Vzorové řešení zadání <u>***J***</u>

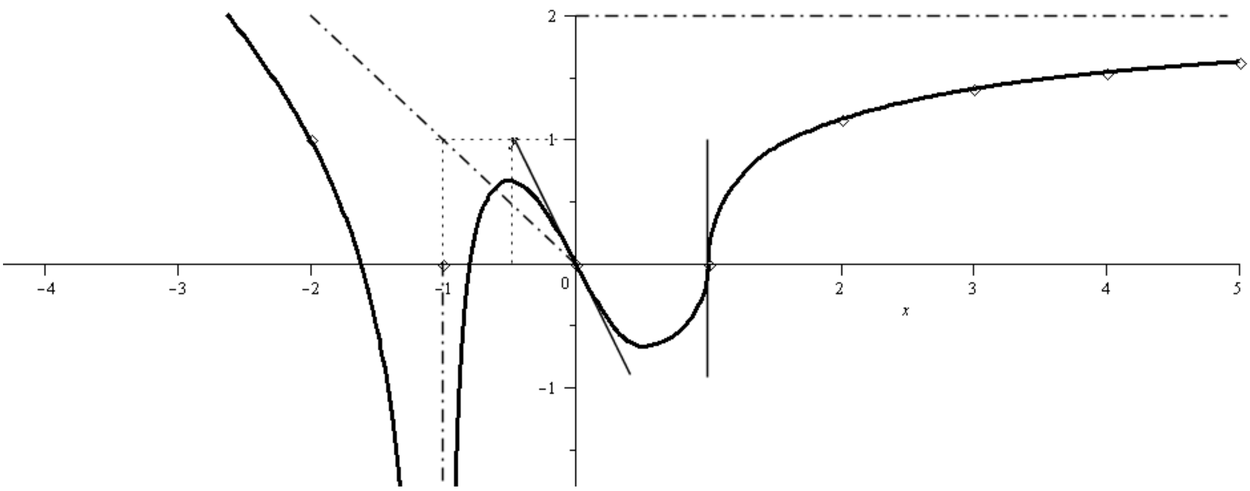
1) Graf funkce spojité na $\mathbb{R}-\{-1\}$, pro kterou platí:

$f(0)=f(1)=0,\quad \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$

$f'(0)=-2,\quad \lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\infty$

přímka $y=-x$ je asymptota pro $x\to-\infty$.

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny ke grafu funkce v bodě $x=0$ a $x=1$.



2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x\in\mathbb{R}: \ |\cos x|=3 \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{R}: y^2\le -1$ ***<u>pravdivý</u>***

b) f je prosté zobrazení, platí-li $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: \ x_1\ne x_2 \Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$ ***<u>pravdivý</u>***

c) Je-li funkce f na intervalu (a,b) spojitá, je na (a,b) ohraničená. ***<u>nepravdivý</u> protipříklad :***

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ na $(0,1)$ (otevřený interval)

3) Asymptoty grafu funkce $f(x)=\dfrac{2x^2}{3-x}$:

$$D_f=\mathbb{R}-\{3\},\quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^2}{3-x}=2\cdot 9\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{3-x}=\begin{cases}18\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{3-x}=\infty\\[2mm] 18\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{3-x}=-\infty\end{cases}$$

- svislá asymptota <u>$x=3$</u>

asymptota se směrnicí $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{3-x}=-2,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{3-x}+2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+6x-2x^2}{3-x}=-6$$

asymptota se směrnicí <u>$y=-2x-6$</u>

4) $\displaystyle\int_1^e \frac{x}{3}\cdot\ln x^5 dx = \int_1^e \frac{5}{3}x\cdot\ln x\,dx = \frac{5}{3}\int_1^e x\cdot\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & u'=\dfrac{1}{x} \\ v'=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix} = \frac{5}{3}\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right) =$

$\displaystyle = \frac{5}{3}\left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{5}{12}\left(e^2+1\right)}$

5) Rovnice tečné roviny a normálový vektor ke grafu funkce $f(x,y) = y^{x^y}$ v bodě $[3,1,?]$:

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ má tvar

$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$f(x_0,y_0) = 1^{3^1} = 1,$

$f'_x = \left(e^{x^y \ln y}\right)'_x = e^{x^y \ln y}\left(y\cdot x^{y-1}\ln y\right), \quad f'_x(x_0,y_0) = 0$

$f'_y = \left(e^{x^y \ln y}\right)'_y = e^{x^y \ln y}\left(x^y \ln x \ln y + x^y \dfrac{1}{y}\right), \quad f'_y(x_0,y_0) = 1\cdot(0+3) = 3$

Parciální derivace v daném bodě můžeme počítat i jednodušeji:

$f'_x(3,1) = \left(f(x,1)\right)'\big|_{x=3} = \left(1^{x^1}\right)'\big|_{x=3} = (1)'\big|_{x=3} = 0$

$f'_y(3,1) = \left(f(3,y)\right)'\big|_{y=1} = \left(y^{3^y}\right)'\big|_{y=1} = \left(e^{3^y \ln y}\right)'\big|_{y=1} = e^{3^y \ln y}\left(3^y \ln 3\cdot\ln y + 3^y\dfrac{1}{y}\right)\Big|_{y=1} = 3 \quad (\ln 1 = 0)$

Tečná rovina: $z-1 = 3(y-1) \Leftrightarrow \underline{3y-z-2=0}$, normálový vektor: $\underline{(0,3,-1)}$.

6) Najděte $x\in\mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n = \frac{4}{3}x$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (x-1)^n + \cdots$ je geometrická řada,

$q = x-1, \quad a_0 = 1, \quad s = \dfrac{1}{1-(x-1)} = \dfrac{1}{2-x},$ řada konverguje pro $|x-1|<1 \Rightarrow x\in(0,2)$.

$\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{4}{3}x \quad\Rightarrow\quad 3 = 4x(2-x) \quad\Rightarrow\quad 4x^2-8x+3=0 \quad x_{1,2} = \dfrac{8\pm\sqrt{16}}{8} = \begin{cases}\dfrac{3}{2}\in(0,2)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\in(0,2)\end{cases}$

Výsledek: $\underline{x=\dfrac{3}{2} \vee x=\dfrac{1}{2}}$