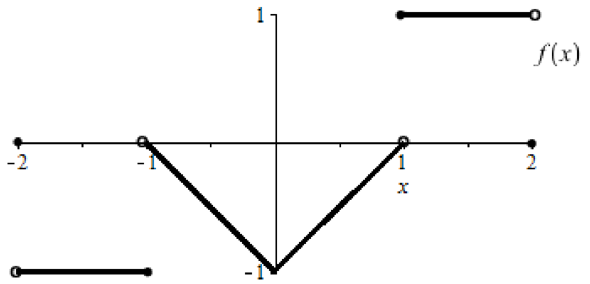
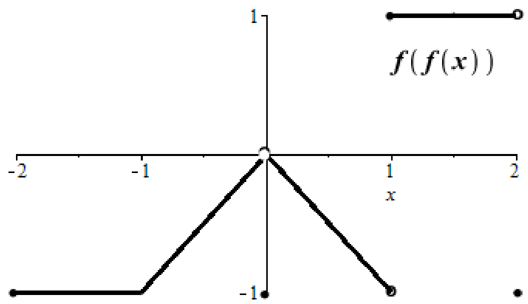
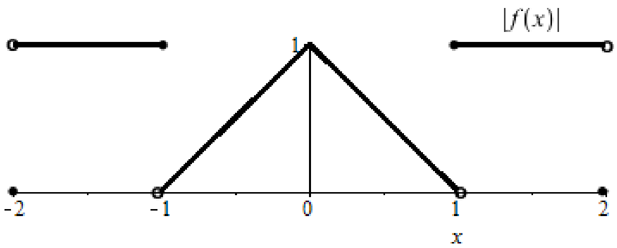
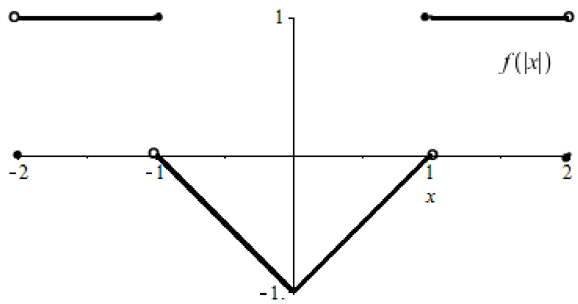
Vzorové řešení zadání <u>*A*</u>

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ -1 & x\in(-2,-1\rangle \\ -x-1 & x\in(-1,0\rangle \\ x-1 & x\in(0,1) \\ 1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$ $\qquad f^{-1}(\{-1\})=(-2,-1\rangle\cup\{0\}$









2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x\in\mathbb{R}:\ (x^2<0 \quad\Rightarrow\quad \sin x<5)$ — ***<u>pravdivý</u>*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Ke každé liché funkci existuje funkce inverzní. — ~~***pravdivý***~~ ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:*** $f(x)=\operatorname{sgn} x$

c) Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$ konverguje pro $x=\dfrac{5}{2}$. — ~~***pravdivý***~~ ***<u>nepravdivý</u>***

zdůvodnění: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5}{2}-1\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ je geometrická řada s kvocientem $\dfrac{3}{2}>1$

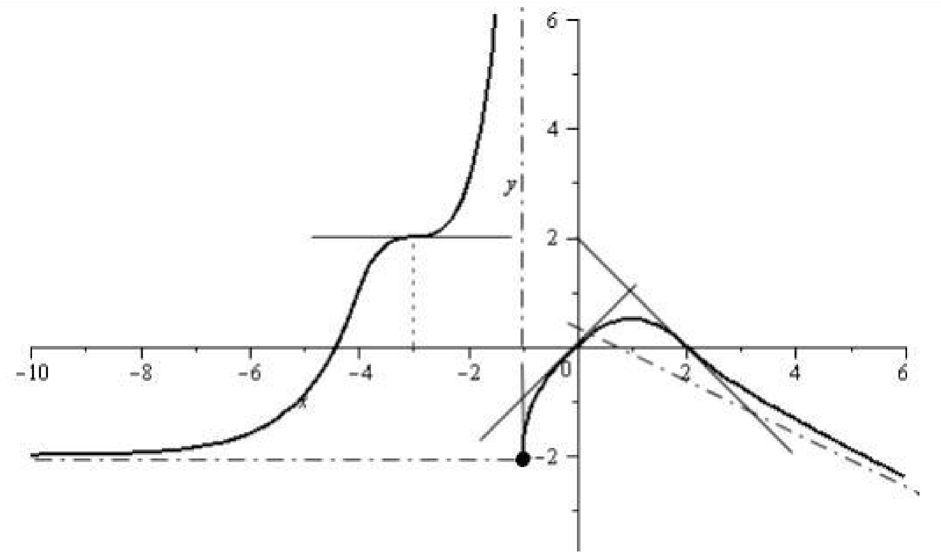
3) Na druhou stranu zadání načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f=\mathbb{R}$,

v bodě $x=-1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zprava,

$f(-3)=2,\ f(-1)=-2,\ f(0)=f(2)=0,\ \lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=\infty,\ f'(0)=1,$

$x=-3$ a $x=2$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-3)=0$ a $f'(2)=-1$, $f'(x)\geq 0$ pro $x\in(-\infty,-1)$,

přímka $y=-2$ je její asymptota pro $x\to-\infty$, přímka $y=\frac{1}{2}(1-x)$ je asymptota pro $x\to\infty$.



4) Vypočítejte integrál $I = \int\limits_2^{\infty} \left(\frac{1}{3x+1} - \frac{2}{6x-3} + \frac{2}{x^2+7} \right) dx$

$$I = \left[\frac{1}{3}\ln|3x+1| - \frac{1}{3}\ln|6x-3| + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} \right]_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x+1}{6x-3}\right| + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{3}\ln\frac{7}{9} - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\ln\frac{7}{9} - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln\frac{9}{14} + \frac{\sqrt{7}}{7}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{7}}{7} \right)}}$$

5) Je dána funkce $f(x,y) = e^{\frac{xy}{4}}$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $A = [0,2,?]$.

$f(0,2) = 1, \quad A = [0,2,1]$

$f'_x(0,2): \quad f(x,2) = f_1(x) = e^{\frac{x}{2}},\ f_1'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, \quad f_1'(0) = f'_x(0,2) = \frac{1}{2}$

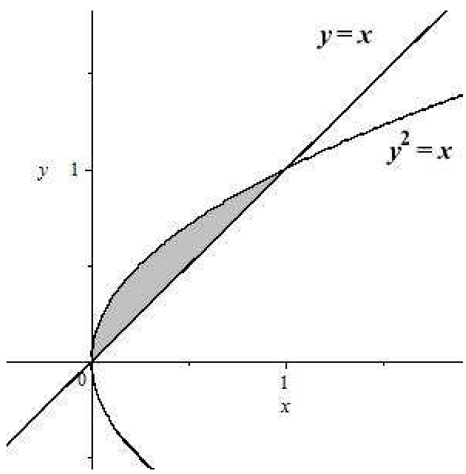
$f'_y(0,2): \quad f(0,y) = f_2(y) = e^0 = 1,\ f_2'(y) = 0, \quad f_2'(2) = f'_y(0,2) = 0$

$\rho: \quad z - 1 = \frac{1}{2}(x-0) + 0(y-2) \Leftrightarrow z - 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x - 2z + 2 = 0}}$

b) Odhadněte $f(0.02; 2.03)$.

$f(0.02;2.03) \doteq 1 + \frac{1}{2}(0.02-0) + 0(2.03-2) = 1 + 0.01 = \underline{\underline{1.01}}$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I = \iint\limits_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená parabolou $y^2 = x$ a přímkou $y = x$. Množinu M nakreslete.



Průsečíky: $y^2 = x \wedge y = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

$$M = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{x} \end{array} \right\}$$

$$I = \iint\limits_M xy\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} xy\,dy = \int\limits_0^1 dx \left[x\frac{y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}(4-3) = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$