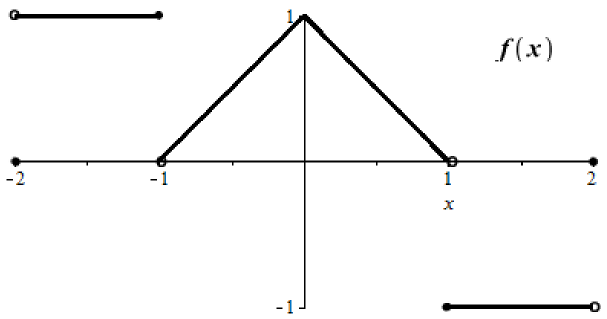
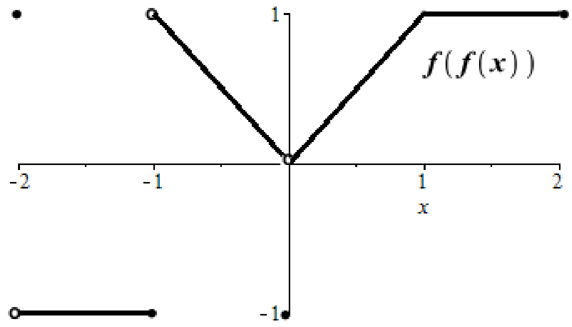
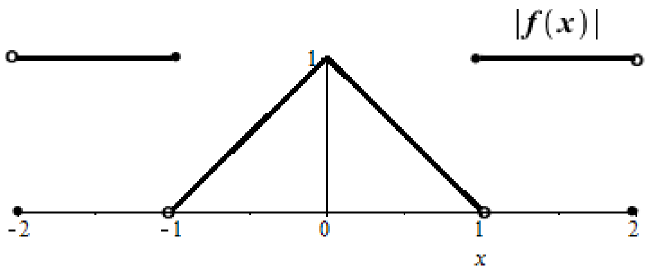
Vzorové řešení zadání C

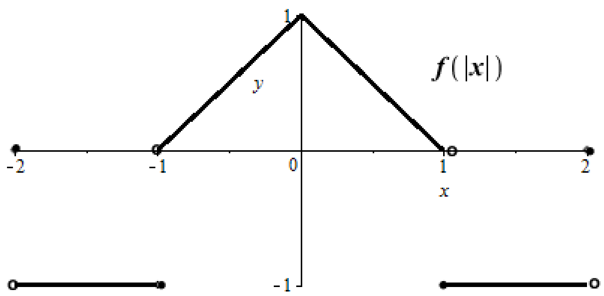
1) Funkce f je zadaná předpisem
$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=-2 \\ 1 & x\in(-2,-1\rangle \\ x+1 & x\in(-1,0\rangle \\ 1-x & x\in(0,1) \\ -1 & x\in\langle 1,2) \\ 0 & x=2 \end{cases}$$
$$f^{-1}(\{1\})=(-2,-1\rangle\cup\{0\}$$

Nakreslete graf funkce $f(x)$, $(f\circ f)(x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$, a určete $f^{-1}(\{1\})$.









2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

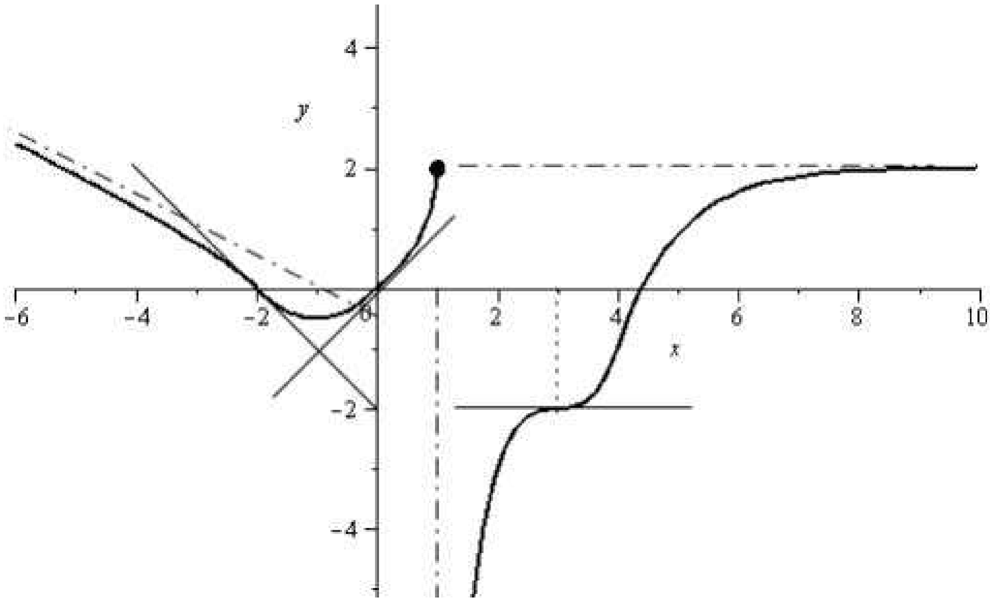
a) $\forall x\in\mathbb{R}:(|x|<0\Rightarrow\cos x\leq 2)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Jeli funkce f na intervalu (a,b) spojitá, je zde ohraničená. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$$(a,b)=(0,1),\ f(x)=\frac{1}{x}$$

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

3) Na druhou stranu zadání načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f=\mathbb{R}$,
v bodě $x=1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zleva,
$f(3)=-2,\ f(1)=2,\ f(0)=f(-2)=0,\ \lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=\infty,\ f'(0)=1,$
$x=-2$ a $x=3$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-2)=-1$ a $f'(3)=0$, $f'(x)\geq 0$ pro $x\in(1,\infty,)$,
přímka $y=2$ je její asymptota pro $x\to\infty$, přímka $y=-\frac{1}{2}(1+x)$ je asymptota pro $x\to-\infty$.



4) Vypočítejte integrál $I=\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{4x-3}+\frac{2}{x^2+3}\right)dx$

$$I=\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|-\frac{1}{2}\ln|4x-3|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{4x-3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{2}\ln 2}}$$

5) Je dána funkce $f(x,y)=\sin\frac{xy}{2}$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $A=[0,\pi,?]$.

$f(0,\pi)=0,\quad A=[0,\pi,0]$

$f'_x(0,\pi):\quad f(x,\pi)=f_1(x)=\sin\frac{\pi}{2}x,\ f_1'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x,\quad f_1'(0)=f'_x(0,\pi)=\frac{\pi}{2}$

$f'_y(0,\pi):\quad f(0,y)=f_2(y)=\sin 0=0,\ f_2'(y)=0,\quad f_2'(\pi)=f'_y(0,\pi)=0$

$\rho:\quad z-0=\frac{\pi}{2}(x-0)+0(y-\pi)\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}x\Leftrightarrow \underline{\underline{\pi x-2z=0}}$

b) Odhadněte $f(0.02;\pi)$.

$f(0.02;\pi)\doteq\frac{\pi}{2}(0.02-0)+0(\pi-\pi)\doteq 3.14\cdot 0.01\doteq\underline{\underline{0.03}}$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I=\int\limits_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená parabolou $y=x^2$ a přímkou $y=x$. Množinu M nakreslete.

Průsečíky: $y=x^2\wedge y=x\Rightarrow x=1\vee x=0$

$$M=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le x\end{array}\right\}$$

$$I=\int\limits_M xy\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} xy\,dy=\int\limits_0^1 dx\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{24}(3-2)=\underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$