Měření modulu pružnosti v tahu a ve smyku

Abstrakt: V této úloze se studenti seznámí s modulem pružnosti v tahu a ve smyku, vyzkouší si metody jejich měření a naučí se měřit s přesností na mikrometry.

1 Otázky během praktika

Během odpovídání na tyto otázky není dovoleno nahlížet do návodu. Vlastní poznámky jsou povoleny a doporučeny.

1. Co je Youngův modul pružnosti v tahu E? Napište Hookův zákon v tahu a popište veličiny v něm. Platí tento zákon neomezeně při jakékoli zátěži? Proč?
2. Co je modul pružnosti ve smyku G? Napište Hookův zákon ve smyku a popište veličiny v něm. S pomocí pojmu atomární mřížka zkuste vysvětlit, proč mají oba moduly u kovů podobnou, avšak ne stejnou hodnotu.
3. Jaká je chyba měření, jestliže hodnota je odečítána ze stupnice? Musíte při deformaci těles v tomto praktiku brát v potaz změnu tvaru a velikosti jejich průřezu? Proč je pro měření periody T torzního kyvadla v úkolu 6 vhodná právě postupná metoda?
4. Popište, jak funguje metoda nejmenších čtverců. V případě prokládání lineární funkcí má tato metoda analytické řešení, najděte ho (předpokládejte, že chyba všech měření je stejná). Čím se liší jeho přímá aplikace od fitování?
5. Proč se v úkolech 3-4 zaznamenává průběh prodlužování při zatěžování i zkracování při odlehčování? Jak se nazývá jev, který se zde může projevit?

2 Pracovní úkoly

Domácí

1. V domácí přípravě spočtěte z rovnice (4) plošný moment setrvačnosti J tělesa s obdélníkovým průřezem šířky a a výšky b.
   Hint: Neutrální plocha takového tělesa je v polovině jeho výšky.
2. V domácí přípravě odvoďte vzorec pro výpočet modulu pružnosti ve smyku G tak, jak ho budete používat v úkolu 3 (tedy v závislosti na L, R, α).
   Hint: Pro metodu nejmenších čtverců předpokládejte závislost $\varphi = \alpha M$.
3. V domácí přípravě odvoďte vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti torzního kyvadla $I = I_0 + I_1 + I_2$ ($I_0 \sim$ osa bez závaží, $I_{1,2} \sim$ závaží umístěná mimo

osu rotace) tak, jak ho budete používat v úkolu 4.

Hint: Pro určení $I_{1,2}$ se vám bude hodit (10) *a Steinerova věta.*

Vztah pro I_0 najděte v závislosti na čtyřech proměnných: I_1, I_2 a periodě kmitu kyvadla se závažím a bez závaží. Hodí se začít ze vztahu pro $G(L, R, I, T)$, který získáte kombinací rovnic (7)*,* (8)*,* (9)*.*

V praktiku a v dalším zpracování

1. a) Změřte závislost relativního délkového prodloužení $\varepsilon \equiv \frac{\Delta L}{L}$ ocelového drátu na napětí $\sigma \equiv \frac{F}{S}$ ve dvou případech: při postupném zatěžování a postupném odlehčování.
   b) Pro oba případy sestrojte graf (v jednom obrázku).
   c) Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti v tahu E ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
2. a) Změřte závislost průhybu z ocelového nosníku na velikosti síly F ve dvou případech: při postupném zatěžování a postupném odlehčování.
   b) Pro oba případy sestrojte graf (v jednom obrázku).
   c) Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti v tahu E ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
3. a) Změřte závislost úhlu zkroucení φ ocelového drátu na velikosti točivého momentu M ve dvou případech: při jeho postupném zvětšování a zmenšování.
   b) Pro oba případy sestrojte graf (v jednom obrázku).
   c) Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu. Parametry získané metodou nejmenších čtverců použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
4. a) Za pomoci torzního kyvadla určete moment setrvačnosti I_0 systému bez závaží, pomocí něj pak modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu. Dobu torzních kmitů měřte postupnou metodou.

3 Pomůcky

Stojan se strunou a indikátorovými hodinami, soustava na měření Youngova modulu z průhybu nosníku, soustava na měření modulu pružnosti ve smyku z torze drátu statickou metodou, stojan s drátem a šroubem na upevnění závaží pro měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou, mikrometr, mikrometrický šroub, pásový metr, stopky, sada závaží, digitální váhy.

4 Základní pojmy a vztahy

Pružné vlastnosti homogenního izotropního tělesa při malých deformacích plně určují dvě nezávislé materiálové konstanty, za které mohou být zvoleny např. (Youngův) modul pružnosti v tahu E, Poissonovo číslo μ nebo modul pružnosti ve smyku G.

4.1 Úvod do problematiky

Hookův zákon: Vztah

$$\sigma \equiv \frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}, \tag{1}$$

kde F je podélná síla působící na těleso o okamžitém průřezu S, $\frac{\Delta L}{L}$ je relativní prodloužení a E je Youngův modul pružnosti v tahu, se nazývá Hookův zákon v tahu. Samotný Youngův modul pružnosti v tahu E je určen pouze vlastnostmi materiálu. Veličina σ označuje napětí v tahu.

Poissonovo číslo: Jestliže hranol natahujeme v jednom směru, potom se v kolmém směru jeho rozměr a zkracuje o Δa podle

$$\tfrac{\Delta a}{a} = \mu\tfrac{\Delta L}{L},$$

kde μ je Poissonovo číslo, které charakterizuje novou vlastnost materiálu (nezávislou na E). Toto číslo nabývá hodnot v intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$, kde hodnotu $1/2$ nabývá pro nestlačitelné materiály.

Modul pružnosti ve smyku: Pokud upevníme spodní podstavu tělesa a budeme působit silou F na horní podstavu (Obr. 1), posuneme ji o malou délku δ. Původně pravý úhel se změní o úhel γ. Poté mezi smykovým napětím $\sigma = \frac{F}{S}$ a smykovou deformací charakterizovanou úhlem smyku (zkosem) γ platí

$$\frac{F}{S} = G\frac{\delta}{L} = G\tan\gamma,$$

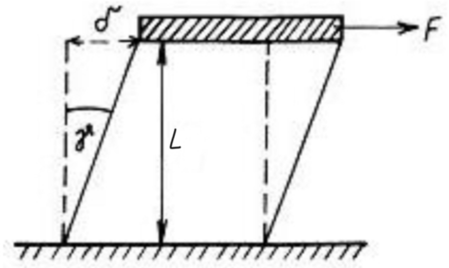
což pro malá posunutí δ můžeme aproximovat jako

$$\frac{F}{S} = G\gamma. \tag{2}$$

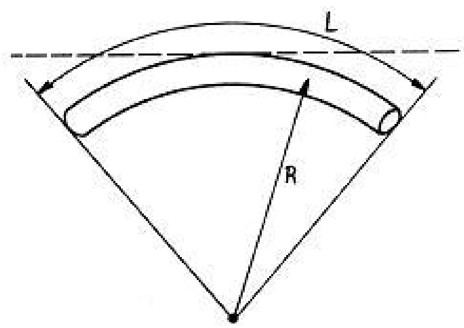
G zde značí modul pružnosti ve smyku, který popisuje tvarovou deformaci.

Pouze dvě ze tří materiálových konstant E, μ a G jsou pro homogenní izotropní těleso nezávislé. Platí mezi nimi vztah

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$



Obrázek 1: Smyk. L tloušťka materiálu, F je působící síla, δ velikost posunutí při dané síle a γ úhel smyku.



Obrázek 2: Nosník. L délka nosníku, R poloměr křivosti nosníku.

4.2 Složitější deformace

Ohyb nosníku: Mějme přímý nosník délky L a libovolného průřezu, ohnutý do tvaru nakresleného na Obr. 2. Chceme stanovit vztah mezi silami působícími na nosník, rozměry a tvarem nosníku a konstantami charakterizující pružné vlastnosti materiálu. Výsledek nezávisí na tvaru, a proto výklad provedeme pro kruhový průřez. Úlohu si ještě zjednodušíme tím, že budeme uvažovat případ, kdy poloměr křivosti R bude mnohem větší než tloušťka nosníku.

Popišme si nyní, jak to vypadá uvnitř nosníku. Materiál na vnitřní straně nosníku je stlačen, na vnější straně roztažen a uvnitř nosníku je plocha, která má původní rozměry. Nazývá se neutrální plocha. Dá se ukázat, že tato plocha prochází plošným „těžištěm“ průřezu, jestliže se nosník neprotahuje nebo nestlačuje jako celek (čistý ohyb).

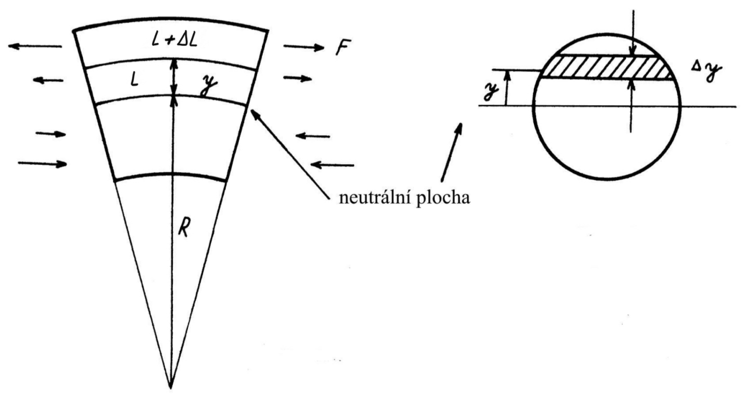
Představme si krátký, příčný úsek nosníku o délce L (Obr. 3). Při čistém ohybu se tento kousek nosníku deformuje. Materiál pod neutrální plochou se stlačí, přičemž deformace stlačením je úměrná vzdálenosti od neutrální plochy y. Materiál nad neutrální plochou se protáhne, což je rovněž úměrné vzdálenosti od neutrální plochy. Platí tedy $\Delta L \sim y$ (pro $y > 0$ jde o roztažení, pro $y < 0$ o stlačení). Platí

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{y}{R}.$$

Z toho plyne, že i tahové napětí vystupující na levé straně rovnice (1), tj. síla působící na jednotku plochy v pásu $(y + \Delta y, y - \Delta y)$, je úměrné vzdálenosti od neutrální plochy y

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = E\frac{y}{R}. \tag{3}$$

Síly působící na část nosníku jsou zobrazeny na Obr. 3. Nad neutrální plochou působí směrem na jednu stranu a pod ní na stranu opačnou. Dostaneme tak dvojice



Obrázek 3: Ohyb nosníku. F působící díla, prodloužení ΔL úseku nosníku o délce L, poloměr křivosti R.

sil, které mají „ohybový“ moment. Velikost momentu dvojice sil je rovna momentu jedné ze sil vzhledem k neutrální ploše.

Integrujeme-li součin síly a vzdálenosti od neutrální plochy, můžeme vypočítat celkový moment sil M působící na průřez námi uvažované části nosníku:

$$M = \int_{\textit{příčný průřez}} y \mathrm{d}F.$$

Z rovnice (3) vyjádříme element síly ΔF a přepíšeme celkový moment sil do tvaru

$$M = \frac{E}{R} \int_{\textit{příčný průřez}} y^2 \mathrm{d}S.$$

Výsledek integrálu závisí pouze na geometrii příčného průřezu tělesa, proto ho označíme jako

$$J = \int_{\textit{příčný průřez}} y^2 \mathrm{d}S \tag{4}$$

a nazveme plošným momentem setrvačnosti geometrického příčného průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející jeho plošným „těžištěm“. Dosadíme-li za něj do naší rovnice, dostaneme

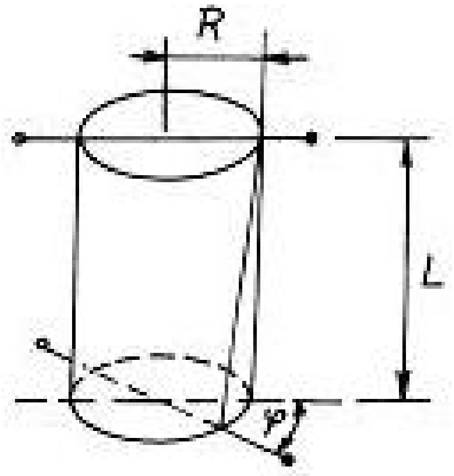
$$M = \frac{EJ}{R}. \tag{5}$$

Tato rovnice udává vztah mezi ohybovým momentem M a křivostí nosníku $\frac{1}{R}$.

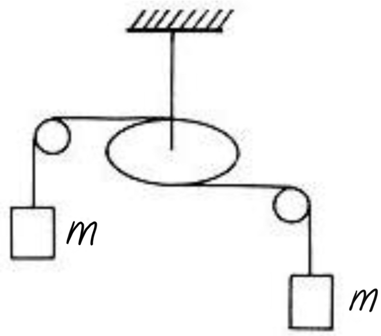
Rovnici (5) můžeme použít k vypočítání příčného průhybu nosníku z. Matematickými úpravami, které lze dohledat v [1], dospějeme k finální rovnici

$$z = -\frac{FL^3}{48EJ}, \tag{6}$$

kde F je síla prohýbající nosník a L je celková délka ohýbané části nosníku.



Obrázek 4: Torze válce.



Obrázek 5: Zařízení pro měření modulu pružnosti ve smyku statickou metodou.

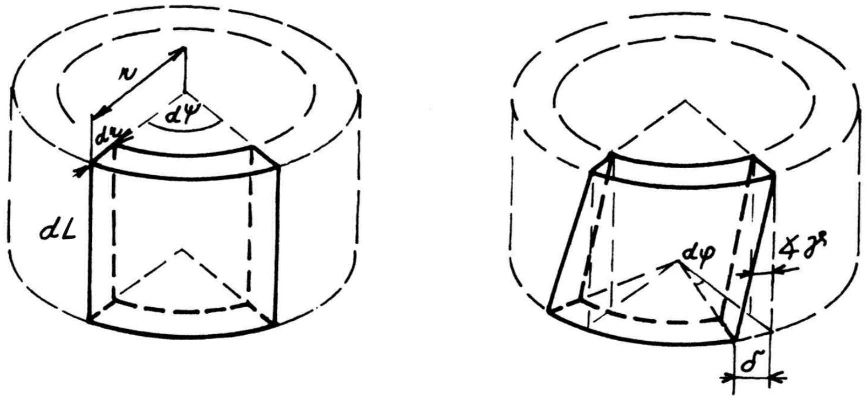
Torze válce: Na Obr. 4 je nakreslen válec kruhového průřezu o délce L a poloměru R, jehož horní podstava je upevněna a spodní je vůči ní stočena o úhel φ. Tato deformace se nazývá torze. Mírou torze je úhel, o který jsou vůči sobě stočeny dva průřezy kolmé k ose válce, vzdálené od sebe o jednotkovou délku. Označme si tuto veličinu α, její jednotkou je m^{-1}. Je-li délka válce L, je úhel φ, o který se stočí spodní podstava vůči vrchní, dán výrazem $\varphi = L\alpha$.

Představme si elementární hranol vyříznutý z válce v levé části Obr. 6, o délce $r\mathrm{d}\psi$, šířce $\mathrm{d}r$ a výšce $\mathrm{d}L$. Ten je při torzi posunut, otočen a zdeformován. Úhel $\mathrm{d}\varphi$ pootočení jeho podstav vůči sobě kolem osy válce je $\mathrm{d}\varphi = \alpha \mathrm{d}L$ (viz pravá část Obr. 6). Vzájemné posunutí obou podstav podél obvodu válce je pak $\delta = r\mathrm{d}\varphi$, kde r je vzdálenost elementárního hranolku od osy válce. Díky infinitesimálním rozměrům hranolku můžeme zanedbat zakřivení jeho podstav a považovat jeho deformaci za čistě smykovou s úhlem smyku $\gamma \approx \tan\gamma = \frac{\delta}{\mathrm{d}L}$. Po dosazení pro úhel smyku získáme vztah $\gamma = r\alpha$.

Nyní budeme hledat silové působení, které výše popsanou deformaci vyvolá. To dostaneme z Hookova zákona pro smyk (2). Pro smykové napětí $\tau = \frac{\Delta F}{\Delta S}$, které působí podélně k podstavě elementárního hranolu, dostaneme $\tau = Gr\alpha$. Síla, která vyvolává toto smykové napětí, je kolmá k ose válce i souřadnici r. Proto je její příspěvek k momentu sil $\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$ dán výrazem

$$\mathrm{d}M = r\tau \mathrm{d}S,$$

kde $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\psi\mathrm{d}r$ je plocha podstavy elementárního hranolu. Všechny elementární momenty $\mathrm{d}M$ mají směr osy válce. Pro celkový moment sil M vyvolávajících torzi



Obrázek 6: Smyk elementárního hranolu vyříznutého z válce.

válce charakterizovanou jednotkovým stočením α pak po dosazení platí

$$M = G\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \mathrm{d}\psi \mathrm{d}r = G\alpha \frac{\pi R^4}{2}.$$

Zavedeme-li do vzorce místo úhlu α úhel $\varphi = \alpha L$, o který se stočí spodní podstava válce vůči horní, dostaneme pro hledaný moment sil vyvolávajících torzi výraz

$$M = G\frac{\pi R^4}{2L}\varphi. \tag{7}$$

Tento výraz ukazuje, že mezi úhlem stočení φ a momentem sil M vyvolávajících toto stočení je přímá úměra

$$M = K\varphi. \tag{8}$$

Konstanta úměrnosti $K = \frac{\pi G R^4}{2L}$ se nazývá direkční moment. Znalosti závislosti mezi momentem sil M a úhlem stočení φ můžeme užít jak k měření modulu pružnosti ve smyku G (úkol 5 a 6), tak k měření silových momentů. Jestliže je R malé a L velké (tenké vlákno), může být i pro malý moment sil úhel φ značně velký. To se využívá např. v torzních vahách (měření gravitační konstanty) nebo v citlivých galvanometrech.

5 Postup měření

5.1 Měření Youngova modelu pružnosti v tahu E

5.1.1 Měření pomocí prodloužení drátu

Modul pružnosti v tahu ocelového drátu budete měřit přímou metodou, tj. budete měřit délkové prodloužení ΔL v závislosti na napětí. Drát je napínán silou F realizovanou vahou závaží zavěšeného na volném konci drátu, druhý konec drátu je pevně uchycen. Podélná vlákna drátu musí tvořit svazek rovnoběžných přímek, proto drát musíte předem vypnout závažím o hmotnosti 1 kg a ostatní závaží zavěšovat pod něj. Prodloužení drátu ΔL změříte indikátorovými hodinkami, délku drátu L pásovým měřítkem, průměr drátu $2R$ mikrometrickým šroubem.

Odhadněte, jak moc se bude v důsledku zatěžování měnit průřez drátu S a uvažte, zda při změřeném relativním prodloužení musíte tuto změnu brát v úvahu.

5.1.2 Měření pomocí průhybu nosníku

Pro toto měření máte k dispozici podepřenou tyč na dvou vodorovných břitech vzájemně od sebe vzdálených o délku L. Břity jsou kolmé k podélné ose tyče. Zatížíme-li tuto tyč uprostřed silou F, pak je průhyb tyče z v místě působení síly dán vzorcem (6).

Sílu F budete realizovat tíhou závaží, šířku a výšku tyče změříte mikrometrickým šroubem (z těchto údajů také spočítáte plošný moment setrvačnosti J, jehož vzorec jste si odvodili v přípravě), vzdálenost břitů změříte pásovým měřítkem a průhyb z mikroskopem s okulárním mikrometrem. Průhybu nosníku o 1 mm odpovídá v zorném poli mikroskopu posun jeho obrazu o 39,5 dílků na okulárovém mikrometru. Průhyb o jeden dílek tedy odpovídá $0,0253$ mm.

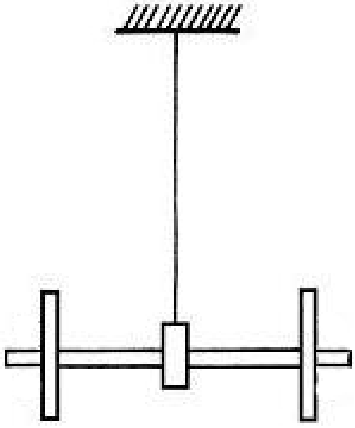
5.2 Měření modulu pružnosti ve smyku G torzí drátu

5.2.1 Statická metoda

Modul pružnosti ve smyku G drátu délky L a poloměru R stanovíte ze vztahu (7). Experimentální uspořádání je na Obr. 5. Na spodním konci drátu je vodorovně upevněna kruhová deska se žlábkem, po obvodu opatřená úhlovou stupnicí. Na desku jsou navinuta dvě vlákna, která vedou přes kladky a mohou být na volných koncích zatížena dvěma stejnými závažími o hmotnosti m. Je-li poloměr desky a, má moment sil obou závaží velikost $2mga$ a směr osy drátu. Úhel stočení φ změříte buď pomocí stupnice na desce, nebo metodou zrcátka a stupnice.

5.2.2 Dynamická metoda

Na spodní konec drátu délky L a poloměru R je upevněna tyčka, na kterou se dají do různých poloh namontovat závaží tvaru kotouče s otvorem uprostřed, formálně tvaru dutého válce. Nechť I je celkový moment setrvačnosti tyče i přídavných závaží. Stočíme-li drát v rovině kolmé k ose drátu, bude na tyč působit moment sil M o velikosti danou rovnicí (8) a směru osy drátu. Tento moment bude stáčet tyč zpět do rovnovážné polohy. Uvolníme-li tyč, začne vykonávat kmity kolem rovnovážné polohy. Proto se toto zařízení nazývá torzní kyvadlo. Pro pohyb tyče



Obrázek 7: Soustava pro měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou.

můžeme psát pohybovou rovnici

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -K\varphi,$$

Tato rovnice má pro naši konfiguraci řešení

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{I}}t\right),$$

kde φ_0 je počáteční úhel stočení drátu. Z tohoto vyplývá, že perioda T torzního kyvadla je dána vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\tfrac{I}{K}}. \tag{9}$$

Ze znalosti doby kyvu torzního kyvadla T, rozměrů drátu R a L a momentu setrvačnosti tyče a přídavných závaží I tedy můžeme za použití vzorce (7) vypočítat modul pružnosti ve smyku G materiálu, ze kterého je drát vyroben.

Celkový moment setrvačnosti I je dán součtem momentu setrvačnosti I_0 samotné tyče a momentů setrvačnosti obou závaží, přičemž nesmíme zapomenout započítat příspěvek daný nenulovou vzdáleností jejich těžiště od osy otáčení. Neznáme-li I_0, můžeme změřit doby kyvu T_a, T_b pro dvě různé polohy přídavných závaží. Z definice direkčního momentu K, periody kmitu T a celkového momentu setrvačnosti I tak dostaneme soustavu dvou rovnic pro výpočet I_0.

Moment setrvačnosti dutého válce o vnějším poloměru r_o, vnitřním poloměru r_i, výšce v a hmotnosti m vzhledem k ose kolmé k ose válce je

$$I_v = \frac{m}{4}\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{v^2}{3}\right). \tag{10}$$

Délku ocelového drátu L, vzdálenost přídavných kotoučů od osy otáčení a a rozměry kotoučů r_i, r_o změřte pásovým metrem, průměr drátu $2R$ a výšku kotoučů v mikrometrickým šroubem a hmotnost kotoučů m stanovte na digitálních vahách. Dobu kyvu torzního kyvadla T určete postupnou metodou.

6 Poznámky

Stopky nejsou zahrnuty mezi pomůckami přichystanými u úlohy. Požádejte o ně asistenta nebo použijte svůj smartphone.

Reference

[1] FJFI ČVUT, Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha, 1983, str. 120-127

[2] Chaloupka, Petr: Prezentace k předmětu Základy fyzikálních měření, dostupné z `people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/h4.pdf`, citace [29.9.2015], str. 28-35