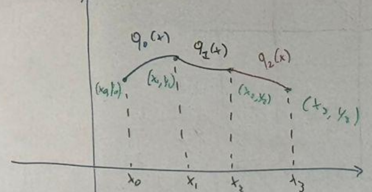
Trazadores

Función a trozos

Trazadores: Sea $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ $n+1$ puntos.

Los trazadores es un conjunto de funciones $q_j(x)$, tal que están definidas en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $\forall j = 0, 1, \dots, n-1$, e intersecan los puntos anteriores



En este caso, el trazador se define como:

$$q(x) = \begin{cases} q_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1[\\ q_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2[\\ q_2(x) & \text{si } x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

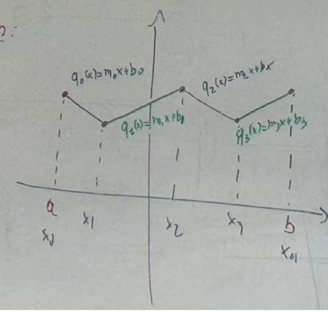
Tipos de Trazadores

1) **Trazador Lineal:** En este caso, cada $q_j(x)$ es una función lineal, es decir,

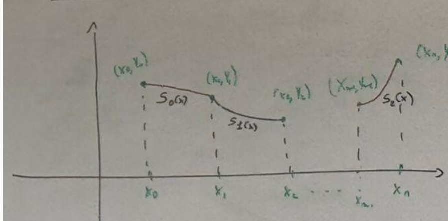
$$q_j(x) = m_j x + b_j$$

$$q(x) = \begin{cases} m_0 x + b_0, & \text{si } x \in [x_0, x_1[\\ m_1 x + b_1, & \text{si } x \in [x_1, x_2[\\ m_2 x + b_2, & \text{si } x \in [x_2, x_3[\\ m_3 x + b_3, & \text{si } x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Ejm:



Trazadores Cúbicos



En el caso de los trazadores cúbicos, cada $S_j(x)$ es un polinomio de la forma

$$\boxed{S_j(x) = \underline{a_j}(x - x_j)^3 + \underline{b_j}(x - x_j)^2 + \underline{c_j}(x - x_j) + \underline{d_j}}$$

$\forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & \text{si } x \in [x_0, x_1[\\ S_1(x), & \text{si } x \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde se cumple lo siguiente:

$$(*) \begin{cases} S(x_j) = y_j \\ S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \\ S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1}) \\ S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1}). \end{cases}$$

Continuidad hasta la tercera derivada.

El objetivo será calcular a_j, b_j, c_j y d_j de $S_j(x)$, tal que cumpla las 4 igualdades en $(*)$

¿Cómo calcular los constantes a_j, b_j, c_j y d_j?

Existen varias técnicas. Nosotros estudiaremos un método llamado "Frontera Natural".

En este caso, sea $h_j = x_{j+1} - x_j$, entonces:

$$a_j = \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_j}, \quad b_j = \frac{M_j}{2}, \quad c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_{j+1} + 2M_j)$$

$$d_j = y_j$$

En este caso, $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ son constantes dadas

¿Cómo calcular las constantes $M_0, M_1, \dots, M_n$?

① $M_0 = M_n = 0$

② Las constantes $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ se obtienen de resolver el sistema

Tridiagonal

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$$

donde $u_j = 6\left(\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}\right)$

Pseudocódigo Trazador Cúbico

Entrada: $\hat{X} = (x_0 \; x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$
$\hat{Y} = (y_0 \; y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ | Pares Ordenados

Salida: $S_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j$, para $j = 0, 1, \dots, n-1$

P1: Calcular $h_j = x_{j+1} - x_j$, para $j = 0, 1, \dots, n-1$

Sea $h = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ → Resolver con Thomas

P2: Construir y resolver el sistema $(**)$, para obtener $M = (M_0 \; M_1 \; M_2 \dots, M_n)$

P3: Para $j = 0, \dots, n-1$

- Calcular a_j, b_j, c_j y d_j, según $(***)$
- Construir $S_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j$

↳ Cálculo simbólico