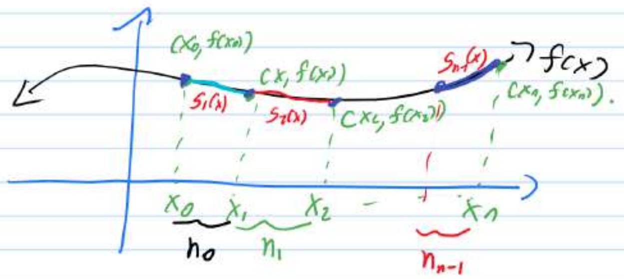
ANP I

Fecha: 27-5-25

Trazadores Cúbicos



Polinomio cúbico

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & si\ x \in [x_0, x_1[\\ S_1(x) & si\ x \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & si\ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Cota de Error del Trazador Cúbico

Sea f una función real y sea $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto soporte en $[a,b]$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$.

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Entonces

Sea $c \in [a,b]$.

- Si $c \in S$ $(c = x_j,\ j = 0, 1, \dots, n)$

$$|f(c) - S(c)| = 0$$

- Si $c \notin S$, entonces

$$\boxed{|f(c) - S(c)| \leq \frac{5 \cdot h^4}{384} \cdot d_{max}}$$

donde $h = \max\limits_j (x_{j+1} - x_j) = \max\limits_j h_j$, $\quad h = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})^T$

y $d_{max} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$

Ejm Sea $f(x) = e^{x/3}$ en $[1,3]$ Considere el conjunto soporte $S = \{\underbrace{1, 2}_{1}, \underbrace{2.5}_{0.5}, \underbrace{3}_{0.5}\}$. Calcule la cota de error del trazador cúbico.

Solución

$$|f(c) - S(c)| \leq \frac{5 \cdot h^4}{384} \cdot d_{max} = \frac{5 \cdot 1^4}{384} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot e \approx 4.3697\ldots \times 10^{-4}$$

① $h = 1$

② $d_{max} = \max\limits_{x \in [1,3]} |f^{(4)}(x)| = \max\limits_{x \in [1,3]} \left(\frac{1}{3}\right)^4 e^{x/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \max\limits_{x \in [1,3]} e^{x/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot e^{3/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot e$

Ejm Sea $f(x) = xe^x$ en $[1,5]$ Considere el conjunto soporte $S = \{1, 2, 3, 3.5, 4.5, 5\}$ Calcule la cota de error del trazador cúbico.

Integracion Numérica

Sea $f(x)$ una funcion continua en $[a,b]$. Sea $F(x)$ la antiderivada de $f(x)$. Entonces se sabe que

$$I=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

El problema con este tipo de integracion es que NO todas las funciones tienen antiderivada.

En este caso, trataremos de aproximar $f(x)$ con un polinomio de interpolacion $p_n(x)$, tal que

$$f(x)\approx p_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \underbrace{\int_a^b p_n(x)\,dx}$$

Facil de integrar: $\int_a^b c\cdot x^n\,dx$

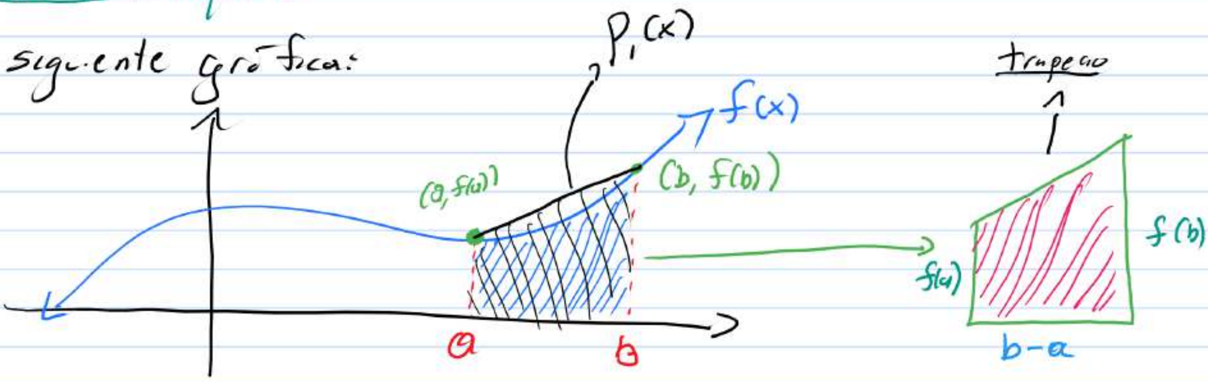
$$= \left.\frac{c\,x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$$

$$= \frac{c}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right).$$

Estudiaremos 2 métodos para aproximar una integral definida, usando polinomios de interpolacion de grado 1 y 2.

Método 1: Método del Trapecio

Consider la siguiente gráfica:



Entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_1(x)\,dx = \frac{(b-a)\cdot\left(f(b)+f(a)\right)}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)\cdot\left(f(a)+f(b)\right)}{2} \to \text{Regla del Trapecio}$$

Cota de Error: Sea $I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ y $I_T=\dfrac{(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)}{2}$. Entonces

$$|I-I_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\cdot d_{max}$$

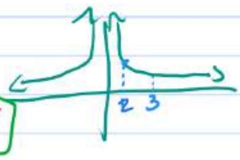
donde $d_{max} = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Ejm: Sea $f(x)=\ln(x)$. Aproxime $\displaystyle\int_2^5 \ln(x)\,dx$, utilizando la regla del trapecio. Calcule la cota de error.

① $\displaystyle\int_2^5 \ln(x)\,dx \approx \frac{(5-2)\left(\ln(5)+\ln(2)\right)}{2} = 3.4539\ldots$

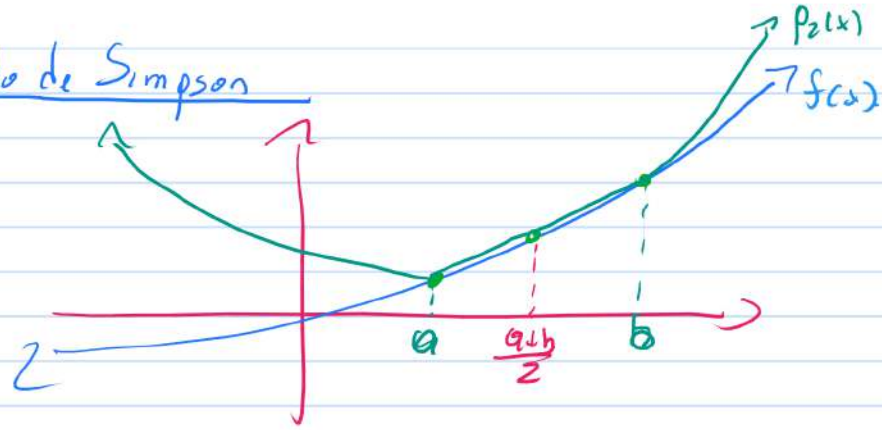
② Si $I=\displaystyle\int_2^5 \ln(x)\,dx$ y $I_T = 3.4539\ldots$

$$|I-I_T| \leq \frac{(5-2)^3}{12}\cdot d_{max} = \frac{3^3}{12}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{0.5625}$$



donde $d_{max} = \displaystyle\max_{x\in[2,5]} \left|[\ln(x)]''\right| = \max_{x\in[2,5]} \left|\frac{-1}{x^2}\right| = \max_{x\in[2,5]} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Método de Simpson



① Fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

② Cota de Error: Si $I=\int_a^b f(x)\,dx$ y $I_S=\frac{(b-a)}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$ entonces

$$|I-I_S| \le \frac{(b-a)^5}{2880}\cdot d_{max}$$

donde $d_{max}=\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Ejm: Sea $f(x)=\ln(x)$. Aproxime $\int_2^5 \ln(x)\,dx$, utilizando la regla de Simpson. Calcule la cota de error.

① $$\int_2^5 \ln(x)\,dx \approx \frac{(5-2)}{6}\cdot\left(\ln(2)+4\ln\left(\frac{2+5}{2}\right)+\ln(5)\right) \approx 3.6568\ldots$$

② $$|I-I_S| \le \frac{(5-2)^5}{2880}\cdot d_{max} = \frac{3^5}{2880}\cdot\frac{3}{8} = 0.0316$$

$$d_{max}=\max_{x\in[2,5]}\left|[\ln(x)]^{(4)}\right| = \max_{x\in[2,5]}\frac{6}{x^4} = \frac{6}{2^4}=\frac{3}{8}$$