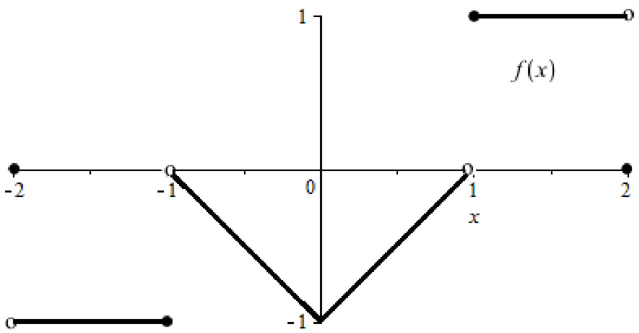
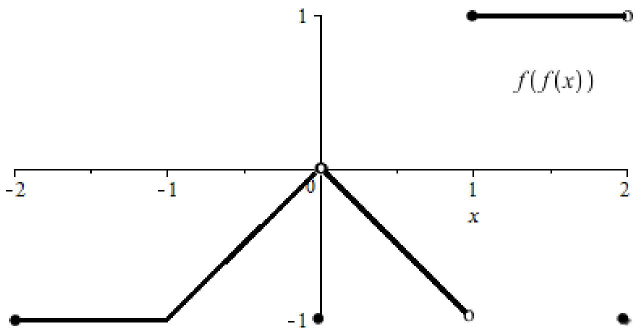
Vzorové řešení zadání $\underline{A}$

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ -1 & x\in(-2,-1\rangle \\ -x-1 & x\in(-1,0\rangle \\ x-1 & x\in(0,1) \\ 1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle 0,1\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{0\}\right)$.





$f\left(\langle 0,1\rangle\right)=\langle -1,0)\cup\{1\}$ $\qquad f^{-1}\left(\{0\}\right)=\{-2,2\}$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x\in\mathbb{R}:\ \left(x^2<0 \quad\Rightarrow\quad \sin x<5\right)$ ***<u>pravdivý</u>***   ***~~nepravdivý~~ protipříklad:***

b) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.   ***~~pravdivý~~***   ***<u>nepravdivý</u> protipříklad:*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

c) Je-li funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, je zde ohraničená.   ***<u>pravdivý</u>***   ***~~nepravdivý~~ protipříklad:***

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-8},\quad I=\langle -2,3\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-8}=\left(x^2+2x-8\right)^{\frac{1}{3}},\qquad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x+1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1,\quad f'(x)\nexists\Leftrightarrow x=2\vee x=-4 \qquad -1\in I,\quad 2\in I,\quad -4\notin I$$

$$f(-2)=\sqrt[3]{-8}=-2$$

$$f(-1)=\sqrt[3]{-9}=-\sqrt[3]{9} \quad \text{min}$$

$$f(2)=0$$

$$f(3)=\sqrt[3]{7} \qquad\qquad \text{max}$$

maximum v bodě $x=3$, $f_{\max}=\sqrt[3]{7}$, ***minimum v bodě*** $x=-1$, $f_{\min}=-\sqrt[3]{9}$.

4) Vypočítejte integrál $I=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$

$$I=\left[\ln(x+1)-\ln(x+4)+2\operatorname{arctg}x\right]_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x+4}+2\operatorname{arctg}x\right)-\ln\frac{1}{4}-2\operatorname{arctg}0=\ln 1+\pi+\ln 4=$$

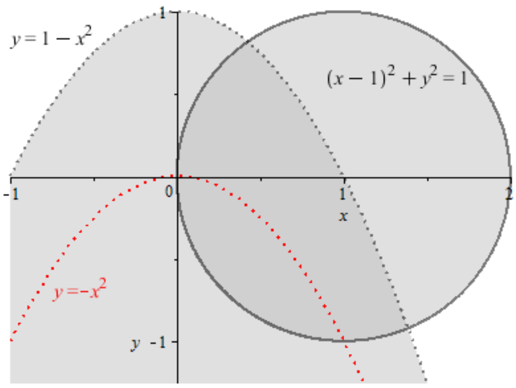
$$\underline{=\pi+\ln 4}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*, je-li $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2-y^2}}{\ln(1-x^2-y)}$

$$D_f: 2x-x^2-y^2\geq 0\wedge 1-x^2-y>0\wedge 1-x^2-y\neq 1\quad\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+y^2\leq 1\wedge y<1-x^2\wedge y\neq -x^2$$

$$\underline{D_f=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\leq 1\wedge y<1-x^2\wedge y\neq -x^2\right\}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I=\int\limits_M f(x,y)\,dxdy$, je-li

$$f(x,y)=x^2+y^2 \text{ a } M=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq y\wedge 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$$

$$\Phi^{-1}(M)=\left\{(\rho,\varphi)\,\middle|\,1\leq\rho\leq 2\wedge\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$I=\int\limits_M\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_{\Phi^{-1}(M)}\rho^2\cdot\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_1^2\rho^3d\rho=\left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}\left[2^4-1\right]=$$

$$\underline{=\frac{15}{16}\pi}$$