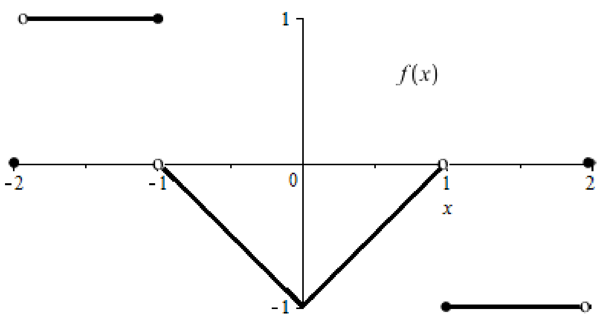
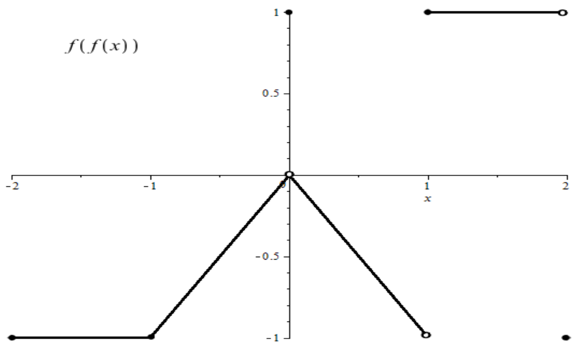
Vzorové řešení zadání **B**

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ 1 & x\in(-2,-1\rangle \\ -x-1 & x\in(-1,0\rangle \\ x-1 & x\in(0,1) \\ -1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle -1,0\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{1\}\right)$.





$\underline{f\left(\langle -1,0\rangle\right)=\langle -1,0)\cup\{1\}}$ $\underline{f^{-1}\left(\{1\}\right)=(-2,-1\rangle}$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x\in\mathbb{R}:\ \left(|x|<0 \ \Rightarrow\ \cos x\le 2\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

c) Je-li funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ ohraničená, je zde spojitá. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $\langle a,b\rangle=\langle -1,1\rangle$

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-8}$, $I=\langle -5,0\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-8}=\left(x^2+2x-8\right)^{\frac{1}{3}},\qquad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x+1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1,\quad f'(x)\ \nexists\Leftrightarrow x=2\vee x=-4\qquad -1\in I,\quad 2\notin I,\quad -4\in I$$

$f(-5)=\sqrt[3]{17}$ max

$f(-4)=0$

$f(-1)=-\sqrt[3]{9}$ min

$f(0)=\sqrt[3]{-8}=-2$

maximum v bodě $x=-5$, $f_{\max}=\sqrt[3]{17}$, ***minimum v bodě*** $x=-1$, $f_{\min}=-\sqrt[3]{9}$.

4) Vypočítejte integrál $I = \int\limits_0^{\infty} \left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+7} + \dfrac{4}{x^2+1} \right) dx$

$$I = \left[\ln(x+3) - \ln(x+7) + 4\operatorname{arctg} x \right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \left(\ln\frac{x+3}{x+7} + 4\operatorname{arctg} x \right) - \ln\frac{3}{7} - 4\operatorname{arctg} 0 = \ln 1 + 2\pi + \ln\frac{7}{3} =$$

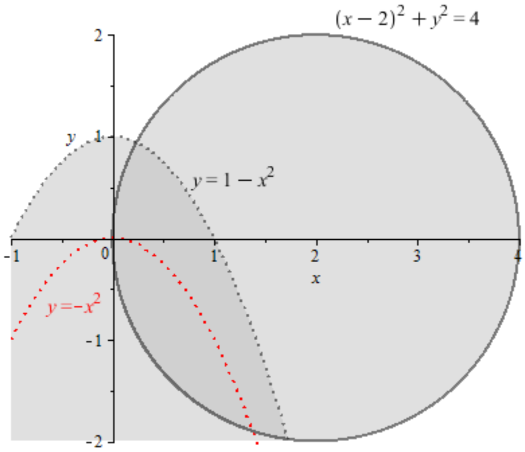
$$= 2\pi + \ln\frac{7}{3}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*, je-li $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y)}$

$$D_f : 4x - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 1 - x^2 - y > 0 \wedge 1 - x^2 - y \neq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y < 1 - x^2 \wedge y \neq -x^2$$

$$D_f = \left\{ (x,y) \,|\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y < 1 - x^2 \wedge y \neq -x^2 \right\}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I = \iint\limits_M f(x,y)\, dx dy$, je-li

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ a } M = \left\{ (x,y) \middle| 0 \leq y \leq x \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$$

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (\rho, \varphi) \middle| 1 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$I = \iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \iint\limits_{\Phi^{-1}(M)} \rho \cdot \rho \, d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^3 \rho^2 d\rho = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_1^3 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \left[3^3 - 1 \right] =$$

$$= \frac{13}{6}\pi$$