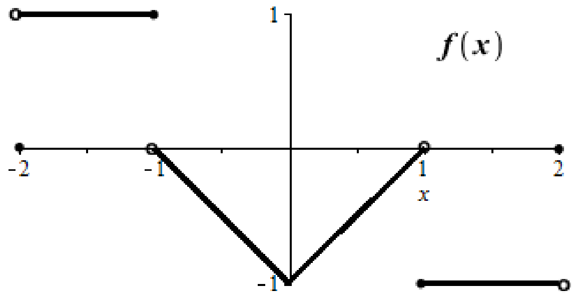
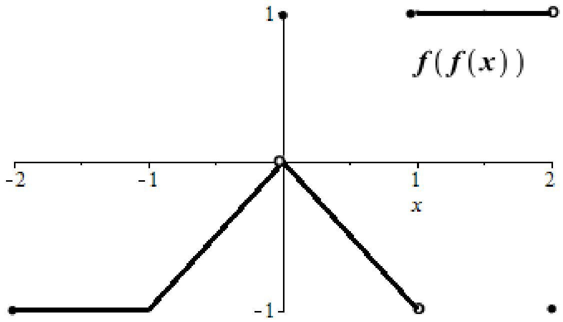
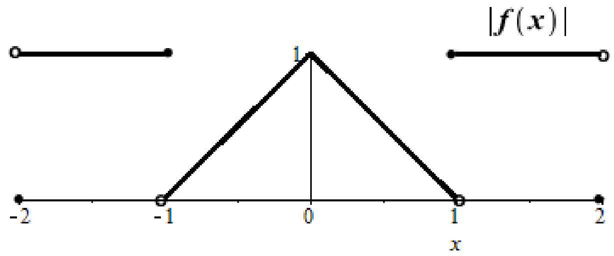
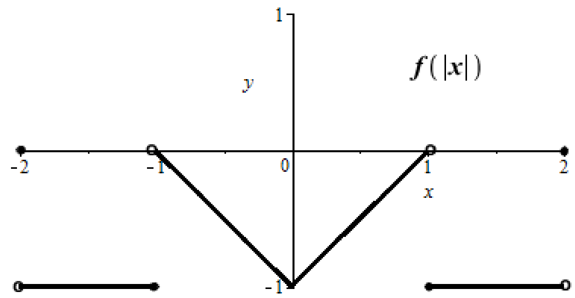
Vzorové řešení zadání **B**

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ 1 & x\in(-2,-1\rangle \\ -x-1 & x\in(-1,0\rangle \\ x-1 & x\in(0,1) \\ -1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$ $\qquad f^{-1}(\{-1\})=\{0\}\cup\langle 1,2)$









2)) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x\in\mathbb{R}:(\cos x>2\Rightarrow |x|\geq 0)$ — ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Jeli funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ ohraničená, je zde spojitá. — ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=\operatorname{sgn} x,\ \langle a,b\rangle=\langle -1,1\rangle$

c) Platí-li $\forall n: a_n\leq b_n$ a nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, potom je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. — ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$a_n=\dfrac{1}{n^2},\quad b_n=\dfrac{1}{n}$

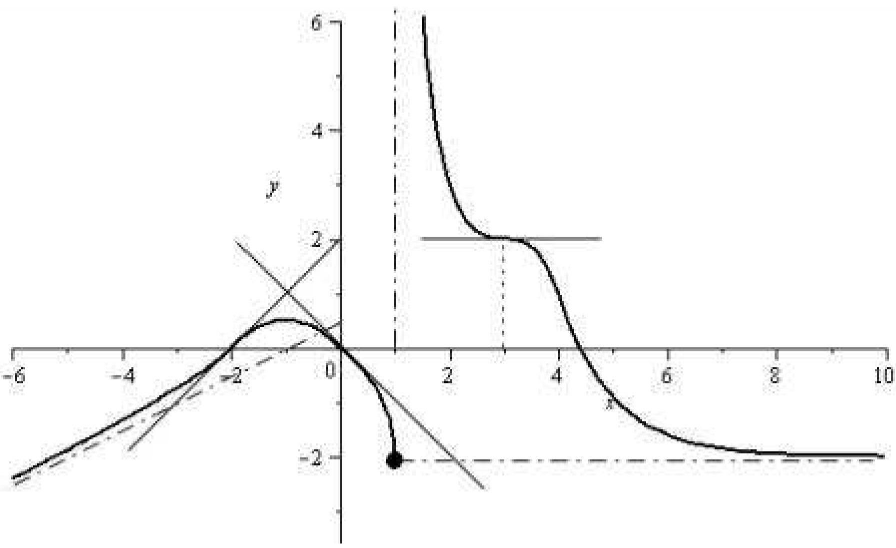
3) Na druhou stranu zadání načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f=\mathbb{R}$,

v bodě $x=1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zleva,

$f(3)=2,\ f(1)=-2,\ f(0)=f(-2)=0,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-\infty,\ f'(0)=-1,$

$x=-2$ a $x=3$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-2)=1$ a $f'(3)=0$, $f'(x)\leq 0$ pro $x\in(1,\infty,)$,

přímka $y=-2$ je její asymptota pro $x\to\infty$, přímka $y=\frac{1}{2}(1+x)$ je asymptota pro $x\to-\infty$.



4) Vypočítejte integrál $I=\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{2}{4x-1}+\frac{3}{x^2+5}\right)dx$

$$I=\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln|4x-1|+\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right]_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1}{4x-1}\right|+\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{3}-\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{2\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\sqrt{5}}{10}\left(\pi-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}}$$

5) Je dána funkce $f(x,y)=e^{\frac{xy}{6}}$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $A=[0,3,?]$.

$f(0,3)=1,\quad A=[0,3,1]$

$f'_x(0,3):\quad f(x,3)=f_1(x)=e^{\frac{x}{2}},\ f_1'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\quad f_1'(0)=f'_x(0,3)=\frac{1}{2}$

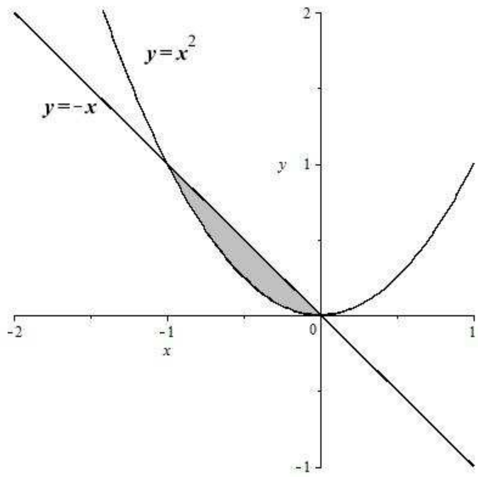
$f'_y(0,3):\quad f(0,y)=f_2(y)=e^0=1,\ f_2'(y)=0,\quad f_2'(3)=f'_y(0,3)=0$

$\rho:\quad z-1=\frac{1}{2}(x-0)+0(y-3)\Leftrightarrow z-1=\frac{x}{2}\Leftrightarrow \underline{\underline{x-2z+2=0}}$

b) Odhadněte $f(0.02;3.02)$.

$f(0.02;3.02)\doteq 1+\frac{1}{2}\left(0.02-0\right)+0\left(3.02-3\right)=1+0.01=\underline{\underline{1.01}}$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I=\int\limits_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená parabolou $y=x^2$ a přímkou $y=-x$. Množinu M nakreslete.



Průsečíky: $y=x^2\wedge y=-x\Rightarrow x=-1\vee x=0$

$$M=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}-1\le x\le 0\\ x^2\le y\le x\end{array}\right\}$$

$$I=\int\limits_M xy\,dxdy=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x^2}^{x}xy\,dy=\int\limits_{-1}^{0}dx\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}x\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{24}\left(3-2\right)=\underline{\underline{-\frac{1}{24}}}$$