Vzorové řešení zadání ***C***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \sin x \leq -\frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \left(\exists y \in \mathbb{R} : |\cos y| > 1\right)$ **_pravdivý_** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f na $\langle a, b\rangle$ spojitá, je zde diferencovatelná.   ~~***pravdivý***~~ **_nepravdivý_** ***protipříklad:***

$f(x) = |x|, \langle a,b\rangle = \langle -1,1\rangle$

c) Platí-li $\forall n \in \mathbb{N}\; a_n \leq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.   ~~***pravdivý***~~ **_nepravdivý_** ***protipříklad:***

$a_n = \frac{1}{n^2},\, b_n = \frac{2}{n^2}$

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:

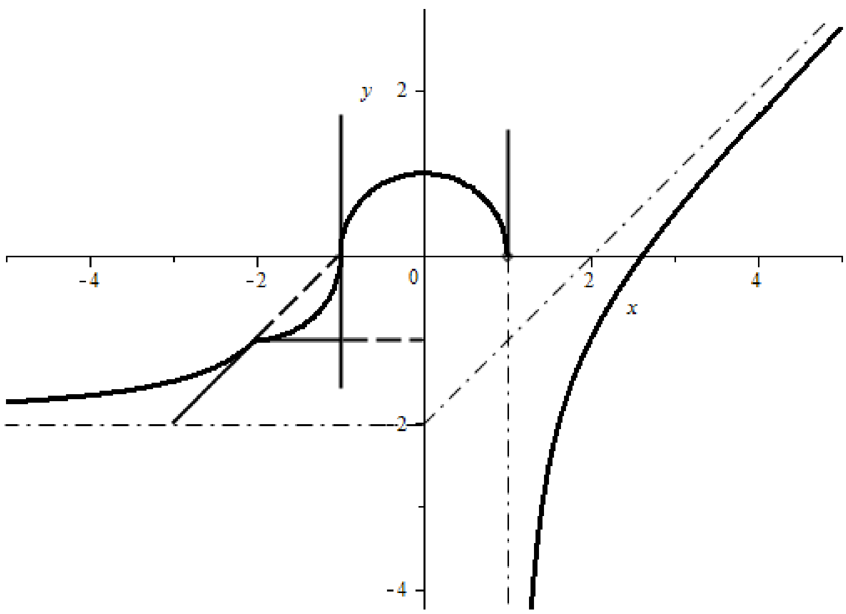
Je spojitá na $\mathbb{R} - \{1\}$, pro $x = 1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zleva,

$f(-1) = f(1) = 0,\; f(-2) = -1,\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2,$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty,\; \lim\limits_{x\to -1} f'(x) = \infty,\; \lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = 0,\; \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = 1,$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty,-2)$ a $x \in (-2,-1)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1,1)$ a $x \in (1,\infty)$,

přímka $y = x - 2$ je asymptota grafu funkce pro $x \to \infty$.

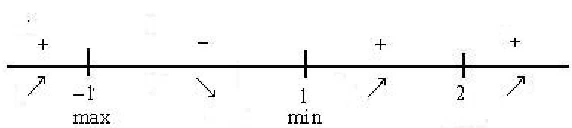


3) Najděte lokální extrémy funkce $\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-2) + (x+1)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^4(x-2)^2}} = \frac{\cancel{(x+1)}\,(2x-4+x+1)}{3\,\cancel{(x+1)}\,\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 1$, $f'(x) \nexists$ pro $x = -1 \vee x = 2$.

Znaménko 1. derivace:



$\underline{\underline{f_{\max} = f(-1) = 0}},\qquad \underline{\underline{f_{\min} = f(1) = -\sqrt[3]{4}}}.$

4) Zjistěte, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4\sqrt{n}}$ konvergentní nebo divergentní. V případě konvergence zjistěte, kolik členů je třeba sečíst, aby platilo $|s-s_n|<10^{-3}$.

Řada je alternující, použijeme Leibnizovo kriterium: má platit $|a_n|>|a_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty}|a_n|=0$:

$$\sqrt{n}<\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{n}}>\frac{1}{4\sqrt{n+1}} \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{n}}=0 \quad \Rightarrow$$ řada je konvergentní.

V konvergentní alternující řadě platí $|s-s_n|<|a_{n+1}|$ - hledáme n, pro které je $\frac{1}{4\sqrt{n+1}}<10^{-3}$.

$$\frac{1}{4\sqrt{n+1}}<10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{n+1}>10^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1}>\tfrac{1}{4}\cdot 10^3 \quad \Leftrightarrow \quad n+1>\tfrac{1}{16}\cdot 10^6=62\,500$$

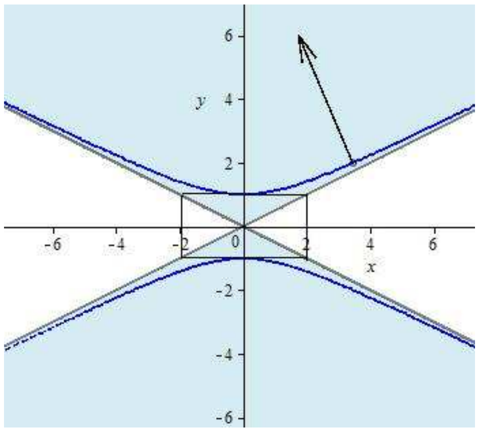
Pro požadovanou přesnost je třeba sečíst alespoň 62 500 členů řady.

5) Je dána funkce $f(x,y)=\sqrt{4y^2-x^2}$ a bod $A=\left[2\sqrt{3};2\right]$.

a) Najděte a nakreslete definiční obor funkce f.

b) Najděte rovnici vrstevnice funkce f procházející bodem A a tuto vrstevnici nakreslete do předchozího obrázku.

c) Vypočítejte a do stejného obrázku zakreslete $\operatorname{grad} f(A)$.



a) $4y^2-x^2\ge 0 \Leftrightarrow y^2\ge \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow |y|\ge\frac{|x|}{2}$

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y|\ge\frac{|x|}{2}\right\}$$

b) Funkční hodnota v bodě A: $f(A)=\sqrt{16-4\cdot 3}=2$

Rovnice vrstevnice

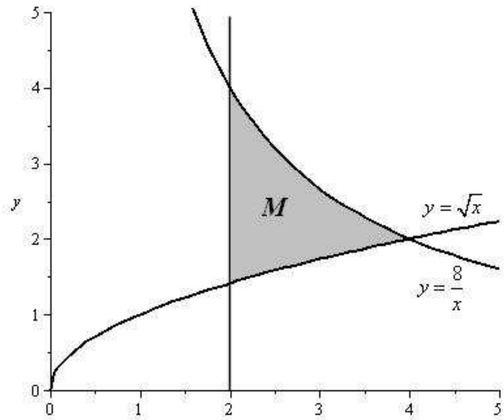
$$\sqrt{4y^2-x^2}=2 \Rightarrow -x^2+4y^2=4 \Rightarrow -\frac{x^2}{4}+y^2=1$$ - hyperbola

s poloosami $a=2,\ b=1$.

c)

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(-\frac{x}{\sqrt{4y^2-x^2}},+\frac{4y}{\sqrt{4y^2-x^2}}\right),\quad \operatorname{grad} f(A)=\left(-\sqrt{3};4\right)$$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I=\int_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená křivkami o rovnicích $y=\frac{8}{x},\ y=\sqrt{x}$ a $x=2$. Množinu načrtěte.



Průsečíky paraboly a hyperboly: $\frac{8}{x}=\sqrt{x} \Rightarrow x^3=64$, tj. $x=4$, tedy

$$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,2\le x\le 4\wedge \frac{8}{x}\le y\le\sqrt{x}\right\}$$

$$I=\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{8/x} xy\,dy=\int_2^4 dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{\sqrt{x}}^{8/x}=\frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{64}{x}-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[64\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_2^4=32(\ln 4-\ln 2)-\frac{1}{6}\left(4^3-2^3\right)=32\ln 2-\frac{28}{3}$$