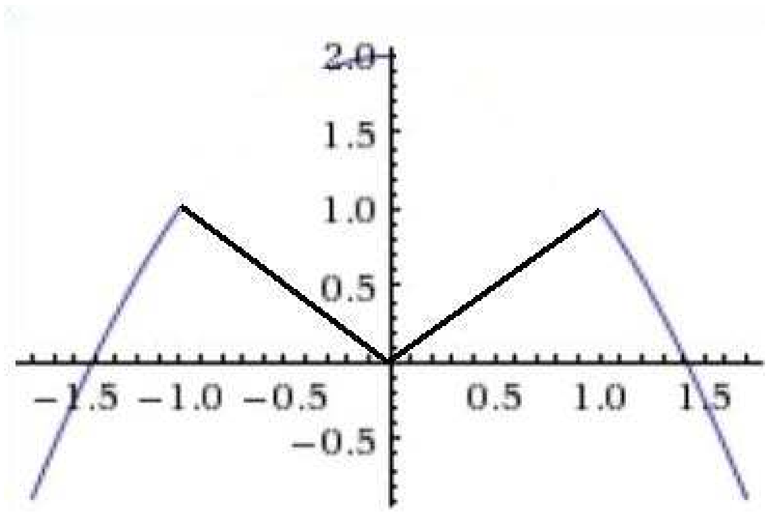
Příklad 18.1: Pro funkce f a g jsou definovány předpisy

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pro } |x| \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \le 1 \\ 2 - x & \text{pro } x > 1 \end{cases}.$$

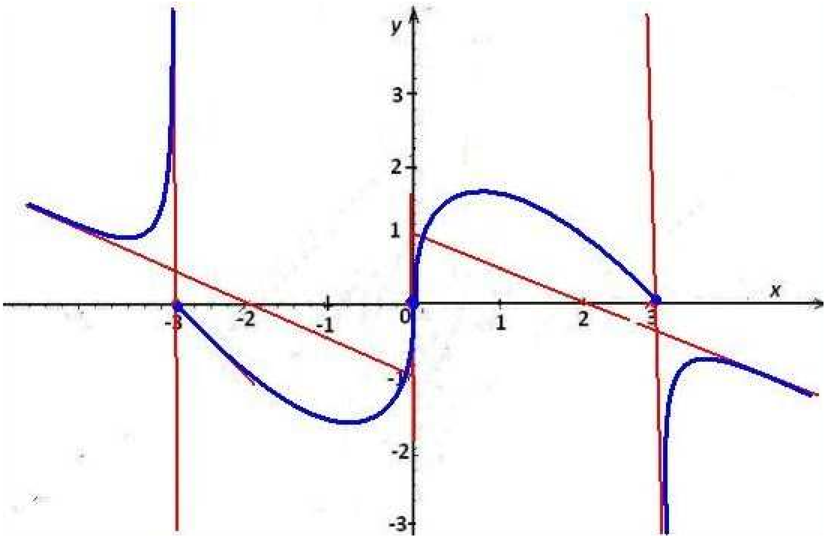
Najděte definiční předpis pro složenou funkci g(f(x)).



Obr. 123, graf funkce f

Vstup do funkce g tedy bude vždycky menší než 1 → výslednou funkcí bude g(f(x)) = 1.

Příklad 18.2: Do následujícího obrázku načrtněte graf funkce f, která má následující vlastnosti: F je lichá, $D_f = R$, přímka $y = 1 - \frac{1}{2}x$ je asymptota pro x → ∞, f(0) = f(3) = 0, pro x = 3 má nespojitost 2. druhu, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$, $\lim_{x\to 3-} f'(x) = -1$, $f''(x) < 0, pro\ x \in (0,3) \cup (3,\infty)$.



nespojitost 2. druhu = funkce kolem daného bodu nabývá všech hodnot

Příklad 18.3: Je dána funkce f (x, y) = x* ln(y^2 – 4x). Najděte všechny body P, pro které platí gradf (P) = (-2, 0).

f'$_x$ = $\ln(y^2 - 4x) + \frac{x}{(y^2-4)*4} = \ln(y^2 - 4x) + \frac{x*(-4)}{y^2 - 4x}$

f'$_y$ = $x * \frac{2y}{(y^2 - 4x)}$

$\ln(y^2 - 4x) - \frac{4x}{y^2 - 4x}$ = -2

$\frac{x*2y}{(y^2 - 4x)}$ = 0 → x = 0 nebo y = 0

$\ln(y^2 - 0) + 0 = -2$

ln(y^2) = -2

y^2 = 1/e^2

y = +- 1/e

Po dosazení y = 0 do první rovnice nám vyjde ln(-4x) = -3 → -4x = e^{-3} → x = $-\frac{e^{-3}}{4}$

Příklad 18.4: Vypočtěte integrál I = $\int_M x\, dx\, dy$, jestliže množina M je omezená grafy funkcí y = sin x a 2x – πy = 0 přičemž x > 0.

Z grafů funkcí určíme meze nezávislé a závislé, podle těch budeme integrovat:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{2x}{\pi}}^{sinx} x\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, [xy]_{\frac{2x}{\pi}}^{sinx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(xsinx - \frac{2}{\pi} x^2 \right) dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = sinx & v = -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= [-x * \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\, dx - \left(\frac{\frac{2\pi^3}{8}}{3\pi}\right) = [\sin x\,]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2\pi^3}{8} * \frac{1}{3\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2} * 0 + 1 - \frac{\pi^2}{12}$$

Definice 18.7:

Pro integrál ze součinu platí rovnice

$$\int a * b' = a * b - \int a' * b.$$

Tato se aplikuje tak, že si vybereme jeden z činitelů původníh integrálu (ten, který se bude líp derivovat) a ten si zderivujeme, zatímco druhý zintegrujeme a potom dosadíme do výše uvedeného vzorce.

Příklad 18.5: Nechť [a, b] je stacionární bod dvakrát spojitě diferencovatelné funkce f (x, y). Pro druhé parciální derivace funkce f platí:

a) $f''_{xx} = 2,\ f''_{yy} = 8,\ f''_{xy} = 4$
b) $f''_{xx} = 2,\ f''_{yy} = 4,\ f''_{xy} = -3$
c) $f''_{xx} = 2,\ f''_{yy} = 4,\ f''_{xy} = 3$
d) $f''_{xx} = 3,\ f''_{yy} = 4,\ f''_{xy} = 2$
e) $f''_{xx} = -3,\ f''_{yy} = -4,\ f''_{xy} = -2$
f) $f''_{xx} = 3,\ f''_{yy} = -4,\ f''_{xy} = -2$

Nechť A je tvrzení: f má v [a, b] lokální minimum,

B f má v [a, b] lokální maximum,
C f v [a, b] nemá extrém,
D na základě daných informací o extrému nelze rozhodnout.

Použitím Sylvestrova kritéria (str. 302) lze dojít k závěru, že v případě a) se jedná o bod, o jehož monotónnosti nelze rozhodnout, v případě b) a c) extrém nenastane, v případě d) nastane lokální minimum, v případě e) nastane lokální maximum a v případě f) extrém nenastane.

Příklad 18.6: Pomocí vztahu pro součet geometrické řady řešte rovnici $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{6^n} = 2 + x$.

Použijeme vztah pro součet nekonečné geometrické řady: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$. Platí, pokud |q| < 1.

Pro tento výpočet potřebujeme zjistit a_1 a q: $a_1 = \frac{2x-3}{6}, a_2 = \frac{(2x-3)^2}{36}, q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2x-3}{6}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{6}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2x-3}{6}} = \frac{6}{9-2x}$$

Podmínka konvergence:

$$\left|\frac{2x-3}{6}\right| < 1 \Leftrightarrow |2x-3| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x-3 < 6 \Leftrightarrow -3 < 2x < 9 \Leftrightarrow x \in \left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{2}\right)$$

$$\frac{6}{9-2x} = 2+x \Leftrightarrow 6 = (2+x)(9-2x) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}; \quad x_1 = 4,\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\text{Řešení rovnice } x = 4}$$

Příklad 18.7:

Je dána plocha o rovnici $2ye^{y}+ze^{z}-xe^{2x}=3e$ a na ní bod $A=[0,1,1]$. Najděte rovnici tečné roviny k zadané ploše v bodě A.

Plocha o rovnici $F(x,y,z)=k$ má v bodě $A=[x_0,y_0,z_0]$ tečnou rovinu

$F'_x(A)(x-x_0)+F'_y(A)(y-y_0)+F'_z(A)(z-z_0)=0$

$F'_x=-(1+2x)e^{2x},\ F'_y=2(1+y)e^{y},\quad F'_z=(1+z)e^{z}$

$F'_x(A)=1,\ F'_y(A)=4e,\ F'_z(A)=2e$

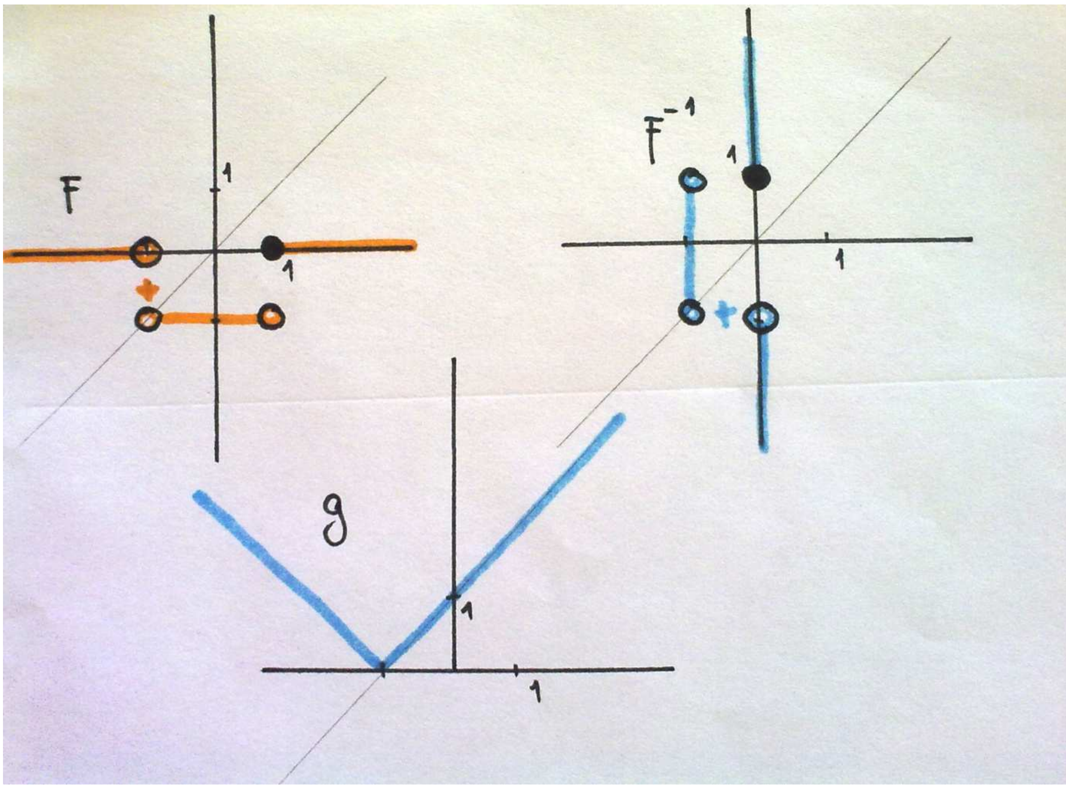
$$\boxed{\rho:-x+4e(y-1)+2ez=0}$$

Příklad 19.1: Pro funkce f a g jsou definovány předpisy:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ -\frac{1}{2} & x=-1\\ -1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x\in\langle 1,\infty)\end{cases},\quad g(x)=|x+1|\qquad \text{určete } f^{-1}((-1,1\rangle)$$

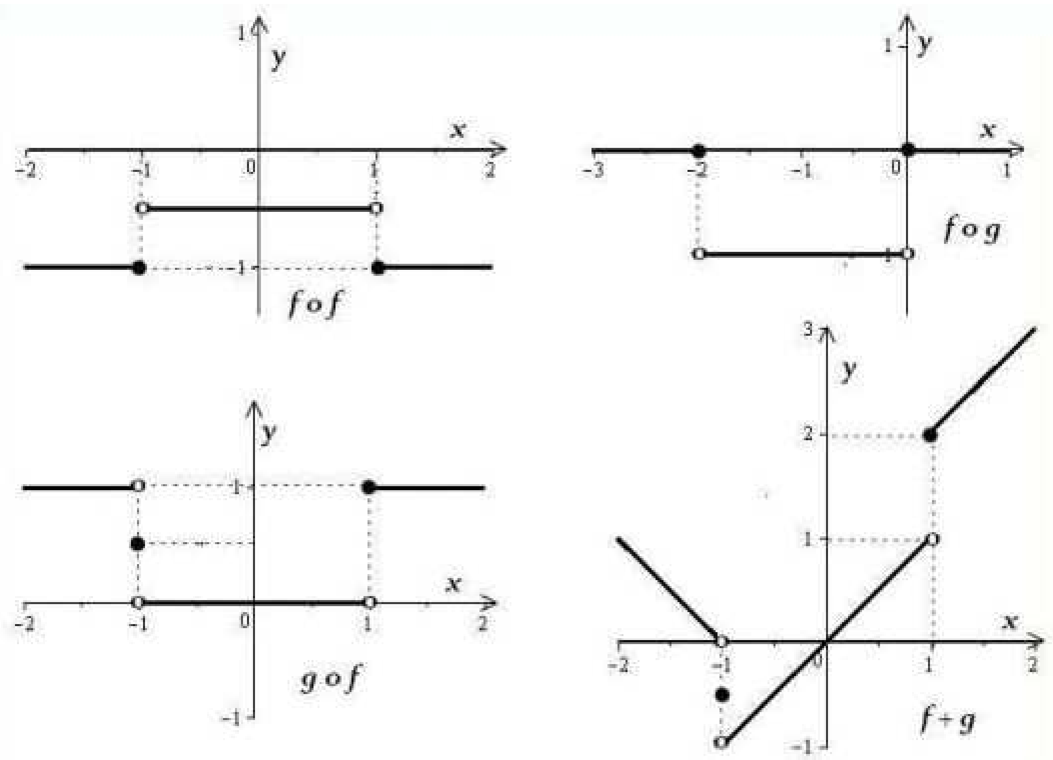
a nakreslete $(f\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$ a $(f+g)(x)$.

Nejprve si nakreslíme funkce f a g a funkci f^{-1}, která je souměrná s funkcí f podle osy 1. a 3. kvadrantu:



Z grafu snadno vyčteme, že f^{-1}(-1, 1> = $(-\infty, 1 > \cup < 1, \infty)$.

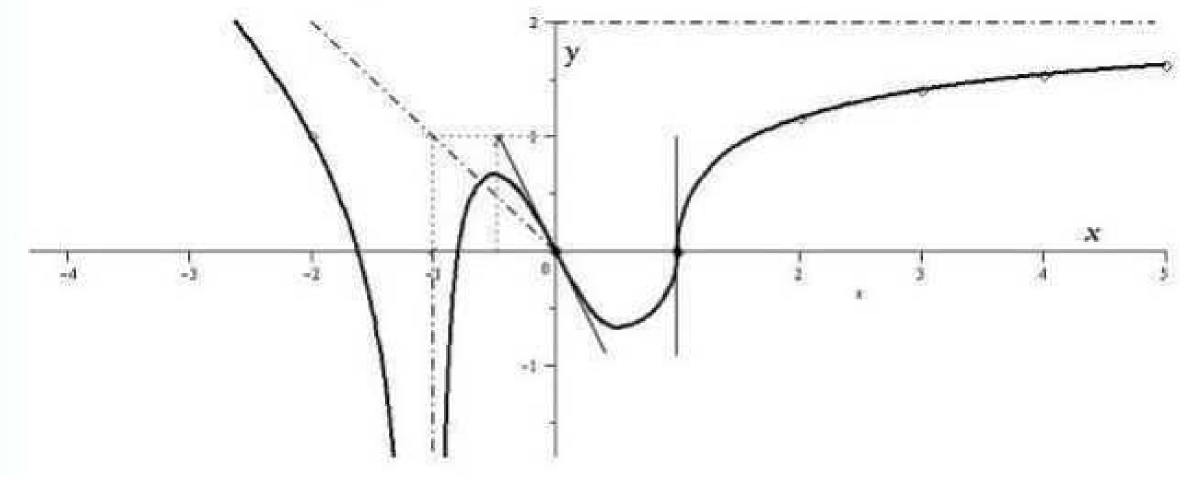
Pro určení hodnoty funkcí uvažujeme f o g (x) = f(g(x)), takže dosadíme nejdříve do g a následně do f, čímž získáme výslednou hodnotu funkce. Správné výsledky jednotlivých kompozicí nalezneme na další stránce.



Obr. 19.2

Příklad 19.2: Do následujícího obrázku načrtněte graf funkce, spojité na R-{-1}, pro kterou platí:

$f(0) = f(1) = 0$, $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, $f'(0) = -2$, $\lim_{x \to 1} f'(x) = \infty$,
$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 0)$ a $x \in (1, \infty)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, 1)$,
přímka $y = -x$ je asymptota pro $x \to -\infty$.
Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny ke grafu funkce v bodě $x = 0$ a $x = 1$.



Obr. 19.3

Pokud máme f' s dosazením, hodnota se rovná tg úhlu, který tečna svírá s kladnou částí osy x.

Příklad 19.3: U každého z následujících výroků podtrhněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Funkce f je nabývá na intervalu $\langle a,b \rangle$ svého maxima a minima právě když je na $\langle a,b \rangle$ spojitá.
pravdivý ***<u>nepravdivý</u>*** ***porušena*** $\Rightarrow$ ***protipříklad:*** $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na int. $\langle -1, 1 \rangle$

b) Je-li funkce f prostá, potom je lichá.
pravdivý ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:*** $f(x) = x + 1$

c) Jestliže existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ pro které platí $|x_0| = -1$, potom $\sqrt{x_0^2} = |x_0|$.
<u>pravdivý</u> ***nepravdivý*** ***protipříklad:***
implikace (nepravda $\Rightarrow$ pravda) je pravdivá (nepravda implikuje cokoliv)

Příklad 19.4: Najděte rovnice tečné roviny a normály ke grafu funkce $f(x, y) = arctg \frac{2y-1}{x}$ v bodě [1, 1, ?].

$f(1,1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ - bod dotyku je $\left[x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right] = \left[1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Obecná rovnice tečné roviny: $y - f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$

Parametrické rovnice normály: $x = x_0 + f_x'(x_0, y_0) \cdot t, \quad y = y_0 + f_y'(x_0, y_0) \cdot t, \quad z = f(x_0, y_0) - t, \quad t \in \mathbb{R}$,

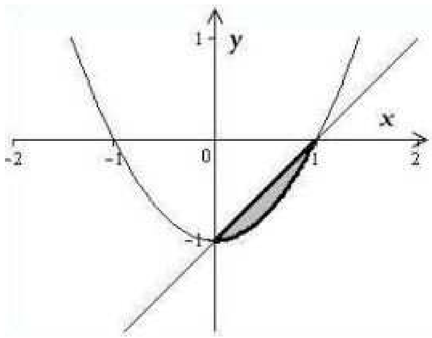
kanonické rovnice normály: $\dfrac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \dfrac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$.

$$f_x' = \frac{(2y-1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{2y-1}{x}\right)^2}, \quad f_x'(1,1) = -\frac{1}{2}; \qquad f_y' = \frac{2}{1 + \left(\frac{2y-1}{x}\right)^2}, \quad f_y'(1,1) = 1;$$

$$\boxed{\textit{tečná rovina}: \begin{array}{l} z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) + (y-1) \\ x - 2y + 2z + 1 - \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \qquad \textit{normála}: \frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{-1}}$$

V tomto příkladě jde jenom o dosazení do rovnic, které jsou tady vypsané. Teoreticky by se daly i najít někde v hlubině skript, ale nevím přesně kde, takže je uvedeno přesně podle vzorového řešení příkladu.

Příklad 19.5: Vypočítejte dvojný integrál $\int_M x^2\, dx\, dy$, kde M je množina ohraničená parabolou $y = x^2 - 1$ a přímkou y = x – 1. Množinu M zakreslete do obrázku.



Zvolíme si meze: pevné pro x: $x \in (0, 1)$ závislé pro y: $y = (x^2 - 1, x - 1)$, podle těchto potom integrujeme.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{x-1} x^2 y\, dy = \int_0^1 dx \left[x^2 \cdot \tfrac{1}{2} y^2\right]_{x^2-1}^{x-1} = \tfrac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left((x-1)^2 - (x^2-1)^2\right) d$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{7} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{3}{140}$$

$$\boxed{I = -\frac{3}{140}}$$

Příklad 19.6: Pomocí vztahu pro součet geometrické řady a vhodné operace s touto řadou určete součet nekonečné řady $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n * (x-1)^{n-1}$. Ověřte podmínky pro tento postup.

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^{n-1}=1+2(x-1)+3(x-1)^2+4(x-1)^3+\cdots+n(x-1)^{n-1}+\cdots$ je to mocninná řada, $x_0=1$.

Určíme obor konvergence:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\,|x-1|^n}{n\,|x-1|^{n-1}}\cdot\dfrac{n}{}=|x-1|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=|x-1|<1$; řada konverguje absolutně pro $x\in(0,2)$ a v tomto intervalu můžeme řadu integrovat člen po členu.

$\int_1^x s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^x n(t-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} n\dfrac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\dfrac{x-1}{1-(x-1)}=\dfrac{x-1}{2-x}$ vznikla geometrická řada, $q=x-1$.

Odtud $s(x)=\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)'=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ $x\in(0,2)$.

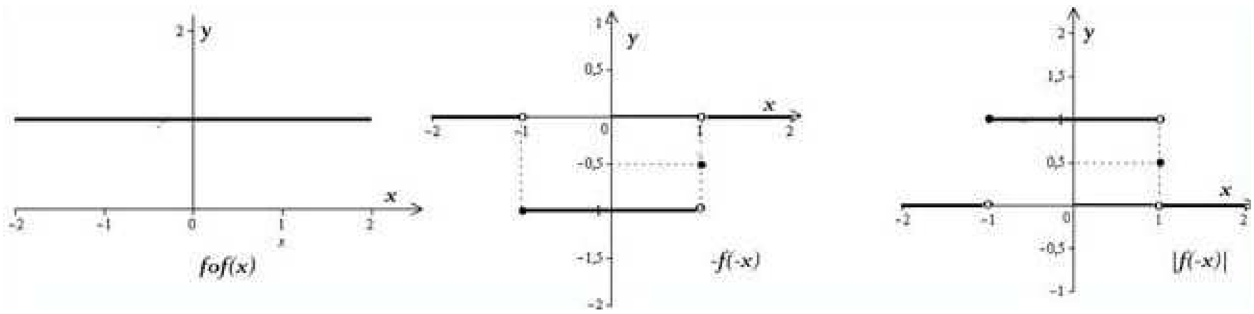
$$\boxed{s(x)=\frac{1}{(x-2)^2},\qquad \textit{pro}\quad x\in(0,2)}$$

Příklad 20.1: Pro funkci zadanou předpisem

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{2} & x=-1\\ 1 & x\in(-1,1\rangle\\ 0 & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

určete $f^{-1}(\{0\})$ a nakreslete $(f\circ f)(x)$, $-f(-x)$ a $|f(-x)|$.

Z obrázku funkce f a podle osy 1. a 3. Kvadrantu souměrné f^{-1} vyplývá, že $f^{-1}(\{0\})$ se rovná intervalu $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.



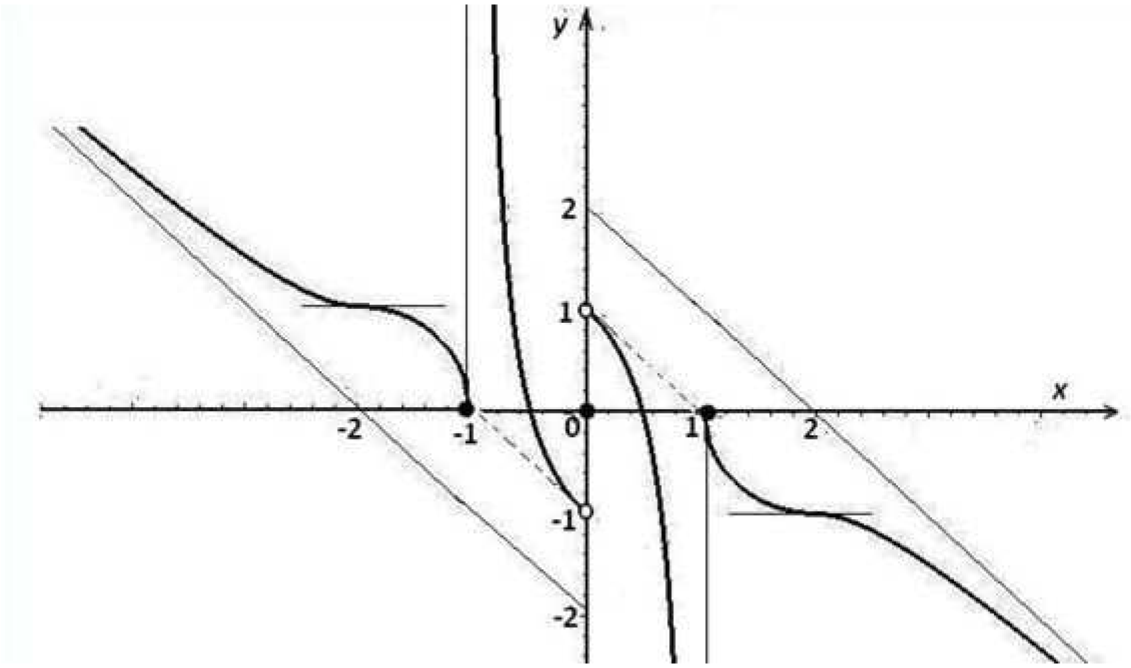
Příklad 20.2: Do následujícího obrázku načrtnete graf funkce, pro kterou platí:

$D_f=\mathbf{R}$, je lichá, a pro $x\geq 0$ má tyto vlastnosti: V $x=0$ má nespojitost 1. druhu, v $x=1$ má nespojitost 2 druhu, přičemž je zde spojitá zprava, pro $x\to\infty$ má asymptotu $y=2-x$,

$f(1)=0$, $f(2)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=-\infty$, $f'(2)=0$,

$f''(x)>0$ pro $x\in(1,2)$, $f''(x)<0$ pro $x\in(0,1)$ a $x\in(2,\infty)$ pro $x\to\infty$ má asymptotu $y=2-x$.

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech, kde je známá derivace.



Obr. 20.1

Příklad 20.3: U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý (správný výsledek podtrhněte). Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad – bez protipříkladu je odpověď hodnocena jako nesprávná.

a) Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, má zde maximum i minimum.

<u>pravdivý</u> *nepravdivý* *protipříklad:*

b) Funkce f je v bodě x_0 spojitá, právě když má v bodě x_0 limitu.

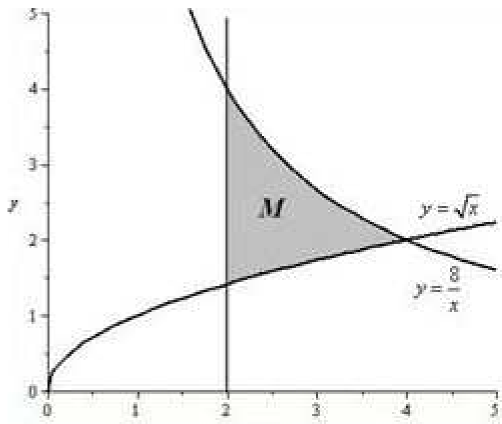
pravdivý ***<u>nepravdivý</u>, porušena*** $\Leftarrow$ *protipříklad:* $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, $2\notin D_f$

c) Je-li první derivace funkce f v bodě x_0 rovna 0, potom má funkce f v x_0 extrém.

pravdivý ***<u>nepravdivý</u>*** *protipříklad:* $f(x)=x^3$, $x_0=0$

Příklad 20.5: Vypočítejte dvojný integrál $I=\int\limits_M xy\,dx\,dy$, kde M je množina ohraničená křivkami o rovnicích

$y=\dfrac{8}{x}$, $y=\sqrt{x}$ a $x=2$.



Průsečíky paraboly a hyperboly:

$\dfrac{8}{x}=\sqrt{x}\;\Rightarrow\; x^3=64$, tj. $x=4$.

$$M=\left\{(x,y)\middle|\, 2\le x\le 4 \wedge \frac{8}{x}\le y\le\sqrt{x}\right\}$$

$$I=\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{8/x} xy\,dy=\int_2^4 dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{\sqrt{x}}^{8/x}=\frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{64}{x}-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[64\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_2^4=32(\ln 4-\ln 2)-\frac{1}{6}\left(4^3-2^3\right)==32\ln 2-\frac{28}{3}$$

Příklad 20.6: Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$ konverguje neabsolutně pro $x=2$ a diverguje pro $x=0$.

Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé (správnou odpověď podtrhněte):

Řada pro $x=-1$ *konverguje* ***diverguje***
pro $x=1$ ***konverguje*** *diverguje*
pro $x=-\frac{1}{2}$ *konverguje* ***diverguje***
pro $x=\frac{1}{2}$ ***konverguje*** *diverguje*

Řada má střed $x_0=1$ a bod $x=2$ je krajním bodem jejího konvergenčního intervalu; konverguje tedy absolutně v intervalu $(0,2)$, neabsolutně pro $x=2$ a diverguje na množině $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

Příklad 21.1:

Je-li funkce f v bodě x_0 spojitá, potom zde má limitu.
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ právě když řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
pravdivý **nepravdivý, porušena ⇒,** protipříklad: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ ale $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

Je-li druhá derivace funkce f v bodě x_0 rovna 0, potom je x_0 inflexní bod funkce f.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $f(x)=x^4$, $x_0=0$

Je-li funkce f spojita na intervalu <a,b> , ma zde maximum i minimum.
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Funkce f je v bodě x_0 spojitá, právě když má v bodě x_0 limitu.
Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní limitu, potom je f v tomto bodě spojitá.
pravdivý **nepravdivý, porušena <=** protipříklad: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, $\lim_{x\to 2} f(x)=4$, $2\notin D$

Je-li první derivace funkce f v bodě x_0 rovna 0, potom má funkce f v x_0 extrém.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $f(x)=x^3$, x_0=0

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je zde spojitá.
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Příklad 21.2:

Funkce f je na intervalu <a,b> spojita, pravě když je f na <a,b> **ohraničena / integrovatelná.**
Funkce f je nabývá na intervalu (a,b) svého maxima a minima právě když je na (a,b) spojitá.
Je-li funkce f integrovatelna na intervalu <a,b> , je na tomto intervalu spojita.
pravdivý **nepravdivý, porušena <=** protipříklad: $f(x) = sgn\ x \quad na < -1{,}1 >$

Platí-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konveguje.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, ale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverguje

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Je-li funkce f periodická, potom je sudá.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $f(x) = \sin x$

Pro $x_0 \in R$ platí sin $x_0 > 3$ práve když $|x_0|<0$
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Funkce f je prostá, platí-li: $\forall x, y: (x = y => f(x) = f(y))$
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) =1

Je-li funkce f periodická, potom je ohraničená.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = tg x

Pro $x_0 \in R$ platí sin $x_0 = 3$ právě když $|x_0|=-3$
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Funkce f je prostá, platí-li: $\forall x, y: (f(x) \neq f(y) => x \neq y)$
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = x^2

Je-li funkce f prostá, potom je lichá.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = x +1

Jestliže existuje $x_0 \in R$ pro které platí $|x_0| = -1$, potom $\sqrt{x^2} = |x_0|$.

Příklad 21.3:

pravdivý nepravdivý protipříklad:
Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě když je v tomto bodě diferencovatelná.
pravdivý **nepravdivý, porušena ⇒** protipříklad: f (x) = |x|, $x_0 = 0$

Je-li funkce f lichá, potom je prostá.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = sin x

Jestliže existuje $x_0 \in$ R pro které platí sin $x_0 = 4$, potom platí $\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1$
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Je-li funkce f v bodě x_0 spojitá, potom zde má limitu.
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Je-li první derivace funkce f v bodě x_0 rovna 0, potom má funkce f v x_0 extrém.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$

Je-li funkce f prostá, potom je ryze monotonní.

pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $f(x) = \begin{cases} -1 - x & x \in (-1,0) \\ 1 - x & x \in <0,1> \end{cases}$ je prostá a není ryze monotomní

Funkce f má v bodě ∞ limitu a ⇔ : $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall x \in D_f : K => |f(x) - a| < \varepsilon$
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Příklad 21.4:

Jestliže mocninná řada konverguje pro x = 2 , konverguje i $\forall x \in (-2, 2)$.
pravdivy **nepravdivy** protipříklad: $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\ divergujre\ pro\ x = 0$

Funkce f je prostá ⇔ je ryze monotonní.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: $f(x) = \begin{cases} -1 - x & x \in (-1,0) \\ 1 - x & x \in <0,1> \end{cases}$ je prostá neni ryze monotómní

Jediná funkce, pro kterou platí (f ° f)(x) = f (x) je funkce f (x) = x .
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = | x |

Neexistuje funkce, která je současně lichá i sudá.
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = 0

Je-li funkce f ryze monotonní, potom je prostá.
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Je-li funkce f integrovatelna na <a,b> , potom ma derivaci v ka.dem bod. intervalu (a,b)
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: f (x) = | x | na intervalu (-1,1) , nemá derivaci pro 0 x = 0

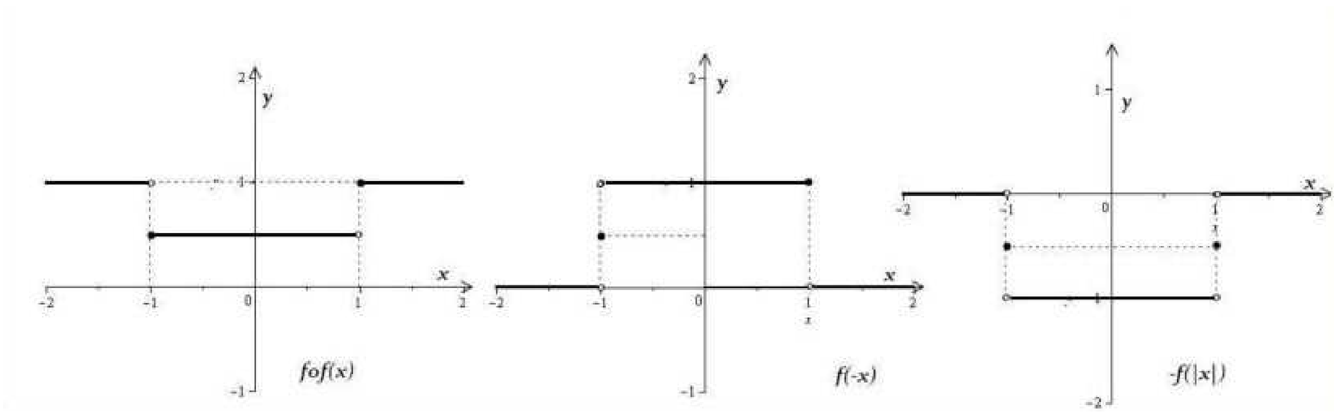
Je-li funkce f sudá, potom neexistuje f^{-1} .
pravdivý nepravdivý protipříklad:

Funkce f je prostá ⇔ $\forall x_1, x_2 \in D_f\ platí\ x_1 = x_2 => f(x_1) = f(x_2)$
pravdivý **nepravdivý** protipříklad: libovolná funkce, která není prostá, např. f (x) = 0

Příklad 22.1: Pro funkci f definovanou předpisem ¨

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 1 & x\in\langle -1,1) \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 0 & x\in(1,\infty) \end{cases} \qquad \text{určete } f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) \text{ a nakreslete } (f\circ f)(x),\ f(-x) \text{ a } -f(|x|).$$

Z obrázku vyčteme hodnotu $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 1$. Dále postupujeme stejně jako v předchozích příkladech k tomuto výsledku:



Příklad 22.2: U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý anebo nepravdivý. V případě, že je nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

pravdivý *nepravdivý* *protipříklad:*

b) Funkce f je na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, právě když je f na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná.

pravdivý ***nepravdivý, porušena*** $\Leftarrow$ *protipříklad:* $f(x)=\operatorname{sgn} x$ na $\langle -1,1\rangle$

c) Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní limitu, potom je f v tomto bodě spojitá.

pravdivý ***nepravdivý*** *protipříklad:* $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\ \lim_{x\to 2} f(x)=4,\ 2\notin D_f$

Příklad 22.3: Je dána plocha o rovnici $xe^x + 2ye^y - ze^{2z} = 3e$ a na ní bod A [1, 1, 0]. Najděte rovnici tečné roviny v tomto bodě.

$$F_x'(A)(x-x_0)+F_y'(A)(y-y_0)+F_z'(A)(z-z_0)=0$$

$$F_x'=(1+x)e^x,\ F_y'=2(1+y)e^y,\quad F_z'=-(1+2z)e^{2z}$$

$$F_x'(A)=2e,\ F_y'(A)=4e,\ F_z'(A)=-1$$

$$\boxed{\rho: 2e(x-1)+4e(y-1)-z=0}$$

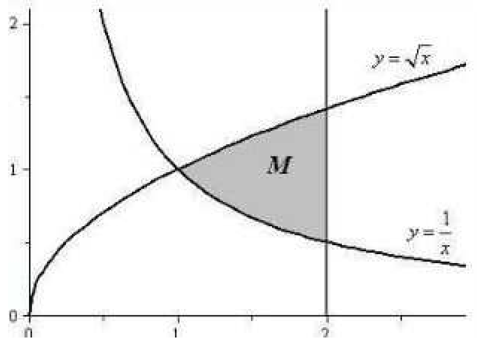
Příklad 22.4: Vypočítejte dvojný integrál I = $\int_M xy\, dxdy$, pokud plocha M je ohraničená křivkami $y = \frac{1}{x},\ y = \sqrt{x}, x = 2$.

Průsečíky paraboly a hyperboly: $\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x^3 = 1$, tj. $x = 1$,

tedy $M = \left\{(x,y) \middle| 1 \le x \le 2 \wedge \frac{1}{x} \le y \le \sqrt{x}\right\}$

$$I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} xy\, dy = \int_1^2 dx \left[\frac{1}{2} xy^2\right]_{1/x}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \ln 2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6} - \frac{1}{2}\ln 2$$



Příklad 22.5: Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+1)^n$ konverguje absolutně pro $x_0 = 0$ a diverguje pro x = -2. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

Řada pro $x = -1$ ***konverguje*** *diverguje*
pro $x = 1$ *konverguje* ***diverguje***
pro $x = -\frac{1}{2}$ ***konverguje*** *diverguje*
pro $x = \frac{1}{2}$ *konverguje* ***diverguje***

Řada má střed $x_0 = -1$ a bod $x = 0$ je krajním bodem jejího konvergenčního intervalu; konverguje tedy absolutně v intervalu $(-2, 0)$, neabsolutně pro $x = 0$ a diverguje na množině $(-\infty, -2\rangle \cup (0, \infty)$.

2 Diferenciální počet I

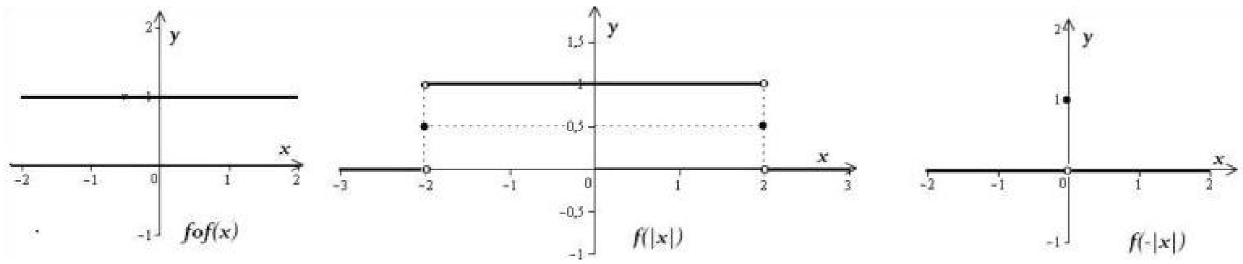
2.1 Úvodní poznámky – motivace

Při řešení úloh z fyziky, chemie, technických a jiných vědních oboru, při matematické formulaci zákonu v prírodních vedách užíváme casto pojmy jako napr. derivace, integrál, diferenciální rovnice. Uvedme několik příkladů:

Příklad 2.1: Pro funkci f definovanou předpisem

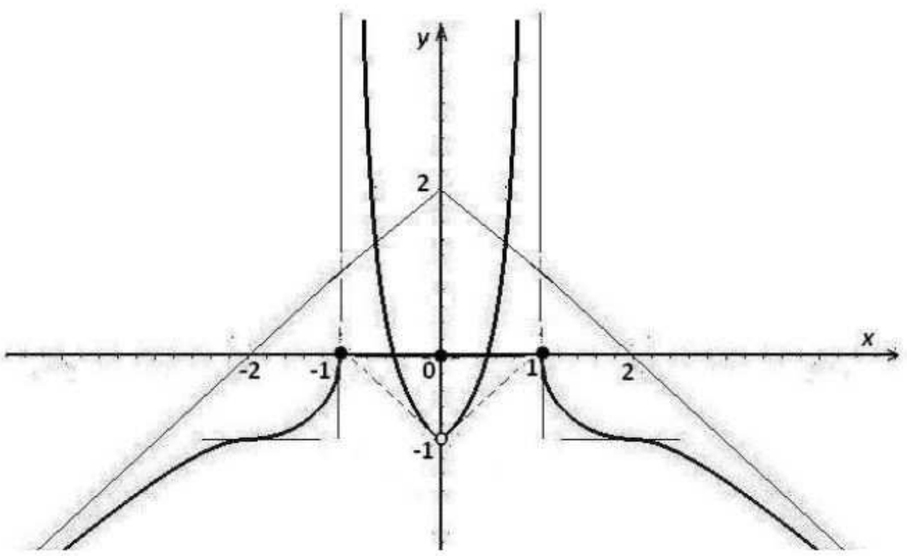
$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\in\langle 0,2) \\ \frac{1}{2} & x=2 \\ 0 & x\in(2,\infty) \end{cases}$$ určete $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ a nakreslete $(f\circ f)(x)$, $f(|x|)$ a $f(-|x|)$.

Z obrázku vyplývá, že v $\frac{1}{3}$ není pro f^{-1} definována žádná hodnota, proto $f^{-1}(\frac{1}{3}) = \{\}$.



Příklad 2.2: Do následujícího obrázku načrtněte graf funkce, pro kterou platí:

$D_f=\mathbb{R}$, je sudá, a pro $x\geq 0$ má tyto vlastnosti: V $x=0$ má nespojitost 1. druhu, v $x=1$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zprava, pro $x\to\infty$ má asymptotu $y=2-x$,
$f(1)=0$, $f(2)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-\infty$, $f'(2)=0$,
$f''(x)<0$ pro $x\in(2,\infty)$, $f''(x)>0$ pro $x\in(0,1)$ a $x\in(1,2)$.
Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech, kde je známá derivace.



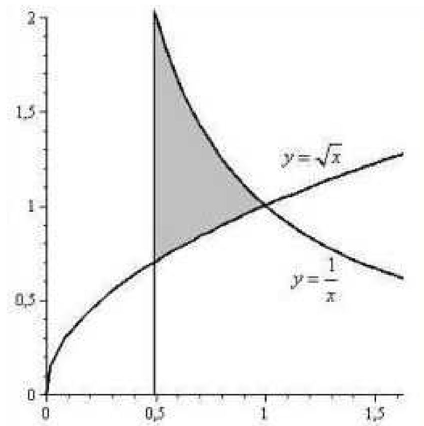
Příklad 2.3: Vypočítejte dvojný integrál $\int_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená křivkami o rovnicích $y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x}, x = \frac{1}{2}$.

Průsečíky paraboly a hyperboly: $\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x^3 = 1$, tj. $x = 1$, tedy

$$M = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{2} \le x \le 1 \wedge \sqrt{x} \le y \le \frac{1}{x}\right\}$$

$$I = \int_{1/2}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{1/x} xy\,dy = \int_{1/2}^{1} dx \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{\sqrt{x}}^{1/x} = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x} - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 8}\right) = -\frac{7}{48} + \frac{1}{2}\ln 2$$



Příklad 2.4: Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$ konverguje neabsolutně pro x = 0 a diverguje pro x = 2. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

Řada pro $x = -1$ ***konverguje*** ***<u>diverguje</u>***
pro $x = 1$ ***<u>konverguje</u>*** ***diverguje***
pro $x = -\frac{1}{2}$ ***konverguje*** ***<u>diverguje</u>***
pro $x = \frac{1}{2}$ ***<u>konverguje</u>*** ***diverguje***

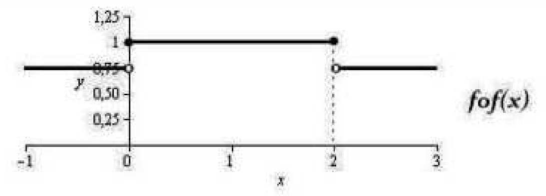
Řada má střed $x_0 = 1$ a bod $x = 0$ je krajním bodem jejího konvergenčního intervalu; konverguje tedy absolutně v intervalu $(0,2)$, neabsolutně pro $x = 0$ a diverguje na množině $(-\infty, 0) \cup \langle 2, \infty)$.

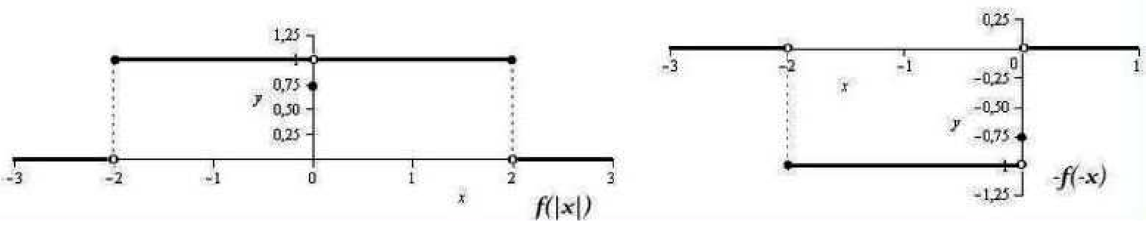
Příklad 3.1: Pro funkci f definovanou předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4} & x = 0 \\ 1 & x \in (0, 2\rangle \\ 0 & x \in (2, \infty) \end{cases} \qquad \text{určete } f^{-1}(\{1\}) \text{ a nakreslete } (f \circ f)(x),\ f(|x|) \text{ a } -f(-x)$$

Z obrázku odvodíme, že $f^{-1}(1) = (0, 2>$. Dále postupujeme k tomuto výsledku:

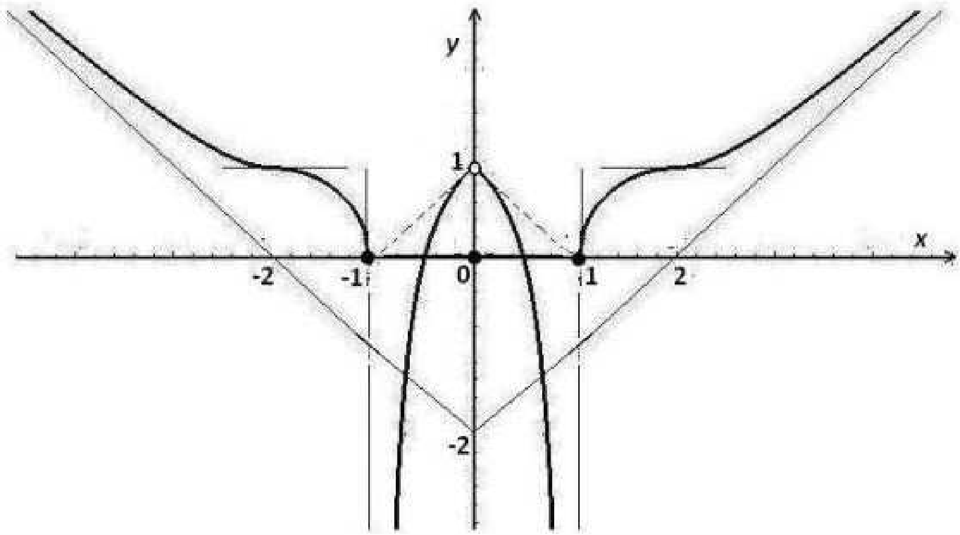
$\boxed{f^{-1}(\{1\}) = (0,2\rangle}$



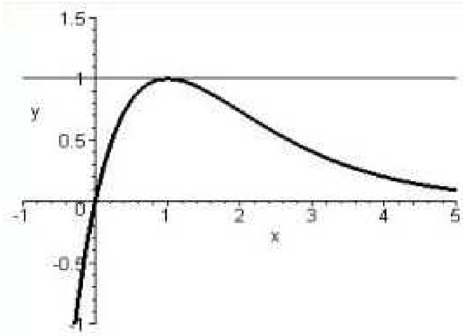


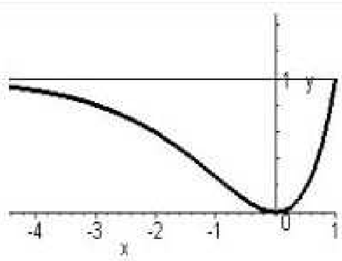
Příklad 3.2: Do následujícího obrázku načrtněte graf funkce, pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, je sudá, a pro $x \geq 0$ má tyto vlastnosti:
V $x = 0$ má nespojitost 1. druhu, v $x = 1$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zprava,
$f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \infty$, $f'(2) = 0$,
$f''(x) < 0$ pro $x \in (0,1)$ a $x \in (1,2)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (2,\infty)$,
pro $x \to \infty$ má asymptotu $y = x - 2$.
Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech, kde je známá derivace.



Příklad 3.3: V obrázku nalevo je graf funkce f. V obrázku napravio je graf funkce:





a) $f(1-x)+1$

b) $1-f(x-1)$

c) $2f(-x)+1$

d) $2f(1-x)-1$

e) $\underline{\underline{1-f(1-x)}}$

Příklad 3.4: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce y = $\frac{\sqrt{3x+1}}{x^2+1}$ v bodě T = [1,?].

Směrnice tečny ke grafu funkce: $k_t = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Normála je kolmice k tečně.

$$y(1) = 1; \quad y' = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\cdot 3\,(x^2+1) - \sqrt{3x+1}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}, \quad y'(1) = -\frac{5}{8}$$

$$\boxed{t:\ y-1 = -\tfrac{5}{8}(x-1) \Leftrightarrow 5x+8y-13=0 \qquad n:\ y-1 = \tfrac{8}{5}(x-1) \Leftrightarrow 8x-5y-3=0}$$

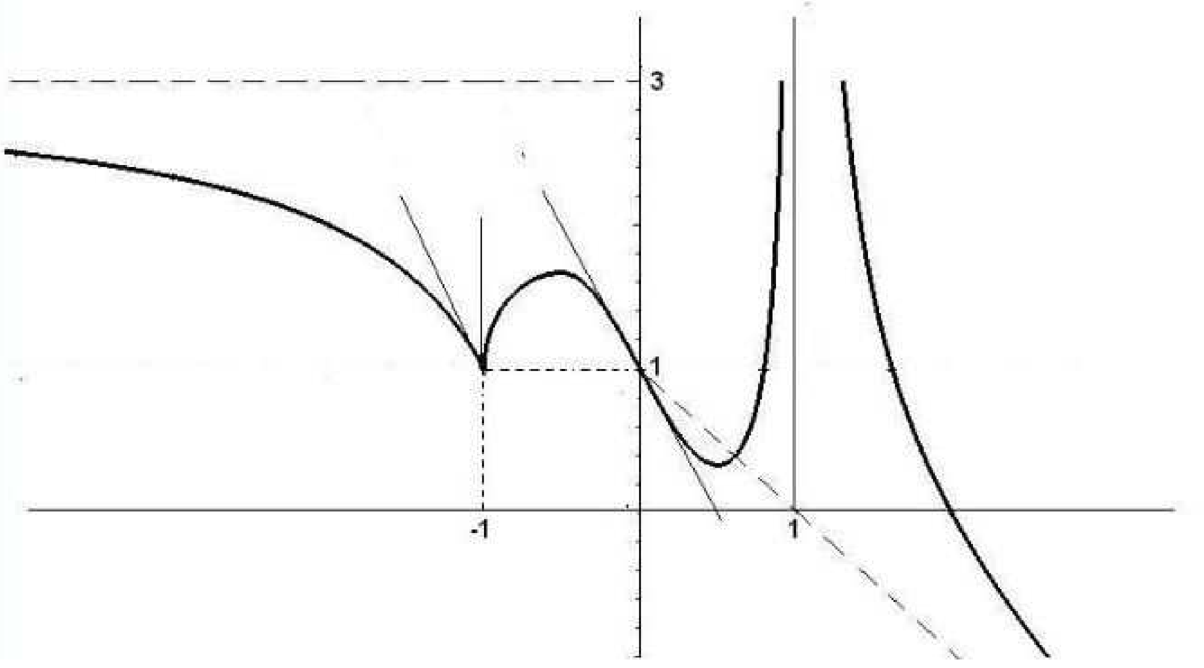
Příklad 3.5: Načrtněte graf funkce spojité na R, pro kterou platí:

$f(0) = f(-1) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$, přímka $y = 1 - x$ je asymptota pro $x \to \infty$,

$f'(0) = -2$, $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -2$, $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \infty$,

$f''(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$ a $x \in (1,\infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty,-1)$ a $x \in (-1,0)$

Do obrázku nakreslete i tečnu ke grafu funkce v bodě $x = 0$ a polotečny v bodě $x = -1$.



Příklad 3.6: Vypočtěte integrál I = $\int_A arccotg\frac{x}{y}\,dxdy$, je-li A = {(x,y) | x > 0, y > 0, $x^2 + y^2 <$ 2} užitím transformace dopolárních souřadnic.

Polární souřadnice: $\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{array}$,

$$\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho,\varphi)\middle|\cos\varphi > 0, \sin\varphi > 0, \rho^2 < 2\right\} = \left\{(\rho,\varphi)\middle|0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2}, 0 < \rho < \sqrt{2}\right\}$$

$$I = \int\limits_{\Phi^{-1}(A)} \operatorname{arccotg}\frac{\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi}\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}\varphi)\rho\, d\rho = \int_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho =$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\varphi^2\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{8}}$$

Příklad 3.7: Pro číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

(Zakroužkujte písmeno před správným tvrzením).

a) Řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací.

b) Řada je konvergentní, a její součet je roven 1.

c) <u>Řada diverguje</u>.

d) Nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje.

Zdůvodnění: Není splněna nutná podmínka konvergence, $\lim\limits_{n\to ¥} a_n = 1 \ ^1\ 0$.