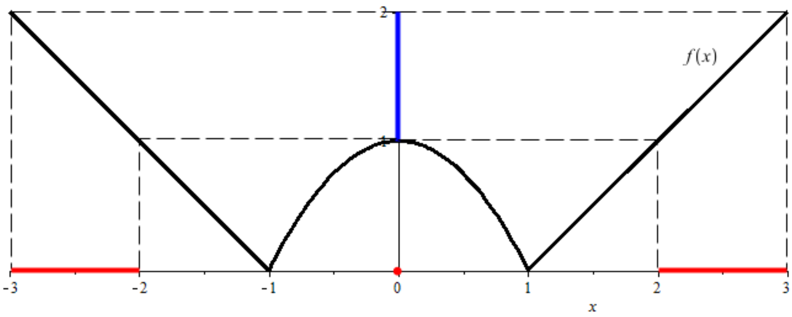
Vzorové řešení zadání **M**

1) Funkce f a g jsou zadány předpisy $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ |x|-1 & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1-x & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$.

Najděte předpis pro složenou funkci $g\circ f$ a určete $f^{-1}(\langle 1,2\rangle)$.



$f^{-1}(\langle 1,2\rangle)=\langle -3,-2\rangle\cup\{0\}\cup\langle 2,3\rangle$

$g(f(x))=\begin{cases}1-f(x) & f(x)<0\\ 1 & f(x)\ge 0\end{cases}$. vyřešíme nerovnosti napravo:

$|x|\le 1\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow 1-x^2\ge 0$
$|x|>1\Rightarrow |x|-1>0$
$\Rightarrow f(x)\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, což se dalo zjistit z grafu funkce f.

$g(f(x))=\begin{cases}1-f(x) & f(x)<0 & \textit{neplatí nikdy}\\ 1 & f(x)\ge 0 & \textit{platí vždy}\end{cases}\Rightarrow g(f(x))=1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $(\exists x\in\mathbb{R}:\sin^2 x+\cos^2 x=4)\Rightarrow$ všichni studenti, kteří dnes dělají zkoušku z IMA, ji udělají. ***pravdivý***

b) Je-li funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ ohraničená, je na $\langle a,b\rangle$ spojitá. ***nepravdivý* protipříklad:** $f(x)=\operatorname{sgn} x$ na $\langle -1,1\rangle$

c) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní, platí $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. ***pravdivý***

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-x)^2}$, $I=\langle -2,2\rangle$.

$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-x)^2}=(x^2-x)^{\frac{2}{3}}$, $\quad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{2x-1}{(x^2-x)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}\frac{2x-1}{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, $\quad f'(x)\not\exists\Leftrightarrow x=0\vee x=1\qquad 0\in I,\ \ 1\in I,\ \ 2\in I$

$f(-2)=\sqrt[3]{(4+2)^2}=\sqrt[3]{36}\qquad \max$

$f(0)=0\qquad \min$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

$f(1)=0\qquad \min$

$f(2)=\sqrt[3]{(4-2)^2}=\sqrt[3]{4}$

maximum v bodě $x=-2$, $f_{\max}=\sqrt[3]{36}$, ***minimum v bodech*** $x=0, x=1$, $f_{\min}=0$.

4) Pro n-tý částečný součet nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ platí $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Určete a_n a s.

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^n} - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \qquad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

$\underline{a_n = \frac{1}{2^n}}$ $\qquad\qquad$ $\underline{s = 1}$

5) $f(x,y) = \ln\frac{x^2}{y}$. Najděte bod, ve kterém je $\operatorname{grad} f(x,y) = (1,1)$.

$$f(x,y) = \ln\frac{x^2}{y} = 2\ln x - \ln y, \quad f'_x = \frac{2}{x},\ f'_y = -\frac{1}{y}, \quad \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{2}{x}, -\frac{1}{y}\right).$$

$$\left(\frac{2}{x}, -\frac{1}{y}\right) = (1,1) \Leftrightarrow x = 2,\ y = -1$$

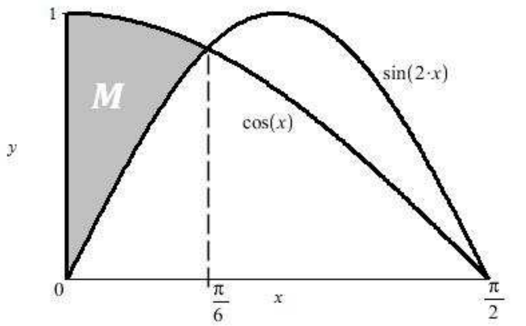
$\underline{[x,y] = [2,-1]}$

6) Vypočítejte integrál $I = \int_M x\,dxdy$, je-li M ohraničená grafy funkcí $y = \cos x,\ y = \sin 2x$ a osou y $(x \ge 0)$.

Určíme průsečíky grafů:

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$



$$M = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \\ \sin 2x \le y \le \cos x \end{array} \right\}$$

$$I = \int_M x\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,dx \int_{\sin 2x}^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x[y]_{\sin 2x}^{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x(\cos x - \sin 2x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x - \sin 2x & v = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \left[x\left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left[-\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\cos 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1$$

$\underline{I = \frac{1}{8}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right) - 1}$