Cavendishův experiment

Abstrakt: Jednou z fundamentálních interakcí je interakce gravitační. Ta má přitažlivý charakter a působí na všechny hmotné částice. Ačkoliv se dle našich každodenních zkušeností jeví gravitační síla jako velmi velká, ve skutečnosti je tato interakce ze všech fundamentálních interakcí tou nejslabší. Cílem této úlohy je stanovení gravitační konstanty torzním kyvadlem, pomocí kterého ji poprvé přesně určil Henry Cavendish v roce 1798.

1 Pracovní úkoly

1. **DÚ: Zopakujte si výpočet chyb nepřímého měření, vysvětlete rozdíl mezi lineárním a kvadratickým zákonem hromadění chyb a jejich použití.**
2. **DÚ: Odvoďte vztah pro výpočet relativní chyby měření G a zamyslete se, jak vypadá chyba periody kmitu T a chyba rozdílu vzdáleností rovnovážných poloh S.**
3. Ve spolupráci s asistentem zkontrolujte, zda je torzní kyvadlo horizontálně vyrovnané. (20 min)
4. Pomocí torzního kyvadla změřte gravitační konstantu. Do protokolu přiložte graf naměřených dat včetně errorbarů a nafitované funkce. Diskutujte, zda bylo kyvadlo rotačně vyrovnané.

2 Pomůcky

Pomůcky: Torzní kyvadlo, zemnící kabel, He-Ne laser, ochranné brýle, podstavec pod laser, stopky, laserový dálkoměr.

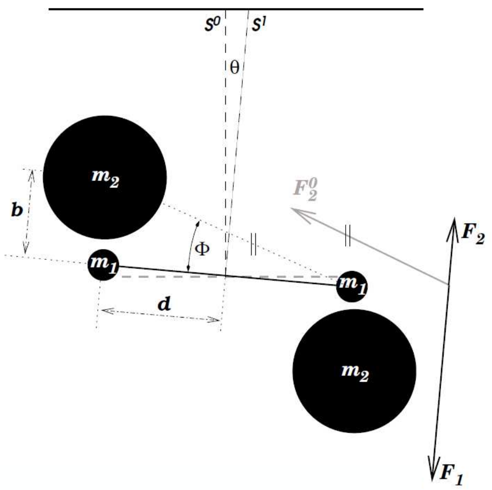
3 Základní pojmy a vztahy

V roce 1687 Isaac Newton zformuloval ve svém díle *Principia* gravitační zákon [1]:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\ , \tag{1}$$

kde F je velikost gravitační síly působící mezi tělesy o hmotnosti m_1 a m_2, které jsou od sebe vzdáleny o r. G je **gravitační konstanta**, která udává velikost gravitační interakce (ve srovnání s ostatními interakcemi). Přímým měřením lze velikost gravitační síly určit pouze pomocí velmi hmotných těles, např. automobil a Země. V Newtonově době bylo vážení jediným způsobem měřením hmotnosti. Při vážení se využívá právě gravitačního působení Země na vážená tělesa. Pokud tedy nebyla známa hmotnost Země, nešlo ze vztahu (1) určit ani gravitační konstantu G.

Řešení tohoto problému nalezl v roce 1798 Henry Cavendish při experimentech s torzními kyvadly. K torzi (zkroucení) dostatečně tenkého a dlouhého lanka stačí pouze velmi malá síla. Třeba i tak nepatrná, jaká působí mezi koulemi o hmotnostech 1 kg a 100 g na vzdálenost řádově několik centimetrů.



Obr. 1: Schéma torzního kyvadla, pohled z vrchu. Převzato z [2].

3.1 Torzní kyvadlo

K torznímu lanku je připevněna „činka“ ze dvou menších koulí o hmotnostech m_1 a zrcátko. Pokud se vhodným způsobem (viz schéma na Obr. 1) k malým koulím přiloží těžší koule o hmotnostech m_2, vznikne tak v čince moment dvojice sil

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_f &= 2d(\vec{F}_1 - \vec{F}_2^0)\\ \tau_f &= 2d(F_1 - F_2)\ .\end{aligned}$$

Tento moment způsobí zkroucení lanka a pootočení činky o úhel θ. Zkroucení lanka vyvolá torzní moment $\tau_t = -k\theta$, kde k je konstanta zahrnující ve své hodnotě mechanické vlastnosti lanka. Pokud je systém v rovnováze, platí

$$\begin{aligned}\tau_f &= -\tau_t\\ 2d(F_1 - F_2) &= k\theta\\ 2d\left(G\frac{m_1 m_2}{b^2} - \underbrace{F_2^0}_{G\frac{m_1 m_2}{b^2+4d^2}} sin\Phi\right) &= k\theta\\ 2dGm_1m_2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2+4d^2}\frac{b}{\sqrt{b^2+4d^2}}\right) &= k\theta \qquad (2)\\ 2dGm_1m_2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\right) &= k\theta\\ \frac{2dGm_1m_2}{b^2}(1-\beta) &= k\theta\\ \beta &= \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,\end{aligned}$$

a β nazveme geometrický faktor. Z Obr. 1 je vidět, že na každou kouli m_1 z „činky" působí obě velké koule m_2, přičemž ta vzdálenější snižuje výsledný moment silové dvojice faktorem $(1-\beta)$. Z rovnice (2) lze určit gravitační konstantu G, pokud známe vlastnosti lanka (torzní konstantu k) a úhel vychýlení „činky" θ, který odpovídá úhlu zkroucení lanka. Obojí (θ i k) lze určit z dynamických měření torzních kmitů kyvadla.

3.2 Výpočet gravitační konstanty

Vztah pro výpočet úhlu θ lze určit z Obr. 4a, kde S je vzdálenost rovnovážných poloh S^1 a S^2, a L je vzdálenost stupnice od zrcátka:

$$\tan(2\theta) \simeq 2\theta = \frac{S}{2L} = \frac{|S^2 - S^1|}{2L} \,. \tag{3}$$

Torzní konstantu k určíme z doby kyvu T a ze znalosti momentu setrvačnosti „činky":

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{k} \,, \tag{4}$$

kde I je moment setrvačnosti „činky". Ten určíme výpočtem z momentu setrvačnosti dvou koulí o hmotnosti m_1 a poloměru r vzdálených o $2d$ vzhledem k ose kolmé na tyčku spojující tyto koule a procházející uprostřed mezi koulemi. Moment setrvačnosti tyčky a zrcátka můžeme zanedbat. S využitím Steinerovy věty je potom

$$I = 2m_1 \left(d^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) . \tag{5}$$

Po dosazení (5) do (4) a (4) a (3) do (2), dostaneme finální vztah pro výpočet gravitační konstanty:

$$G = \frac{\pi^2 b^2}{m_2 d} \frac{d^2 + \frac{2}{5} r^2}{(1-\beta)} \frac{S}{T^2 L} = \text{konst.} \frac{S}{T^2 L} \,, \quad \text{kde } \beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{\frac{3}{2}}} \,. \tag{6}$$

Všimněme si na závěr, že ke stanovení gravitační konstanty vůbec nepotřebujeme znát hmotnost malých koulí m_1. Hodnoty konstant jsou v Tab. 1. Tyto hodnoty považujte ve výpočtech za přesné (tj. s nulovou chybou).

r	=	9,55 mm
d	=	50,7 mm
b	=	45 mm
m_2	=	1,24 kg

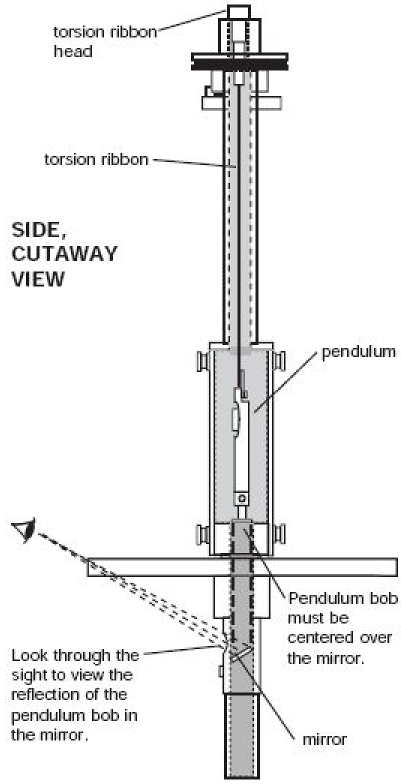
Tabulka 1: Tabulka konstant

4 Postup měření

4.1 Experimentální sestava

Experimentální sestava se skládá ze dvou menších koulí o hmotnostech 38,3 g spojených tenkou tyčí, takže tvoří jakousi „činku". Tato činka je připojena k torznímu lanku, které je zavěšeno na stojanu, a uzavřena v kovové ochranné krytce (viz Obr. 2a). Pod spodní stranou krytky jsou dva

(a) Pohled na torzní kyvadlo.



(b) Řez kyvadlem s naznačením kontroly horizontálního vyrovnání.

Obr. 2: Torzní kyvadlo. Převzato z [2].

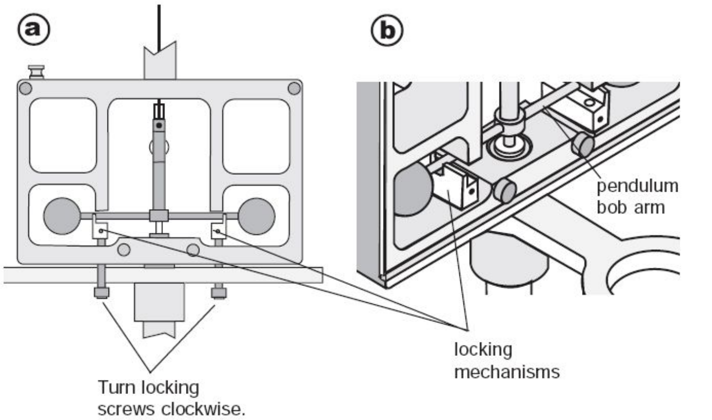
malé šrouby, které slouží k aretaci činky. To, jakým způsobem je aretace provedena, je naznačeno na Obr. 3a.

Před začátkem měření musíme zkontrolovat, zda je kyvadlo horizontálně vyrovnané. Děláme to proto, aby gravitační síla mezi Zemí a malými koulemi byla dokonale vynulována. Kontrola je naznačena na Obr. 2b, kde vidíme torzní lanko a k němu připojený držák na činku se zrcátkem. Na spodku tohoto držáku je kulatá destička, která je o něco menší, než optický tubus pod kyvadlem. V tomto tubusu je zrcátko, ve kterém vidíme odraz kulaté destičky. Pokud je kyvadlo horizontálně vyrovnané, kulatá destička se nacházi přesně uprostřed a kolem ní je světelná kružnice (Obr. 3b). Pokud kyvadlo není horizontálně vyrovnané, provedeme vyrovnání otáčením šroubů na podstavci.

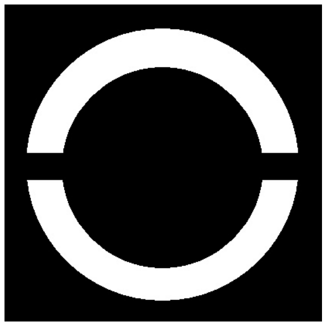
Dále se musíme vypořádat s elektrostatickou silou, která působí mezi velkými a malými koulemi, a je řádově silnější než síla gravitační. K tomu slouží zemnící kabel, který z koulí svede náboj na zem.

4.2 Dynamická metoda

Měření dynamickou metodou spočívá v zaznamenávání výchylky činky v čase, analýze tohoto časového vývoje a následném určení hodnot θ a k. K zaznamenání výchylky použijeme odraz laserového paprsku od zrcátka umístěného na čince.



(a) Pohled dovnitř ochranné krytky na umístění „činky“ a aretačního mechanismu. Převzato z [2].



(b) Kontrola horizontální vyrovnannosti kyvadla, pohled přes zrcátko do tubusu.

Obr. 3: Aretační mechanismus a pohled do tubusu.

K malým koulím m_1 přiblížíme (viz Obr. 4a – černá část) na otočném držáku velké koule m_2 a aparaturu odaretujeme. Jakmile se kyvadlo rozkmitá, začneme pomocí stopek zaznamenávat polohu světelné značky na vodorovném měřítku v závislosti na čase.

Pokud odaretování provedeme neopatrně, kyvadlo se rozkýve příliš rychle a malé koule začnou narážet na stěny krytky. To poznáme snadno, protože perioda kmitů bude velmi krátká (skutečná perioda je několik minut) a světelná značka se v bodech obratu nezastaví, ale odrazí nazpět. V takovém případě je možno počkat, až se značka přestane odrážet, nebo aparaturu zaaretovat a znovu opatrně odaretovat.

Torzní kyvadlo bude kmitat kolem rovnovážné polohy (bod S^1 na Obr. 4), takže nemusíme čekat, až se po rozkmitání ustálí v nové rovnovážné poloze, ale začneme zaznamenávat se stopkami v ruce polohy světelné značky v ekvidistantních časových intervalech (stačí každých 20 – 30 vteřin). U každého měření si poznamenejte i chybu tohoto měření, kterou odhadněte (čím rychleji se světelná značka pohybuje, tím větší bude chyba určení její polohy).

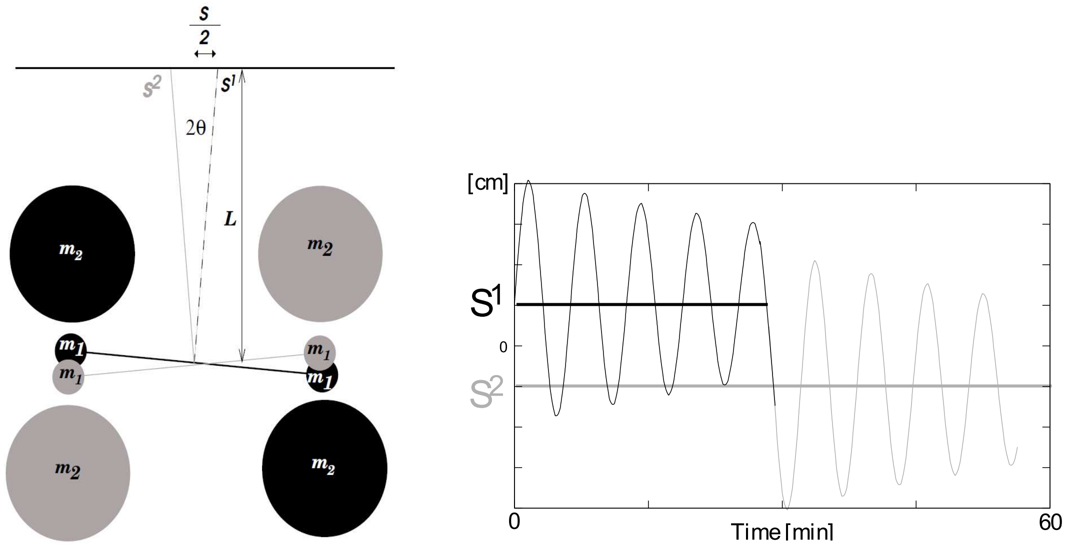
Abychom mohli určit úhel zkroucení torzního lanka θ, potřebujeme změřit alespoň dvě rovnovážné polohy (viz Obr. 4a – šedá část). Kyvadlo tedy necháme zakmitat několik kyvů, a potom velké koule opatrně přemístíme do druhé polohy, která je na Obr. 4a znázorněna šedou barvou. V této druhé poloze začne kyvadlo kmitat kolem rovnovážné polohy S^2.

4.3 Analýza naměřených dat

Výše byl odvozen vztah (2), ze kterého lze vypočítat gravitační konstantu G. Ve vztahu (2), vystupují dvě neznámé veličiny (θ a k), které lze určit z dynamických měření torzních kmitů kyvadla. To vykonává tlumený harmonický pohyb (závislost výchylky na čase je ilustrována na Obr. 4b), který je popsaný funkcí

$$f(t) = A \exp^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) + S^{1(2)}, \tag{7}$$

kde t je čas (ten je jedinou proměnnou, ostatní jsou konstanty), A amplituda výchylky, T perioda kmitu, φ počáteční fáze, δ je dekrement útlumu a S je rovnovážná poloha. Konstanty ve vztahu (7) určíme nafitováním naměřených dat.



(a) Rozložení koulí

(b) Průběh měření v závislosti na čase

Obr. 4: Dynamická metoda měření rovnovážných poloh : Černá barva odpovídá poloze 1 a šedá poloze 2. Převzato z [2].

5 Poznámky

1. Na vodorovném měřítku jsou viditelné tři světelné tečky. Nejsilnější z nich je odraz od zrcátka, zbylé dvě vznikají odrazem od sklíčka. Jedna z teček je nehybná a určuje natočení experimentu (zde by se měl ustálit odraz od zrcátka, pokud by kyvadlo kmitalo bez velkých koulí a bylo správně rotačně vyrovnané).

2. Pokud je kyvadlo správně rotačně vyrovnané, výchylky rovnovážných poloh od nehybné tečky by měly být stejně velké.

3. Při manipulaci s laserem dbejte zvýšené opatrnosti, aby odražený paprsek na nikoho nemířil a od stupnice na zdi se nikdy nedívejte přímo k vahám!

4. Kyvadla se dotýkejte jen za přítomnosti některého z asistentů!

6 Rozumím tomu?

1. Proč je potřeba kyvadlo horizontálně vyrovnat?

2. Proč je výhodné měřit rovnovážné polohy dynamickou metodou?

3. Proč potřebujeme znát periodu kmitů kyvadla?

4. Co potřebujeme změřit, abychom určili úhel zkroucení lanka?

5. Co se děje, pokud se světelná značka v bodech obratu „odráží“ nazpět? Co s tím?

6. Jak lze ověřit, že je kyvadlo rotačně vyrovnané? Dá se to zjistit z naměřených dat?

Reference

[1] ŠTOLL, Ivan. *Mechanika*. Vyd. 3. V Praze: ČVUT, 2010. 209 s. ISBN 978-80-01-04554-1.

[2] PASCO scientific, *Gravitational Torsion Balance - Instruction Manual* [online]. [cit. 1.10.2015]. Dostupné z: `http://www.pasco.com/file_downloads/product_manuals/Gravitational-Torsion-Balance-Manual-AP-8215B.pdf`.