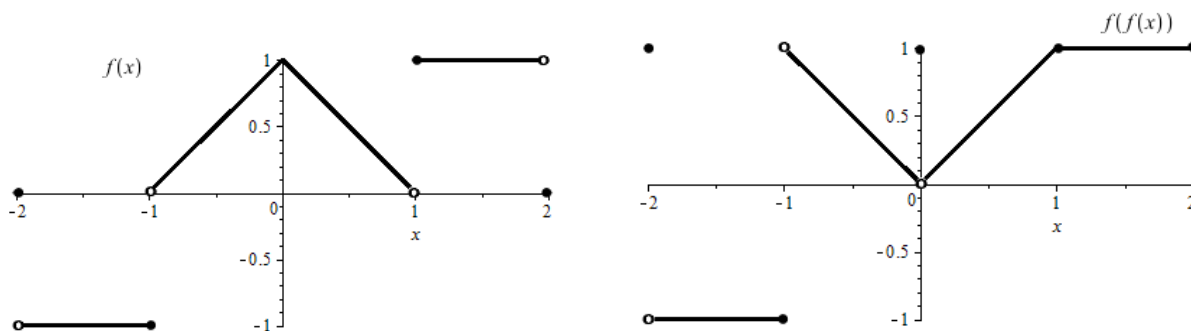


Vzorové řešení zadání D

1) Funkce f je zadána předpisem $f(x) = \begin{cases} 0 & x = -2 \\ -1 & x \in (-2, -1) \\ x+1 & x \in (-1, 0) \\ 1-x & x \in (0, 1) \\ 1 & x \in (1, 2) \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

Nakreslete graf funkce f , graf funkce $f \circ f$ a určete $f(\langle -1, 0 \rangle)$ a $f^{-1}(\{-1\})$.



$$\underline{f(\langle -1, 0 \rangle) = (0, 1) \cup \{-1\}}$$

$$\underline{f^{-1}(\{-1\}) = (-2, 1)}$$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : (\cos x > 2 \Rightarrow |x| \geq 0)$

pravdivý ~~nepravdivý~~ protipříklad:

b) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

pravdivý ~~nepravdivý~~ protipříklad:

c) Platí-li $f''(x_0) = 0$, potom je x_0 inflexní bod funkce f .

~~pravdivý~~ nepravdivý protipříklad: $f(x) = x^4, x_0 = 0$

3) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu I , je-li $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 15}$, $I = \langle -6, 0 \rangle$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 15} = (x^2 + 2x - 15)^{\frac{1}{3}}, \quad f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x+1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x+5)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad f'(x) \not\equiv 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5 \quad -1 \in I, \quad 3 \notin I, \quad -5 \in I$$

$$f(-6) = \sqrt[3]{9} \quad \text{max}$$

$$f(-5) = 0$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2} \quad \text{min}$$

$$f(0) = \sqrt[3]{-15}$$

$$\text{maximum v bodě } x = 4, \quad f_{\max} = \sqrt[3]{9}, \quad \text{minimum v bodě } x = -1, \quad f_{\min} = -2\sqrt[3]{2}.$$

4) Vypočítejte integrál $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+13} + \frac{12}{x^2+1} \right) dx$

$$I = \left[\ln(x+7) - \ln(x+13) + 12 \operatorname{arctg} x \right]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+7}{x+13} + 12 \operatorname{arctg} x \right) - \ln \frac{7}{13} - 12 \operatorname{arctg} 0 = \ln 1 + 6\pi + \ln \frac{13}{7} =$$

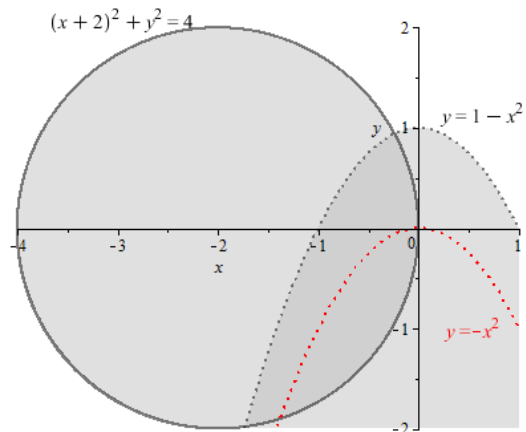
$$\underline{\underline{= 6\pi + \ln \frac{13}{7}}}$$

5) Najděte a nakreslete (na své papíry) definiční obor funkce f , je-li $f(x, y) = \frac{\sqrt{-4x - x^2 - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$

$$D_f : -4x - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 1 - x^2 - y^2 > 0 \wedge 1 - x^2 - y^2 \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y < 1 - x^2 \wedge y \neq -x^2$$

$$\underline{\underline{D_f = \{(x, y) \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y < 1 - x^2 \wedge y \neq -x^2\}}}}$$



6) Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $I = \int_M f(x, y) dx dy$, je-li

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ a } M = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (\rho, \varphi) \mid 1 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$I = \int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{\Phi^{-1}(M)} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 d\rho = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot [\rho]_1^2 =$$

$$\underline{\underline{= \frac{\pi}{4}}}$$

