

# Stručné zhodnocení problematiky předmětu „Teorie obvodů“

Teorie obvodů se zabývá analýzou, syntézou, popisem, návrhem a vzájemným propojením elektronických prvků.

Existují samozřejmě velmi komplikovaná a rozsáhlá zapojení elektronických prvků, jejichž funkce je velmi složitá. Ve skutečnosti se však tato zapojení dají rozdělit na dílčí funkční obvody, jejichž popis již tak složitý nemusí být.

Mezi tyto dílčí obvody patří:

## A. Lineární obvody

- (1) vzájemné propojení odporů a stejnosměrných zdrojů napětí
- (2) vzájemné propojení odporů, kondenzátorů, indukčností a střídavých zdrojů napětí

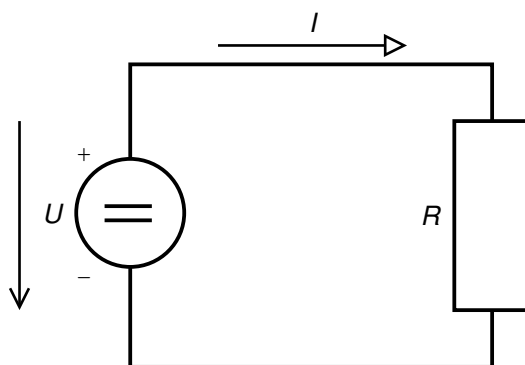
## B. Nelineární obvody

- (1) vzájemné propojení pasivních nelineárních polovodičových prvků, odporů, kondenzátorů, indukčností a zdrojů napětí (stejnosměrných i střídavých)
- (2) vzájemné propojení aktivních polovodičových prvků (tranzistorů), pasivních prvků (diod), obvodů  $R$ ,  $L$ ,  $C$  a zdrojů napětí

## A1. Vzájemné propojení odporů a stejnosměrných zdrojů napětí

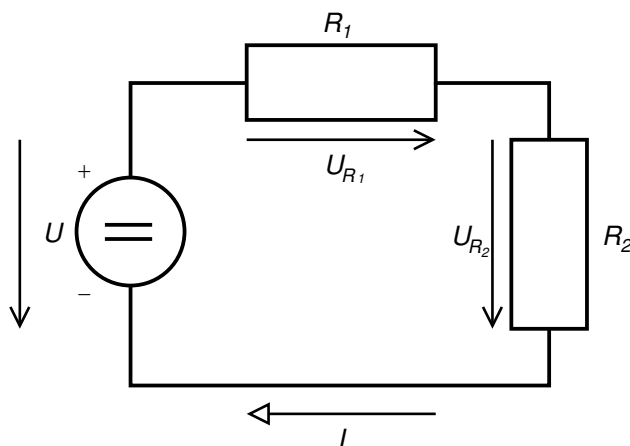
Nejdůležitějším axiomem je Ohmův zákon, který určuje vztah mezi napětím  $U$  na odporu  $R$  a odpovídajícím protékajícím proudem  $I$  (obr. 1).

$$I = \frac{U}{R}$$



Obrázek 1: obvod ilustrující Ohmův zákon

V návaznosti na Ohmův zákon a na obr. 1 je na obrázku 2 uveden další elementární obvod tvořený seriovým spojením dvou odporů a napájecího zdroje.



Obrázek 2: dělič napětí

I když se jedná o velmi jednoduché zapojení, je tento obvod (označovaný jako dělič napětí) základem výpočetních metod řešení elektrických obvodů a často se na tento typ obvodu některé složitější obvody převádějí.

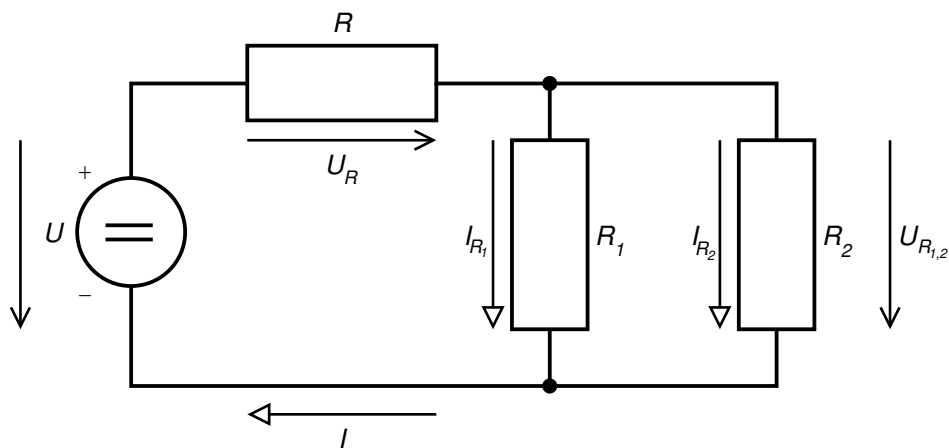
Pro tento obvod platí velmi důležitý II. Kirchhoffův zákon  $U = U_{R_1} + U_{R_2}$ , společně s Ohmovým zákonem

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad .$$

Dále pro obvod z obr. 2 platí důležitý axiom: napětí  $U_{R_1}$  a  $U_{R_2}$  se rozdělí v přímém poměru odporů  $R_1$  a  $R_2$ :

$$\frac{U_{R_1}}{U_{R_2}} = \frac{R_1}{R_2} \quad .$$

Od obvodu (obr. 2) a II. Kirchhoffova zákona je „jen krůček“ k obvodu v obr. 3, ve kterém je paralelní spojení odporů  $R_1$  a  $R_2$ .



Obrázek 3: obvod s dvěma smyčkami

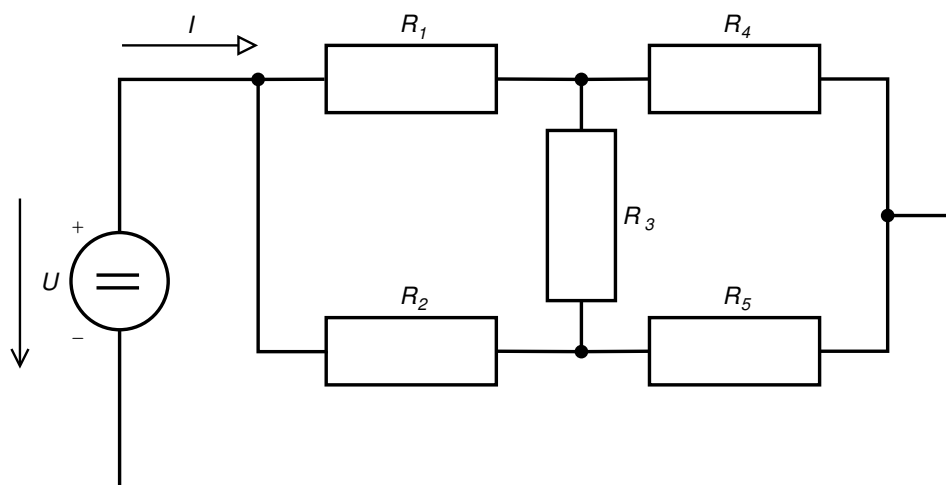
Pro obvod v obr. 3 platí velmi důležitý I. Kirchhoffův zákon  $I = I_{R_1} + I_{R_2}$ , společně s II. Kirchhoffovým zákonem  $U = U_R + U_{R_{1,2}}$  a s Ohmovým zákonem

$$I = \frac{U}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad .$$

Dále platí pro obr. 3 důležitý axiom: proudy  $I_{R_1}$  a  $I_{R_2}$  se rozdělí v obráceném poměru odporů  $R_1$  a  $R_2$ :

$$\frac{I_{R_1}}{I_{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} \quad .$$

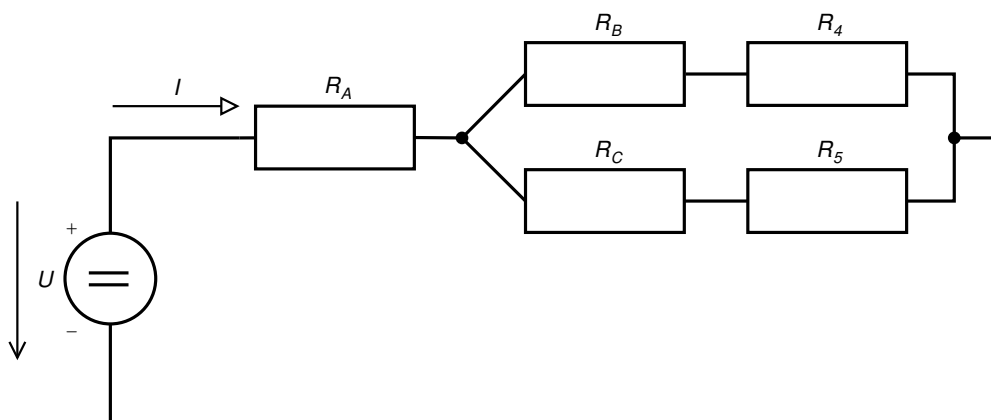
Z hlediska možných zapojení odporů a jednoho zdroje stejnosměrného napětí následuje zapojení (obr. 4).



Obrázek 4: složitější síť rezistorů

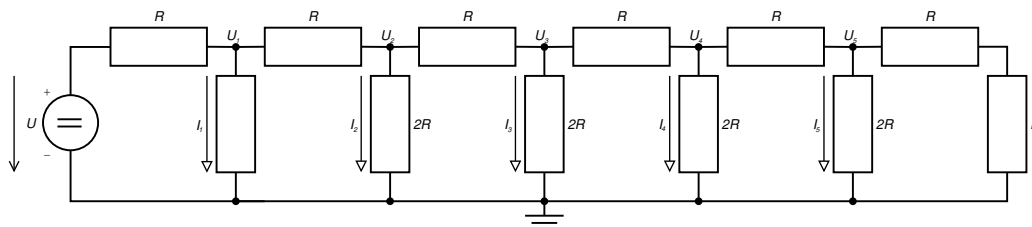
U tohoto zapojení nelze jednoznačně rozhodnout, které odpory jsou spojeny seriově a které paralelně. Matematicky se dá dokázat, že „trojúhelníkové“ zapojení odporů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  se dá překreslit na ekvivalentní obvod (obr. 5), u kterého již není složité provést zjednodušení až na Ohmův zákon

$$I = \frac{U}{R_{ekv}} \quad .$$



Obrázek 5: zjednodušený obvod z obr. 4

Z hlediska odporových sítí a jednoho napájecího zdroje má mimořádné postavení obvod na obr. 6 – tzv. příčkový členek  $R$ - $2R$  využívaný v analogově-číslíkových a číslíkově-analogových převodnících (např. ve skenerech, digitálních fotoaparátech), kdy se spojitý signál analogový převádí na číslíkový signál (pro zpracování v číslíkovém počítači), případně, kdy se číslíkové zobrazení převádí zpět na analogový spojitý signál.



Obrázek 6: příčkový členek

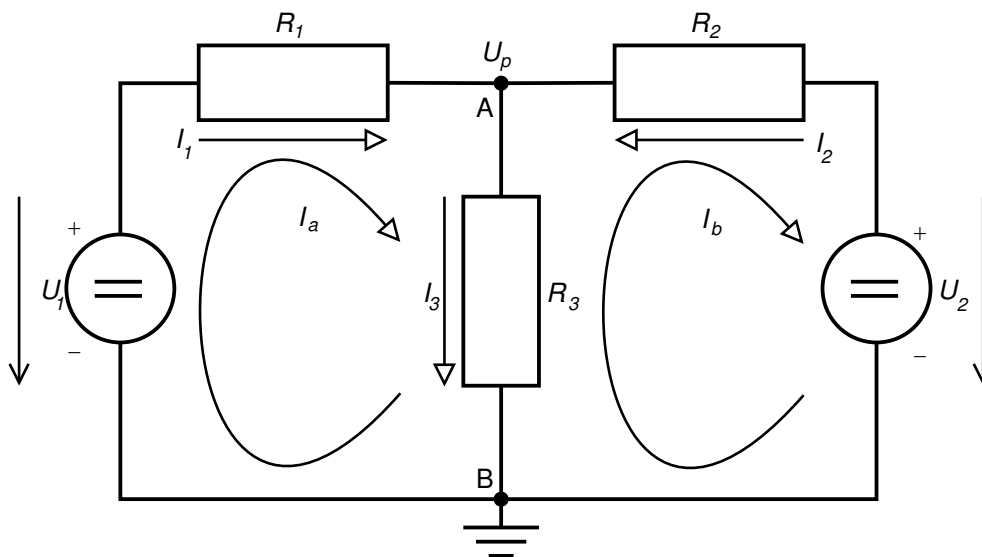
Platí:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U}{2} = 2^{-1} U \\ U_2 &= \frac{U_1}{2} = 2^{-2} U \\ U_3 &= \frac{U_2}{2} = 2^{-3} U \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I}{2} = 2^{-1} I \\ I_2 &= \frac{I_1}{2} = 2^{-2} I \\ I_3 &= \frac{I_2}{2} = 2^{-3} I \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Protékající proudy jsou odstupňovány binárně.

V návaznosti na předchozí obvodová zapojení následuje jednoduchý obvod s odporovou sítí a dvěma zdroji napětí (obr. 7).



Obrázek 7: obvod se dvěma zdroji napětí

Pro řešení tohoto typu obvodů se používají dvě metody:

1. metoda smyčkových proudů

$$R_1 I_A + R_3 (I_A - I_B) - U_1 = 0$$

$$R_2 I_B + U_2 + R_3 (I_B - I_A) = 0$$

$$\Rightarrow I_a = \dots \quad I_b = \dots$$

2. metoda uzlových napětí

$$I_1 + I_2 = I_3$$

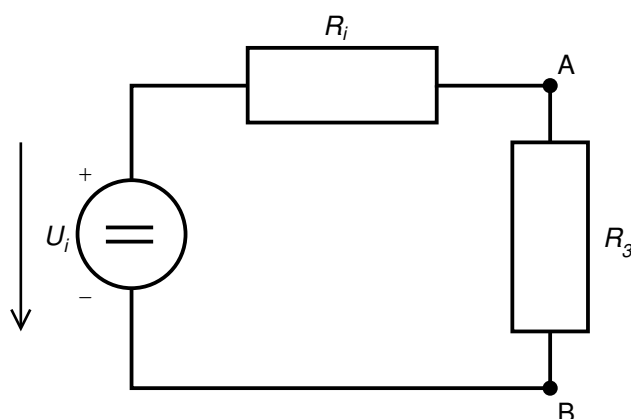
$$\frac{U_1 - U_p}{R_1} + \frac{U_2 - U_p}{R_2} = \frac{U_p}{R_3}$$

$$\Rightarrow U_p = \dots$$

Uvedené metody se používají, když se mají určit všechny proudy a všechna napětí v obvodu, tj.  $U_{R_1}$ ,  $I_{R_1}$ ,  $U_{R_2}$ ,  $I_{R_2}$ ,  $U_{R_3}$ ,  $I_{R_3}$ . Pokud se má určit jen jeden proud (např.  $I_3$ ), může se postupovat buď metodou „jednoho krokodýla“, nebo Theveninovým teorémem.

Metoda jednoho krokodýla popisuje originální způsob, jak chytit jednoho krokodýla. Je to prosté – chytíme krokodýly dva a jednoho pustíme (tzn. spočítáme všechny proudy  $I_1, I_2, I_3$  a vypočtené hodnoty  $I_1, I_2$  zapomeneme).

Podle Theveninova teorému vyznačíme v obvodu (obr. 7) body A, B, mezi kterými protéká proud  $I_3$  a obvod překreslíme na ekvivalentní zapojení (obr. 8).



Obrázek 8: zapojení ekvivalentní k obr. 7

Potom:

$$I_3 = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$

$R_i$  se v obr. 7 určí jako odpor mezi body A, B (bez odporu  $R_3$ ), napěťové zdroje jsou přitom zkratovány (obr. 9).

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$U_i$  se v obr. 7 určí jako napětí mezi body A, B (bez odporu  $R_3$ ) – obr. 10. Např.:

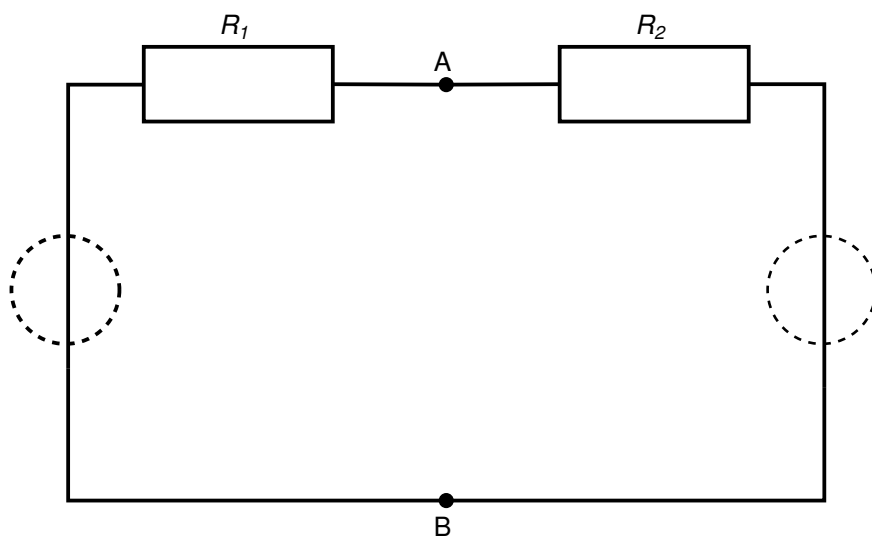
$$IR_1 + U_i - U_1 = 0$$

$$IR_1 + IR_2 + U_2 - U_1 = 0$$

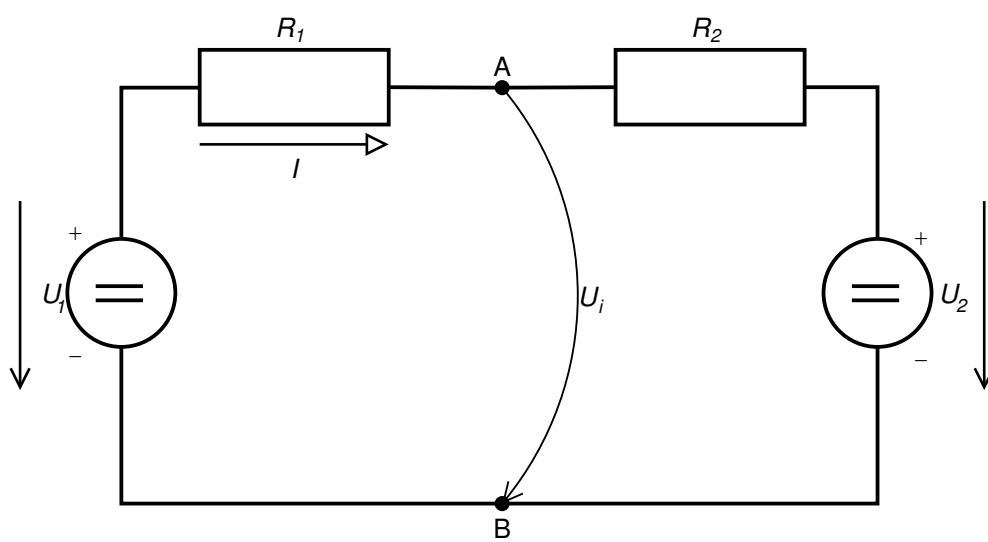
$$I = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} R_1 + U_i - U_1 = 0$$

$$\Rightarrow U_i = \dots$$



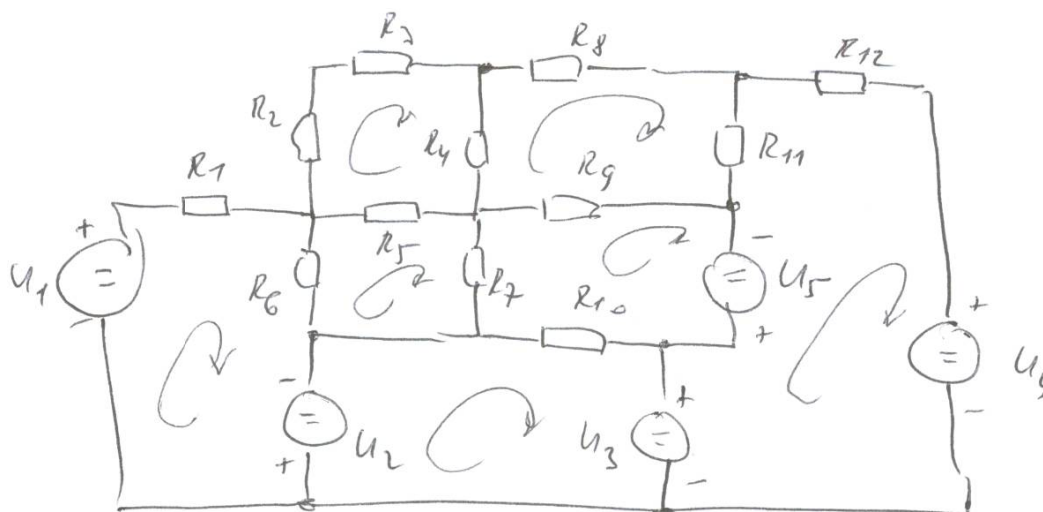
Obrázek 9: určování  $R_i$



Obrázek 10: určování  $U_i$



Větší počet napájecích zdrojů a odporových sítí závisí již jen na zlomyslnosti přednášejícího a garanta předmětu (obr. 11).



Obrázek 11: komplikovaný obvod

Např. 7 smyčkových rovnic, nebo 2 rovnice pro uzlová napětí.

## A2. Vzájemné propojení odporů, kondenzátorů, indukčností a střídavých zdrojů napětí

Pro střídavé harmonické napětí se nejčastěji uvádí zápis

$$u = U_m \sin \omega t \quad .$$

Ohmův zákon pro střídavé napětí a odpor  $R$  je v očekávaném tvaru

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

(napětí na odporu a proud odporem jsou ve fázi).

Ohmův zákon pro střídavé napětí a kondenzátor je v diferenciálním tvaru

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (u_C(0) = u_{C0})$$

$$i_C = C \cdot u'_C \quad .$$

Ohmův zákon pro střídavé napětí a indukčnost je v diferenciálním tvaru

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (i_L(0) = i_{L0})$$

$$u_L = L \cdot i'_L \quad .$$

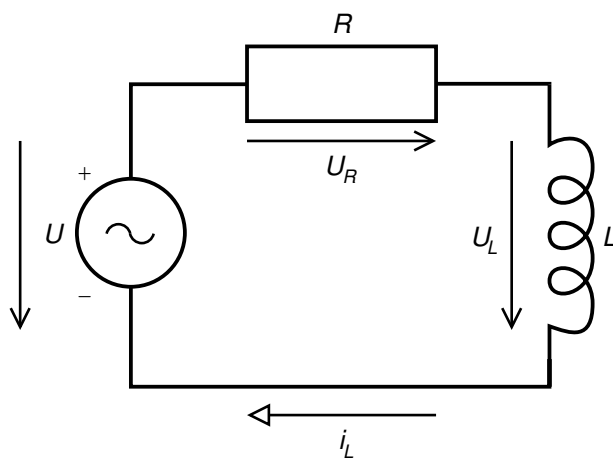
Pro seriové spojení odporů (analogicky k obr. 2) s připojeným zdrojem střídavého napětí platí analogicky s obr. 2:

$$u = u_{R1} + u_{R2} \quad i = \frac{u}{R_1 + R_2} \quad .$$

Pro seriové spojení  $RL$ ,  $RC$ , nebo  $LC$  je již situace matematicky složitější. Např. pro obvod  $RL$  (obr. 12) je

$$u = u_R + u_L$$

$$u = R \cdot i_L + L \cdot i'_L \quad .$$



Obrázek 12: obvod  $RL$

Pro konkrétní hodnoty  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $i_L(0) = 0$ ,  $u = 200 \sin 100 t$  je řešení obvodu popsáno následující diferenciální rovnicí

$$0,1 i'_L + 10 i_L = 200 \sin 100 t \quad i_L(0) = 0 \quad .$$

A to už je problém...

A tak nastoupili matematici a vytvořili následující výpočetní postup řešení této nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu:

1. Nejdříve se spočítá řešení homogenní rovnice

$$0,1 i_L' + 10 i_L = 0$$

(na pravou stranu se dosadí 0) a získá se homogenní řešení

$$i_{LH} = K \cdot e^{\lambda t} \quad .$$

Této rovnici se říká „očekávané řešení“ zkoumané homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Konstanta  $\lambda$  se získá pomocí charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} 0,1 \lambda + 10 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -100 \quad . \end{aligned}$$

Takže očekávané homogenní řešení je

$$i_{LH} = K \cdot e^{-100t} \quad .$$

2. Nyní se vyšetří vliv pravé strany rovnice (vliv funkce  $200 \sin 100t$ ).

Matematici vymysleli, že pro tento typ pravé strany může mít řešení očekávaný tvar

$$i_{LP} = A \sin 100t + B \cos 100t$$

(index „P“ znamená pravá strana).

A jak se potvrdí, že rovnice  $i_{LP}$  vyhovuje zadané zkoumané diferenciální rovnici?  $\Rightarrow$  Rovnice  $i_{LP}$  se dosadí.

Pro dosazení ale musíme ještě očekávaný tvar derivovat

$$i_{LP}' = A 100 \cos 100t - B 100 \sin 100t \quad ,$$

takže po dosazení je

$$\begin{aligned} 0,1(A 100 \cos 100t - B 100 \sin 100t) + 10(A \sin 100t + B \cos 100t) &= \\ &= 200 \sin 100t \quad , \end{aligned}$$

úpravou je

$$(10A - 10B) \sin 100t + (10A + 10B) \cos 100t = 200 \sin 100t \quad .$$

Porovnáme koeficienty na levé a pravé straně:

$$\begin{aligned} 10 A - 10 B &= 200 \\ 10 A + 10 B &= 0 \end{aligned}$$

To je soustava rovnic pro A, B.

Např.

$$\begin{aligned} 10 A &= -10 B \\ -10 B - 10 B &= 200 \quad \Rightarrow \quad B = -10, \quad A = 10 \end{aligned}$$

takže

$$i_{LP} = 10 \sin 100 t - 10 \cos 100 t$$

3. Výsledné obecné řešení  $i_L$  je dáno součtem  $i_{LH}$  a  $i_{LP}$ :

$$i_L = K \cdot e^{-100t} + 10 \sin 100 t - 10 \cos 100 t$$

4. Konkrétní výsledné řešení se stanoví podle počáteční podmínky  $i_L(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= K \cdot e^{-100 \cdot 0} + 10 \sin 100 \cdot 0 - 10 \cos 100 \cdot 0 \\ 0 &= K - 10 \\ K &= 10 \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$i_L = 10(e^{-100t} + \sin 100 t - \cos 100 t)$$

Jak to tedy dopadne s napětími v obvodu? Na odporu je to jasné:

$$u_R = R \cdot i_L = 10 \cdot 10(e^{-100t} + \sin 100 t - \cos 100 t)$$

$$u_R = 100 e^{-100t} + 100 \sin 100 t - 100 \cos 100 t$$

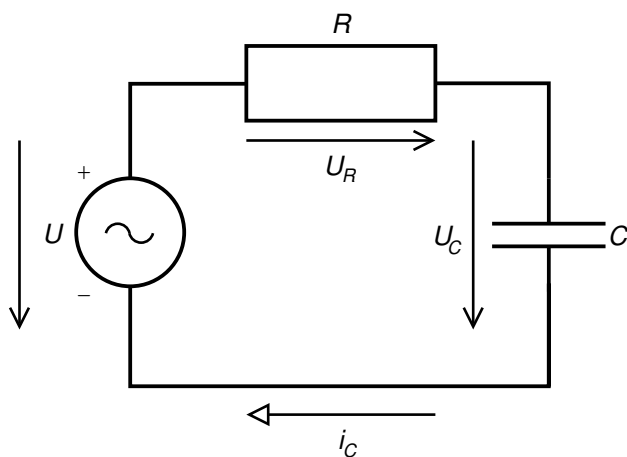
$$u_L = u - u_R = 200 \sin 100 t - 100 e^{-100t} - 100 \sin 100 t + 100 \cos 100 t$$

$$u_L = -100 e^{-100t} + 100 \sin 100 t + 100 \cos 100 t$$

Názornější než rovnice jsou grafy (např. pomocí TKSL). Jednotlivé průběhy jsou velmi názorné a ukazují, co je vlastně výsledkem chování obvodu  $RL$ :

v obvodu  $RL$  dojde ke změně amplitudových a fázových poměrů proudů a napětí vůči vstupnímu harmonickému signálu.

Jak to dopadne se seriovým spojením  $RC$  (obr. 13)?



Obrázek 13: obvod  $RC$

$$\begin{aligned} u'_C &= \frac{1}{C} i_C & i_C &= \frac{u - u_C}{R} \\ u'_C &= \frac{1}{CR} (u - u_C) & u_C(0) &= 0 \text{ (např.)} \end{aligned}$$

Pro konkrétní hodnoty  $C = 0,002 \text{ F}$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $u = 5 \sin 100 t$  je

$$u'_C = \frac{1}{0,002 \cdot 20} (5 \sin 100 t - u_C)$$

$$25 u'_C + u_C = 5 \sin 100 t \quad .$$

A opět

$$25 \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{25}$$

$$\lambda = -0.04$$

$$\Rightarrow U_{CH} = K \cdot e^{-0.04 t} \quad .$$

Očekáváme

$$u_{CP} = A \sin 100 t + B \cos 100 t$$

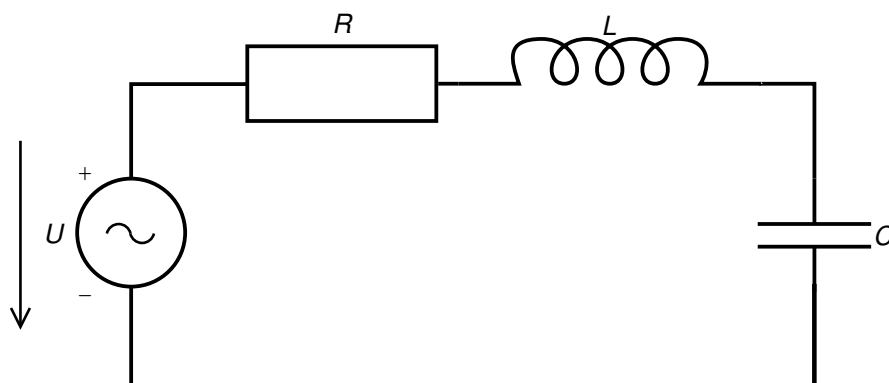
$\vdots$

$$u_C = u_{CH} + u_{CP}$$

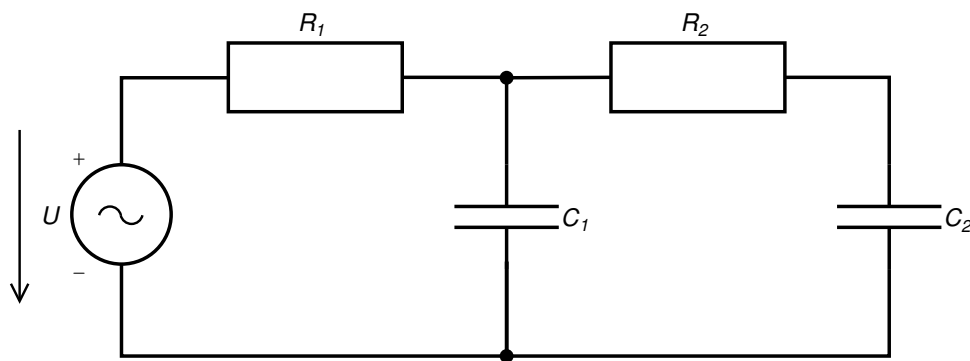
$$u_C(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \dots$$

Výsledky např. v TKSL.

Jak to matematicky dopadne s „trošku“ složitějšími obvody?



Obrázek 14: obvod  $RLC$



Obrázek 15: „trošku“ složitější obvod

Odpověď: „asi si hodně započítáme“.

## Ustálený harmonický stav v obvodu

Matematická odvození určitě nejsou příliš příjemná a tak vzniklo následující technické a praktické zjednodušení:

Pro harmonický signál se v obvodu vytvoří, po proběhnutí přechodného děje ( $\equiv$  od „nějaké“ doby lze výraz  $e^{-100t}$  zanedbat), rovnovážný harmonický stav, u kterého se již nemění ani amplituda ani fáze jednotlivých veličin.

A tak se Ohmův zákon pro kondenzátor

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

a pro

$$u_C = U_M \sin \omega t$$

přepíše pro ustálený harmonický stav do tvaru

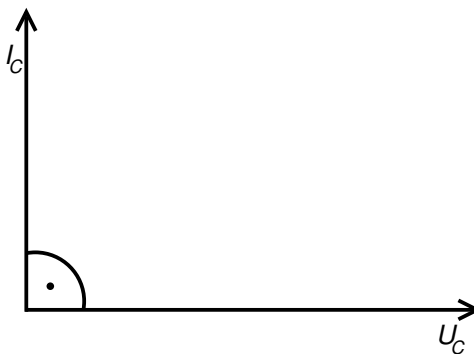
$$i_C = C \cdot U_M \omega \cos \omega t$$

$$i_C = I_M \cos \omega t$$

$$i_C = I_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_M = \frac{U_M}{X_C} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad ,$$

a vlastně proud kondenzátorem předbíhá před napětím na kondenzátoru o  $90^\circ$ :



Obrázek 16: fázorový diagram pro  $RC$  obvod

Podobně pro

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

a pro

$$i_L = I_M \sin \omega t$$

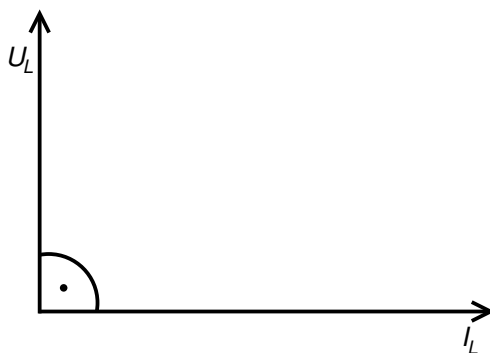
dostaneme postupně

$$u_L = L \cdot I_M \omega \cos \omega t$$

$$u_L = U_M \cos \omega t$$

$$u_L = U_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

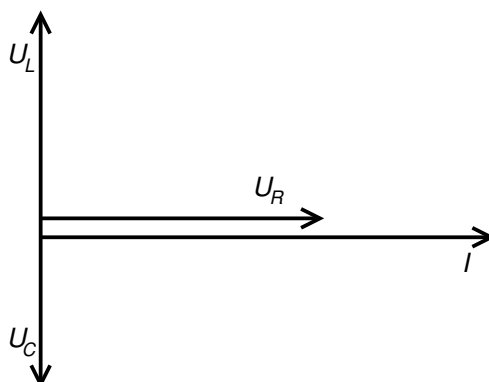
$$U_M = I_M \cdot X_L \quad X_L = \omega L \quad .$$



Obrázek 17: fázorový diagram pro  $RL$  obvod

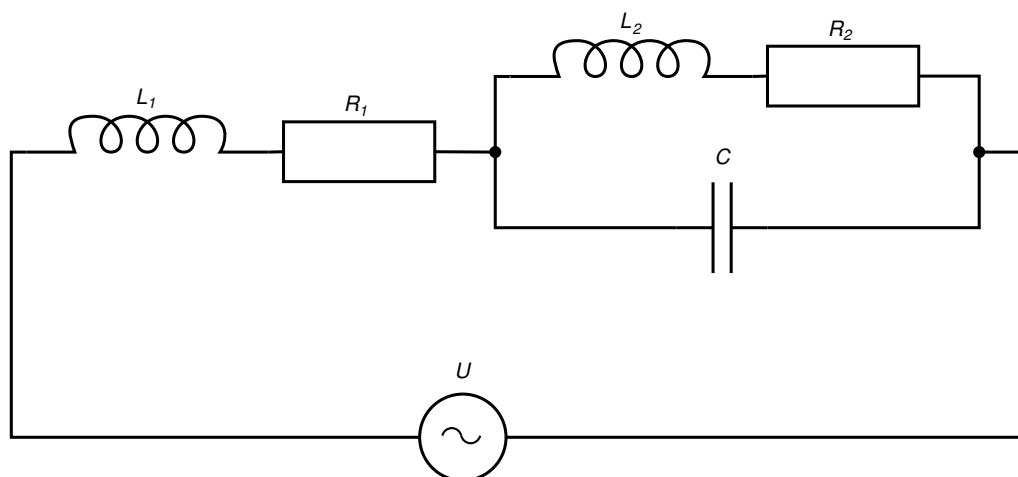
Takže situace pro  $RLC$  (obr. 14) je – obr. 18.





Obrázek 18: fázorový diagram pro  $RLC$  obvod

Ale komplikované u složitějších obvodů:

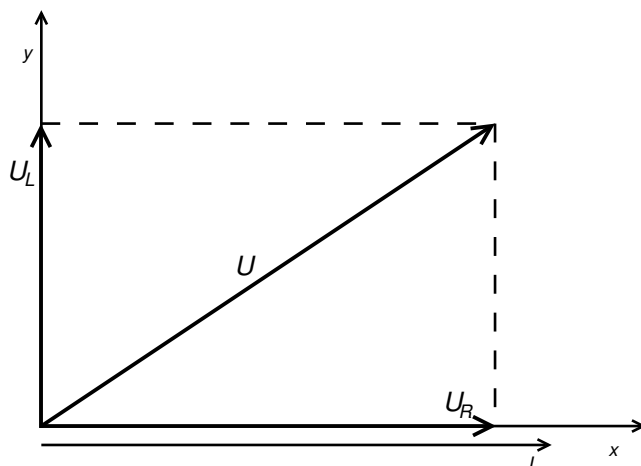


Obrázek 19: složitý obvod

$\Rightarrow$  přechod na komplexní čísla.

Jak se vlastně přešlo na komplexní čísla? Třeba pro obvod  $RL$  (obr. 12)...

Pomocí „předbíhání“ a „zpoždování“ lze vytvořit známou reprezentaci Pythagorovy věty (na osách  $x, y$ ) – obr. 20.



Obrázek 20: ilustrace přechodu ke komplexním číslům

Pokud prohlásíme vodorovnou osu za „reálnou“ osu a svislou osu za „imaginární“ osu, je vlastně:

$$U_R = R \cdot I$$

$$U_L = j\omega L \cdot I$$

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L = R \cdot I + j\omega L \cdot I \quad .$$

Je to už trochu lepší, než kreslit „Pythagorovu“ větu, ale zase když je to složitý obvod (a případně nelineární), tak si opět započítáme.

A tak se znovu vracíme k diferenciálnímu zápisu:

obvod  $RL$  (z obr. 12) byl popsán diferenciální rovnicí

$$0,1 i_L' + 10 i_L = 200 \sin 100 t \quad .$$

Tento typ rovnice umí řešit výkonné programy (např. TKSL) – rovnice se jen přepíše na:

$$i_L' = \frac{1}{0,1} (200 \sin 100 t - 10 i_L) \quad .$$

Podobně všechno ostatní  $\Rightarrow$  jen to chce umět obvod popsat soustavou diferenciálních rovnic 1. řádu.

Tak co je snazší :  $\begin{cases} \text{matematika} \\ \text{TKSL} \end{cases} ?$