Vzorové řešení zadání <u>***G***</u>

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Platí-li pro každé reálné číslo x $\sin x \geq 11$, potom $\cos 0 = -2$. <u>***pravdivý***</u> ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f periodická, potom je ohraničená. ***~~pravdivý~~*** <u>***nepravdivý***</u> ***protipříklad:*** $f(x) = \operatorname{tg} x$

c) Je-li $f'(x_0) = 0$, má funkce f v bodě x_0 extrém. ***~~pravdivý~~*** <u>***nepravdivý***</u> ***protipříklad:*** $f(x) = x^3, x_0 = 0$

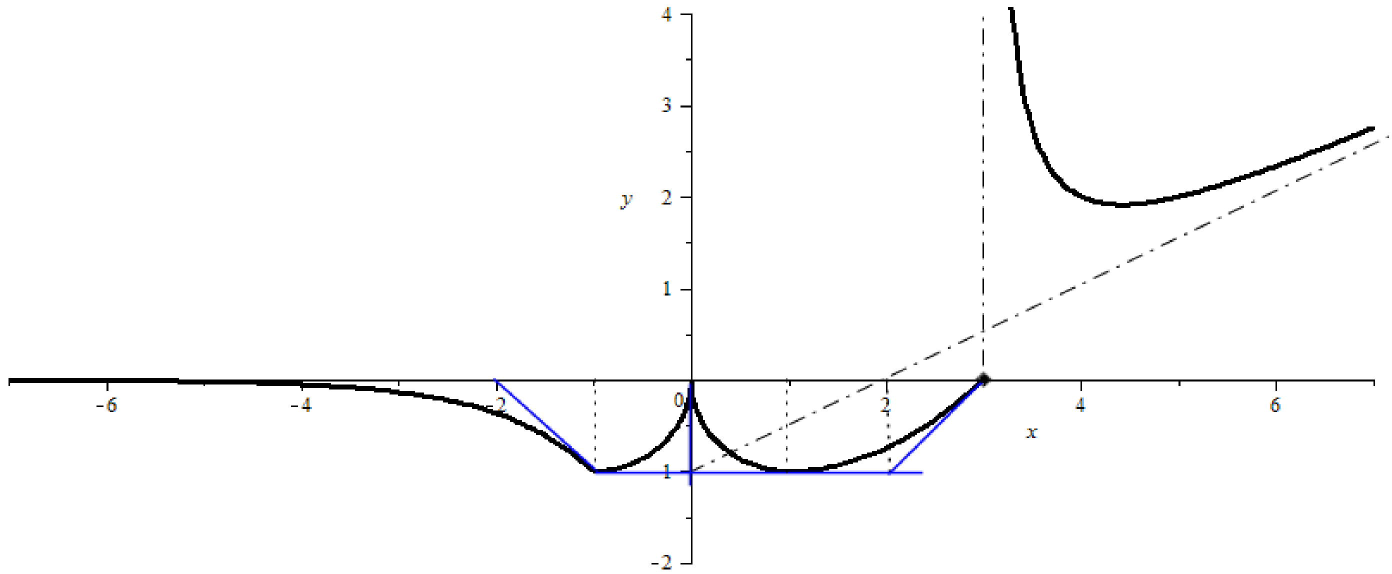
2) Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, přímka $y = \frac{1}{2}x - 1$ je asymptota pro $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

$f(0) = f(3) = 0$, $f(-1) = f(1) = -1$, pro $x = 3$ má nespojitost 2. druhu přičemž je spojitá zleva,

$\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f'(x) = 1$,

$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (-1, 0), x \in (0, 3)$ a $x \in (3, \infty)$.



3) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1+2x}$ v bodě, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou $4x - 2y + 3 = 0$.

$4x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{3}{2}$ - hledáme body na grafu zadané funkce, ve kterých je $f'(x) = 2$:

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{1+2x}\right)' = \frac{1}{1+\dfrac{4x^2}{(1+2x)^2}} \cdot \frac{2\left[(1+2x) - x\cdot 2\right]}{(1+2x)^2} = \frac{2}{(1+2x)^2 + 4x^2}$$

$$\frac{2}{(1+2x)^2 + 4x^2} = 2 \quad 2 = 2\left((1+2x)^2 + 4x^2\right) = 2\left(1 + 4x + 8x^2\right) \Leftrightarrow 4x\left(1+2x\right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2} \qquad f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0, \quad -\frac{1}{2} \notin D_f$$

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right) \quad t: y = 2x \qquad n: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\left(x - x_0\right) \quad n: y = -\frac{x}{2}$$

Výsledek: $\underline{\underline{t: y = 2x}}, \quad \underline{\underline{n: y = -\dfrac{x}{2}}}$

4) Vypočítejte $I=\int_2^3 \frac{x}{3}\cdot\ln\left(x-1\right)^3 dx$

$$\int_2^3 \frac{x}{3}\cdot\ln\left(x-1\right)^3 dx=\int_2^3 x\cdot\ln\left(x-1\right)dx=\begin{vmatrix} u=\ln\left(x-1\right) & u'=\dfrac{1}{x-1} \\ v'=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(x-1\right)\right]_2^3-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{x^2}{x-1}dx=$$

$$=\left(\frac{9}{2}\ln 2-2\ln 1\right)-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{x^2-1+1}{x-1}dx=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_2^3\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln\left(x-1\right)\right]_2^3=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+3+\ln 2-\frac{4}{2}-2-\ln 1\right)=4\ln 2-\frac{7}{4}$$

Výsledek: $\underline{\underline{I=4\ln 2-\frac{7}{4}}}$

5) Najděte $x\in\mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n=\frac{4}{5}x(x-2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n=\frac{x-2}{1-(x-2)}=\frac{x-2}{3-x},\quad \left|x-2\right|<1\Leftrightarrow x\in(1,3)$$

$$\frac{x-2}{3-x}=\frac{4}{5}x(x-2)\quad 1)\ x-2=0\Rightarrow x_1=2$$

$$2)\ 5=4x(3-x)\Leftrightarrow 4x^2-12x+5=0\quad x_{2,3}=\left\langle\begin{matrix}\frac{5}{2}\in(1,3)\\ \frac{1}{2}\notin(1,3)\end{matrix}\right.$$

Výsledek: $\underline{\underline{x=2\vee x=\tfrac{5}{2}}}$

6) $f(x,y,z)=xz+\ln\frac{y}{z^2}$. Najděte bod A, ve kterém platí $\operatorname{grad} f(A)=\left(1,1,1\right)$.

$$f'_x=z,\quad f'_y=\frac{z^2}{y}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{y},\quad f'_z=x+\frac{z^2}{y}\cdot\frac{-2\cdot y}{z^3}=x-\frac{2}{z}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\left(z,\frac{1}{y},x-\frac{2}{z}\right)=\left(1,1,1\right)\quad\Rightarrow\quad z=1,y=1,x=3$$

Výsledek: $\underline{\underline{A=[3,1,1]}}$