Vzorové řešení zadání L

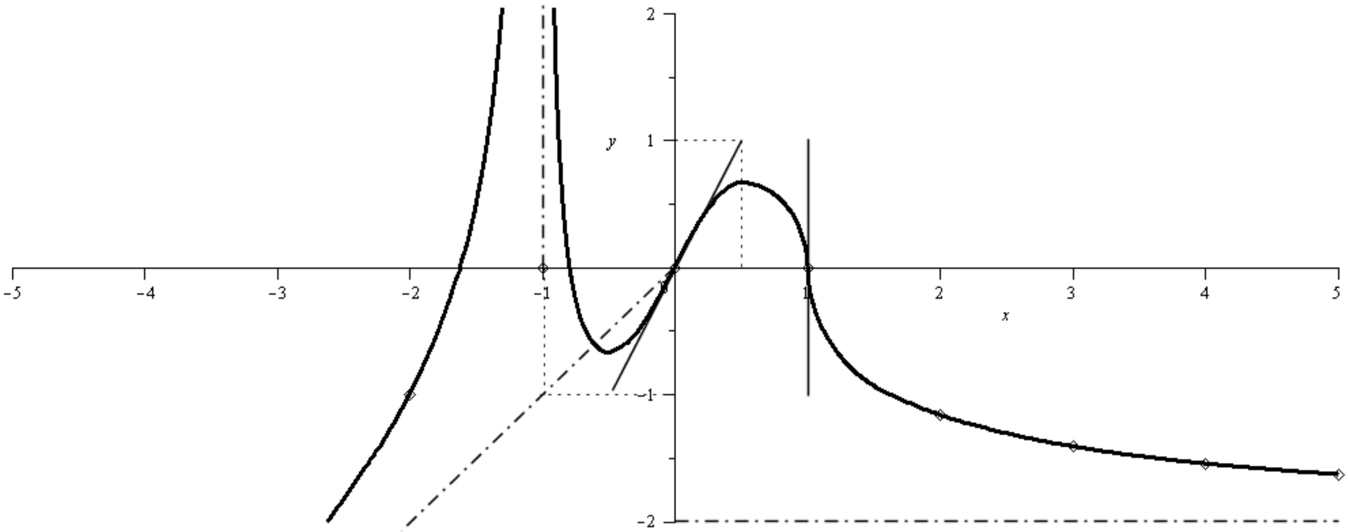
1) Graf funkce spojité na $\mathbb{R}-\{-1\}$, pro kterou platí:

$f(0)=f(1)=0, \quad \lim_{x\to -1} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-2$

$f'(0)=2, \quad \lim_{x\to 1} f'(x)=-\infty$

přímka $y=x$ je asymptota pro $x\to-\infty$.

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny ke grafu funkce v bodě $x=0$ a $x=1$.



2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x\in\mathbb{R}: |x|<-1 \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{R}: \cos y=4.$ ***pravdivý***

b) f je prosté zobrazení, platí-li $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1\neq x_2$ ***nepravdivý*** ***protipříklad :***

$f(x)=x^2, x_1=-1, x_2=1$

c) Funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá $\Rightarrow f$ na $\langle a,b\rangle$ nabývá největší a nejmenší hodnoty. ***pravdivý***

3) Asymptoty grafu funkce $f(x)=\dfrac{3x^2}{4-x}$:

$$D_f=\mathbb{R}-\{4\}, \quad \lim_{x\to4}\frac{3x^2}{4-x}=3\cdot16\cdot\lim_{x\to4}\frac{1}{4-x}=\begin{cases}48\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{4-x}=\infty\\ 48\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{1}{4-x}=-\infty\end{cases}$$ - svislá asymptota $\underline{x=4}$

asymptota se směrnicí $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{4-x}=-3, \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{4-x}+3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+12x-3x^2}{4-x}=-12$$

asymptota se směrnicí $\underline{y=-3x-12}$

4) $$\int_1^e \frac{x}{3}\cdot\ln x^7 dx = \int_1^e \frac{7}{3}x\cdot\ln x dx = \frac{7}{3}\int_1^e x\cdot\ln x\, dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & u'=\dfrac{1}{x} \\ v'=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix} = \frac{7}{3}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right\} =$$

$$= \frac{7}{3}\left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx\right) = \frac{7}{3}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\right) = \frac{7}{3}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{7}{3}\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{7}{12}\left(e^2+1\right)}$$

5) Rovnice tečné roviny a normálový vektor ke grafu funkce $f(x,y) = x^{x^y}$ v bodě $[1,2,?]$:

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ má tvar

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(x_0,y_0) = 1^{1^2} = 1,$$

$$f'_x = \left(e^{x^y \ln x}\right)'_x = e^{x^y\ln x}\left(yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x}\right), \quad f'_x(x_0,y_0) = e^0\cdot(0+1) = 1$$

$$f'_y = \left(e^{x^y \ln x}\right)'_y = e^{x^y\ln x}\left(x^y\cdot\ln x\cdot\ln x\right), \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$$

Parciální derivace v daném bodě můžeme počítat i jednodušeji:

$$f'_x(1,2) = \left(f(x,2)\right)'\Big|_{x=1} = \left(x^{x^2}\right)'\Big|_{x=1} = \left(e^{x^2\ln x}\right)'\Big|_{x=1} = e^{x^2\ln x}\left(2x\cdot\ln x + x^2\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1} = 1 \quad (\ln 1 = 0)$$

$$f'_y(1,2) = \left(f(1,y)\right)'\Big|_{y=2} = \left(1^{1^2}\right)'\Big|_{y=2} = (1)'\Big|_{y=2} = 0$$

Tečná rovina: $z-1 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow \underline{x-z=0}$, normálový vektor: $\underline{(1,0,-1)}$.

6) Najděte $x\in\mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = \frac{2}{5}x$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = (x-2)+(x-2)^2+\cdots+(x-2)^n+\cdots$ je geometrická řada,

$q = x-2, \quad a_0 = x-2, \quad s = \dfrac{x-2}{1-(x-2)} = \dfrac{x-2}{3-x}$, řada konverguje pro $|x-2|<1 \Rightarrow x\in(1,3)$.

$$\frac{x-2}{3-x} = \frac{2}{5}x \quad\Rightarrow\quad 5(x-2) = 2x(3-x) \quad\Rightarrow\quad 2x^2 - x - 10 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{81}}{4} = \begin{cases} \dfrac{5}{2}\in(1,3) \\ -\dfrac{1}{2}\notin(1,3)\end{cases}$$

Výsledek: $\underline{x = \dfrac{5}{2}}$