Vzorové řešení zadání <u>I</u>

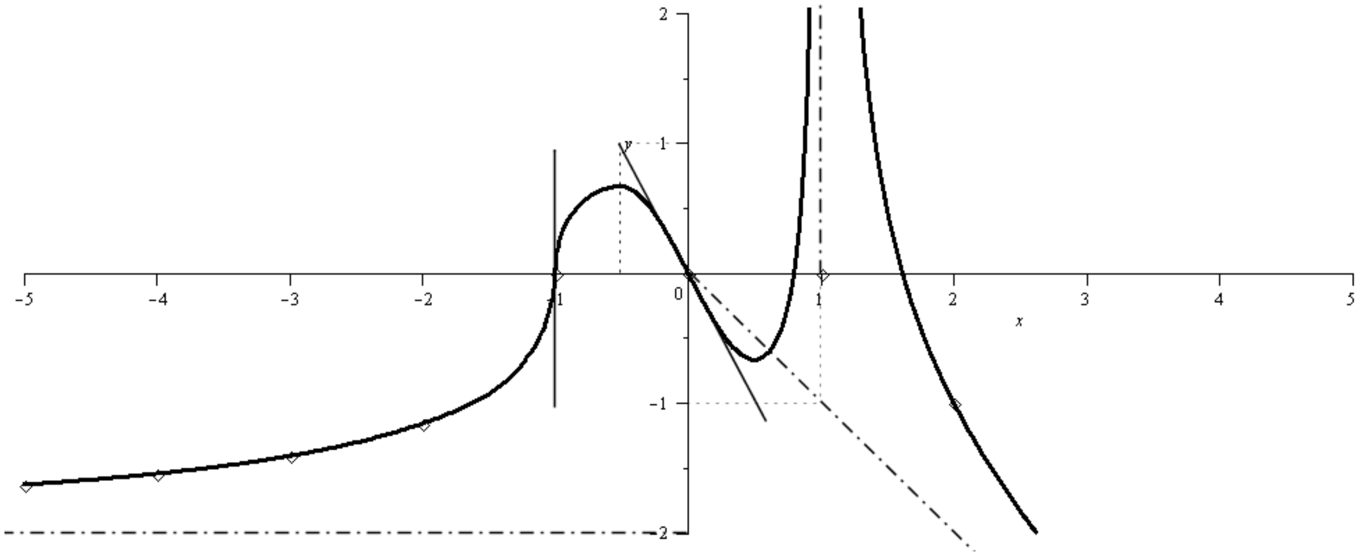
1) Graf funkce spojité na $\mathbb{R}-\{1\}$, pro kterou platí:

$$f(0)=f(-1)=0,\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=-2$$

$$f'(0)=-2,\quad \lim_{x\to -1} f'(x)=\infty$$

přímka $y=-x$ je asymptota pro $x\to\infty$.

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny ke grafu funkce v bodě $x=0$ a $x=-1$.



2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\exists x\in\mathbb{R}: |\sin x|\ge 7 \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{R}: y^2<-3$ ***<u>pravdivý</u>***

b) f je prosté zobrazení, platí-li $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}:\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1\neq x_2$

<u>nepravdivý</u> ***protipříklad:*** $f(x)=x^2, x_1=-1, x_2=1$

c) Funkce f má v bodě x_0 lokální extrém $\Rightarrow f'(x_0)=0 \vee f'(x_0)$ neexistuje.

<u>pravdivý</u>

3) Najděte asymptoty grafu funkce $f(x)=\dfrac{3x^2}{5-x}$.

$$D_f=\mathbb{R}-\{5\},\quad \lim_{x\to 5}\frac{3x^2}{5-x}=3\cdot 25\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1}{5-x}=\begin{cases} 75\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{1}{5-x}=\infty \\ 75\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1}{5-x}=-\infty\end{cases}$$ - svislá asymptota $\underline{x=5}$

asymptota se směrnicí $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{5-x}=-3,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{5-x}+3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+15x-3x^2}{5-x}=-15$$

asymptota se směrnicí $\underline{y=-3x-15}$

4) Vypočítejte $\int_1^e \frac{x}{7}\cdot \ln x^3 dx = \int_1^e \frac{3}{7} x\cdot \ln x\, dx = \frac{3}{7}\int_1^e x\cdot \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=x & v=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{7}\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right) =$

$$= \frac{3}{7}\left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{3}{28}\left(e^2+1\right)}$$

5) Najděte rovnici tečné roviny a normálový vektor ke grafu funkce $f(x,y) = x^{y^x}$ v bodě $[1,3,?]$.

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ má tvar

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(x_0,y_0) = 1^{3^1} = 1,$$

$$f'_x = \left(e^{y^x \ln x}\right)'_x = e^{y^x \ln x}\left(y^x \ln y \ln x + y^x \frac{1}{x}\right), \quad f'_x(x_0,y_0) = 1\cdot(0+3) = 3$$

$$f'_y = \left(e^{y^x \ln x}\right)'_y = e^{y^x \ln x}\left(x\cdot y^{x-1} \ln x\right), \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$$

Parciální derivace v daném bodě můžeme počítat i jednodušeji:

$$f'_x(1,3) = \left(f(x,3)\right)'\Big|_{x=1} = \left(x^{3^x}\right)'\Big|_{x=1} = \left(e^{3^x \ln x}\right)'\Big|_{x=1} = e^{3^x \ln x}\left(3^x \ln 3\cdot \ln x + 3^x \frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1} = 3 \quad (\ln 1 = 0)$$

$$f'_y(1,3) = \left(f(1,y)\right)'\Big|_{y=3} = \left(1^{y^1}\right)'\Big|_{y=3} = (1)'\Big|_{y=3} = 0$$

Tečná rovina: $z-1 = 3(x-1) \Leftrightarrow \underline{3x - z - 2 = 0}$, normálový vektor: $\underline{(3,0,-1)}$.

6) Najděte $x\in\mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = \frac{4}{5}x$

$\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^n + \cdots$ je geometrická řada,

$q = x-2, \quad a_0 = 1, \quad s = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$, řada konverguje pro $|x-2| < 1 \Rightarrow x\in(1,3)$.

$$\frac{1}{3-x} = \frac{4}{5}x \quad \Rightarrow \quad 5 = 4x(3-x) \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 12x + 5 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{12\pm\sqrt{64}}{8} = \begin{cases} \frac{5}{2} \in (1,3) \\ \frac{1}{2} \notin (1,3) \end{cases}$$

Řešení: $\underline{x = \frac{5}{2}}$