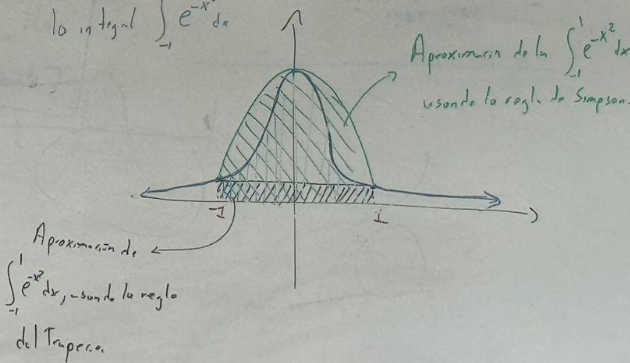
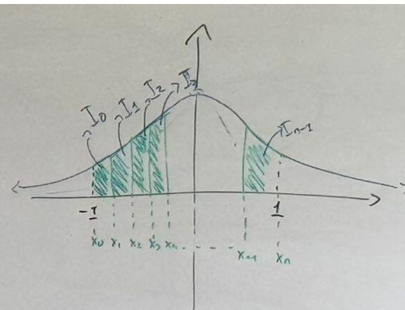
La lección pasada estudiamos los métodos del Trapecio y Simpson para aproximar una integral definida. Sin embargo, estos métodos no son muy buenos para funciones con curvaturas muy pronunciadas.

<u>Ejm</u>: Considere la función $f(x) = e^{-x^2}$ y considere la integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$




Para mejorar la aproximación, se divide el intervalo [a b] en subintervalos, y a cada subintervalo se le aplica ya sea la regla del trapecio o la de Simpson. Al final, se suman todos los resultados para obtener una mejor aproximación. Entre más sub-intervalos se utilicen, mejor será la aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$.




$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = I_0 + I_1 + \dots + I_{n-1}$$

# Regla del Trapecio Compuesto.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, y sea $S=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto soporte en $[a,b]$, donde $x_0=a$, $x_n=b$, $x_j=a+jh$, donde $h=x_{j+1}-x_j$

Entonces la regla del trapecio compuesto se define como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \overbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)}^{F_1} = \overbrace{\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)}^{F_2}$$

$$= \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)}_{F_3}$$

**Cota de Error:** Sea $I = \int_a^b f(x)\,dx$ y $I_T(n)$, la aproximación usando la regla del Trapecio compuesto con $n+1$ puntos en el soporte.

Entonces.

$$\left| I - I_T(n) \right| \leq \frac{(b-a)\,h^2}{12} \cdot \alpha_{max}$$

donde $\alpha_{max} = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

**Nota:** $h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{b-a}{m}$ → número de elementos en el soporte..

$m = n+1$

ó

$n = m-1$.

**Nota:** $h = \dfrac{b-a}{m-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$m$ → número de elementos en el soporte..

$m = n+1$

$h = m-1$

---

**Ejm:** Aproxime la integral $\int_2^5 \ln(x)\,dx$ usando la regla del Trapecio compuesto con 4 elementos en el conjunto soporte. Luego, calcule la cota de error.

Aproximación

$n = m-1 = 4-1 = 3$

① $h = \dfrac{b-a}{m} = \dfrac{5-2}{4-1} = \dfrac{3}{3} = 1.$

② $x_0 = 2$
$x_1 = 3$
$x_2 = 4$
$x_3 = 5$

③ $$I_T(3) = \frac{1}{2}\cdot\Big(f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2)\big) + f(x_3)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(f(2) + 2\big(f(3) + f(4)\big) + f(5)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\ln(2) + 2\big(\ln(3) + \ln(4)\big) + \ln(5)\Big)$$
$$\simeq 3.6361\ldots$$

Cota de Error

$$|I - I_T(3)| \leq \frac{(5-2)^2}{12}\cdot 1\cdot d_{max} = \frac{3^2}{12}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = 0.0625.$$

$$d_{max} = \max_{x\in[2,5]} |f''(x)| = \underset{\text{se calculó la lección pasada}}{\ldots} = \frac{1}{4}$$

Nota: Conociendo una tolerancia dada, se puede conocer el valor de puntos $\underline{\underline{m}}$ del conjunto soporte de tal manera que la aproximación de la integral sea menor o igual a dicha tolerancia.

Sea $tol > 0$ la tolerancia, entonces:

$$\left| I - I_T(n) \right| \leq \boxed{\frac{(b-a)\,h^2}{12} \cdot \alpha_{max} \leq tol}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{(b-a)}{12} \cdot \left(\frac{b-a}{m-1}\right)^2 \alpha_{max} \leq tol}$$

Luego, se despeja el $\underline{\underline{m}}$

**Ejm:** Del ejemplo anterior, determine el número de elementos del conjunto soporte, tal que la cota de error sea menor o igual a $10^{-10}$.

$$\left| I - I_T(n) \right| \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot \left(\frac{b-a}{m-1}\right)^2 \cdot d_{max} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{(5-2)}{12} \cdot \left(\frac{5-2}{m-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \leq 10^{-10}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{48} \cdot \frac{1}{(m-1)^2} \leq 10^{-10}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{48} \cdot \frac{1}{10^{-10}} \leq (m-1)^2$$

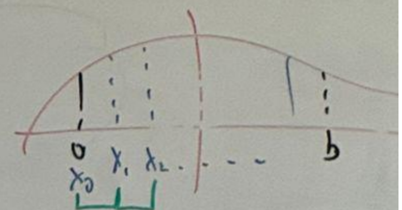
$$\sqrt{5.625 \times 10^{9}} \leq \sqrt{(m-1)^2}$$

$$75000 \leq m-1$$

$$75001 \leq m$$

R/ Se necesitan 75001 elementos en el soporte.

# Regla de Simpson Compuesta




Sea $I = \text{simpson}(f, a, b)$ la función que aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ usando la regla de Simpson.

Entonces la regla de simpson Compuesta se define como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \text{simpson}(f, x_i, x_{i+1})$$

donde $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es el conjunto soporte en $[a,b]$

Cota de Error (Tarea)