Vzorové řešení zadání ***F***

1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x \in \mathbb{R}: |\cos x| > 5 \quad \Rightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R}: |\sin y| < 5$ ***pravdivý*** ~~*nepravdivý*~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ rostoucí, potom $\exists x_0 \in \langle a,b\rangle$ pro které platí $f(x_0) > 0$.

~~*pravdivý*~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = x, \langle a,b\rangle = \langle -1,0\rangle \quad f(\langle -1,0\rangle) = \langle -1,0\rangle \Rightarrow f(x) \le 0 \quad \forall x \in \langle -1,0\rangle$$

c) Má-li funkce $f(x)$ spojitá na $\mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ maximum, potom platí $f'(x_0) = 0$.

~~*pravdivý*~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = -|x|,\ f_{\max} = f(0) = 0, \quad (-|x|)'\big|_{x=0} \nexists$$

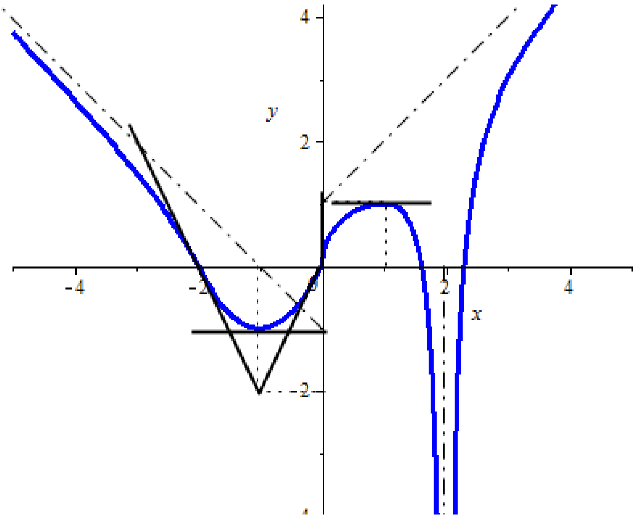
2.B) Načrtněte graf funkce spojité na $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, přímka $x = 2$ je její svislá asymptota, přímka $y = -x - 1$ je asymptota pro $x \to -\infty$ přímka $y = 1 + x$ je asymptota pro $x \to \infty$

$f(-1) = -1,\ f(1) = 1,\ f(-2) = f(0) = 0,$

$f'(-2) = -2,\ f'(-1) = f'(1) = 0,\ f'_-(0) = 2,\ f'_+(0) = \infty,$

$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty,-2)$, $x \in (0,2)$ a $x \in (2,\infty)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (-2,0)$

Do obrázku nakreslete také všechny asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech $x = -2,-1,0,1$.



3.B) Vypočítejte obsah části roviny ohraničené grafem funkce $f(x) = x \cdot \cos 2x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $A = [\frac{\pi}{4}, ?]$ a osou *y*.

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\pi}{4} \cdot \cos\tfrac{\pi}{2} = 0$$

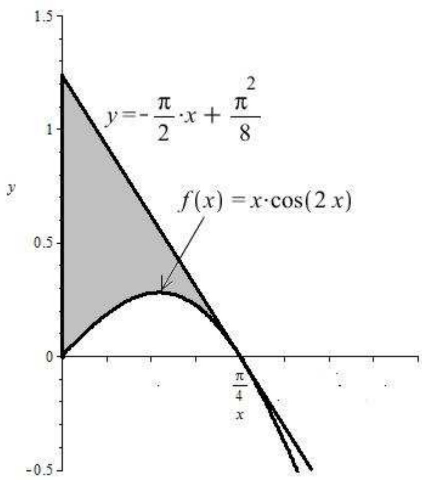
$$f'(x) = \cos 2x - 2x \sin 2x, \quad f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi}{2}$$

$$\text{rovnice tečny}: \quad y = -\tfrac{\pi}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{\pi}{2} \cdot x + \tfrac{\pi^2}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\tfrac{\pi}{2} \cdot x + \tfrac{\pi^2}{8} - x \cdot \cos 2x\right) dx = \begin{vmatrix} & 2.int.\ per\ partes & \\ u = x & & u' = 1 \\ v' = \cos 2x & & v = \tfrac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= \left[-\tfrac{x^2}{4} + \tfrac{\pi^2}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\tfrac{1}{2}x \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx =$$

$$= -\tfrac{\pi^3}{64} + \tfrac{\pi^3}{32}\tfrac{1}{2} - \tfrac{\pi}{8}\sin\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{\pi^3}{64} - \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi^3 - 8\pi + 16}{64}}}$$



4.B) V nekonečné řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $s_n = 3 - \frac{1}{4^{n+3}}$. Určete a_n a s.

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 3 - \frac{1}{4^{n+3}} - \left(3 - \frac{1}{4^{(n-1)+3}}\right) = -\frac{1}{4^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+2}} = \frac{-1+4}{4^{n+3}} = \underline{\underline{\frac{3}{4^{n+3}}}}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{4^{n+3}}\right) = \underline{\underline{3}}$$

5.B) Najděte a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{1+x^2-y^2}}{\ln(2y-x^2-y^2)}$.

$D_f:\quad 1+x^2-y^2 \ge 0 \wedge 2y-x^2-y^2 > 0 \wedge 2y-x^2-y^2 \ne 1$

$1+x^2-y^2 \ge 0 \Leftrightarrow -x^2+y^2 \le 1$

$-x^2+y^2 = 1$ *je rovnice hyperboly s reálnou poloosou* $b=1$

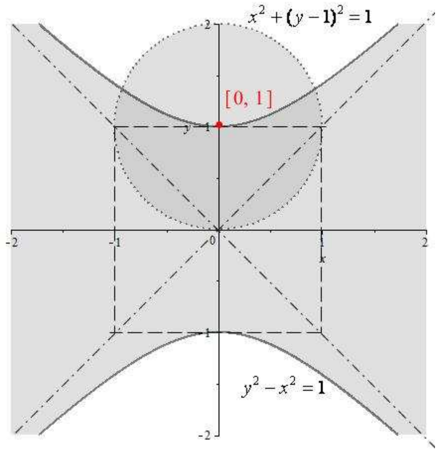
a imaginární $a=1$, *tedy s asymptotami* $y = \pm x$

$2y-x^2-y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 < 1$ *vnitřek kruhu*

se středem $[0,1]$ *a poloměrem* $r=1$,

$2y-x^2-y^2 \ne 1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 0 \wedge y \ne 1$

$$\underline{\underline{D_f = \left\{(x,y) \middle| -x^2+y^2 \le 1 \wedge x^2+(y-1)^2 < 1 \wedge [x,y] \ne [0,1]\right\}}}$$



6.B) Je dána funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{y-x}$. Najděte bod $[x_0,y_0] \in D_f$, ve kterém je $\mathbf{grad} f(x,y) = (1,1)$

a napište rovnici tečné roviny ke grafu zadané funkce v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$.

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^2} \cdot \frac{y-x+(x+y)}{(y-x)^2} = \frac{\cancel{(y-x)^2}}{(y-x)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{2y}{\cancel{(y-x)^2}} = \frac{2y}{2x^2+2y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^2} \cdot \frac{y-x-(x+y)}{(y-x)^2} = \frac{\cancel{(x-y)^2}}{(y-x)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{-2x}{\cancel{(x-y)^2}} = \frac{-2x}{2x^2+2y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$f'(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) = (1,1) \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2+y^2 \wedge -x = x^2+y^2 \Rightarrow y = -x \wedge x = -2x^2$$

$$\Rightarrow \quad [x_0,y_0] = [0,0] \vee [x_0,y_0] = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \quad [0,0] \notin D_f \quad \underline{\underline{[x_0,y_0] = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]}}$$

Obecná rovnice tečné roviny: $\quad z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$$\Rightarrow \quad z - \operatorname{arctg} 0 = 1\cdot\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + 1\cdot\left(y-\tfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z = x+y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x+y-z=0}}$$