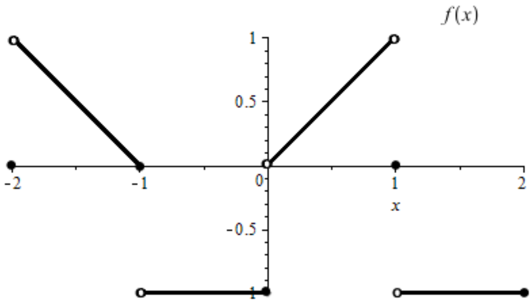
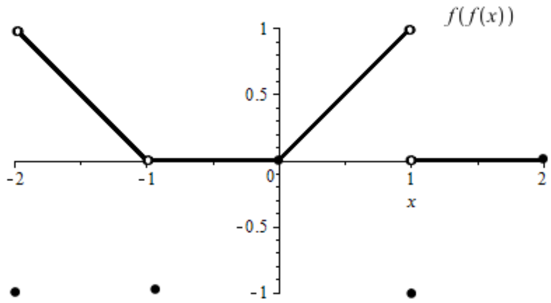
Vzorové řešení zadání E

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\{-2,-1,1\} \\ -x-1 & x\in(-2,-1) \\ -1 & x\in(-1,0\rangle\cup(1,2\rangle \\ x & x\in(0,1) \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f, graf funkce $f\circ f$ a určete $f\left(\langle 0,1\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\{0\}\right)$.





$f\left(\langle 0,1\rangle\right)=\langle 0,1)$ $\qquad$ $f^{-1}\left(\{0\}\right)=\{-2,-1,1\}$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}:\ |x|<-1\right) \ \Rightarrow\ \left(\exists y\in\mathbb{R}:\ \cos y\geq 2\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Platí-li $\forall n: a_n\leq b_n$ a nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, potom je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý protipříklad´ :*** $a_n=\frac{1}{n^2}, b_n=\frac{1}{n}$

c)) Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je zde spojitá. ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-21}$, $\quad I=\langle -8,0\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x-21}=\left(x^2+2x-21\right)^{\frac{1}{3}},\quad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x+2}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x+7)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2,\quad f'(x)\not\exists\Leftrightarrow x=3\vee x=-7 \qquad -2\in I,\quad 3\not\in I,\quad -7\in I$$

$f(-8)=\sqrt[3]{11}$ max

$f(-7)=0$

$f(-2)=\sqrt[3]{-25}=-\sqrt[3]{25}$ min

$f(0)=\sqrt[3]{-21}$

maximum v bodě $x=-8$, $f_{\max}=\sqrt[3]{11}$, ***minimum v bodě*** $x=-2$, $f_{\min}=-\sqrt[3]{25}$.

4) Vypočítejte integrál $I=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{3}{x^2+1}\right)dx$

$$I=\left[\ln(x+2)-\ln(x+4)+3\operatorname{arctg}x\right]_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+2}{x+4}+3\operatorname{arctg}x\right)-\ln\frac{2}{4}-3\operatorname{arctg}0=\ln 1+\frac{3}{2}\pi+\ln 2=$$

$$\underline{=\frac{3}{2}\pi+\ln 2}$$

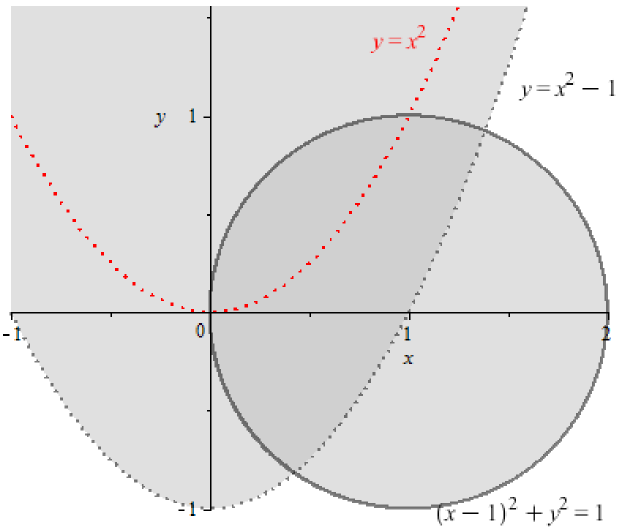
5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce *f*,

je-li $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2-y^2}}{\ln(1-x^2+y)}$

$$D_f: 2x-x^2-y^2\geq 0\wedge 1-x^2+y>0\wedge 1-x^2+y\neq 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+y^2\leq 1\wedge y>x^2-1\wedge y\neq x^2$$

$$\underline{D_f=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\leq 1\wedge y>x^2-1\wedge y\neq x^2\right\}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I=\iint_M f(x,y)\,dxdy$, je-li

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \text{ a } M=\left\{(x,y)\,|\,-x\leq y\leq x\wedge x^2+y^2\leq 1\right\}$$

$$\Phi^{-1}(M)=\left\{(\rho,\varphi)\,|\,0\leq\rho\leq 1\wedge -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$I=\iint_M\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{\Phi^{-1}(M)}\rho\cdot\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 d\rho=[\varphi]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$\underline{=\frac{\pi}{6}}$$