Vzorové řešení zadání ***M***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

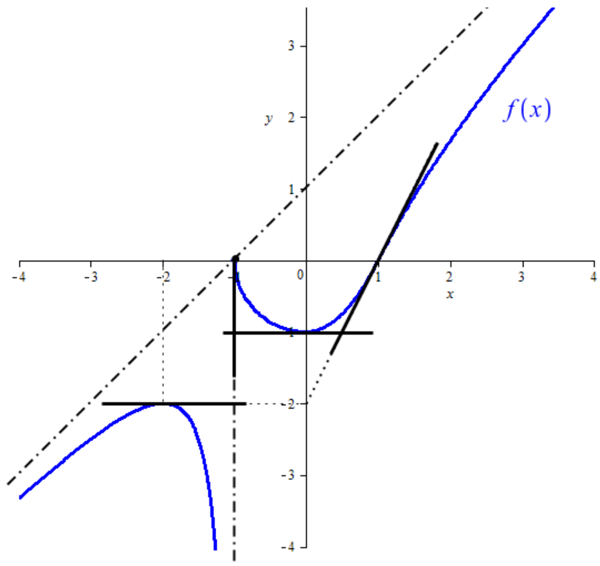
a) Je-li funkce f na $\langle a,b\rangle$ ohraničená, je zde spojitá ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý***

protipříklad: $f(x)=\operatorname{sgn} x,\quad \langle a,b\rangle=\langle -1,1\rangle$

b) Je-li $\forall x\in\mathbb{R}:\sin x=1$, potom $\exists y\in\mathbb{R}:\cos y=\frac{\pi}{2}$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $a_n=n$

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:
$D_f=\mathbb{R}$, je spojitá pro $x\neq -1$, v bodě $x=-1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,
$f(-1)=f(1)=0,\ \ f(-2)=-2,\ \ f(0)=-1,\ \ f'(-2)=f'(0)=0,\ \ f'(1)=2,\ \ \lim\limits_{x\to -1^+}f'(x)=-\infty$,
$f''(x)<0$ pro $x\in(-\infty,-1)$ a pro $x\in(1,\infty)$, $f''(x)>0$ pro $x\in(-1,1)$,
přímka $y=x+1$ je její asymptota.



3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2},2\rangle$.

$$f'(x)=\tfrac{1}{3}\cdot\left(x(x^2-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(x^2-1+x\cdot 2x\right)=\frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2(x+1)^2}}$$

$$f'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}},\quad -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\notin\langle -\tfrac{1}{2},2\rangle$$

$$f'(x)\not\exists\quad\Leftrightarrow\quad x=0\vee x=1\vee x=-1,\quad -1\notin\langle -\tfrac{1}{2},2\rangle$$

$$f(-\tfrac{1}{2})=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}-1\right)}=\sqrt[3]{\tfrac{3}{8}}=\tfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$$f(0)=f(1)=0,$$

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\sqrt[3]{\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{3}-1\right)}=-\sqrt[3]{\tfrac{2}{3\sqrt{3}}}=-\sqrt[3]{\tfrac{2}{\sqrt{3}^3}}=-\tfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\quad\text{min}$$

$$f(2)=\sqrt[3]{2\cdot 3}=\sqrt[3]{6}\quad\text{max}$$

Výsledek: $\underline{\underline{f_{\min}=f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=-\tfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}}},\quad \underline{\underline{f_{\max}=f(2)=\sqrt[3]{6}}}$

4) Najděte $x \in \mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{6^n} = 2+x$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{6}\right)^n$ - geometrická řada, $q = \frac{2x-3}{6}, \quad a_0 = 0$

obor konvergence: $\left|\frac{2x-3}{6}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -6 < 2x-3 < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < 2x < 9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-\tfrac{3}{2} < x < \tfrac{9}{2}}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{6}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2x-3}{6}} = \frac{6}{6-2x+3} = \frac{6}{9-2x}$$

$$\frac{6}{9-2x} = 2+x \quad \Leftrightarrow \quad 6 = (2+x)(9-2x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x^2 - 5x - 12 = (x-4)(2x+3) \quad \Rightarrow x = -\tfrac{3}{2} \vee x = 4$$

$x = -\frac{3}{2}$ nevyhovuje, $\underline{\underline{x = 4}}$ je řešení rovnice.

5) Najděte rovnici tečné roviny a normálový vektor ke grafu funkce $f(x,y) = x^{x^y}$ v bodě $[1,2,?]$.

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ má tvar

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$f(1,2) = 1^{1^2} = 1$$

$f'_x(1,2) = \left(f(x,2)\right)'\big|_{x=1}$; $\qquad f(x,2) = x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$, $\left(e^{x^2 \ln x}\right)'\big|_{x=1} = e^{x^2 \ln x}\left(2x\cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1} = e^0 \cdot 1 = 1$

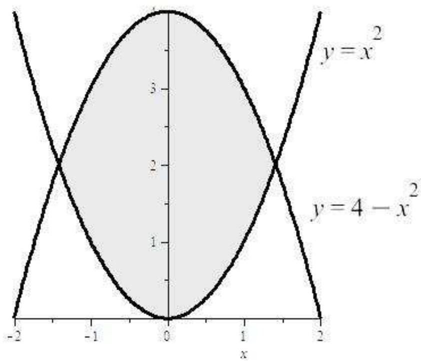
$f'_y(1,2) = \left(f(1,y)\right)'\big|_{y=2}$; $\qquad f(1,y) = 1^{1^y} = 1$, $\left(f(1,y)\right)' = 0$

Rovnice tečné roviny: $z - 1 = 1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x - z = 0}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{n} = (2,0,-1)}}$

6) Vypočítejte $\int\limits_M x e^{2y}\, dx\, dy$, kde $M = \left\{(x,y) \middle| x^2 \le y \wedge y \le 4 - x^2\right\}$. Množinu M nakreslete.

Průsečíky: $x^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$

$$M = \left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ x^2 \le y \le 4 - x^2 \end{array}\right\}$$



$$\int\limits_M x e^{2y}\, dx\, dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} x e^{2y}\, dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\, dx \left[\tfrac{1}{2} e^{2y}\right]_{x^2}^{4-x^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\left(e^{8-2x^2} - e^{2x^2}\right) dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\, dx = dt \end{array} \right| = \tfrac{1}{4} \int\limits_{2}^{2} \left(e^{8-2t} - e^{2t}\right) dt = \underline{\underline{0}}$$