Vzorové řešení zadání **<u>K</u>**

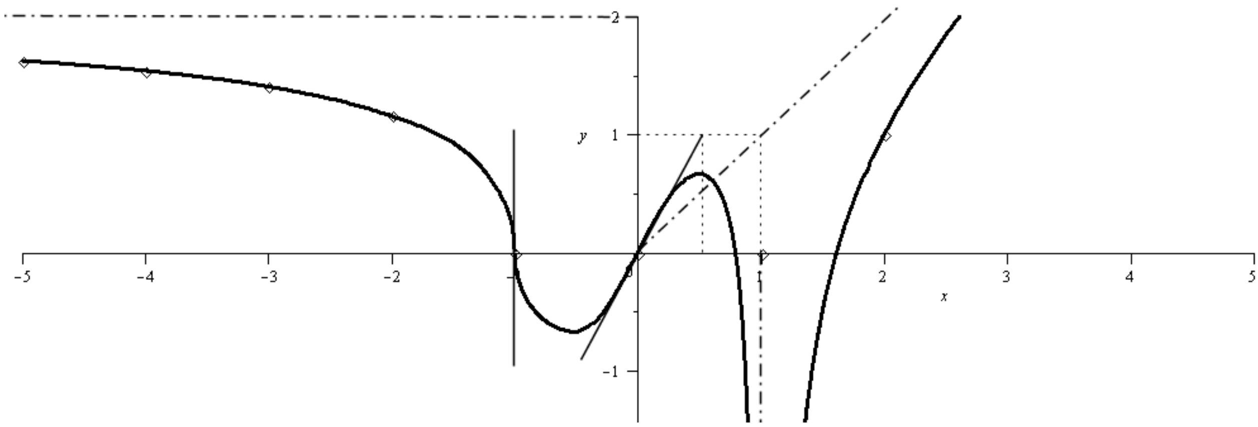
1) Graf funkce spojité na $\mathbb{R}-\{1\}$, pro kterou platí:

$$f(0)=f(-1)=0,\quad \lim_{x\to 1} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

$$f'(0)=2,\quad \lim_{x\to-1} f'(x)=-\infty$$

přímka $y=x$ je asymptota pro $x\to\infty$.

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny ke grafu funkce v bodě $x=0$ a $x=-1$.



2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x\in\mathbb{R}: \sin x = 7 \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{R}: |y|<-7$ — ***<u>pravdivý</u>***

b) f je prosté zobrazení, platí-li $\forall x_1, x_2\in\mathbb{R}:\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ — ***<u>pravdivý</u>***

c) $f'(x_0)=0\Rightarrow f$ má v bodě x_0 lokální extrém — ***<u>nepravdivý</u>*** $f(x)=x^3, x_0=0$

3) Asymptoty grafu funkce $f(x)=\dfrac{4x^2}{1-x}$:

$$D_f=\mathbb{R}-\{1\},\quad \lim_{x\to1}\frac{4x^2}{1-x}=4\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}=\begin{cases}4\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-x}=\ \infty\\[2ex] 4\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-x}=-\infty\end{cases}$$

- svislá asymptota <u>$x=1$</u>,

asymptota se směrnicí $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{1-x}=-4,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2}{1-x}+4x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+4x-4x^2}{1-x}=-4$$

asymptota se směrnicí <u>$y=-4x-4$</u>.

4) $$\int_1^e \frac{x}{5}\cdot \ln x^3 dx = \int_1^e \frac{3}{5} x\cdot \ln x\, dx = \frac{3}{5}\int_1^e x\cdot \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & u'=\dfrac{1}{x} \\ v'=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix} = \frac{3}{5}\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{3}{20}\left(e^2+1\right)}$$

5) Rovnice tečné roviny a normálový vektor ke grafu funkce $f(x,y)=y^{y^x}$ v bodě $[2,1,?]$:

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $z=f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ má tvar

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\left(x-x_0\right)+f'_y(x_0,y_0)\left(y-y_0\right)$$

$$f(x_0,y_0)=1^{1^2}=1,$$

$$f'_x=\left(e^{y^x\ln y}\right)'_x=e^{y^x\ln y}\left(y^x\ln y\ln y\right),\quad f'_x(x_0,y_0)=0$$

$$f'_y=\left(e^{y^x\ln y}\right)'_y=e^{y^x\ln y}\cdot\left(xy^{x-1}\ln y+y^x\frac{1}{y}\right),\quad f'_y(x_0,y_0)=e^0(0+1)=1$$

Parciální derivace v daném bodě můžeme počítat i jednodušeji:

$$f'_x(2,1)=\left(f(x,1)\right)'\big|_{x=2}=\left(1^{1^x}\right)'\big|_{x=2}=\left(1\right)'\big|_{x=2}=0$$

$$f'_y(2,1)=\left(f(2,y)\right)'\big|_{y=1}=\left(y^{y^2}\right)'\big|_{y=1}=\left(e^{y^2\ln y}\right)'\big|_{y=1}=e^{y^2\ln y}\left(2y\cdot\ln y+y^2\frac{1}{y}\right)\Big|_{y=1}=1\quad\left(\ln 1=0\right)$$

Tečná rovina: $z-1=1\left(y-1\right)\Leftrightarrow \underline{y-z=0}$, normálový vektor: $\underline{(0,1,-1)}$.

6) Najděte $x\in\mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{2}{3}x$

$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(x-1)^n+\cdots$ je geometrická řada,

$q=x-1,\quad a_0=x-1,\quad s=\dfrac{x-1}{1-(x-1)}=\dfrac{x-1}{2-x},$ řada konverguje pro $\left|x-1\right|<1\Rightarrow x\in\left(0,2\right)$.

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{2}{3}x\quad\Rightarrow\quad 3(x-1)=2x(2-x)\quad\Rightarrow\quad 2x^2-x-3=0\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{4}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\in(0,2)\\ -1\notin(0,2)\end{cases}$$

Výsledek: $\underline{x=\dfrac{3}{2}}$