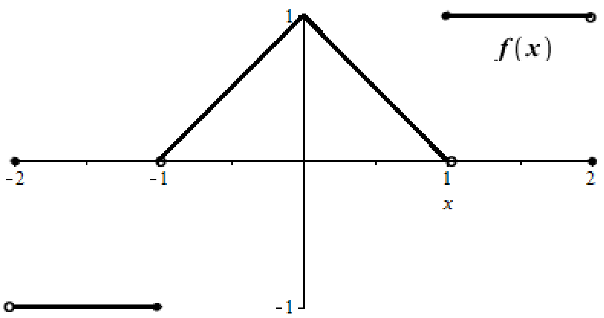
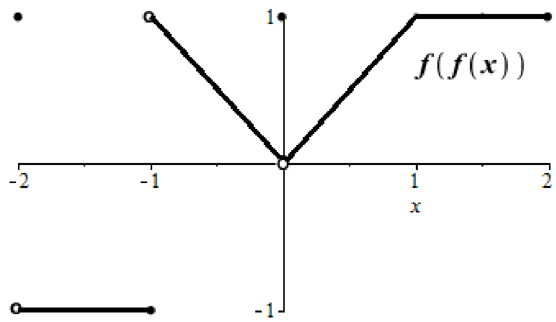
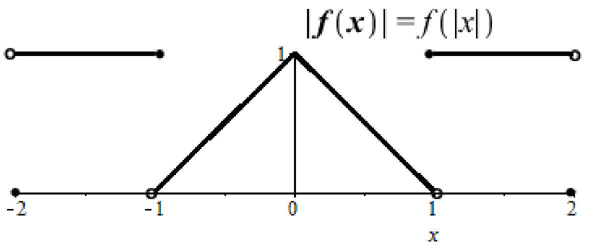
Vzorové řešení zadání <u>**D**</u>

1) Funkce f je zadaná předpisem $f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ -1 & x\in(-2,-1\rangle \\ x+1 & x\in(-1,0\rangle \\ 1-x & x\in(0,1) \\ 1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$ $\qquad f^{-1}(\{1\})=\{0\}\cup\langle 1,2)$

Nakreslete graf funkce $f(x)$, $(f\circ f)(x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$, a určete $f^{-1}(\{1\})$.







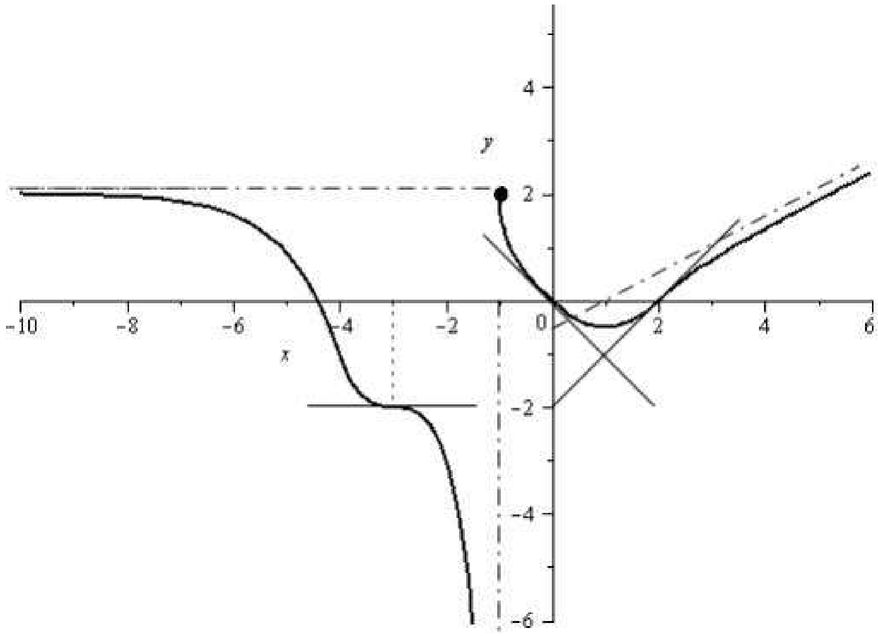
2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x\in\mathbb{R}:(\sin x>4\Rightarrow x^2\geq 0)$ ***<u>pravdivý</u>*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f v bodě x_0 spojitá, má v bodě x_0 derivaci. ***~~pravdivý~~*** ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:*** $f(x)=|x|, x_0=0$

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje. ***~~pravdivý~~*** ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

3) Na druhou stranu zadání načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f=\mathbb{R}$,
v bodě $x=-1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zprava,
$f(-3)=-2,\ f(-1)=2,\ f(0)=f(2)=0,\ \lim\limits_{x\to-1^+}f'(x)=-\infty,\ f'(0)=-1,$
$x=-3$ a $x=2$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-3)=0$ a $f'(2)=1$, $f'(x)\leq 0$ pro $x\in(-\infty,-1)$,
přímka $y=2$ je její asymptota pro $x\to-\infty$, přímka $y=\frac{1}{2}(x-1)$ je její asymptota pro $x\to\infty$.



4) Vypočítejte integrál $I = \int_2^{\infty} \left(\frac{1}{2x-3} - \frac{2}{4x-1} + \frac{5}{x^2+5} \right) dx$

$$I = \left[\frac{1}{2}\ln|2x-3| - \frac{1}{2}\ln|4x-1| + \frac{5}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} \right]_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-3}{4x-1}\right| + \sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{7}\right| - \sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \sqrt{5}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{7} - \sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\frac{7}{2} + \sqrt{5}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)}}$$

5) Je dána funkce $f(x,y) = \sin\frac{xy}{4}$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $A = [0, 2\pi, ?]$.

$$f(0,2\pi) = 0, \quad A = [0,2\pi,0]$$

$$f'_x(0,2\pi): \quad f(x,2\pi) = f_1(x) = \sin\frac{\pi}{2}x,\ f_1'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x, \quad f_1'(0) = f_x'(0,2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

$$f'_y(0,2\pi): \quad f(0,y) = f_2(y) = \sin 0 = 0,\ f_2'(y) = 0, \quad f_2'(2\pi) = f_y'(0,2\pi) = 0$$

$$\rho: \quad z - 0 = \frac{\pi}{2}(x-0) + 0(y-2\pi) \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}x \Leftrightarrow \underline{\underline{\pi x - 2z = 0}}$$

b) Odhadněte $f(0.02; 2\pi)$.

$$f(0.02;2\pi) \doteq \frac{\pi}{2}(0.02-0) + 0(2\pi - 2\pi) \doteq 3.14 \cdot 0.01 \doteq \underline{\underline{0.03}}$$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I = \int_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená parabolou $y^2 = x$ a přímkou $y = -x$. Množinu M nakreslete.

Průsečíky: $y^2 = x \wedge y = -x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

$$M = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{x} \le y \le -x \end{array} \right\}$$

$$I = \int_M xy\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-x} xy\,dy = \int_0^1 dx \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{x}}^{-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x^2 - x\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{24}(3-4) = \underline{\underline{-\frac{1}{24}}}$$