Vzorové řešení zadání $\underline{E}$

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x \in \mathbb{R}: (\sin 5x \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 < 0)$ ***pravdivý*** ~~**nepravdivý**~~ ***protipříklad:***

b) Má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, je v tomto bodě spojitá. ~~**pravdivý**~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = 0$$

c) Funkce $f(x) = x$ je jediná funkce, která je sama k sobě inverzní ~~**pravdivý**~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = -x$$

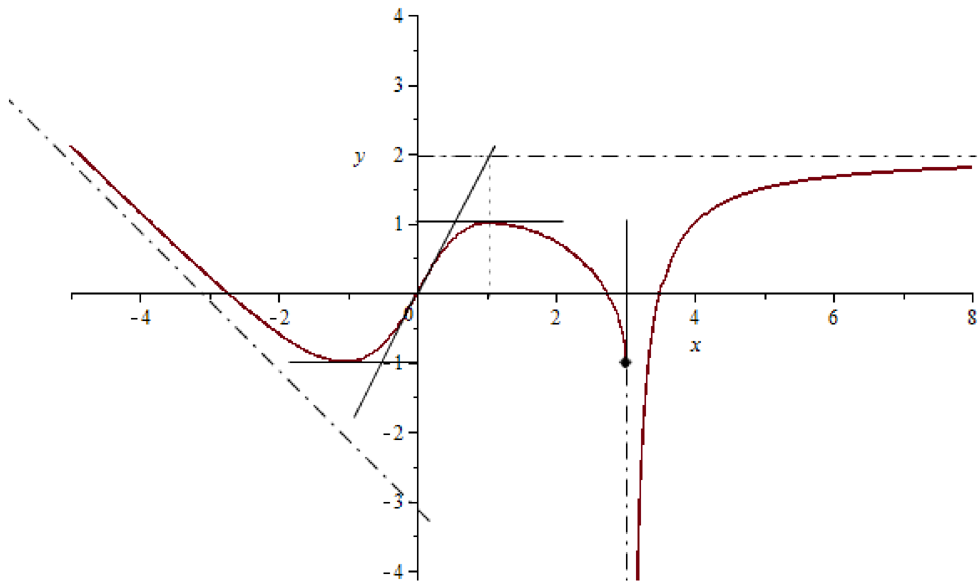
2) Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, v bodě $x = 3$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zleva,

$f(-1) = f(3) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\quad f'(-1) = f'(1) = 0,\ f'(0) = 2,\ \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -\infty,$

$f''(x) > 0$ pro $x < 0$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (0,3)$ a pro $x > 3$,

přímka $x + y + 3 = 0$ je asymptota pro $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$.



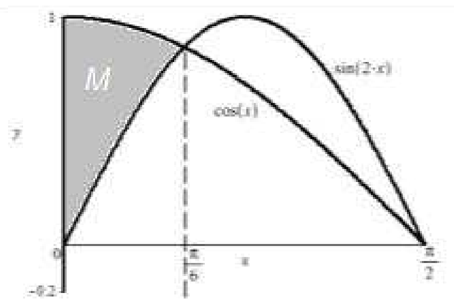
3) Určete obsah části roviny $M = \{(x, y) \mid \sin 2x \leq y \leq \cos x \wedge x \geq 0\}$ $\quad (x < \frac{\pi}{2})$. Množinu načrtněte.

Určíme průsečíky:

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2 \sin x \cos x$$

1. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ 2. $\sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x)\, dx = \left[\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$



4) Pomocí rozvoje integrované funkce do nekonečné řady, pravidla o záměně sumy a integrálu a vhodného pravidla pro numerickou sumaci vypočítejte integrál

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^6 + 64}\, dx = \frac{1}{64} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^6}\, dx$$

s chybou menší než 10^{-6}. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují. Pomůcka: $2^{19} = 524\,288$.

Výraz $\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^6}$ je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^6\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{6n}$ s kvocientem $q=-\left(\frac{x}{2}\right)^6$, která konverguje pro $|q|=\left|\left(\frac{x}{2}\right)^6\right|<1\Leftrightarrow|x|^6<2^6\Leftrightarrow x\in\langle-2,2\rangle$. Protože $\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle\subset\langle-2,2\rangle$, můžeme integrovat člen po členu.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^6+64}\,dx=\frac{1}{64}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^6}\,dx=\frac{1}{64}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{6n}}x^{6n}\right)dx=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{6n}}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{6n}dx\right)=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{6n}}\left[\frac{x^{6n+1}}{6n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{6n}}\cdot\frac{1}{2^{6n+1}(6n+1)}=\frac{1}{2^6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{13}\cdot 7}+\frac{1}{2^{15}\cdot 13}-\cdots\right)=\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^{19}\cdot 7}+\frac{1}{2^{21}\cdot 13}-\cdots$$ Dostali jsme alternující číselnou řadu, pro jejíž součet platí $|s-s_n|<|a_{n+1}|$ - chyba součtu je menší než první vynechaný člen (v absolutních hodnotách). Protože je $2^{19}=524\,288$, platí $\frac{1}{2^{19}\cdot 7}<10^{-6}$, tedy

$$\underline{\underline{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^6+64}\,dx=\frac{1}{128}+R\text{, kde }|R|<10^{-6}}}$$

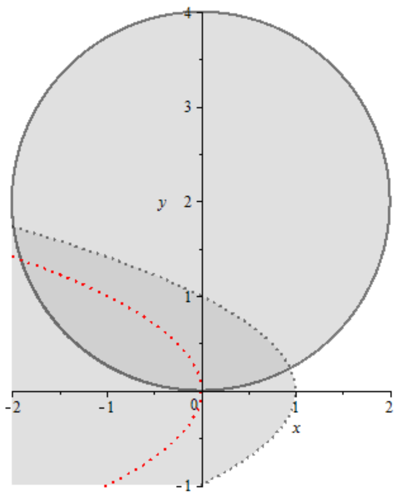
5) Určete a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{4y-x^2-y^2}}{\ln(1-x-y^2)}$

$D_f=\left\{(x,y)\ \middle|\ 4y-x^2-y^2\geq 0\ \wedge\ 1-x-y^2>0\ \wedge\ 1-x-y^2\neq 1\right\}$

$4y-x^2-y^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2-4y\leq 0\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2\leq 4$ - kruh se středem $[0,2]$ a poloměrem 2

$1-x-y^2>0\Leftrightarrow y^2<-(x-1)$ - „vnitřek“ paraboly s vrcholem $[1,0]$ otevřené doleva

$1-x-y^2=1\Leftrightarrow y^2=-x$ - parabola s vrcholem v počátku otevřená doleva



Definiční obor je průnik kruhu $x^2+(y-2)^2\leq 4$ s vnitřkem paraboly $y^2<-(x-1)$, ze kterého jsou vyňaty body paraboly $y^2=-x$

6) Najděte vázané lokální extrémy funkce $f(x,y)=2x^3+31x+5xy+24$ za podmínky $3x-y+1=0$.

Vazba je v explicitním tvaru, $3x-y+1=0\Leftrightarrow y=3x+1$, můžeme do účelové funkce dosadit a vyšetřovat extrémy vzniklé funkce jedné proměnné:

$u(x)=f(x,3x+1)=2x^3+31x+5x(3x+1)+24=2x^3+15x^2+36x+24$

$u'(x)=6x^2+30x+36=6\left(x^2+5x+6\right)=6(x+2)(x+3)$

$u'(x)=0$ pro $x_1=-2,\ x_2=-3;\quad y_1=-5,\ y_2=-8$. Stacionární body jsou $A=[-2,-5],\ B=[-3,-8]$.

$u''(x)=12x+30,\quad u''(-2)=6>0$ min, $\quad u''(-3)=-6<0$ max.

$$\underline{\underline{f_{\min}=f(-2,-5)=-4,\quad f_{\max}=f(-3,-8)=-1}}$$