Vzorové řešení zadání ***E***

1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x \in \mathbb{R}: \ |\sin x| > 3 \quad \Rightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R}: \ |\cos y| < 3$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ klesající, potom $\exists x_0 \in \langle a, b\rangle$ pro které platí $f(x_0) < 0$.

~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = -x, \langle a, b\rangle = \langle -1, 0\rangle \quad f\left(\langle -1, 0\rangle\right) = \langle 0, 1\rangle \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \langle -1, 0\rangle$$

c) Má-li funkce $f(x)$ spojitá na $\mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum, potom platí $f'(x_0) = 0$.

~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$f(x) = |x|, \ f_{\min} = f(0) = 0, \quad \left(|x|\right)'\Big|_{x=0} \ \nexists$$

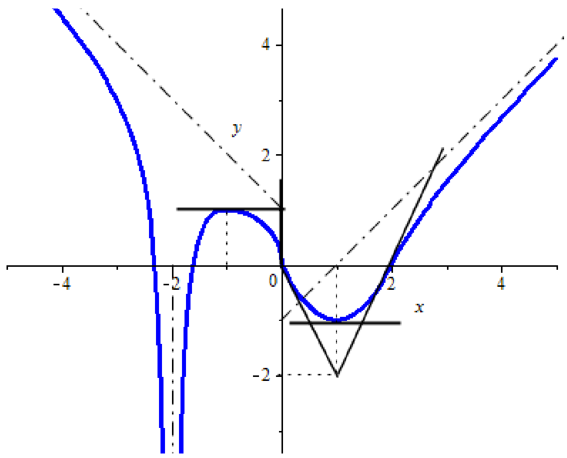
2. Načrtněte graf funkce spojité na $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$, přímka $x = -2$ je její svislá asymptota, přímka $y = x - 1$ je asymptota pro $x \to \infty$ přímka $y = 1 - x$ je asymptota pro $x \to -\infty$

$f(-1) = 1, \ f(1) = -1, \ f(0) = f(2) = 0,$

$f'(2) = 2, \ f'(-1) = f'(1) = 0, \ f'_+(0) = -2, \ f'_-(0) = -\infty,$

$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -2)$, $x \in (-2, 0)$ a $x \in (2, \infty)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, 2)$.

Do obrázku nakreslete také všechny asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech $x = -1, 0, 1, 2$.



3. Vypočítejte obsah části roviny ohraničené grafem funkce $f(x) = x \cdot \sin 2x$ a tečnou k tomuto grafu v bodě $A = [\frac{\pi}{4}, ?]$.

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\pi}{4} \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}$$

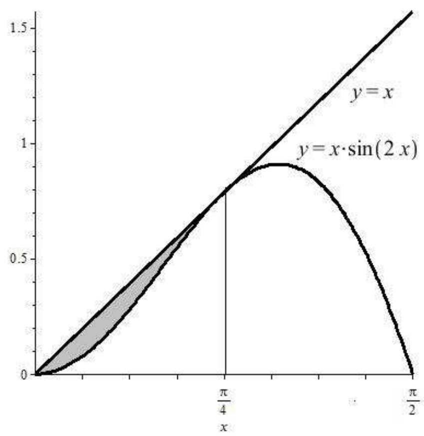
$$f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x, \quad f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} \cos \tfrac{\pi}{2} = 1$$

$$\textit{rovnice tečny}: \quad y - \tfrac{\pi}{4} = x - \tfrac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - x \cdot \sin 2x\right) dx = \left| \begin{matrix} & 2.\textit{int. per partes} \\ u = x & u' = 1 \\ v' = \sin 2x & v = -\tfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\tfrac{1}{2} x \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx =$$

$$= \tfrac{\pi^2}{32} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{4} \cos \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{\pi^2}{32} - \tfrac{1}{4} \sin \tfrac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}}}$$



4. V nekonečné řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $s_n = 2 - \frac{1}{3^{n+2}}$. Určete a_n a s.

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2 - \frac{1}{3^{n+2}} - \left(2 - \frac{1}{3^{(n-1)+2}}\right) = -\frac{1}{3^{n+2}} + -\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{-1+3}{3^{n+2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3^{n+2}}}}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{3^{n+2}}\right) = \underline{\underline{2}}$$

5. Najděte a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2+y^2}}{\ln(2x-x^2-y^2)}$.

$D_f:\ \ 1-x^2+y^2 \ge 0 \wedge 2x-x^2-y^2 > 0 \wedge 2x-x^2-y^2 \ne 1$

$1-x^2+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 \le 1$

$x^2-y^2=1$ *je rovnice hyperboly s reálnou poloosou* $a=1$

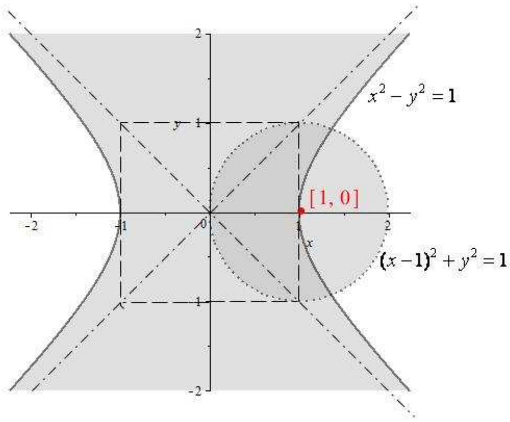
a imaginární $b=1$, *tedy s asymptotami* $y=\pm x$

$2x-x^2-y^2>0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2<1$ *vnitřek kruhu*

se středem $[1,0]$ *a poloměrem* $r=1$,

$2x-x^2-y^2 \ne 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1 \wedge y \ne 0$

$$\underline{\underline{D_f = \{(x,y) \mid x^2-y^2 \le 1 \wedge (x-1)^2+y^2<1 \wedge [x,y] \ne [1,0]\}}}$$



6.A) Je dána funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$. Najděte bod $[x_0,y_0] \in D_f$, ve kterém je $\mathbf{grad}f(x,y) = (1,1)$

a napište rovnici tečné roviny ke grafu zadané funkce v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$.

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{(x-y)^2}}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{-2y}{\cancel{(x-y)^2}} = \frac{-2y}{2x^2+2y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{(x-y)^2}}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{2x}{\cancel{(x-y)^2}} = \frac{2x}{2x^2+2y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f'(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = (1,1) \quad \Leftrightarrow \quad -y = x^2+y^2 \wedge x = x^2+y^2 \Rightarrow y=-x \wedge x = 2x^2$$

$$\Rightarrow \quad [x_0,y_0]=[0,0] \vee [x_0,y_0] = [\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}] \quad [0,0] \notin D_f \quad \underline{\underline{[x_0,y_0] = [\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}]}}$$

Obecná rovnice tečné roviny: $z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$$\Rightarrow \quad z - \operatorname{arctg} 0 = 1\cdot\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + 1\cdot\left(y+\tfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z = x+y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x+y-z=0}}$$