Cuadraturas Gaussianas

La cuadratura Gaussiana de orden $\underline{n}$ para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ está dada por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_n f(x_i)$$

donde $x_i \in]-1, 1[$ y $w_1, w_2, \dots, w_n$ se conocen como <u>pesos</u>

<u>Nota</u>: · Esta fórmula sirve para integrar en el intervalo $[-1, 1]$.

- Objetivo es obtener los valores x_i, w_i
- Entre más grande sea $\underline{n}$, mejor es la aproximación.

¿Cómo calcular x_i?

Para la cuadratura de orden $\underline{n}$, el valor de $x_1, x_2, \dots, x_n$ se obtienen de resolver la ecuación $\boxed{P_n(x) = 0,}$

donde $\boxed{P_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]}$ es el polinomio de Legendre.

Ejm: Determine los valores de $\underline{\underline{x_i}}$, de la cuadratura gaussiana de orden 3.

$(x^2-1)^3 = x^6-3x^4+3x^2-1$

Solución

1) $P_3(x) = \frac{1}{3!\cdot 2^3}\frac{d^3}{dx^3}\left[(x^2-1)^3\right]$

$= \frac{1}{48}\cdot\frac{d^3}{dx^3}\left[x^6-3x^4+3x^2-1\right]$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

2) $P_3(x)=0$

$\frac{1}{2}(5x^3-3x)=0$

$\frac{x}{2}(5x^2-3)=0$

$\frac{x}{2}(\sqrt{5}x-\sqrt{3})(\sqrt{5}x+\sqrt{3})=0$

$x=0$, $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\tfrac{3}{5}} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \sqrt{\tfrac{3}{5}} \end{aligned}}$$

Nota. Todos los valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ SON Diferentes

¿Cómo se calculan w_i?

Sea $P'_n(x)$ la derivada del polinomio de Legendre de orden n. Entonces: para x_i, w_i está dado por:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)\left[P'_n(x_i)\right]^2}$$

Ejm: Del ejemplo anterior, calcule w_1, w_2, w_3.

Si $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, entonces $P'_3(x) = \frac{1}{2}(15x^2-3)$

$$w_1 = \frac{2}{(1-x_1^2)\left[P'_3(x_1)\right]^2} = \frac{2}{\left(1-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right)\left[\frac{1}{2}\left(15\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2-3\right)\right]^2} = \frac{5}{9}$$

$$w_2 = \dots\dots = \frac{8}{9}$$

$$w_3 = \dots\dots = \frac{5}{9}$$

Nota: Los valores de w_i SI se pueden repetir.

Ejm: De los dos ejemplos anteriores se obtiene que la formula de cuadratura gaussiana de orden 3 es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$= \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)$$

Ejm: Si $f(x) = e^{-x^2}$, entonces:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \approx \frac{5}{9} e^{-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2} + \frac{8}{9} \cdot e^{-0^2} + \frac{5}{9} e^{-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}$$

$$= \boxed{}$$ Tarea