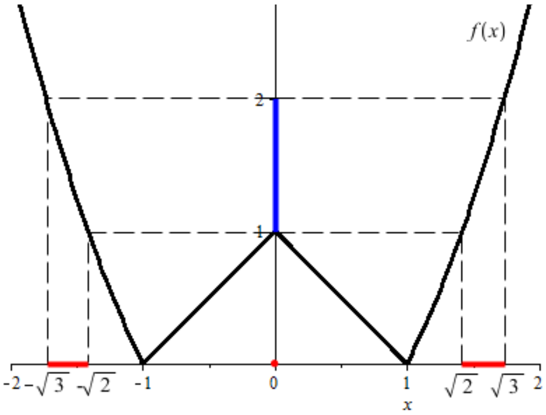
Vzorové řešení zadání <u>***N***</u>

1) Funkce f a g jsou zadány předpisy $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\le 1\\ x^2-1 & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1-x & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$.

Najděte předpis pro složenou funkci $g\circ f$ a určete $f^{-1}\left(\langle 1,2\rangle\right)$.



$$f^{-1}\left(\langle 1,2\rangle\right)=\langle -\sqrt{3},-\sqrt{2}\rangle\cup\{0\}\cup\langle\sqrt{2},\sqrt{3}\rangle$$

$g\left(f(x)\right)=\begin{cases}1-f(x) & f(x)<0\\ 1 & f(x)\ge 0\end{cases}$. vyřešíme nerovnosti napravo:

$\begin{matrix}|x|\le 1\Rightarrow 1-|x|\ge 0\\ |x|>1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow x^2-1>0\end{matrix}\quad\Rightarrow f(x)\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, což se dalo zjistit z grafu funkce f.

$$g\left(f(x)\right)=\begin{cases}1-f(x) & f(x)<0 & \textit{neplatí nikdy}\\ 1 & f(x)\ge 0 & \textit{platí vždy}\end{cases}\Rightarrow g\left(f(x)\right)=1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists y\in\mathbb{R}:\sin^2 y+\cos^2 y=13\right)\Rightarrow$ alespoň jeden student dnes zkoušku z IMA neudělá. ***<u>pravdivý</u>***

b) Je-li funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, je na $\langle a,b\rangle$ ohraničená. ***<u>pravdivý</u>***

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní. ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:*** $a_n=\dfrac{1}{n}$

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I, je-li $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $I=\langle -2,3\rangle$.

$$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}=\left(x^2-2x\right)^{\frac{2}{3}},\quad f'(x)=\frac{2}{3}\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}\left(x-2\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1,\quad f'(x)\nexists\Leftrightarrow x=0\vee x=2\qquad 0\in I,\ \ 1\in I,\ \ 2\in I$$

$f(-2)=\sqrt[3]{(4+4)^2}=\sqrt[3]{64}$ max

$f(0)=0$ min

$f(1)=\sqrt[3]{(1-2)^2}=1$

$f(2)=0$ min

$f(3)=\sqrt[3]{(9-6)^2}=\sqrt[3]{9}$

maximum v bodě $x=-2$, $f_{\max}=\sqrt[3]{64}$, ***minimum v bodech*** $x=0, x=2$, $f_{\min}=0$.

4) Pro n-tý částečný součet nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ platí $s_n = 1 - \frac{1}{3^n}$. Určete a_n a s.

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 1 - \frac{1}{3^n} - \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n} = \frac{3-1}{3^n} = \frac{2}{3^n} \qquad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$$

$$\underline{a_n = \frac{2}{3^n}} \qquad\qquad \underline{s = 1}$$

5) $f(x,y) = \ln\frac{y^3}{x}$. Najděte bod, ve kterém je $\operatorname{grad} f(x,y) = (1,1)$.

$$f(x,y) = \ln\frac{y^3}{x} = 3\ln y - \ln x, \quad f'_x = -\frac{1}{x},\ f'_y = \frac{3}{y}, \quad \operatorname{grad} f(x,y) = \left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{y}\right).$$

$$\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{y}\right) = (1,1) \Leftrightarrow x = -1,\ y = 3 \qquad\qquad \underline{[x,y] = [-1,3]}$$

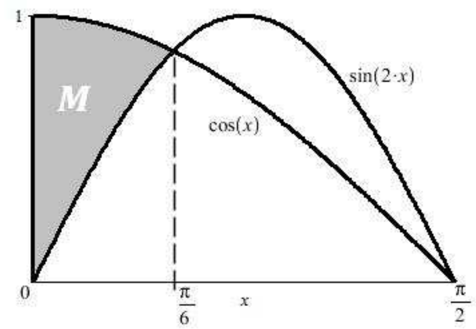
6) Vypočítejte integrál $I = \int_M x\,dxdy$, je-li M ohraničená grafy funkcí $y = \cos x,\ y = \sin 2x$ a osou y $(x \geq 0)$.

Určíme průsečíky grafů:

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$M = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \\ \sin 2x \leq y \leq \cos x \end{array} \right\}$$



$$I = \int_M x\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,dx \int_{\sin 2x}^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x[y]_{\sin 2x}^{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x(\cos x - \sin 2x)\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x - \sin 2x & v = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \left[x\left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left[-\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\cos 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1$$

$$\underline{I = \frac{1}{8}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right) - 1}$$