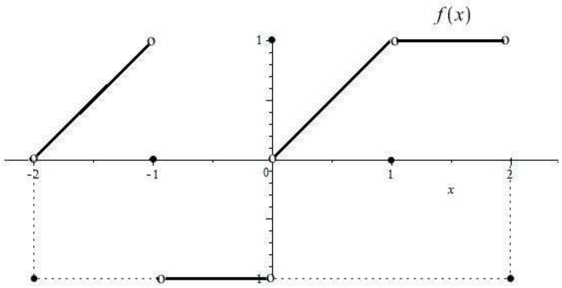
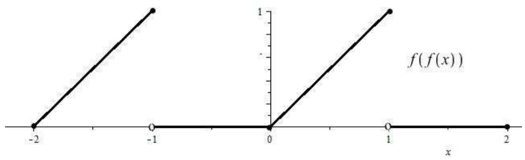
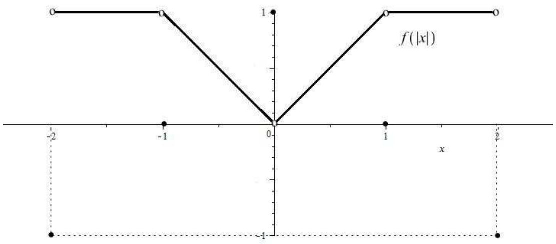
# **Vzorové řešení** zadání ***G***

**1)** $$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in(1,2)\cup\{0\} \\ -1 & x\in(-1,0)\cup\{-2,2\} \\ 0 & x\in\{-1,1\} \\ x & x\in(0,1) \\ x+2 & x\in(-2,-1) \end{cases}.$$

Nakreslete grafy funkcí $f(x), (f\circ f)(x), f(|x|)$ a určete $f(\langle 0,1\rangle)$ a $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.




$$f(\langle 0,1\rangle)=\langle 0,1\rangle, \quad f^{-1}(\{\tfrac{1}{2}\})=\{-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\}$$

**2)** U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Funkce $f$ je v bodě $a$ spojitá, právě když má v $a$ vlastní limitu. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý***

***neplatí*** $\Leftarrow$; ***protipříklad:*** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, a=1$

b) $\exists x\in\mathbb{R}: |\sin x|=2$ právě když $\exists y\in\mathbb{R}: y^2=-1$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$ konverguje pro $x\in\langle 0,2\rangle$. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$2\in\langle 0,2\rangle$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}1$ diverguje.

**3)** Nakreslete graf funkce $f$, pro kterou platí:

$D_f=\mathbb{R}$, je spojitá pro $x\neq 0$,

v bodě $x=0$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,

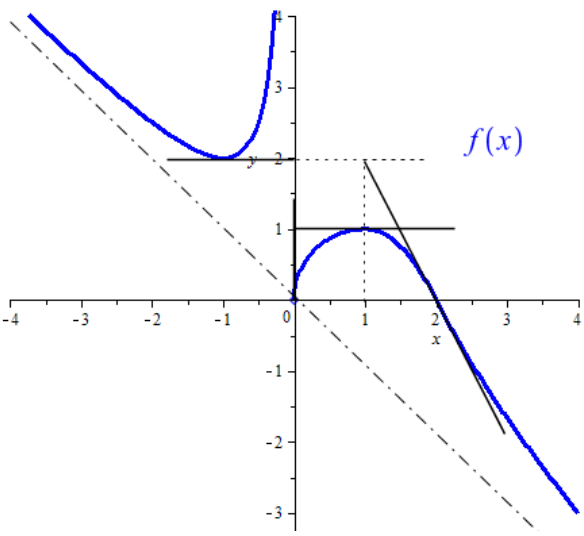
$f(0)=f(2)=0,\quad f(-1)=2,\quad f(1)=1,$

$f'(-1)=f'(1)=0,\quad f'(2)=-2,\quad \lim_{x\to 0^+}f'(x)=\infty,$

$f''(x)>0$ pro $x\in(-\infty,0)$ a pro $x\in(2,\infty)$,

$f''(x)<0$ pro $x\in(0,2)$,

přímka $y=-x$ je její asymptota.



**4)** Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(2x+1)$ ve všech bodech, ve kterých je tečna rovnoběžná s přímkou $x - y + 1 = 0$.

Rovnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

rovnice normály ke grafu funkce v tomto bodě má tvar $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

$x - y + 1 = 0 \iff y = x + 1 \Rightarrow$ hledané tečny mají směrnici $k = 1$ - budeme hledat body $x_0$, ve kterých je $f'(x_0) = 1$:

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x+1)^2} = \frac{2}{4x^2+4x+2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$$

$$\frac{1}{2x^2+2x+1} = 1 \iff 2x^2+2x+1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = -1}}$$

$x = 0$: $f(0) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

rovnice tečny: $y - \frac{\pi}{4} = 1\cdot(x-0) \iff \underline{\underline{x - y + \frac{\pi}{4} = 0}}$

rovnice normály: $y - \frac{\pi}{4} = -1\cdot(x-0) \iff \underline{\underline{x + y - \frac{\pi}{4} = 0}}$

$x = -1$: $f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

rovnice tečny: $y + \frac{\pi}{4} = 1\cdot(x+1) \iff \underline{\underline{x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0}}$

rovnice normály: $y + \frac{\pi}{4} = -1\cdot(x+1) \iff \underline{\underline{x + y + 1 + \frac{\pi}{4} = 0}}$

**5)** Vypočítejte obsah části roviny omezené souřadnými osami a grafem funkce $f(x) = (x+1)e^{-x} \quad (x \geq 0)$.

$(x+1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1$, pro $x \geq 0$ graf neprotíná osu $x \Rightarrow S = \int_0^\infty (x+1)e^{-x}dx$;

$$\int (x+1)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = -(x+2)e^{-x}$$

$$\int_0^\infty (x+1)e^{-x}dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{e^x} + 2 = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} + 2 = \underline{\underline{2}}$$

**6)** $f(x,y,z) = \ln\dfrac{x^2}{y} + e^z$.

a) Najděte bod $A$, pro který platí $\operatorname{grad} f(A) = (1,-1,1)$.

b) Vypočítejte $f'_{\mathbf{a}_0}(A)$, je-li $\mathbf{a}_0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{a} = (1,1,1)$.

a) $f(x,y) = \ln\dfrac{x^2}{y} + e^z = 2\ln x - \ln y + e^z$, $f'_x = \dfrac{2}{x}$, $f'_y = -\dfrac{1}{y}$, $f'_z = e^z$ $\quad \operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\dfrac{2}{x}, -\dfrac{1}{y}, e^z\right)$.

$$\left(\frac{2}{x}, -\frac{1}{y}, e^z\right) = (1,-1,1) \iff x = 2,\ y = 1,\ z = 0$$

$A = [x,y,z] = \underline{\underline{[2,1,0]}}$

b) $f'_{\mathbf{a}_0}(A) = \operatorname{grad} f(A)\cdot\mathbf{a}_0 = (1,-1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}}$