Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden

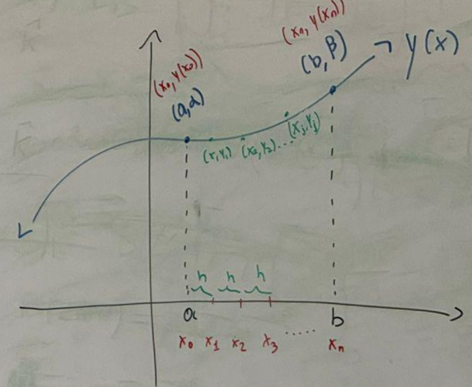
Una EDO de 2do orden es la ecuación

$$y''(x) = p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) + r(x) \longrightarrow \text{Obtener la función } y$$

en $[a,b]$, donde $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$

Sea $S=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una discretización de $[a,b]$, donde $x_0=a$ y $x_n=b$, $x_{i+1}-x_i=h$. $\left[h=\dfrac{b-a}{\#\text{puntos}-1}\right]$

$= \dfrac{b-a}{n}$



El objetivo es encontrar $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, tal que

$$y(x_j) \approx y_j \quad , \quad j=1,\dots,n-1$$

Además
$$\boxed{\begin{aligned} y(x_0) &= \alpha = y_0 \\ y(x_n) &= \beta = y_n \end{aligned}}$$

Para encontrar $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, necesitamos usar las fórmulas que aproximan a $y''(x)$ y $y'(x)$

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h}$$ Diferencia Finita Centrada

$$y''(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2}$$ Fórmula de la 2da derivada

Luego, sustituimos en la $\boxed{\text{EDO-2O}}$ usando $x = x_j$

$$\frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2} = p(x_j) \cdot \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2 \cdot h} + q(x_j) \cdot y(x_j) + r(x_j)$$

$\downarrow$

Fórmula de discretización de $\boxed{\text{EDO-2O}}$.

$$\frac{y(x_{j+1})-2y(x_j)+y(x_{j-1})}{h^2} = p(x_j)\cdot\frac{y(x_{j+1})-y(x_{j-1})}{2\cdot h} + q(x_j)\cdot y(x_j) + r(x_j)$$

$\downarrow$

Fórmula de discretización de $\boxed{\text{EDO-2O.}}$

Note que el objetivo es encontrar y_j, donde $y_j \approx y(x_j)$. En la fórmula anterior, sustituiremos $y(x_j)$ por y_j.

Además, escribiremos

$$p_j = p(x_j)$$
$$q_j = q(x_j)$$
$$r_j = r(x_j).$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2} = p_j\cdot\left(\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}\right)+q_j\,y_j+r_j$$

Re-escribiendo esta fórmula obtenemos..

$$\boxed{\left(\frac{-h}{2}p_j-1\right)y_{j-1}+(2+h^2\cdot q_j)\,y_j+\left(\frac{h}{2}p_j-1\right)y_{j+1} = -h^2\cdot r_j} \quad (*)$$

para $j=1,2,\ldots,n-1$, y $\boxed{y_0=\alpha}$ y $y_n=\beta$.

Note que si $j=1$

$$\left(-\frac{h}{2}\cdot p_1-1\right)\underbrace{y_0}_{\alpha}+(2+h^2\cdot q_1)\,y_1+\left(\frac{h}{2}p_1-1\right)y_2=-h^2\cdot r_1$$

Para encontrar $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ de la ecuación (*), debemos resolver el sistema de ecuaciones $Az = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es una matriz tridiagonal de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1 - 1 & & & \\ -\frac{h}{2}p_2 - 1 & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2 - 1 & & \\ & -\frac{h}{2}p_3 - 1 & 2+h^2q_3 & \frac{h}{2}p_3 - 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{h}{2}p_{n-2} - 1 \\ & & & -\frac{h}{2}p_{n-1} - 1 & 2+h^2q_{n-1} \end{pmatrix},$$

$b \in \mathbb{R}^{n-1}$, donde

$$b = \begin{pmatrix} -h^2 r_1 + e_0 \\ -h^2 r_2 \\ -h^2 r_3 \\ \vdots \\ -h^2 r_{n-2} \\ -h^2 r_{n-1} + e_n \end{pmatrix}$$

donde $e_0 = \left(\frac{h}{2} p_1 + 1\right)\alpha$ y $e_n = \left(-\frac{h}{2} p_{n-1} + 1\right)\beta$.

y $Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

Pseudocódigo: Problema: $\begin{cases} y''(x) = p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) + r(x) \\ \text{en } [a,b], \text{ donde } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta \end{cases}$

Entrada:
- Funciones $p(x), q(x), r(x)$
- Intervalo $[a,b]$
- Valores extremos α y β, donde $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$.
- M es el # de puntos que se obtienen. ($M = n+1$)

Salida: $\vec{x} \in \mathbb{R}^M$ y $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$, tal que $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

1) $h = \frac{b-a}{M-1}$

2) Obtener $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$x_0 = a$, $x_n = b$

$x_j = a + j \cdot h$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$

3) Obtener $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $r_j = r(x_j)$, $\forall j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4) Construir matriz A (**)

5) Construir vector b (***)

6) Resolver el sistema $Az=b$, usando el método de Thomas

donde $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

7) $\hat{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\hat{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ \beta \end{pmatrix}$