ANPT

Fecha: 29-4-25

Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1 Problema de Cauchy

Encontrar la función $y(x)$ continua en $[a,b]$, tal que de solución al problema:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \rightarrow \text{Valor Inicial} \end{cases}$$

Ejm: Considere el problema

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) \quad \checkmark \\ y(0) = 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

La solución de este problema es $\boxed{y(x) = -x - 1 + 2e^x}$

•) $y'(x) = [-x - 1 + 2e^x]' = -1 + 2e^x$

•) $x + y(x) = \cancel{x} + \cancel{-x} - 1 + 2e^x = -1 + 2e^x$

$\Big]\ y'(x) = x + y(x)$

•) $y(0) = -0 - 1 + 2e^0 = -1 + 2 = 1$

Nota: Para simplificar la notación, escribiremos $y = y(x)$. Por lo tanto, el problema de Cauchy se simplifica de la siguiente manera:

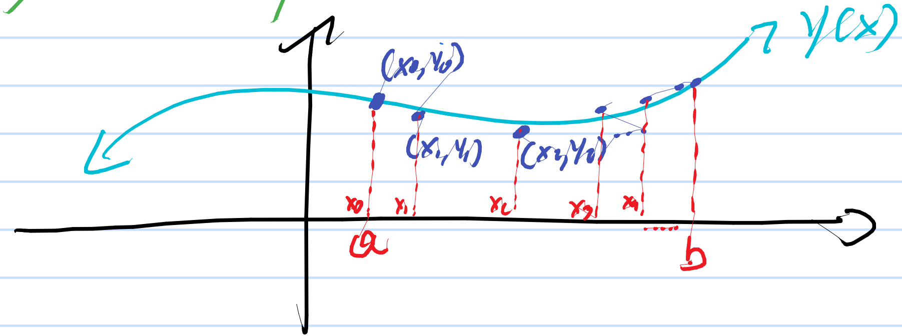
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

En métodos numéricos, el objetivo es encontrar una cantidad de puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

que aproxima a la solución en un intervalo $[a,b]$.

En este caso, $x_0 = a$ y $x_n = b$



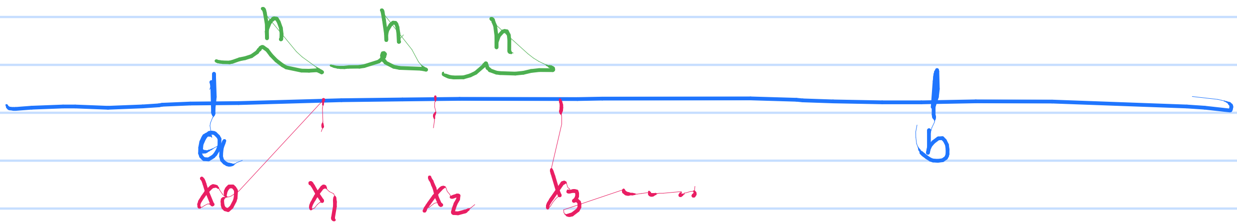
Para encontrar dichos pares ordenados, debemos hacer lo siguiente:

1. Calcular $\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_n}$.

   ↳ $n+1$ valores de x_j

   ↳ M valores de x_j

   Sea $M = \#$ puntos a utilizar



   1. $h = \dfrac{b-a}{M-1}$
   2. $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_j = a + j \cdot h$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$

2. Calcular los valores de $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Estos valores se calculan usando diferentes métodos numéricos. A continuación estudiaremos diferentes técnicas para calcular esos valores

Método 1: Euler

Este método calcula los valores $y_0, y_1, \dots, y_n$ usando la siguiente fórmula:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h\cdot f(x_k, y_k) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \qquad \boxed{h = \frac{b-a}{M-1}}$$

Ejm: Resolver numéricamente usando el método de Euler el problema

$$\begin{cases} y' = \underbrace{y - x^2 + 1}_{} \rightarrow f(x,y) \\ y(\underset{a}{0}) = \underset{y_0}{0.5} \end{cases}$$

en $[\overset{a}{0}, \overset{b}{2}]$. Se sabe que la solución de dicho problema es

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5\,e^x.$$