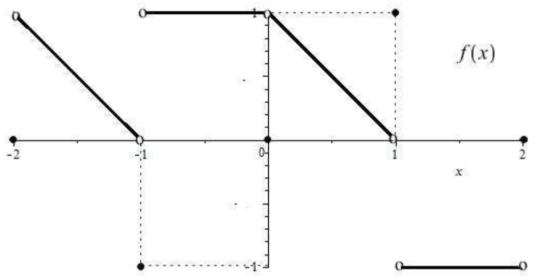
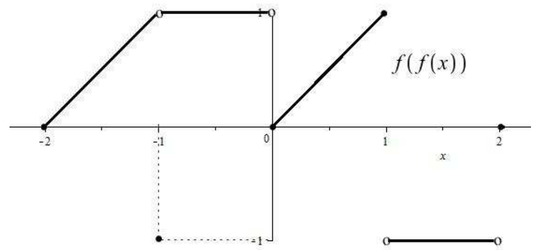
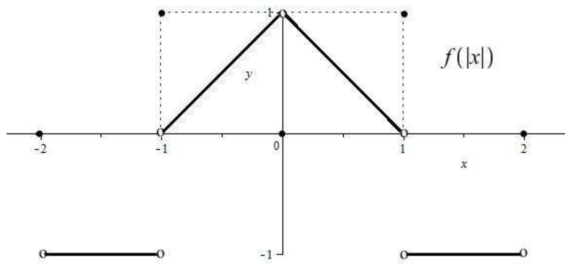
Vzorové řešení zadání $\boldsymbol{H}$

1) $$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in(-1,0)\cup\{1\} \\ -1 & x\in(1,2)\cup\{-1\} \\ 0 & x\in\{-2,0,2\} \\ 1-x & x\in(0,1) \\ -x-1 & x\in(-2,-1) \end{cases}.$$

Nakreslete grafy funkcí $f(x),\ (f\circ f)(x),\ f(|x|)$ a určete $f\left(\langle 0,1\rangle\right)$ a $f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right)$.







$\underline{\underline{f\left(\langle 0,1\rangle\right)=\langle 0,1\rangle}}$, $\underline{\underline{f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right)=\left\{-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\}}}$.

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Funkce f je v bodě a diferencovatelná, právě když je v a spojitá.

~~pravdivý~~ ***<u>nepravdivý</u>***

neplatí $\Leftarrow$; ***protipříklad:*** $f(x)=|x|,\ a=0$

b) $\exists x\in\mathbb{R}:|\cos x|=3$ právě když $\exists y\in\mathbb{R}: y^2=-2$

<u>pravdivý</u> ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n$ konverguje pro $x\in\langle -2,0\rangle$.

~~pravdivý~~ ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:***

$0\in\langle -2,0\rangle,\ \sum_{n=1}^{\infty}(0+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}1$ diverguje.

.

3) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:

$D_f=\mathbb{R}$, je spojitá pro $x\neq 0$,

v bodě $x=0$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,

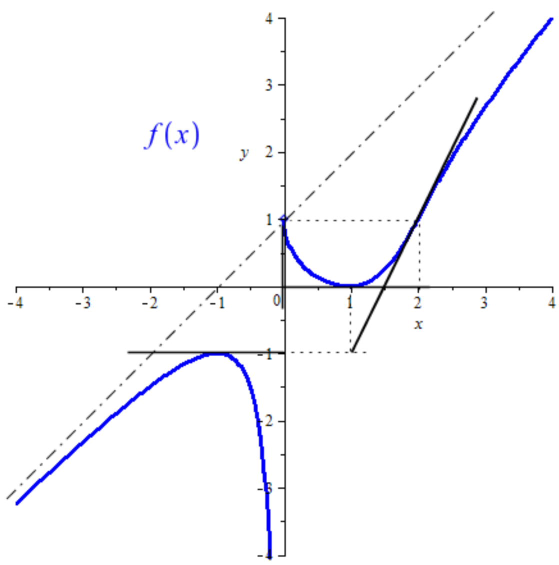
$f(0)=f(2)=1,\quad f(-1)=-1,\quad f(1)=0,$

$f'(-1)=f'(1)=0,\quad f'(2)=2,\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$,

$f''(x)<0$ pro $x\in(-\infty,0)$ a pro $x\in(2,\infty)$,

$f''(x)>0$ pro $x\in(0,2)$,

přímka $y=x+1$ je její asymptota.



4) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\ln\dfrac{2x-1}{3x-2}$ v bodě, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou $x+y+1=0$.

Rovnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0,\, f(x_0)]$ má tvar $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

rovnice normály ke grafu funkce v tomto bodě má tvar $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

$x+y+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=-x-1 \quad\Rightarrow$ hledané tečny mají směrnici $k=-1$ - budeme hledat body x_0, ve kterých je $f'(x_0)=-1$:

$$f'(x)=\frac{3x-2}{2x-1}\cdot\frac{2(3x-2)-3(2x-1)}{(3x-2)^2}=\frac{-1}{(2x-1)(3x-2)}$$

$$\frac{-1}{(2x-1)(3x-2)}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad (6x^2-7x+2)=1 \quad\Leftrightarrow\quad 6x^2-7x+1=0$$

$$6x^2-7x+1=(6x-1)(x-1) \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=1\vee x=\tfrac{1}{6}}}$$

$$x=1: \quad f(1)=\ln\frac{2-1}{3-2}=\ln 1=0$$

rovnice tečny: $y-0=-(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x+y-1=0}}$

rovnice normály: $y-0=1\cdot(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x-y-1=0}}$.

$$x=\tfrac{1}{6}: \quad f(\tfrac{1}{6})=\ln\frac{\frac{2}{6}-1}{\frac{3}{6}-2}=\ln\frac{1-\frac{2}{6}}{2-\frac{3}{6}}=\ln\frac{4}{9}=2\ln\frac{2}{3}$$

rovnice tečny: $y-2\ln\tfrac{2}{3}=-(x-\tfrac{1}{6}) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x+y-\tfrac{1}{6}-2\ln\tfrac{2}{3}=0}}$

rovnice normály: $y-2\ln\tfrac{2}{3}=1\cdot(x-\tfrac{1}{6}) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x-y-\tfrac{1}{6}+2\ln\tfrac{2}{3}=0}}$.

5) Vypočítejte obsah části roviny omezené souřadnými osami a grafem funkce $f(x)=(x+2)e^{-x} \quad (x\geq 0)$.

$(x+2)e^{-x}=0 \Rightarrow x=-2,$ pro $x\geq 0$ graf neprotíná osu $x \quad\Rightarrow\quad S=\displaystyle\int_0^{\infty}(x+2)\,e^{-x}dx$;

$$\int(x+2)\,e^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x+2 & u'=1 \\ v'=e^{-x} & v=-e^{-x}\end{vmatrix}=-(x+2)\,e^{-x}+\int e^{-x}dx=-(x+2)e^{-x}-e^{-x}=-(x+3)e^{-x}$$

$$\int_0^{\infty}(x+2)\,e^{-x}dx=\Big[-(x+3)e^{-x}\Big]_0^{\infty}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{e^x}+3=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}+3=\underline{\underline{3}}$$

6) $f(x,y,z)=\ln\dfrac{y^3}{x}+e^z$.

a) Najděte bod A, pro který platí $\operatorname{grad} f(A)=(-1,1,1)$.

b) Vypočítejte $f'_{\mathbf{a}_0}(A)$, je-li $\mathbf{a}_0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad \mathbf{a}=(1,1,1)$.

a) $$f(x,y,z)=\ln\frac{y^3}{x}+e^z=3\ln y-\ln x+e^z, \quad f'_x=-\frac{1}{x},\ f'_y=\frac{3}{y},\ f'_z=e^z \quad \operatorname{grad} f(x,y,y)=\left(-\frac{1}{x},\frac{3}{y},e^z\right).$$

$$\left(-\frac{1}{x},\frac{3}{y},e^z\right)=(-1,1,1)\Leftrightarrow x=1,\ y=3,\ z=0$$

$$A=[x,y,z]=\underline{\underline{[1,3,0]}}$$

b) $$f'_{\mathbf{a}_0}(A)=\operatorname{grad} f(A)\cdot\mathbf{a}_0=(-1,1,1)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$