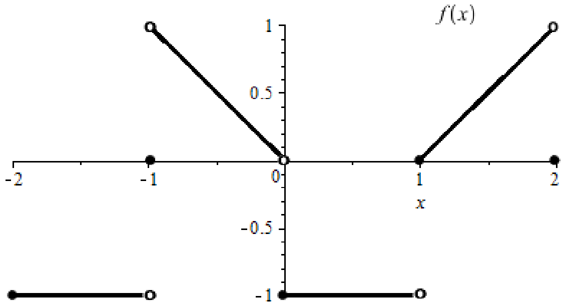
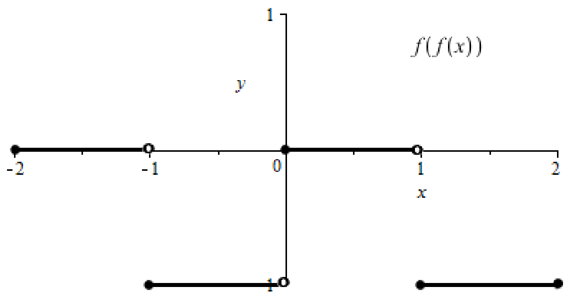
Vzorové řešení zadání ***F***

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} -1 & x\in\langle -2,-1)\cup\langle 0,1) \\ -x & x\in(-1,0) \\ 0 & x\in\{-1,1,2\} \\ x-1 & x\in\langle 1,2) \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle -1,0\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{-1\}\right)$.





$f\left(\langle -1,0\rangle\right)=\langle 0,1\rangle$ $\qquad$ $f^{-1}\left(\{-1\}\right)=\langle -2,-1)\cup\langle 0,1)$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}:\ x^2<-3\right)\ \Rightarrow\ \left(\exists y\in\mathbb{R}:\ \sin y<-2\right)$ $\qquad$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Platí-li $\forall n: a_n\le b_n$ a nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, potom je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad´ :*** $a_n=\dfrac{1}{n^2},\ b_n=\dfrac{1}{n}$

c)) Je-li funkce f sudá, potom neexistuje f^{-1}. $\qquad$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-21}$, $\quad I=\langle -6,6\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-21}=\left(x^2+2x-21\right)^{\frac{1}{3}},\qquad f'(x)=\frac{2}{3}\,\frac{x+2}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x+7)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2,\quad f'(x)\ \nexists\Leftrightarrow x=3\vee x=-7\qquad -2\in I,\quad 3\in I,\quad -7\notin I$$

$f(-6)=-\sqrt[3]{9}$

$f(-2)=\sqrt[3]{-25}$ $\qquad$ min

$f(3)=0$

$f(6)=\sqrt[3]{39}$ $\qquad$ max

maximum v bodě $x=6$, $f_{\max}=\sqrt[3]{39}$, ***minimum v bodě*** $x=-2$, $f_{\min}=-\sqrt[3]{25}$.

4) Vypočítejte integrál $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} + \frac{5}{x^2+1} \right) dx$

$$I = \left[\ln(x+4) - \ln(x+7) + 5\,\mathrm{arctg}\, x\right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \left(\ln\frac{x+4}{x+7} + 5\,\mathrm{arctg}\, x \right) - \ln\frac{4}{7} - 5\,\mathrm{arctg}\, 0 = \ln 1 + \frac{5}{2}\pi + \ln\frac{7}{5} =$$

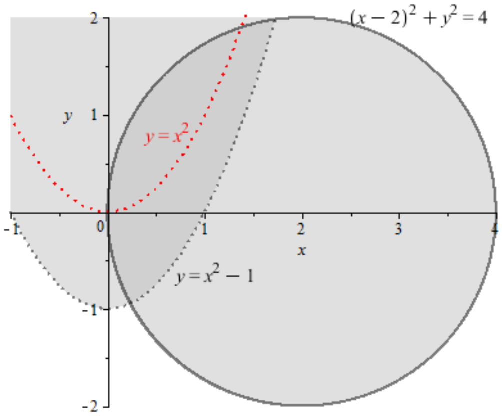
$$= \underline{\frac{5}{2}\pi + \ln\frac{7}{5}}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*, je-li $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}{\ln(1 - x^2 + y)}$

$$D_f : 4x - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 1 - x^2 + y > 0 \wedge 1 - x^2 + y \neq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y > x^2 - 1 \wedge y \neq x^2$$

$$\underline{D_f = \left\{(x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y > x^2 - 1 \wedge y \neq x^2\right\}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I = \int_M f(x,y)\, dxdy$, je-li

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \text{ a } M = \left\{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$$

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{(\rho,\varphi) \mid 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$I = \int_M \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdy = \int_{\Phi^{-1}(M)} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho \, d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho} \cdot d\rho = \left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\ln \rho\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln\sqrt{2} =$$

$$= \underline{\frac{\pi}{4} \cdot \ln 2}$$