Vzorové řešení zadání ***D***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.
U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: 2^x=0\right) \;\Rightarrow\; \left(\exists y\in\mathbb{R}: \sin y=\pi\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

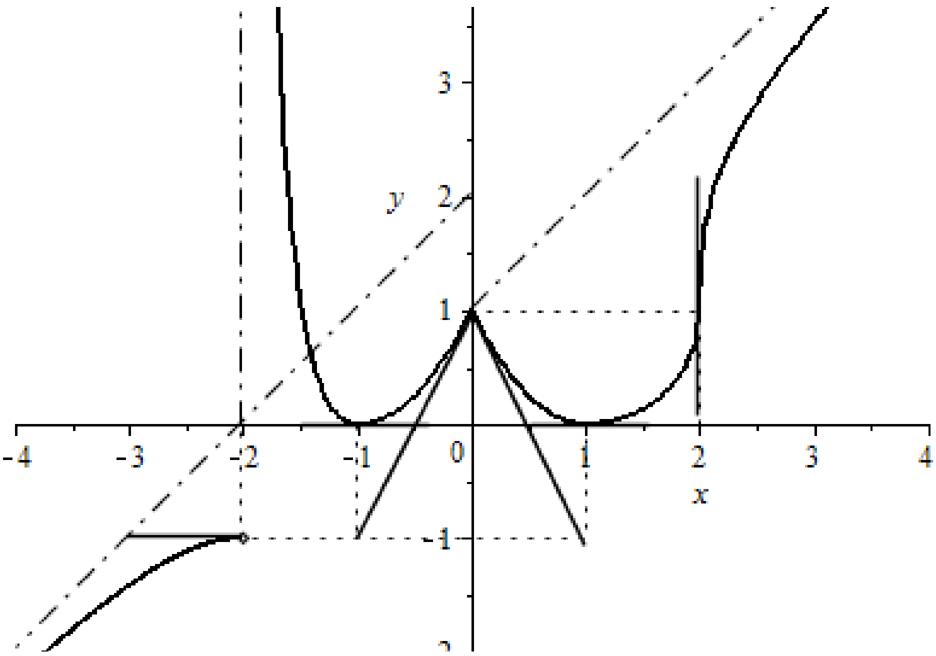
b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$, má $\forall x_0\in\langle a,b\rangle$ limitu. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=\operatorname{sgn} x,\ \langle a,b\rangle=\langle -1,1\rangle,\ x_0=0$

c) Má-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R=a$, potom pro $x=-a$ diverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n},\ R=1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ ***konverguje***

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:
$D_f=\mathbb{R}$, pro $x=-2$ nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zleva,
$f(0)=f(2)=1,\ \ f(-1)=f(1)=0,\ \ f(-2)=-1,$
$f'(-1)=f'(1)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-2,\ \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)=0,$
přímka $x=2$ je inflexní tečna, $f''(x)<0$ pro $x<-2$ a $x>2$, $f''(x)>0$ pro $x\in(-2,0)$ a $x\in(0,2)$,
přímka $y=x+2$ je asymptota pro $x\to-\infty$, přímka $y=x+1$ je asymptota pro $x\to\infty$.



3) Najděte lokální extrémy funkce $f(x)=\sqrt[3]{(1-2x)(x+4)^2}$

$$f'(x)=\left(\left((1-2x)(x+4)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{-2(x+4)^2+(1-2x)\cdot 2(x+4)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(x+4)^{\frac{4}{3}}}=\tfrac{2}{3}\cdot\frac{(x+4)\left(-x-4+1-2x\right)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(x+4)^{\frac{4}{3}}}=\tfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}\cdot(x+1)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(x+4)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x)=0$ *pro* $x=-1,\ \ f'(x)\ \nexists$ *pro* $x=-4\vee x=\frac{1}{2}$.

Znaménko derivace: $\begin{array}{c|ccccccc} f'(x) & - & & + & & - & & - \\ \hline & \searrow & -4 & \nearrow & -1 & \searrow & \frac{1}{2} & \searrow \\ & & \text{min} & & \text{max} & & & \end{array}$

Lokální maximum v $x=-1$, $f_{\max} = f(-1)=3$, lokální minimum v $x=-4$, $f_{\min} = f(-4)=0$.

4) Řešte rovnici $\sum_{n=2}^{\infty}(x+3)^n = (x+3)(x-1)$

Obor konvergence řady: $|x+3|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-4,-2)$.

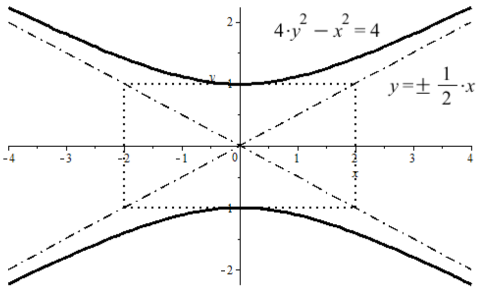
$$\sum_{n=2}^{\infty}(x+3)^n = (x+3)^2\cdot\frac{1}{1-(x+3)} = -\frac{(x+3)^2}{x+2}$$

$$-\frac{(x+3)^2}{x+2} = (x+3)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-3}} \vee -(x+3)=(x+2)(x-1)$$

$$x^2+2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=-1\notin(-4,-2)$$

Řešení rovnice: $\underline{\underline{x=-3}}$

5) Je dána funkce $f(x,y)=e^{4y^2-x^2}$ a bod $[0,1]$.



a) Najděte a nakreslete vrstevnici funkce f procházející bodem A.

$f(0,1)=e^4$, $\quad e^{4y^2-x^2}=e^4 \;\Leftrightarrow\; 4y^2-x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad y^2-\frac{x^2}{4}=1$

- hyperbola s reálnou poloosou $y=1$, imaginární $x=2$

a s asymptotami $y=\pm\frac{1}{2}x$

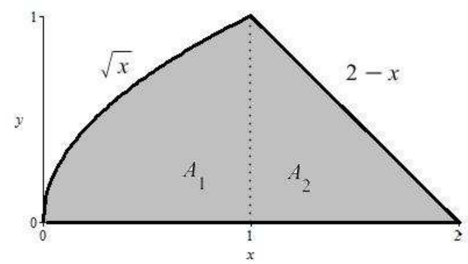
b) Vypočítejte gradient funkce f v bodě A.

$f'_x(x,y)=e^{4y^2-x^2}\cdot(-2x)$, $f'_x(0,1)=0$, $\quad f'_y(x,y)=e^{4y^2-x^2}\cdot 8y$, $f'_y(0,1)=8e^4$,

$\mathbf{grad} f(1,0)=\underline{\underline{\left(0,8e^4\right)}}$

6) Vypočítejte $\int_A y\,dx\,dy$, kde A je omezena křivkami o rovnicích $y=\sqrt{x}, y=2-x, y=0$.

Množinu A načrtněte.



$$A=A_1\cup A_2, \quad A_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1\wedge 0\le y\le\sqrt{x}\right\},$$
$$A_2=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2\wedge 0\le y\le 2-x\right\}$$

$$\int_A y\,dx\,dy = \int_{A_1} y\,dx\,dy + \int_{A_2} y\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy + \int_1^2 dx\int_0^{2-x} y\,dy = \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{x}}dx + \int_1^2\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{2-x}dx =$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \tfrac{1}{2}\int_1^2(2-x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{3}(2-x)^3\right]_1^2 = \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}(-1) = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$