ANPI

Fecha: 20-5-25

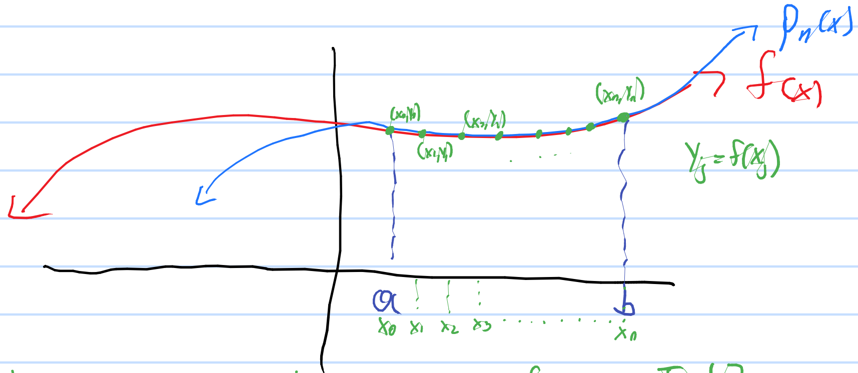
Nota: Se sabe que si tenemos los pares ordenados

$$(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

podemos obtener el polinomio de interpolación $p_n(x)$ de grado máximo n, tal que:

$$p(x_j) = y_j, \quad \forall j=0,\ldots,n.$$

La interpolación también me permite "aproximar una función $f(x)$" en $[a,b]$



Por lo tanto, yo puedo tener un polinomio $p_n(x) \approx f(x)$ en $[a,b]$.
Pero, ¿Qué tan buena es esa aproximación?

Cota de error del polinomio de interpolación

Sea f una función en $[a,b]$. Considere los puntos

$$(x_0,f(x_0)), (x_1,f(x_1)), (x_2,f(x_2)), \ldots, (x_n,f(x_n)),$$

donde $x_j \in [a,b]$, $x_0=a$, $x_n=b$. Sea $p_n(x)$ el polinomio de interpolación de dichos puntos.

Entonces:

1) Si $c = x_j$, $|p_n(c) - f(c)| = 0$

2) Si $c \neq x_j$, $|p_n(c) - f(c)| \leq \frac{d_{max}}{(n+1)!} |(c-x_0)(c-x_1)\ldots(c-x_n)|$

donde $d_{max} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$

Ejm: Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{2}\right)$. El polinomio de interpolación $p_3(x)$ de la función f en el intervalo $[-1,2]$, usando el conjunto soporte $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ es dado por:

$$p_3(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{4x}{3}$$

1) Determine el error de aproximar $f(0)$ usando $p_3(x)$.

$$|f(0) - p_3(0)| = 0$$

$0 \in \{-1, 0, 1, 2\}$

2) Determine una cota de error para aproximar el valor de $f(0.54)$.

Para este ejercicio necesitamos acotar el valor

$$|f(0.54) - p_3(0.54)| \leq \frac{d_{max}}{(3+1)!} |(0.54 - -1)(0.54-0)(0.54-1)(0.54-2)|$$

$$= \frac{(\pi^4/16)}{4!} |(0.54+1)\, 0.54 (0.54-1)(0.54-2)| = 0.141675\ldots$$

donde $d_{max} = \max\limits_{x \in [-1,2]} |f^{(4)}(x)| = \max\limits_{x \in [-1,2]} \left| \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{2}\right)\right]^{(4)} \right|$

$$= \max_{x \in [-1,2]} \left| \frac{\pi^4}{16} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{2}\right) \right|$$

$$= \frac{\pi^4}{16} \cdot \max_{x \in [-1,2]} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\pi^4}{16} \cdot 1 = \frac{\pi^4}{16}$$

Nota: se sabe que

$-1 \leq \operatorname{sen}(g(x)) \leq 1$

$|\operatorname{sen}(g(x))| \leq 1$

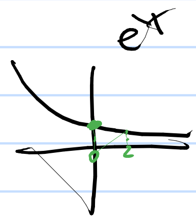
Considere la función $f(x) = e^{-\frac{x}{10}}$. Calcule la cota de error del polinomio de interpolación usando conjunto soporte $S=\{0,1,2\}$, cuando $c=0.5$

① $S=\{0,1,2\} \rightarrow$ 3 puntos $\rightarrow$ polinomio de interpolación es de grado 2.

② $n=2$, intervalo $=[0,2]$

③ $$|p_2(0.5) - f(0.5)| \leq \frac{d_{max}}{(2+1)!} |(0.5-0)(0.5-1)(0.5-2)| = \frac{\frac{1}{1000}}{3!} |0.5(0.5-1)(0.5-2)| = 0.0000625$$

$$d_{max} = \max_{x\in[0,2]} |f^{(3)}(x)| = \max_{x\in[0,2]} \left| \left[e^{-\frac{x}{10}}\right]^{(3)} \right|$$



$$= \max_{x\in[0,2]} \left| \left(-\frac{1}{10}\right)^3 e^{-\frac{x}{10}} \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{10}\right)^3 \right| \cdot \max_{x\in[0,2]} \left| e^{-\frac{x}{10}} \right|$$

$$= \frac{1}{1000} \cdot e^{-\frac{0}{10}} = \frac{1}{1000}$$