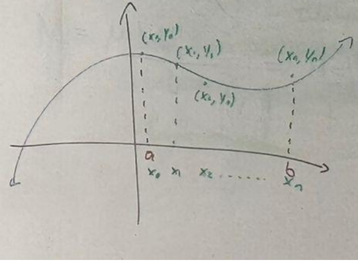
Las lecciones anteriores, estudiamos métodos numéricos para aproximar la solución de EDO.

EDO de 1er orden.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ \text{en } [a,b] \end{cases}$$

EDO de 2do orden.

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)\cdot y'(x) + q(x)\cdot y(x) + r(x) \\ y(a) = \alpha \quad y \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

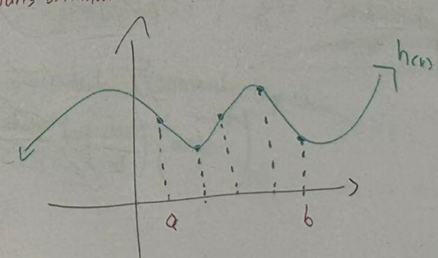


El objetivo es encontrar los pares ordenados

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

¿Qué se hace después con esos pares ordenados?

El objetivo es encontrar una función $h(x)$ que aproxime a la función $y(x)$ en $[a,b]$, utilizando como referencia dichos pares ordenados



Nosotros estudiaremos la técnica de interpolación para obtener la función $h(x)$ que aproxime a $y(x)$.

Interpolación Numérica

Sean $\underbrace{\overbrace{(x_0, y_0)}^{1}, \overbrace{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^{n}}_{n+1}$ $n+1$ puntos. La interpolación numérica consiste en encontrar un polinomio $p(x)$ tal que:

$$p(x_j) = y_j \quad , \forall j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En este caso, todos los x_j son diferentes.

Polinomio. $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

- n es entero mayor a 1.
- $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$
- $a_n \neq 0$
- $p_n(x)$ es de orden n.

Ejm

$p_2(x) = x^2 - 5x + 1$

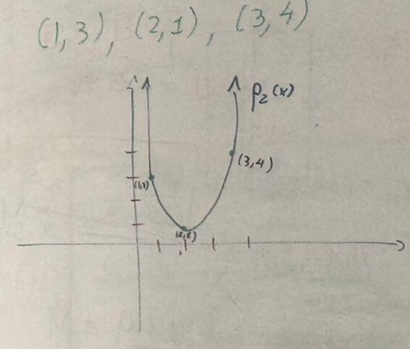
$p_7(x) = 4x^7 - 3x^2 + \pi \cdot x + e$

Teorema Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ $n+1$ puntos. Entonces existe un único polinomio de interpolación $p_n(x)$ de grado máximo n, tal que

$$p_n(x_j) = y_j \quad , \forall j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo: Considere los pares ordenados

$$(1,3), (2,1), (3,4)$$



¿Cómo calcular el polinomio $p_n(x)$?

Existen varias formas de hacerlo.

En este curso estudiaremos el método de Lagrange.

Método de Lagrange: Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, donde cada x_j es diferente. El método de Lagrange obtiene el polinomio de interpolación usando la siguiente fórmula:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

$$= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

donde $L_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \frac{x-x_0}{x_k-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_k-x_1}\cdot \cdots \cdot\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\cdot \cdots \cdot\frac{x-x_n}{x_k-x_n}$

núcleo o "Kernel" del polinomio de interpolación.

Omitir "k"

donde $L_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \frac{x-x_0}{x_k-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_k-x_1}\cdot \cdots \cdot\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\cdot \cdots \cdot\frac{x-x_n}{x_k-x_n}$

núcleo o "Kernel" del polinomio de interpolación.

Omitir "k"

Ejm: Considere los puntos $(\underset{x_0}{-2},\overset{y_0}{0}),\ (\underset{x_1}{0},\overset{y_1}{1}),\ (\underset{x_2}{1},\overset{y_2}{-1})$.

Calcule el polinomio de interpolación.

① # Puntos = 3

② Grado máx. del pol: = 2

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k(x)$$

$$= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= \cancel{0\cdot L_0(x)} + 1\cdot L_1(x) + -1\cdot L_2(x)$$

$$= L_1(x) - L_2(x)$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x--2}{0--2}\cdot\frac{x-1}{0-1} = \frac{x+2}{2}\cdot\frac{x-1}{-1} = \boxed{-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1}$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x--2}{1--2}\cdot\frac{x-0}{1-0} = \frac{x+2}{3}\cdot x = \boxed{\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1\right) - \left(\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{5x^2}{6}-\frac{7x}{6}+1} \rightarrow \text{Polinomio de Interpolación}$$

Para implementar computacionalmente el método de Lagrange para obtener el polinomio de interpolación, se "necesita" usar cálculo simbólico

Pseudocódigo

Entrada: $x\in\mathbb{R}^n$, $x=[x_0,x_1,\dots,x_n] \rightarrow x_j$ son diferentes

$y\in\mathbb{R}^n$, $y=[y_0,y_1,\dots,y_n]$

Salida: $p_n(x) \rightarrow$ polinomio de interpolación

1) $p_n(x)=0$

2) Para $k=0,1,\dots,n$

  $p_n(x)=p_n(x)+y_k L_k(x)$

Nota: Implementar una función que calcule $L_k(x)$ por aparte.