

DotA（V6.74c）中的数学原理

DotA 是一款基于暴雪《魔兽争霸 3》的游戏。游戏中所直接使用的数学计算虽不复杂，但结合的具体情况越多，对其进行分析就会越困难。本文对此作出初步的探索。

基本属性

DotA 中的每一个英雄，都有生命值（HP）、魔法值（MANA）、攻击力（按中文翻译看应该是 ATK，但实际英文却是 Damage，即物理伤害）、护甲、射程（分远程近战）这 5 个显然的基本属性，以及魔法抗性、生命回复速度、魔法回复速度、攻击速度、移动速度这 5 个非常重要而又不能在游戏界面中直接看到的基本属性。此外，还有攻击前/后摇、施法前/后摇、白天/夜晚视野、弹道这些不常考虑的基本属性等。

此外，每个英雄还有三种英雄属性，力量、敏捷、智力。这三种英雄属性并不直接起作用，而是转换为基本属性再起作用。

力量属性：每增加一点力量，增加 19 点生命值和 0.03 点/秒的生命回复速度。

敏捷属性：每增加一点敏捷，提升 1% 的攻击速度，每 7 点敏捷增加一点护甲。

智力属性：每增加一点智力，增加 13 点魔法值和 0.04 点/秒的魔法回复速度。

主属性：每个英雄会把力量、敏捷、智力三者中的某一个当作主要属性，每 1 点主要属性会额外再增加 1 点攻击力。



最后强调一下，为抓住主要矛盾，忽略次要矛盾，在不考虑英雄技能的前提下，直接影响一个英雄作战能力的基本属性是：生命值、攻击力、护甲、魔法抗性、攻击速度、移动速度。

护甲

两个英雄，不考虑技能的情况下，作战方式只有互 A（攻击）。这时产生的伤害都是物理伤害。再简化一下，一个英雄承受物理伤害的能力，仅与自身生命值（HP 变为 0 即为死亡）和自身护甲有关，甚至可以不考虑对方的攻击力与攻击速度等要素了。



护甲公式（当 $a \geq 0$ 时）：

$$dd = \frac{0.06 \times a}{0.06 \times a + 1} \times 100\%, a \geq 0$$

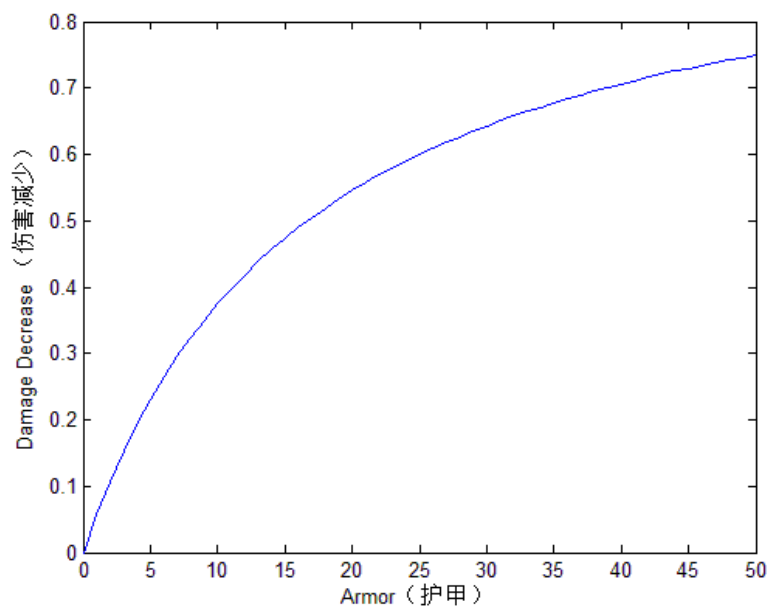
式中，dd 为伤害减少（Damage Decrease），a 为护甲值（Armor）。

使用 MATLAB 可以绘出曲线：

```
a=0:50;
```

```
dd=0.06*a./(0.06*a+1);
```

```
plot(a,dd)
```



显然，随着护甲的增加，伤害减少的曲线斜率在下降，因此伤害减少的收益会随着护甲的增加而减少。

然而，仅仅对此下结论还太早，因为伤害减少并不是一个直接决定英雄承受物理伤害能力的指标，因为它的数值含义还不够明显。

为简化思考中的变量，我们不考虑对手的攻击力，也不考虑自身的生命值，仅考虑：在自身拥有某个伤害减少的情况下，与伤害减少为 0（护甲为 0）相比，能够多承受几次攻击。

$$h = \frac{1}{1-dd} - 1$$

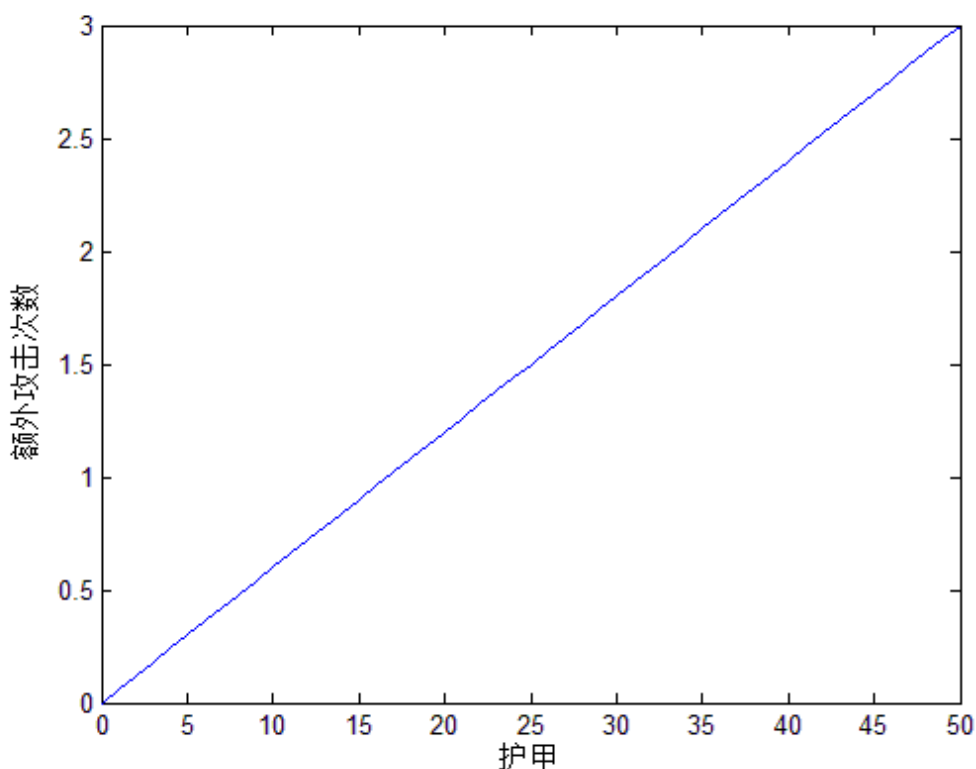
式中 dd 是伤害减少， $1-dd$ 就是剩余伤害， $\frac{1}{1-dd}$ 就是 1 次攻击变为几次攻击，所以 h 为额外攻击次数。

当伤害减少为 0（护甲为 0）时，显然，打一下，是一下，额外攻击次数为 0；当伤害减少为 50% 时，要造成等量伤害，打一下是不够的，要再打一下，额外攻击次数为 1。

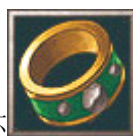
如果绘出额外攻击次数 h 和护甲 a 的曲线：

```
a=0:50;  
dd=0.06*a./(0.06*a+1);  
h=1./(1-dd)-1;  
plot(a,h)
```

我们会惊奇地发现：



这说明，随着护甲的提升，英雄低档物理伤害的能力是线性提升的。也就是说，不考虑

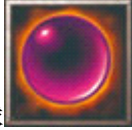



游戏在计算时的四舍五入，在 0 点护甲时买一个守护指环（+2 点护甲）和 10 点

护甲时买，对物理伤害的减免能力应该是一样的，尽管伤害减少的提高不同。

值得注意的是，这个 h （额外攻击次数），也可以看成是等效额外物理生命（Equivalent Extra Physical HP）百分比。在仅考虑物理伤害的情况下， $h=3$ （护甲为 50）意味着 4 下攻击，造成护甲为 0 时 1 下攻击相同的结果，因此，可以把拥有 50 点护甲，看成是等效的额外 300% 的物理生命值。由于护甲与额外攻击次数的关系是线性的，因此每增加 1 点护甲，相当于增加 6% 点等效额外物理生命（不考虑游戏中的四舍五入）。

举个例子：如果英雄已经拥有 1000 点 HP 和 10 点护甲，仅考虑提升承受物理伤害的能

力，是应该购买活力之球  (+250HP) 还是板甲  (+10 护甲)?

解：英雄此时具有的等效物理生命值为：

$$EPHP = 1000 + 10 \times 6\% \times 1000 = 1600$$

如果购买活力之球，则等效物理生命值增量为：

$$\Delta EPHP = 250 + 10 \times 6\% \times 250 = 400$$

增加了 400 点。

如果购买板甲，则等效物理生命值增量为：

$$\Delta EPHP = 10 \times 6\% \times 1000 = 600$$

增加了 600 点，因此该选择板甲。

当然，实际进行装备选择时往往答案是活力之球，这不仅仅是因为大家没有进行过上述计算，还因为实际游戏中还要考虑到魔法伤害、特定英雄技能、合成高级装备等多方面因素。不过，这里也充分展现了等效物理生命值（EPHP）这一概念的重要之处。

当护甲为负数时，计算公式会有变化。伤害减少（其实是增加，以负数表示）随护甲的变化为：

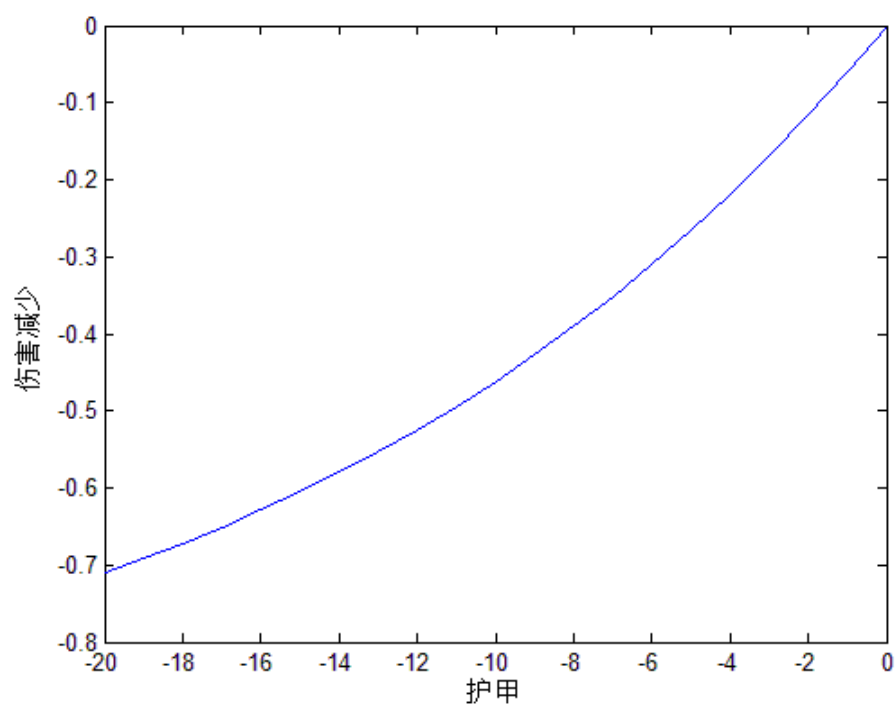
$$dd = \begin{cases} 0.94^{-a} - 1, & -20 < a < 0 \\ -71\%, & a \leq -20 \end{cases}$$

伤害减少随护甲的变化曲线：

$a = -20:0$;

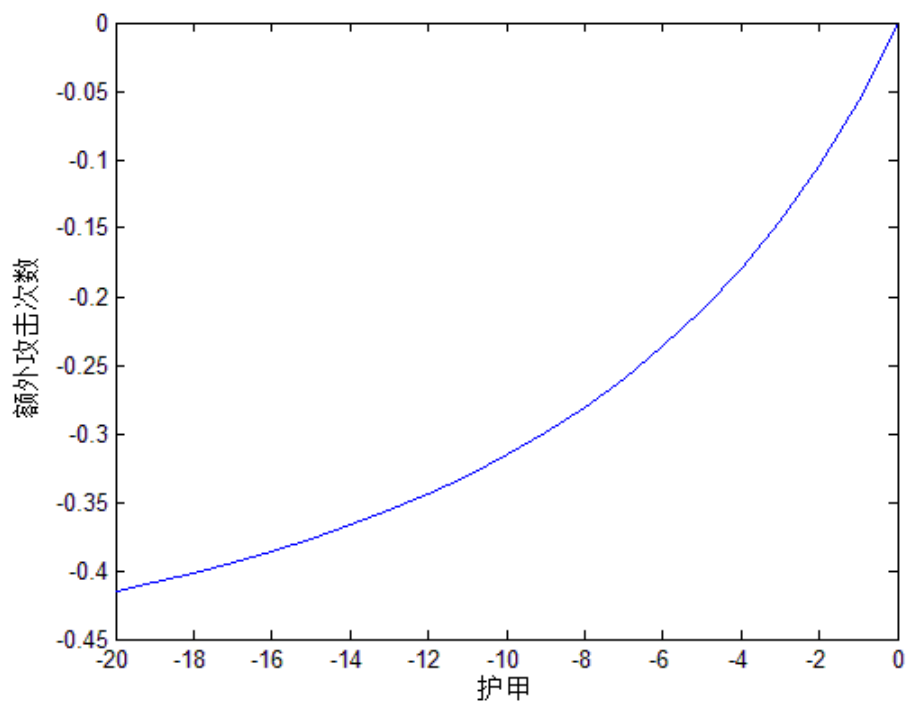
$dd = 0.94.^{-a} - 1$;

$\text{plot}(a, dd)$



额外攻击次数的计算公式和护甲为正时没有区别，变化曲线：

```
a=-20:0;
dd=0.94.^(-a)-1;
h=1./(1-dd)-1;
plot(a,h)
```





两图在 $a < -20$ 处的曲线都是平行于 x 轴的直线。

需要解释的是，伤害减少与额外攻击次数为负数时，数值的意义有了一些不同。伤害减少 100%，等价于物理免疫，百打不死；而伤害减少-100%，其实就是伤害增加 100%，1 次攻击相当于 2 次，额外攻击次数减少 0.5 次。

由两图中都可以看出，当护甲为负数时，继续减少护甲得到的收益都递减，到 $a < -20$ 时，甚至再减甲就完全没有效果。

减甲是 DotA 中某些物品、某些英雄技能的效果，也是一种非常重要的战术。目前仅考虑护甲和生命值的分析方法难以看清它的效果，我们到后面再来分析。

类护甲

除了护甲意外，常见的减少物理伤害的方法主要还有两种：圆盾、穷鬼盾

先锋盾的格挡和闪避护符、天堂之戟、蝴蝶的闪避。现在，我们对护甲已经有了一定程度的了解，因此，可以把它们等效为护甲来研究。

格挡

近战先锋盾有 70% 的概率格挡 40 点（远程 20 点）物理伤害。网上有一篇名为《先锋盾之极致研究，你了解的有多少？》的文章，从实验的角度，对当年的先锋盾做了深入的研究，得出了“先格挡，再计算护甲”的结论。我们在这个结论的基础上，开始计算。

假如敌人有 100 点攻击力，先格挡 40 点，则还剩 60 点，如果我方英雄有 50 点护甲（伤害减少 75%），则受到 $60 \times (1 - 75\%) = 15$ 点的物理伤害。计算过程，大致是这样，其中涉及敌方攻击力（EATK），我方护甲（A），这两个变量。如果没有格挡，要想只受到 15 点物理伤害，则需要伤害减少为 85%。由前面护甲公式（不考虑护甲为负），可得：

$$a = \frac{dd}{1 - dd} / 0.06$$

所以，伤害减少 85% 时，护甲值应该为 94.4。由此可得，格挡 40 点在这里相当于 44.4 点护甲值。

就是这么算，MATLAB 中编程如下：

```
EATK=[ 50 100 200 300];
A=[0 10 20 50]';
dd=0.06*A./(0.06*A+1);
damage=(1-dd)*(EATK-40);%实际受到的伤害
for it=1:4,
    %英文版DotA中格挡是block
    ddb(:,it) =1- damage(:,it) / EATK(it);
    %每一列除以对应攻击力，以计算有格挡的总伤害减少
```

```

end
ab=ddb./(1-ddb)/0.06;%等效总护甲
for it=1:4,
    ba(it,:)=ab(it,:)-A(it);
    %每一行减去对应护甲，以计算格挡等效多少护甲
end
ba

```

40 点格挡的等效护甲如下表：

EATK A \	50	100	200	300
0	66.7	11.1	4.2	2.6
10	106.7	17.8	6.7	4.1
20	146.7	24.4	9.2	5.6
50	266.7	44.4	16.7	10.3

格挡等效护甲可以一定程度上反应格挡的作用。显然，近战先锋盾的格挡随着敌方攻击力的提升而下降，随着己方护甲的提升而提升。总体而言，先锋盾挡小兵、大兵、外塔、中前期 DPS、后期非物理 DPS（攻击力 100 多点）的作用还是强于板甲的，但到后期 DPS 装备起来后，作用就不大了，不如直接加护甲。

以上分析，都是在先锋盾的格挡已经生效的情况下计算的，因此以上表格中的格挡等效护甲应该再乘以 70% 才是统计平均值。

如果出多个先锋盾，效果并不能叠加，但是格挡的概率会上升。两个先锋盾的格挡概率是 $70\% + 30\% \times 70\% = 91\%$ ， n 个是 $1 - (1 - 70\%)^n$ 。提升作用并不明显。

计算远程先锋盾的 20 点格挡过程类似（把代码中的 40 改成 20），结果如下：

EATK A \	50	100	200	300
0	11.1	4.2	1.9	1.2
10	17.8	6.7	3.0	1.9
20	24.4	9.2	4.1	2.6
50	44.4	16.7	7.4	4.8

格挡等效护甲随敌方攻击力和己方护甲的变化规律与上表类似，但总体效果更差。上表中敌方攻击力 100 的那一列，在下表中左移到了 50 那一列；200 那一列左移到了 100；估计 300 那一列左移到了 150（表中并未显示）。因此，远程英雄出先锋盾，其格挡能力，在前期相当于板甲，中期相当于锁子甲，大后期还不如守护指环，非常不合算。

此外，上表也可以看成是近战穷鬼盾的格挡能力。可见穷鬼盾在前期（对线期，敌方英雄攻击力在 50 到 100 之间）的确非常不错，堪比 1400G 的板甲；然而过了对线期后，就可以考虑卖掉了。

对于远程穷鬼盾（格挡 10 点伤害），等效护甲如下：

EATK A	50	100	200	300
0	4.2	1.9	0.9	0.6
10	6.7	3.0	1.4	0.9
20	9.2	4.1	1.9	1.3
50	16.7	7.4	3.5	2.3

这个表和格挡 20 的表相比，有类似于格挡 20 与格挡 40 的规律。总之，效果更差，而



且，穷鬼盾 550G，对物理伤害的减免效果往往还不如同样 550G 的锁子甲。

因此，远程英雄完全没有必要考虑圆盾、穷鬼盾、先锋盾这 3 样装备，不仅初始效果不佳，而且在过了对线期后，格挡能力会迅速下降；近战英雄可以考虑在对线期出穷鬼盾或中期以前出先锋盾，但终究到了后期还是会不如板甲。

闪避

不考虑英雄技能、金箍棒的克敌机先等其他复杂因素，闪避（Evasion）相当于把承受物理攻击的能力，按比例向上提升。伤害减少有闪避后变为：

$$dde = 1 - (1 - eva)(1 - dd)$$

额外攻击次数：

$$h = \frac{1}{1 - dd} \times eva - 1$$

如果等效为护甲，其思路与格挡类似。

```
a=[0 10 20 30 50];
```

```
eva=[0.25 0.35]';
```

```
dd=0.06*a./(0.06*a+1);
```

```
dde=1-(1-eva)*(1-dd); %计算闪避后的伤害减少
```

```
ae=dde./(1-dde)/0.06; %计算闪避后的伤害减少等效护甲
```

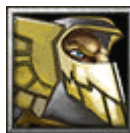
```
ae-[a;a] %减去原护甲，即闪避的等效护甲
```

闪避通常有 25%和 35%两个档次，其等效护甲如下：

	0	10	20	30	50
25%	5.6	8.9	12.2	15.6	22.2
35%	9.0	14.4	19.7	25.1	35.9

由上表可得两个结论：一是闪避的作用随着己方护甲的提升而（线性）提升，在护甲较高时（大于 20 点），闪避的性价比高于护甲（10 点护甲 1400G、25%闪避 1800）。二是蝴蝶的闪避（35%）比闪避护符或天堂之戟（25%）的效果强，且护甲越高，强得越多（10 点护甲时强了 5 点，30 点护甲时强了 10 点）。

具体说来，仅考虑提高承受物理伤害的能力，龙骑



该出蝴蝶



而不

是强袭装甲



；德鲁伊



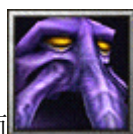
的小熊需要强袭装甲，而小熊只要个闪避护符就有更好的效果了。

其他

其他具备物理伤害减免的就是英雄技能了，如船长



的船、虚空假面



的回到过去等。计算方法类似闪避，如虚空假面的回到过去这个技能的等效护甲可参考闪避护符的那一行。

需要在最后强调的是，概率性的伤害减免能力，虽然其统计平均是可以等效为护甲的，但实际游戏中，攻击总是一下一下的，要么格挡了、闪避了，要么没有。因此一场大战打下来，如果能进行数据统计，会发现这类概率性的伤害减免要么比计算出的等效护甲效果好，要么效果差，往往不能真的“等效”。

另外，敌方英雄攻击中往往含有额外伤害，如暴击、连环闪电等，护甲对此往往是无力的，而闪避却有降低触发概率的作用（后面有详细的表格）。因此，在敌方英雄的攻击含有额外伤害时，闪避提升的等效物理生命值强于上面的计算值。

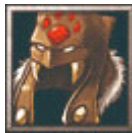
魔法抗性

魔法抗性（Magic Resistance），简称魔抗，是英雄承受魔法伤害的能力。每个英雄本身

只受魔法伤害的 75%（这似乎来源于英雄护甲的特性），如果再有流浪法师斗篷



（+15 魔抗）或挑战头巾



（+30 魔抗），承受魔法伤害的百分率应该是


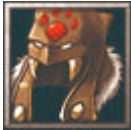


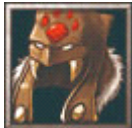
$75\% \times (1 - 15\%)$ 或 $75\% \times (1 - 30\%)$ 。斗篷与头巾一起出现，应该是头巾起作用；两个头巾

应该只能算一个。某些英雄的技能也能起类似作用，例如敌法师



的法力护盾，满

级可抵挡 50% 的魔法伤害，若再出个挑战头巾，承受的魔法伤害应该是 $75\% \times (1 - 30\%) \times (1 - 50\%)$ 。

	无				 + 
承受魔法伤害	75%	63.8%	52.5%	37.5%	26.3%
300 点魔法伤害	225	191	158	113	79
1000HP 能受几次 300 魔法伤害	4	5	6	8	12

上表中，之所以特别计算 300 点魔法伤害，是因为一般一个英雄技能的满级魔法伤害大概就是 300；而 1000HP 则是一个英雄该考虑出魔抗或者护甲的时候。

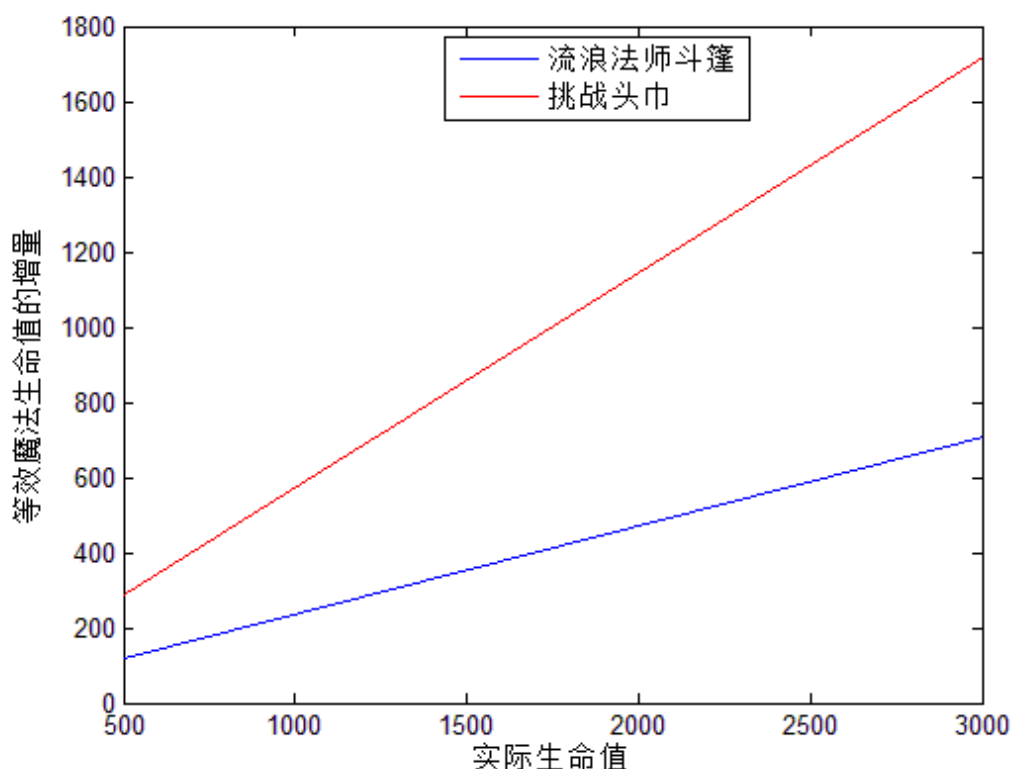
类比于护甲，我们还可以提出一个概念：等效魔法生命值（Equivalent Magical HP）。通过当前生命值（HP）和承受魔法伤害的比率（Magic Damage Ratio）来计算：

$$EMHP = \frac{HP}{MDR}$$

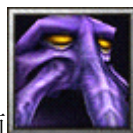
大部分英雄只需要考虑斗篷和头巾，因此，我们计算一下出斗篷，和出头巾相比，对 EMHP 的增量。

```

HP=500:3000;
EMHP=HP*4/3;
EMHP15=EMHP/(1-0.15);%流浪法师斗篷
EMHP30=EMHP/(1-0.3);%挑战头巾
plot(HP,EMHP15-EMHP,'B',HP,EMHP30-EMHP,'R');
```



显然，二者对 EMHP 的增量是随实际生命值线性上升的，头巾比斗篷斜率大、增长快。斗篷 550G，头巾 2150G，如果不考虑头巾的回血，那么斗篷的性价比是比头巾高的（即使有 4000HP，EMHP 的增量差距也不会有价格上的 3 倍这么多）。但如果考虑后期魔法伤害的增加量有限（绝大多数英雄 16 级后魔法输出就不再增加），这个差距是可以接受的，因为挑战比斗篷多挡的几下技能，很有可能是死或生的区别。



值得一提的是，船长的船、虚空假面的回到过去等，不仅具有物理伤害减免的能力，还可以减免魔法伤害。计算上类似斗篷。

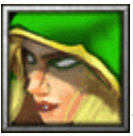
物理输出（攻击力与攻击速度）


不考虑敌方英雄的护甲与类护甲的物理伤害减免，衡量我方物理输出的指标为 DPS (Damage per Second)。如果不考虑额外伤害，DPS 的计算公式如下：


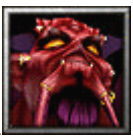
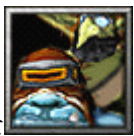
$$DPS = ATK \times \frac{1}{AT} = ATK \times \frac{1 + IAS\%}{BAT}, \quad IAS \leq 400$$

式中，ATK 是物理攻击力， $\frac{1}{AT}$ 是每秒攻击次数，AT 是攻击间隔 (Attack Time)，BAT 是基础攻击间隔 (Basic Attack Time)，IAS 是攻击速度的提升量 (Increased Attack Speed)。

基础攻击间隔 BAT 是一个英雄的基本属性，绝大多数英雄都是 1.7s，只有少数英雄例

外（敌法师1.45s、风行者1.5s 等）。而且，绝大多数（比前一句更多）

英雄的 BAT 不会发生改变，只有少数变身系英雄例外（巨魔战将远程 1.7s 近战

1.55s，灵魂守卫远程 1.6s 近战 1.5s，还有狼人、炼金术士等）。

因此，在绝大多数情况下，BAT 可以看作是一个常数。

作为一个常数，BAT 在性质上不会影响分析的结果，而在计算上则会有一些麻烦，所以我把它放到等号左边，上式变为：

$$DPS \times BAT = ATK \times (1 + IAS\%)，IAS \leq 400$$

以下对 $DPS \times BAT$ 这个量，简称为“乘间秒伤”。

在实际的游戏中，游戏者对秒伤 DPS 或乘间秒伤的数值往往并不感兴趣，但是却经常去思考出某装备、学某技能对 DPS 的提升。而 DPS 与乘间秒伤是等比关系，因此可以把乘间秒伤作为物理输出的性能指标，

对乘间秒伤求 ATK 和 IAS 的偏导数，会发现对 ATK 的偏导数是 $(1 + IAS\%)$ 而对 IAS 的偏导数是 ATK 。因此，IAS 不变时，ATK 的增加对乘间秒伤的提升是 $\Delta ATK \times (1 + IAS\%)$ ；ATK 不变时，IAS 的增加对乘间秒伤的提升是 $ATK \times \Delta IAS\%$ ；IAS 和 ATK 都改变时，乘间秒伤的变化是 $\Delta ATK \times (1 + IAS\%) + ATK \times \Delta IAS\% + \Delta ATK \times \Delta IAS\%$ 。

从式中可以看出，乘间秒伤的绝对值的提升，不仅与 ATK 和 IAS 的增量有关，还与当前的 ATK 和 IAS 有关。

若某英雄的乘间秒伤是 $ATK \times (1 + IAS\%)$ ，购买某装备后，攻击力增加了 ΔATK ，攻击速度增加了 ΔIAS ，则乘间秒伤变为 $(ATK + \Delta ATK) \times (1 + IAS\% + \Delta IAS\%)$ ，后者与前者

的比值为 $\frac{ATK + \Delta ATK}{ATK} \times \frac{1 + IAS\% + \Delta IAS\%}{1 + IAS\%} = \left(1 + \frac{\Delta ATK}{ATK}\right) \times \left(1 + \frac{\Delta IAS\%}{1 + IAS\%}\right)$ 。攻击力

增量与增加前攻击力的比值 $\frac{\Delta ATK}{ATK}$ （后简称增攻比），和攻击速度增量百分比与增加前攻击

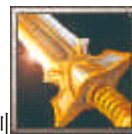
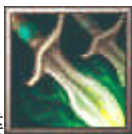
速度百分比加一的比值 $\frac{\Delta IAS\%}{1 + IAS\%}$ （后简称增速比），这两个参数的相对大小，可以用来衡

量攻击力和攻击速度，谁的增加对乘间秒伤的提升更大。

例如，一个有 150 点攻击力和 100 点攻击速度的英雄，如果可以增加 60 点攻击力或 60 点攻击速度，应该如何选择？

增攻比为 $\frac{60}{150} = 0.4$ ，增速比为 $\frac{60\%}{1+100\%} = \frac{60}{100+100} = 0.3$ 。增攻比大与增速比，因此该选择 60 点攻击力。

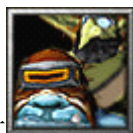
又例如，一个有 150 点攻击力和 100 点攻击速度的英雄，如果可以选择增加 60 点攻击



力和 60 点攻击速度（蝴蝶），或者增加 300 点攻击力（圣剑），该当如何？

前者增攻比 0.4，增速比 0.3，乘间秒伤增率为 $(1+0.4) \times (1+0.3) = 1.82$ ；后者增攻比为 $\frac{300}{150} = 2$ ，乘间秒伤增率为 $(1+2) \times 1 = 3$ 。因此后者对乘间秒伤的提高远胜于前者。

乘间秒伤的增率，在 BAT 是常数的情况下，也就是 DPS 的变化倍率。如果乘间秒伤不变（攻击力与攻击速度不变），BAT 改变，也可以计算出 DPS 的变化倍率。



例如，炼金术士的 BAT 本来是 1.7s，但在大招的持续时间内，可依大招等级变为 1.45s、1.3s、1.15s。这 1.7s 与 3 个值分别相比，得 1.172、1.308、1.478。注意 BAT 是从攻击速度的那一块提出来的，因此开关大招的变化相当于获得了等效于 0.172、0.308、0.478 增速比的道具。

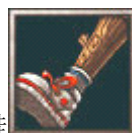
IAS=[30 50 100 150];

BAT=[1.45 1.3 1.15];

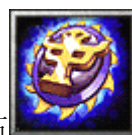
$(100+IAS) \cdot (1.7./BAT-1)$

当前攻速	大招级数	等效额外增加攻速		
		1 级大招	2 级大招	3 级大招
30		22	40	62
50		26	46	72
100		34	62	96
150		43	77	120

这样，炼金术士 BAT 的变化就换算成了额外增加的攻击速度。从表中可以看出，增量



非常可观。当前攻速为 50 时（大概 6 级有动力鞋），放 1 级大招相当于多了一个



动力鞋；当前攻速为 100 时（大概 11 级有动力鞋加振奋宝石），放 2 级大招相当



于多了 1 个蝴蝶的攻击速度;当前攻速为 120 时(大概 16 级有动力鞋和强袭装甲表中未列),放 3 级大招相当于多了两个振奋宝石。



另外需要强调的是,对于 BAT 低于 1.7s 而又不改变的英雄,如敌法师是 1.45s,与普通的英雄相比,在相同的乘间秒伤下,二者之间也有上表中“1 级大招”那一列的差距。但这并不意味着敌法师这类英雄就应该偏重于购买提高攻击速度的装备,因为与他自己相比,BAT 不变,DPS 正比于乘间秒伤,他提高攻击力与攻击速度应该是等效的。(敌法师应该优先提高攻击速度的理由在于反馈,详见后。)

乘间秒伤的增率 $\left(1 + \frac{\Delta ATK}{ATK}\right) \times \left(1 + \frac{\Delta LAS\%}{1 + LAS\%}\right)$ 在 BAT 不变的情况下,就等于 DPS 的

增率。从式中还可看出,单纯增加某一项,不如同时增加两项,如 $1.1 \times 1.1 = 1.21 > 1.2$, $1.2 \times 1.2 = 1.44 > 1.4$, 这个结论可以严格地从均值不等式导出。

以上介绍了如何计算、比较乘间秒伤的绝对增量与相对增量的方法。这些方法都很简单,在游戏中稍花一点时间就可心算完成。但是必须注意的是,这里不仅没有考虑敌方英雄的格挡(敌方格挡的效果可随己方攻击力的提升而下降),也没有考虑己方英雄的额外攻击伤害。

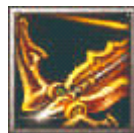
额外攻击伤害

额外伤害,大致分为暴击、击晕、连环闪电、反馈、减甲这五类。很多英雄技能有额外攻击伤害,这里仅从道具方面分析。英雄的相关技能的分析,方法类似。

暴击



水晶剑加 35 点攻击力,有 20% 的暴击概率和 1.75 的暴击倍率。



大炮(暴雪弩炮)加 81 点攻击力,有 25% 的暴击概率和 2.5 的暴击倍率。

发生 2.5 倍暴击相当于在 1 击中额外增加了 1.5 倍的攻击力,如果考虑 25% 的概率,相当于每 1 击都额外增加了 $1.5 \times 0.25 = 0.375$ 倍的攻击力。

$atk = [50 \ 100 \ 200 \ 300];$

$atk1 = atk + 35 + (atk + 35) * 0.75 * 0.2$ %水晶剑

$atk2 = atk + 81 + (atk + 81) * 1.5 * 0.25$ %大炮(暴雪弩炮)

攻击力	50	100	200	300
加水晶剑	85+13	135+20	235+35	335+50
加大炮	131+49	181+68	281+105	381+143

如果有 200 点攻击力，购买一个大炮，表面上看攻击力变为 281，实际上，从统计平均的角度看，相当于还额外增加了 105 点攻击力！

从表中或公式中都可以看出，暴击的效果随着英雄攻击力的提升而增长。提升攻击力，会使乘间秒伤的绝对增量提升更多，但相比于没暴击的情况，增攻比、乘间秒伤增率却不变，后面与减甲一起分析。

击晕

击晕道具有碎骨锤（碎颅锤）和金箍棒。但前者击晕没有伤害，

这里不考虑；而后者的合成配件标枪，虽无眩晕，但有伤害。

金箍棒加 88 点攻击力，15 点攻击速度，和克敌机先（攻击不会被闪避）技能与猛击（35% 的概率造成 100 点额外伤害并眩晕 0.01 秒）技能。按统计平均算，相当于每一击增加了 35 点的额外伤害。

近战英雄的猛击技能是法术攻击魔法伤害，无法伤害魔免单位，但能击晕魔免单位；远程英雄的猛击技能是英雄攻击普通伤害，伤害无视魔免算护甲，无法击晕魔免单位。

对于远程英雄，金箍棒相当于每一击增加了 35 点额外攻击力，可以与暴击那张表相比。不考虑克敌机先技能，它不仅不如大炮，而且差距会越来越大。

对于近战英雄，金箍棒相当于每一击增加了 35 点额外魔法伤害，不能直接与暴击比较，而应该先乘以敌法英雄魔法伤害承受百分比，再除以敌方英雄物理伤害承受百分比，才能换算回等效额外攻击力。在这两个参数都不明的情况下，只能说大概额外魔法伤害与其等效额外攻击力的数值差不多，差距就是两个百分比的比值。

连环闪电

拥有连环闪电的道具是漩涡和雷神之锤。

漩涡加 24 点攻击力和 25 点攻击速度，击中目标后有 25% 的概率放出 120 点伤害的连环闪电跳跃 4 次。雷神之锤加 24 点攻击力和 80 点攻击速度，击中目标后有 25% 的概率放出 160 点伤害的连环闪电跳跃 3 次，冷却时间 1 秒。

不考虑跳跃，漩涡每一击有 30 点额外魔法伤害，雷锤有 40 点（考虑冷却时间会略少些）。换算方法与近战金箍棒相同。

反馈

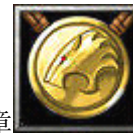
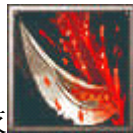


有反馈的物品有 1 级散失之刃和 2 级散失之刃。其中，1 级散失之刃在击中



目标的同时会减少目标 20 点魔法和等量伤害, 2 级则是 36 点。这种伤害与敌法师的法球技能类似, 都是英雄攻击普通伤害, 伤害无视魔免算护甲, 可以看做额外攻击力。

减甲

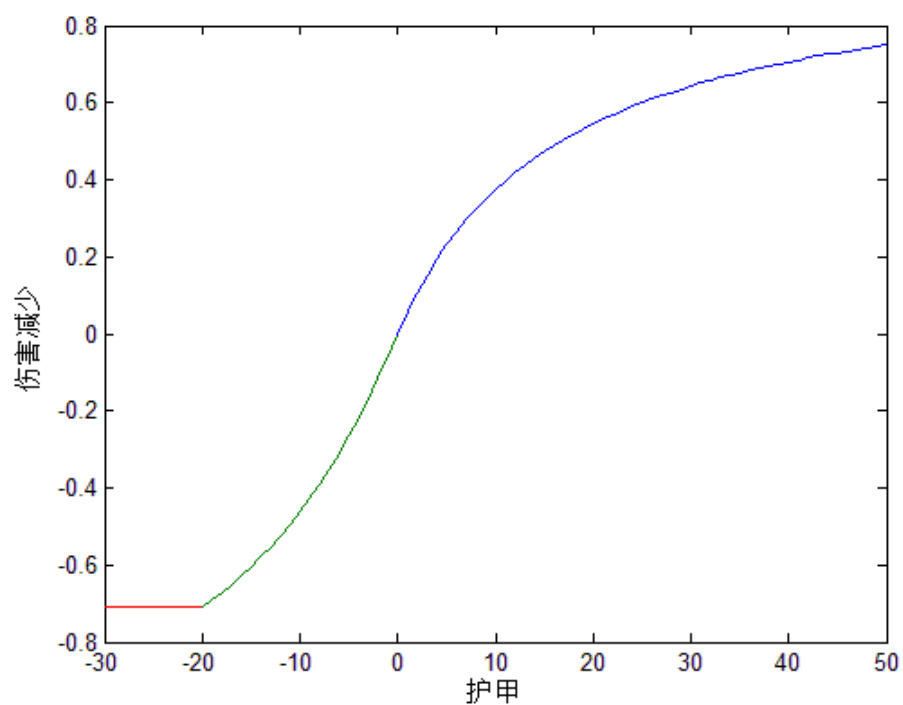


能够减甲的道具具有黯灭、强袭装甲、勇气勋章。以下着重介绍黯灭。

黯灭加 60 点攻击力, 攻击目标后, 使目标减少 6 点护甲, 持续 5 秒。强袭减少 900 范围内非友方单位 5 点护甲。勇气勋章主动点击使用, 可使目标 (及自己) 减少 6 点护甲, 持续 7 秒。

根据前面对护甲的分析, 在护甲为正的情况下, 护甲越高, 提升伤害减少就越难, 但不计舍入, 每点护甲都使额外攻击次数线性提升, 每点护甲提高 6% 的等效物理生命值。减甲与加甲情况类似, 但由于减甲能把护甲由正变负, 因此必要把前面的图再画一下。

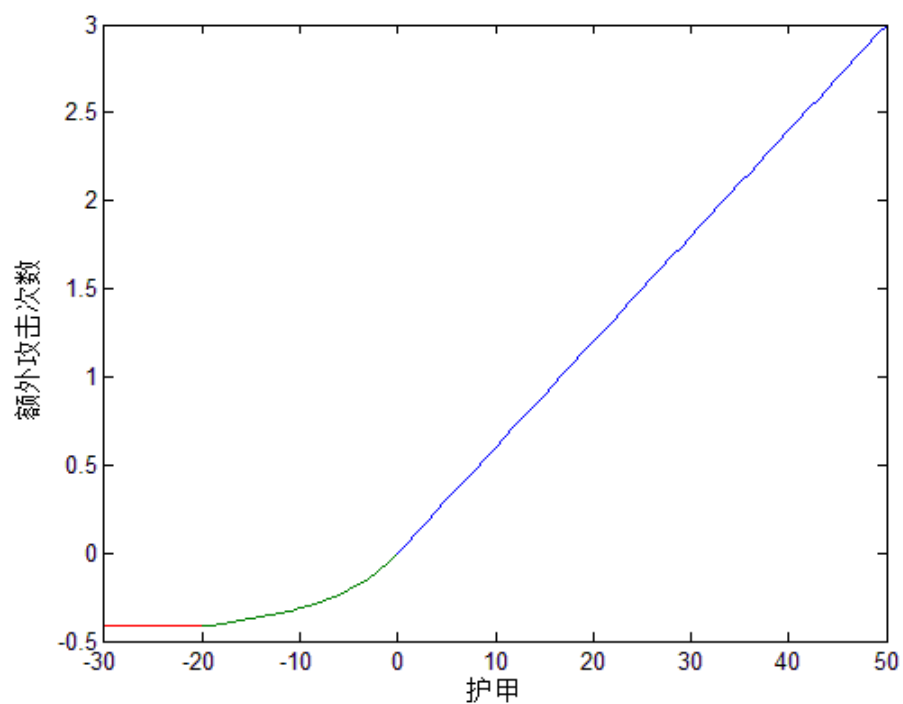
```
a1=0:50;  
a2=-20:0;  
a3=-30:-20;  
dd1=0.06*a1./(0.06*a1+1);  
dd2=0.94.^(-a2)-1;  
dd3=-0.71+a3.*0;  
plot(a1,dd1,a2,dd2,a3,dd3)
```



图中可见，护甲越接近 0，减甲对伤害减少的减少效果越好，无论正负；护甲越高，减甲对伤害减少的减少效果越差；护甲减到-20，再减无益。

（接上一段程序，否则无效。）

```
h1=1./(1-dd1)-1;
h2=1./(1-dd2)-1;
h3=1./(1-dd3)-1;
plot(a1,h1,a2,h2,a3,h3)
```



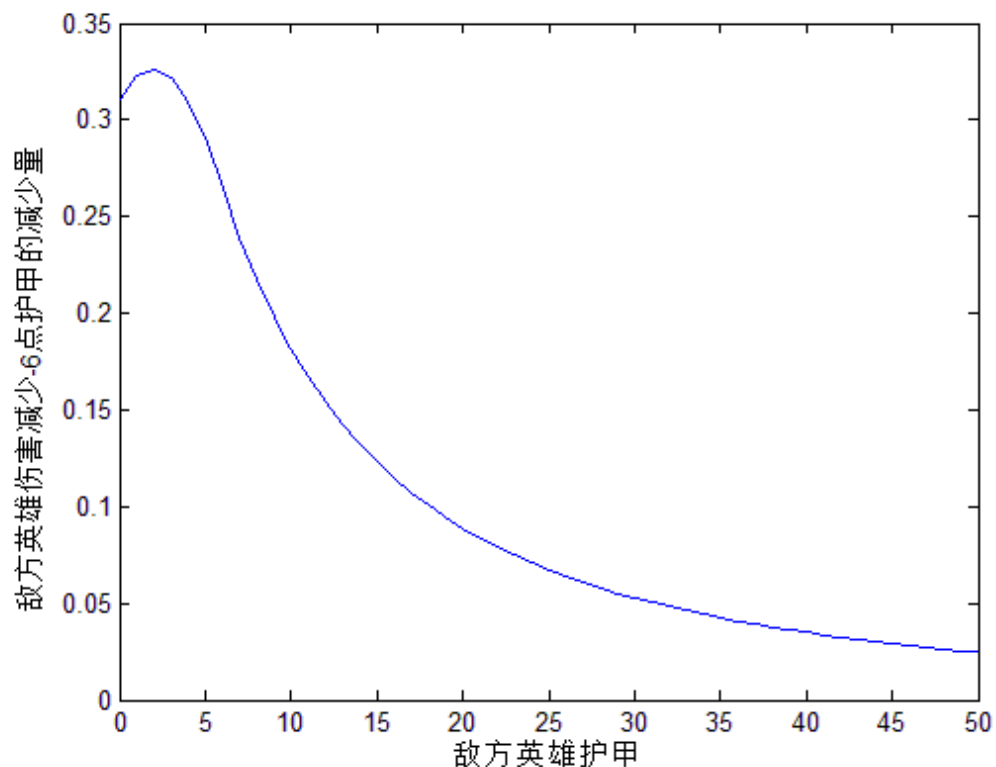
额外攻击次数在护甲为正时随护甲线性减少，而在护甲为负数时则更慢速地非线性减少。

两张图相同的结论是，护甲减到 0 附近就差不多了，再费力地继续减效果不佳。而不同结论则是在护甲为正时，究竟效果是不是线性的。

如果只考虑一次物理攻击的情况，那么就该使用伤害减少这个概念。

黯灭减少 6 点护甲后，敌方的伤害减少变化：

```
a=0:50;
dd=0.06*a./(0.06*a+1);
a1=a-6; %中了黯灭后
for i=1:51,
    if a1(i)<0
        dd1(i)=0.94^(-a1(i))-1;
    else
        dd1(i)=0.06*a1(i)/(0.06*a1(i)+1);
    end
end
plot(a,dd-dd1)
```



这个图与护甲与伤害减少那张图的结论相同。由于减甲效果还与我方攻击力有关，应该是一簇曲线或三维曲线，下改为表的方式显示，在不同己方攻击力、不同敌方护甲下，黯灭的减 6 点护甲相当于多少点额外攻击力。

```
clear;
ATK=[50 100 200 300];
a=[0 6 12 20 30];
dd=0.06*a./(0.06*a+1);
```

```

dd1=0.06*(a-6)./(0.06*(a-6)+1);
dd1(1)=0.94^(6)-1; %修正护甲为负
ed=(dd-dd1)'*(ATK+60); %黯灭+60攻击后，减甲带来的额外物理伤害
%把ed按照原护甲a，换算回攻击力
[m,n]=size(dd); %算a的大小
for i=1:n,
    eATK(i,:)=ed(i,:)/(1-dd(i));
end
ed,eATK

```

减甲带来的额外物理伤害列表如下：

我方攻击力(+黯灭) 敌方护甲	50(+60)	100(+60)	200(+60)	300(+60)
0	34	50	81	112
6	29	42	69	95
12	16	25	40	55
20	10	14	23	32
30	6	8	13	19

把上表换算回额外攻击力：

我方攻击力(+黯灭) 敌方护甲	50(+60)	100(+60)	200(+60)	300(+60)
0	34	50	81	112
6	40	58	94	130
12	29	42	69	95
20	22	31	51	70
30	16	24	38	53

由于护甲为负数以后，减甲的收益会降低，所以第一行会比第二行小；而当护甲始终为正时，减甲6点，换算成额外攻击力后，数值不仅会随敌方英雄护甲增加而减小，还随己方攻击力的增加而增加；与大炮的暴击相比，黯灭的效果略差，但比其它三种强。

网络传言：护甲越低，越应该提升护甲；护甲越低，被减甲的效果越可怕等等——这里都给出了一定的理论解释。不过需要纠正的是，敌方英雄的护甲被减到0就可以了，再继续减甲效果反而会相对降低。

这样是按照单次攻击的情况来算的，如果敌方英雄被黯灭从满血打到死，那么无论其护甲多少，黯灭都减少了相当于其生命值36%的等效物理生命值，也就是攻击次数越多，减甲效果越来越与敌方英雄的护甲无关。

综合比较

额外伤害的这5类，按触发类型可分为两大类。暴击、击晕、连环闪电属于概率触发类

额外伤害，而反馈、减甲属于稳定触发类额外伤害。

对于概率触发类，往往有人认为，攻击速度越大，单位时间内的触发次数就越多，提升攻击速度比提升攻击力更有效。但这不完全正确。从统计平均的角度看，每一击增加的额外伤害是不随攻击速度而改变的。从概率触发的角度看，单位时间内只攻击一下，也有可能触发，一旦触发则会增加非常多的额外输出，若不触发，则会比统计平均少，输出不稳定，但常常有惊喜；提高攻击速度，只是让单位时间内的输出，更加趋近于统计平均，更稳定一点而已，提升攻击速度并没有提高等效额外攻击力。

闪避对概率触发类额外伤害的触发概率有影响。

```
eva=[0.25 0.35];
p=[0.1 0.15 0.2 0.25 0.35];
%有闪避后，等效概率变为
pe=(1-eva) '*p
```

	10%	15%	20%	25%	35%
25%	7.5%	11.3%	15%	18.8%	26.3%
35%	6.5%	9.8%	13%	16.3%	22.8%

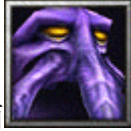
此外，这 5 类额外伤害，按照与攻击力的关系，还可分为两大类。暴击、减甲的效果会随着己方攻击力的提升而提升，击晕、连环闪电、反馈则不会。从上面的数据可以看出，减甲与暴击对 DPS 的提升，比后三种强，而且随着己方攻击力提升，强得越来越多。而暴击与减甲都是随着己方攻击力的提升而线性提升，1 对 1 情况下是可以等效的；而减甲的效果为团队共享，暴击则仅对技能拥有者一人有效。另外，当减甲与暴击同时存在时，减甲（也可包括其它三种）带来的等效额外攻击力不计入暴击，而暴击带来的等效额外攻击力，则可以计入减甲的等效额外攻击力中。

在计算增攻比 $\frac{\Delta ATK}{ATK}$ 时，减甲与暴击带来的等效额外攻击力随着己方攻击力的提升而线性提升，因此约掉了，无论是否考虑减甲、暴击，增攻比不变。因此，已经具有暴击或减甲能力的英雄，并不是要优先提升攻击力，而是与普通英雄一样要比较增攻比和增速比。而击晕、连环闪电、反馈则不同。在已经具有这三种效果之一（或之二、连环闪电与反馈不能同时存在）后，实际 ATK 比显示值偏高。例如，英雄拥有 1 级散失之刃，则相当于拥有 20 点额外攻击力，显示值计算的增攻比 $\frac{\Delta ATK}{ATK}$ ，略大于实际增攻比 $\frac{\Delta ATK}{ATK + 20}$ 。在权衡应该提高攻击力还是攻击速度，即比较增攻比和增速比的大小时，增攻比偏高就相当于增速比偏低，所以拥有者 3 种技能的英雄应该比普通英雄多提高一些攻击速度。如果计算时使用实际增攻比，则它与增速比可以正常比较。

虽然黯灭、暴击的效果强于击晕、连环闪电、反馈，但后三者还带有其它效果。击晕可以打断传送、施法、攻击并带来额外输出机会，连环闪电往往对多个单位起作用，反馈会损耗敌法单位的魔法值，这些都会对战局带来难以估量的影响。这些影响取决于触发频率（而

不是统计平均），而触发频率会因为攻击速度的提升而提高，这才是敌法师





空假面这类英雄应该优先提高攻击速度而不是攻击力的真正理由。

总体而言，不能说哪种最强，而是要看敌我双方的阵容、装备，以及对自己的定位，团战的打法等，来考虑如何选择装备。

性价比

性价比是 DotA 中使用频率最高的性能指标。它来源于生活，在 DotA 中也的确有一定的参考价值，但是存在严重的滥用趋势。具体表现为，什么都是性价比！说某个物品适合某个英雄，是性价比高；说某个技能前期升几级，还是性价比高……我个人无论是在生活中还是在游戏里，都不常用这个指标，因为深入分析会发现，这个指标不仅很难计算，而且往往不能作为道具选择的唯一标准。

把 DotA 中所有单纯增加攻击力的道具列表比较：

道具	攻击之爪	阔剑	大剑	秘银锤	恶魔刀锋	圣者遗物	圣剑
攻击力	9	18	21	24	46	60	300
价格（G）	450	1200	1400	1600	2400	3800	6200
性价比	0.02	0.015	0.015	0.015	0.019	0.016	0.048

显然，前三甲应该是圣剑、攻击之爪、恶魔刀锋。但这又能说明什么呢？要说被购买的频率，虽然没有在世界范围内做过统计，我目测圣者遗物的被购买频率应该比恶魔刀锋高，秘银锤也远超同性价比的阔剑、大剑，这主要是它们的可合成道具决定的，与性价比没有多大关系。

性价比中的“价”，就是道具的价格，这是确定的；性价比中的“性”，则是道具的性能，这往往难以量化。以上那张表是可以列出的唯一一张比较长的表，其它的性能，例如攻击速度、护甲等，都太短了，只有两三个道具。DotA 中比较重要的道具，大多都会增加英雄的多方面能力，很多甚至还附带特殊技能。此外，DotA 中几乎每个英雄（只有唯一一个例外



）都只有 6 个格子来放道具。因此，性能的量化有 3 大难题：

- 1.多属性难于统一量化标准；
- 2.道具附带的技能值多少钱；
- 3.省一个格子值多少钱。

在我看来，这 3 大难题几乎是不可解决的。不过，DotA 的作者 Icefrog 似乎已经解决了，因为他给出了所有道具的性能和价格。与其相信，Icefrog 是精通经济学原理的顶尖达人、创造出了很多秘密公式来量化性能，我更相信他是一个优秀的 DotA 道具市场的观察者，通过统计与分析来调整性能和价格。一次次的版本更新，都显示着他对性能与价格的调整；每一次改动的反复，都代表他推翻了自己原先的想法。

性价比的难于计算，直接导致其应用领域狭窄。只有在确定需要某种属性时，才能忽略其它属性，计算性价比。例如，敌方物理输出强大，我方应该考虑物理防御时，是选择提高生命值、护甲、格挡、闪避还是其他，就需要对等效物理生命值或等效护甲这些指标进行计算，才可以联系价格进行比较，真正使用性价比。而如果局势的发展需要某个道具的技能，



例如原力法杖的弹射，而这个道具的价格在可以接受的范围内，那就攒钱购买吧。与其纠结于性价比，不如多补几个刀。

本文提出的诸多量化的性能指标，可以看作对性价比的“性”的量化尝试，也可以认为是为了绕过性价比这一模糊概念、为装备选择直接提供数据支持的努力。

结论与展望

本文对 DotA 中一些基本属性进行了分析，或借鉴或原创地提出了一些概念和简单的心算方法，为游戏中进行装备选择提供了一定的理论依据和数据支持。

限于篇幅和精力，本文并未分析 DotA 中的每一个道具和每一个英雄技能，还有英雄技能间、技能与道具间、道具与道具间的配合效果等，不过方法都已经介绍了。

DotA 这个游戏，绝大部分内容是确定的，除了少量 BUG 以为，只有两个方面为游戏带来了不确定性：伪随机数和游戏者。遗憾的是，这里并未对游戏中的伪随机数进行深入分析（水平不足），也未对游戏者的行为规律作出研究（超出了数学的范畴）。

概念解释

额外攻击次数：相对于护甲为 0 的情况下攻击 1 次的伤害，在护甲为 n 时，为达到等量伤害，要对目标额外攻击多少次。

等效额外物理生命百分比：目标在护甲为 n 时，与护甲为 0 相比，其承受物理伤害的能力，相当于额外获得了相对于原生命值多少倍的生命值。其数值就是额外攻击次数百分数化。

等效额外物理生命值：目标在护甲为 n 时，与护甲为 0 相比，其承受物理伤害的能力，相当于额外获得了多少点生命值。其数值等于额外物理生命百分比乘以实际生命值。

等效物理生命值：目标在护甲为 n 时，其生命值相当于护甲为 0 时的多少点。其数值等于等效额外物理生命百分比加原生命值。

等效护甲：格挡、闪避等类护甲的效果，其抵挡物理伤害的能力等价于多少点护甲。

等效魔法生命值：目标承受魔法伤害的能力，相当于多少点生命值的小兵（魔法抗性为 0）。

秒伤（DPS）：每秒可以造成多少物理伤害。

乘间秒伤：秒伤乘以英雄的攻击间隔。

乘间秒伤增量：乘间秒伤随着攻击力或攻击速度的增加而产生的数值增量。

乘间秒伤增率：乘间秒伤随着攻击力或攻击速度的增加而增加后，相比原来的倍率。

秒伤增率：秒伤随着攻击力或攻击速度的增加而增加后，相比原来的倍率。BAT 不变时，等价于乘间秒伤增率。

增攻比：攻击力的增量与增加前攻击力的比。

增速比：攻击速度的增量与增加前攻击速度加 100 的比。

等效额外攻击力：攻击中的额外伤害，折算成造成等量伤害的攻击力。

等效概率：攻击命中概率触发类的效果在有闪避的情况下，等价于无闪避情况下的概率大小。

参考文献

11 对战平台资料库（注意这里面的信息落后于当前版本）

《基于 dota 游戏中护甲的建模与稳定性分析》

《先锋盾之极致研究，你了解的有多少？》

《天下武功唯快不破 DotA 各类速度数据解析》

《Dota 金箍棒、晕锤、重击技能叠加情况》

.....

晏启东

西安电子科技大学技术物理学院

2012 年 5 月 13 日