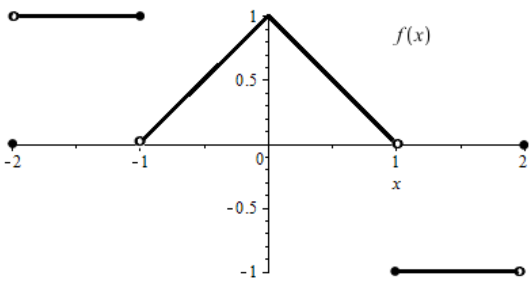
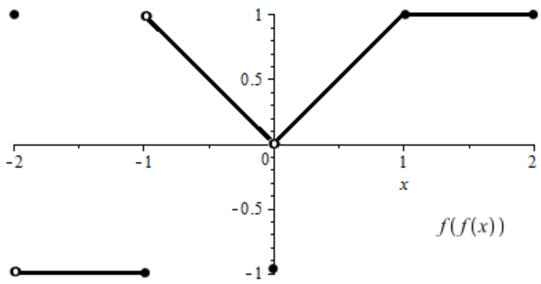
Vzorové řešení zadání <u>C</u>

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ 1 & x\in(-2,-1\rangle \\ x+1 & x\in(-1,0\rangle \\ 1-x & x\in(0,1) \\ -1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle 0,1\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{-1\}\right)$.





$f\left(\langle 0,1\rangle\right)=(0,1\rangle\cup\{-1\}$ $\qquad$ $f^{-1}\left(\{-1\}\right)=\langle 1,2)$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x\in\mathbb{R}:\left(\sin x>4 \quad\Rightarrow\quad x^2\geq 0\right)$ ***<u>pravdivý</u>*** ***~~nepravdivý~~ protipříklad:***

b) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje. ***~~pravdivý~~*** ***<u>nepravdivý</u> protipříklad:*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

c) Je-li funkce f v bodě x_0 spojitá, potom zde má limitu. ***<u>pravdivý</u>*** ***~~nepravdivý~~ protipříklad:***

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$, $\quad I=\langle -2,4\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-15}=\left(x^2+2x-15\right)^{\frac{1}{3}},\qquad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x+1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x+5)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1,\quad f'(x)\nexists\Leftrightarrow x=3\vee x=-5\qquad -1\in I,\quad 3\in I,\quad -5\notin I$$

$$f(-2)=\sqrt[3]{-15}$$

$$f(-1)=\sqrt[3]{-16}=-2\sqrt[3]{2}\quad \text{min}$$

$$f(3)=0$$

$$f(4)=\sqrt[3]{9}\qquad \text{max}$$

maximum v bodě $x=4$, $f_{\max}=\sqrt[3]{9}$, ***minimum v bodě*** $x=-1$, $f_{\min}=-2\sqrt[3]{2}$.

4) Vypočítejte integrál $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+10} + \frac{8}{x^2+1} \right) dx$

$$I = \left[\ln(x+5) - \ln(x+10) + 8\operatorname{arctg} x\right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+5}{x+10} + 8\operatorname{arctg} x \right) - \ln\frac{5}{10} - 8\operatorname{arctg} 0 = \ln 1 + 4\pi + \ln 2 =$$

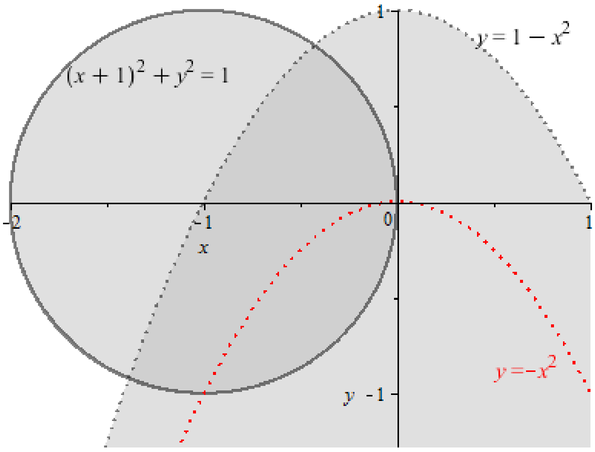
$$\underline{= 4\pi + \ln 2}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*, je-li $f(x,y) = \frac{\sqrt{-2x - x^2 - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y)}$

$$D_f : -2x - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 1 - x^2 - y > 0 \wedge 1 - x^2 - y \neq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge y < 1 - x^2 \wedge y \neq -x^2$$

$$\underline{D_f = \left\{ (x,y) \,|\, (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge y < 1 - x^2 \wedge y \neq -x^2 \right\}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I = \int_M f(x,y)\,dxdy$, je-li

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ a } M = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 \leq y \leq x \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (\rho, \varphi) \,\middle|\, 1 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$I = \int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_{\Phi^{-1}(M)} \frac{1}{\rho} \cdot \rho \, d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 d\rho = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot [\rho]_1^2 =$$

$$\underline{= \frac{\pi}{4}}$$