# El método de las diferencias finitas

Para resolver algunos problemas de contorno de segundo orden pueden utilizarse las fórmulas de diferencias finitas que proporcionan aproximaciones a las derivadas. Consideremos la ecuación lineal

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t) \tag{1}$$

en $[a, b]$ con $x(a) = \alpha$ y $x(b) = \beta$. Hagamos una partición de $[a, b]$ usando los nodos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, siendo $h = (b - a)/N$ y $t_j = a + jh$ para $j = 0, 1, \ldots, N$. Usando las fórmulas de diferencias centradas dadas en el Capítulo 6 para aproximar las derivadas

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1})}{2h} + \boldsymbol{O}(h^2) \tag{2}$$

y

$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1})}{h^2} + \boldsymbol{O}(h^2), \tag{3}$$

lo que hacemos ahora es reemplazar cada término $x(t_j)$ del miembro derecho de las fórmulas (2) y (3) por $x_j$ y sustituir el resultado en la ecuación (1), lo que nos da la relación

$$\begin{aligned}\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} + \boldsymbol{O}(h^2) &= p(t_j)\left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + \boldsymbol{O}(h^2)\right) \\ &\quad + q(t_j)x_j + r(t_j).\end{aligned} \tag{4}$$

Eliminando los términos de orden $\boldsymbol{O}(h^2)$ en (4) e introduciendo la notación $p_j = p(t_j)$, $q_j = q(t_j)$ y $r_j = r(t_j)$, obtenemos la ecuación en diferencias

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = p_j\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + q_jx_j + r_j, \tag{5}$$

que se usa para calcular aproximaciones numéricas a la solución de la ecuación diferencial (1). Para ello, multiplicamos cada miembro de (5) por $h^2$, agrupamos los términos que contienen las incógnitas $x_{j-1}$, $x_j$ y $x_{j+1}$ y los disponemos como un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\frac{-h}{2}p_j - 1\right)x_{j-1} + (2 + h^2q_j)x_j + \left(\frac{h}{2}p_j - 1\right)x_{j+1} = -h^2r_j, \tag{6}$$

para $j = 1, 2, \ldots, N - 1$, siendo $x_0 = \alpha$ y $x_N = \beta$. El sistema (6) es un sistema tridiagonal de $N - 1$ ecuaciones con otras tantas incógnitas, lo que se ve más claramente si escribimos el sistema usando la notación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1-1 & & & & & \\ \frac{-h}{2}p_2-1 & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2-1 & & & \mathbf{0} & \\ & & \dots & & & & \\ & \frac{-h}{2}p_j-1 & 2+h^2q_j & \frac{h}{2}p_j-1 & & & \\ & & \dots & & & & \\ \mathbf{0} & & \frac{-h}{2}p_{N-2}-1 & 2+h^2q_{N-2} & \frac{h}{2}p_{N-2}-1 & & \\ & & & \frac{-h}{2}p_{N-1}-1 & 2+h^2q_{N-1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -h^2r_1+e_0 \\ -h^2r_2 \\ \dots \\ -h^2r_j \\ \dots \\ -h^2r_{N-2} \\ -h^2r_{N-1}+e_N \end{bmatrix},$$

siendo

$$e_0 = \left(\frac{h}{2}p_1+1\right)\alpha \quad \text{y} \quad e_N = \left(\frac{-h}{2}p_{N-1}+1\right)\beta.$$

Cuando se realizan los cálculos con un tamaño de paso $h$, la aproximación numérica que se obtiene es un conjunto finito de puntos $\{(t_j, x_j)\}$ y si se conoce la solución exacta $x(t_j)$, entonces podemos comparar $x_j$ con $x(t_j)$.