b) Jestliže $f'(a) \nexists$, má funkce f v bodě a extrém. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0$

c) Platí-li $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

~~pravdivý~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{2n}$

a) Funkce f je v bodě a spojitá, právě když má v a vlastní limitu. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý***

neplatí $\Leftarrow$; ***protipříklad:*** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1},\ a = 1$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : |\sin x| = 2$ právě když $\exists y \in \mathbb{R} : y^2 = -1$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$ konverguje pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$2 \in \langle 0, 2 \rangle,\ \sum_{n=1}^{\infty} (2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje.

a) Funkce f je v bodě a spojitá, právě když má v a vlastní limitu. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý***

neplatí $\Leftarrow$; ***protipříklad:*** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1},\ a = 1$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : |\sin x| = 2$ právě když $\exists y \in \mathbb{R} : y^2 = -1$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$ konverguje pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$2 \in \langle 0, 2 \rangle,\ \sum_{n=1}^{\infty} (2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje.

a) $\exists x_0 \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(x_0) = 0$, potom funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ kladných i záporných hodnot.

~~pravdivý~~ ***nepravdivý***

protipříklad: $f(x) = x^2,\quad \langle a, b \rangle = \langle -1, 1 \rangle$

b) Je-li $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = 1$, potom $\exists y \in \mathbb{R} : \sin y = \frac{\pi}{2}$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

c) Platí-li $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $a_n = \frac{1}{n^2}$

a) $\forall x \in \mathbb{R} :\ (x^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x < 5)$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

b) Ke každé liché funkci existuje funkce inverzní. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = \operatorname{sgn} x$

c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$ konverguje pro $x = \dfrac{5}{2}$. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý***

zdůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{2} - 1 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2} \right)^n$ je geometrická řada s kvocientem $\dfrac{3}{2} > 1$

a) $\forall x \in \mathbb{R}: \left(|-2x| \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x \ge 2 \right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a $f(a)\cdot f(b) < 0$,
potom existuje právě jeden bod $c \in (a,b)$ tak,že $f(c) = 0$. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = \sin x,\ \langle a,b \rangle = \left\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle,\ \sin(-\pi) = \sin(0) = \sin(\pi) = 0$$

c) Funkce f je prostá $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f$ platí $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x) = x^2$ není prostá, ale $\forall x_1, x_2 \in D_f$ platí $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

a) Platí-li pro každé reálné číslo x $\cos x \le -11$, potom $\sin 0 = 2$. ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce *f* periodická, potom je sudá. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = \sin x$

c) Je-li $f''(x_0) = 0$, má funkce *f* v bodě x_0 inflexní bod. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = x^4, x_0 = 0$

a) Platí-li pro každé reálné číslo x $\sin x \ge 11$, potom $\cos 0 = -2$. ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce *f* periodická, potom je ohraničená. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = \operatorname{tg} x$

c) Je-li $f'(x_0) = 0$, má funkce *f* v bodě x_0 extrém. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x) = x^3, x_0 = 0$

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R}:\ \cos x \le -3 \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\exists y \in \mathbb{R}:\ \ |y| < -8 \right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b)) ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternující řada, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) $\Rightarrow$ $|s_n - s| < |a_{n+1}|$.

pravdivý ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

a) $\exists x \in \mathbb{R}: |\sin x| \ge 7 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}: y^2 < -3$ ***pravdivý***

b) f je prosté zobrazení, platí-li $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \ne x_2$

nepravdivý ***protipříklad:*** $f(x) = x^2, x_1 = -1, x_2 = 1$

c) Funkce *f* má v bodě x_0 lokální extrém $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \vee f'(x_0)$ neexistuje.

pravdivý

a) $\exists x \in \mathbb{R}: |\cos x| > 5 \quad \Rightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R}: |\sin y| < 5$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$ rostoucí, potom $\exists x_0 \in \langle a,b \rangle$ pro které platí $f(x_0) > 0$.

~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = x,\ \langle a,b \rangle = \langle -1,0 \rangle \quad f\left(\langle -1,0 \rangle\right) = \langle -1,0 \rangle \Rightarrow f(x) \le 0 \quad \forall x \in \langle -1,0 \rangle$$

c) Má-li funkce $f(x)$ spojitá na $\mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ maximum, potom platí $f'(x_0) = 0$.

~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = -|x|,\ f_{\max} = f(0) = 0, \quad \left(-|x|\right)'\Big|_{x=0} \nexists$$

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: 2^x=0\right) \Rightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}: \sin y=\pi\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$, má $\forall x_0\in\langle a,b\rangle$ limitu. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=\operatorname{sgn} x,\ \langle a,b\rangle=\langle -1,1\rangle,\ x_0=0$

c) Má-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R=a$, potom pro $x=-a$ diverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$\infty \quad x^n \qquad \infty \quad (-1)^n$

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: e^x=0\right) \Rightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}: \cos y=\pi\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b\rangle$, je na $\langle a,b\rangle$ monotonní. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=\sin x,\ \langle a,b\rangle=\langle 0,2\pi\rangle$

c) Má-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R=a$, potom pro $x=a$ diverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\ R=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ***konverguje***

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: \sin x\ge \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}: |\cos y|<-1\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, je v a spojitá. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x)=\frac{\sin x}{x},\ a=0$

c) Platí-li $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

b) Platí-li $f'(a)=0$, má funkce f v bodě a extrém. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x)=x^3,\ a=0$

c) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) Je-li funkce f na $\langle a,b\rangle$ spojitá, je zde diferencovatelná. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=|x|,\ \langle a,b\rangle=\langle -1,1\rangle$

c) Platí-li $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n\le b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$a_n=\frac{1}{n^2},\ b_n=\frac{2}{n^2}$