-4x^2}}\right)$, $\operatorname{grad} f(A)=\left(-2\sqrt{3};2\right)$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I=\int_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená křivkami o rovnicích $y=\frac{8}{x}$, $y=\sqrt{x}$ a $x=5$. Množinu načrtněte.

Průsečíky paraboly a hyperboly: $\frac{8}{x}=\sqrt{x} \Rightarrow x^3=64$, tj. $x=4$, tedy $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,4\le x\le 5 \wedge \frac{8}{x}\le y\le\sqrt{x}\right\}$

$$I=\int_4^5 dx\int_{8/x}^{\sqrt{x}} xy\,dy=\int_4^5 dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{8/x}^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int_4^5\left(x^2-\frac{64}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-64\ln x\right]_4^5=\frac{1}{6}\left(5^3-4^3\right)-32\left(\ln 5-\ln 4\right)==\frac{61}{6}-32\ln\frac{5}{4}$$