

Jméno: Vojtěch Fišer

Datum měření: 24.3.2017

Skupina: 2

Klasifikace:

1 Úkoly

1. DŮ: Z Planckova vyzařovacího zákona odvoďte Stefan-Boltzmannův zákon a určete tvar konstanty s pomocí c , k a h .
2. Ocejchujte referenční žárovku pomocí měření odporu. Diskutujte, zda α v rovnici (9) je konstanta. Výsledky zpracujte graficky. Ověřte správnost výsledků pomocí závislosti výkonu na čtvrté mocnině teploty. Pomocí fitu určete konstantu β .
3. Ověřte Stefan-Boltzmannův zákon (3), výsledky vynesete do grafu a určete konstantu ϵ .
4. Zjistěte teplotu referenční žárovky (alespoň 6 měření) pomocí závislosti transmise na vlnové délce. Graficky zpracujte a teplotu získejte pomocí aritmetického průměru z fitů závislosti intenzity na vlnové délce $I = I(\lambda)$.

2 Pomůcky

Pulfrichův fotometr, zdroj napětí 0 - 30 V, wolframová vlákna (dvě světelné žárovky), multimetr, ohmmetr, zdroj referenčního napětí.

3 Teorie

3.1 Základní pojmy, vztahy a zákony

V této úloze budeme uvažovat elektromagnetickou energii vyzařenou v tzv. kvantech. Při označení energie jednoho kvanta e platí [1]

$$e = h\omega = \frac{\hbar}{\lambda} \quad (1)$$

kde h , \hbar je Planckova resp. redukovaná Planckova konstanta, ω je úhlová frekvence záření a λ je jeho vlnová délka.

Pro absolutně černé těleso platí [1] Planckův vyzařovací zákon¹

$$dI_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda \quad (2)$$

kde I_λ je intenzita záření na konkrétní vlnové délce λ , k Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota a c rychlost světla ve vakuu.

Integrací přes všechny vlnové délky lze získat Stefan-Boltzmannův zákon

$$I = \epsilon \sigma T^4 \quad (3)$$

¹lze vyjádřit i jako funkce ω

kde tzv. emisivita ϵ je korekce pro nedokonalé černá tělesa a pro Stefan-Boltzmannova konstantu σ platí [1]

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} \approx 5,76 \cdot 10^{-8} \quad [\text{Wm}^2 \text{K}^{-4}] \quad (4)$$

Pokud položíme svítivost přímo úměrnou elektrickému výkonu žárovky P , pak získám vztah

$$P = U \cdot I = \beta T^4 \quad (5)$$

kde U je napětí na žárovce, I je tentokrát proud protékající žárovkou a β je koeficient, který v sobě zahrnuje mnoho vlivů. Ten budeme určovat experimentálně.

3.2 Cejchování žárovky

Žárovka je pro nás wolframové vlákno, které můžeme uvažovat jako homogenní drát, pak pro jeho elektrický odpor R při délce vlákna l a průřezu S platí

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \frac{l}{S} = \frac{R}{\rho} \quad (6)$$

kde ρ je tzv. rezistivita (také měrný odpor) wolframu.

Pro rezistivitu ρ platí [1]

$$\rho_n = -1,06871 + 2,06884 \cdot 10^{-2}T + 1,2797110^{-6}T^2 + 8,53101 \cdot 10^{-9}T^3 - 5,14195 \cdot 10^{-12}T^4 \quad (7)$$

pro termodynamickou teplotu T v rozmezí 90 až 750 K a

$$\rho_n = -1,73573 + 2,14350 \cdot 10^{-2}T + 5,7481110^{-6}T^2 + 1,16398 \cdot 10^{-9}T^3 - 1,1167 \cdot 10^{-13}T^4 \quad (8)$$

pro teploty v rozsahu 750 až 3600 K. Tyto vztahy již v sobě mají zahrnutu i korekci na teplotní dilataci wolframu a je tedy možné považovat $\frac{l}{S}$ z (6) za konstantu.

Pro malé rozdíly teplot ΔT je možno aproximovat závislost odporu R na teplotě přímkou a psát tedy

$$R = R_0(\alpha \Delta T + 1) \quad (9)$$

kde konstanta α se nazývá součinitel elektrického odporu a R_0 je referenční odpor.

3.3 Určení svítivosti, Stefan-Boltzmannův zákon

Předpokládám, že elektrická energie přivedená do žárovky bude vyzářena ve formě elektromagnetického záření,² a proto celkový elektrický příkon považuji rovný zářivému toku. Kandelu je tedy možno považovat podle definice

$$\text{cd} = \frac{1}{683} \frac{W}{\text{sr}} \quad (10)$$

a svítivost I v jednotkách cd vyzářenou do celého prostoru (tedy prostorový úhel 4 sr) lze počítat jako

$$I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot 683} \approx \frac{P}{8532,83} \quad (11)$$

kde P je příkon žárovky.

Dále mohu dosazením do (3), (5) spočítat

$$\epsilon = \frac{\beta}{\sigma} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 683} \quad (12)$$

²na širokém spektru vlnových délek

3.4 Měření teploty

Při měření teploty budeme manipulovat s transmisí tak, aby intenzita prošla z obou žárovek byla vždy v úzkém pásmu stejná. Mohu tedy napsat

$$dI_1 \cdot T_1 = dI_2 \cdot T_2 \quad (13)$$

přičemž T_1, T_2 jsou nastavené transmise na fotometru a dI je intenzita na konkrétní vlnové délce spočtená z Planckova zákona (2).

4 Postup měření

Nejprve jsme prováděli cejchování žárovky. Zapsali jsme pokojovou teplotu a odpor vlákna studené žárovky změřeny pomocí digitálního multimetru. Poté jsme žárovku s voltmetrem připojili přes ampérmetr na nastavitelný zdroj. Pro dvacet zvolených hodnot, všech do výkonu 50 W, jsme zapsali hodnotu napětí a proudu

Následně jsme srovnali Pulfrichův fotometr - zaostřili jsme na vlákna obou žárovek a zasunuli kondenzory. Poté jsme pro šest výkonů variabilní žárovky (zaznamenali jsme proud a napětí) vždy nastavili clonu referenční žárovky tak, aby při všech clonách svítila méně, než variabilní žárovka s plně otevřenou clonou. Pak jsme již pro každý filtr 2-9 nastavili clonu variabilní žárovky tak, aby byl kontrast mezi plochami viditelnými ve fotometru minimální a hodnotu transmise jsme zapsali.

5 Výsledky

5.1 Cejchování žárovky

Nejprve jsem z pokojové teploty $(22,5 \pm 0,1)^\circ \text{C}$ a odporu při nulovém výkonu $R_0 = (0,25 \pm 0,01) \Omega$ pomocí (7) určil $\rho = (5,419 \pm 0,003) \Omega \text{m}$. Z toho dosazením do (6) zjistím

$$\frac{l}{S} = (0,046 \pm 0,005) \quad (14)$$

Změřené hodnoty uvádím v Tab. 1

Dále jsem odhadl (následně výpočtem i potvrdil), že teplota wolframového vlákna pro svítící žárovku je vyšší 750 K. V každém bodě jsem určil elektrický výkon žárovky a její odpor. Z odporu jsem určil pomocí (8) teplotu vlákna. To však znamenalo hledat kořen polynomu čtvrtého řádu, což je analytickým výpočtem problematické. Použil jsem numerickou funkci `numpy.roots` z knihovny pro python. Tím jsem však bohužel již nebyl schopen spočítat propagaci chyby. Závislost výkonu žárovky P na teplotě T zobrazuji graficky na Obr. 1. Daty je proložena funkce (5). Tím jsem získal cejchování teploty na výkon.

Dále jsem vykreslil závislost odporu na teplotě a ověřoval jsem platnost (9). Graf je na obrázku Obr. 2. Jako referenční bod jsem zvolil bod při nulovém výkonu, jelikož jen pro ten znám z měření teploty. Protože tento bod je daleko od ostatních, ukázal jsem i jak by vypadalo proložení pouze bodů svítící žárovky.

Hodnotu konstanty ϵ jsem určil přímým dosazením fitem určené konstanty β do (12).

$$\epsilon = (8,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-9} \quad (15)$$

5.2 Teplota vlákna

Změřené hodnoty prezentuji v Tab. 2.

Pro každou intenzitu variabilní žárovky jsem podle (2) spočítal hodnotu dI pro každý filtr a celé přenásobil transmisí příslušející variabilní žárovce. Jako $d\lambda$ jsem vzal průměrnou hodnotu 30 nm. Dále jsem do takto získané závislosti pomocí programu `gnuplot` nafitoval opět (2) přenásobené transmisí nastavenou na referenční žárovce.

Grafy v příloze. Koeficienty fitu prezentuji v tabulce 3

| U [V] (± 0.001 V) | I [A] (± 0.001 A) |
|--------------------------|--------------------------|
| 02.038 | 1.553 |
| 04.947 | 2.489 |
| 07.545 | 3.133 |
| 10.560 | 3.768 |
| 11.544 | 3.954 |
| 07.435 | 3.092 |
| 09.332 | 3.513 |
| 10.045 | 3.65 |
| 12.262 | 4.08 |
| 06.117 | 2.776 |
| 01.119 | 1.169 |
| 03.283 | 2.004 |
| 08.250 | 3.295 |
| 09.847 | 3.625 |
| 11.935 | 4.03 |
| 07.120 | 3.026 |
| 05.451 | 2.14 |
| 04.243 | 2.277 |
| 11.380 | 3.92 |
| 02.597 | 1.730 |

Tab. 1: Naměřené napětí U a proud I při cejchování žárovky. Přeskrtnutou hodnotu jsem po pozorování grafu vyloučil jako hrubou chybu.

| filtr | Výkon variabilní žárovky [W] | | | | | |
|-------|------------------------------|------|-----|------|------|------|
| | 7,2 | 18,6 | 4,2 | 20,4 | 25,8 | 50,5 |
| 2 | 95 | 85 | 100 | 68 | 37 | 6,5 |
| 3 | 83 | 75 | 72 | 75 | 38 | 7,5 |
| 4 | 67 | 75 | 54 | 74 | 39 | 8,5 |
| 5 | 57 | 73 | 40 | 74 | 47 | 10 |
| 6 | 40 | 71 | 27 | 80 | 49 | 12 |
| 7 | 44 | 71 | 25 | 80 | 51 | 14 |
| 8 | 26 | 69 | 18 | 75 | 51 | 17 |
| 9 | 25 | 65 | 15 | 85 | 54 | 19 |

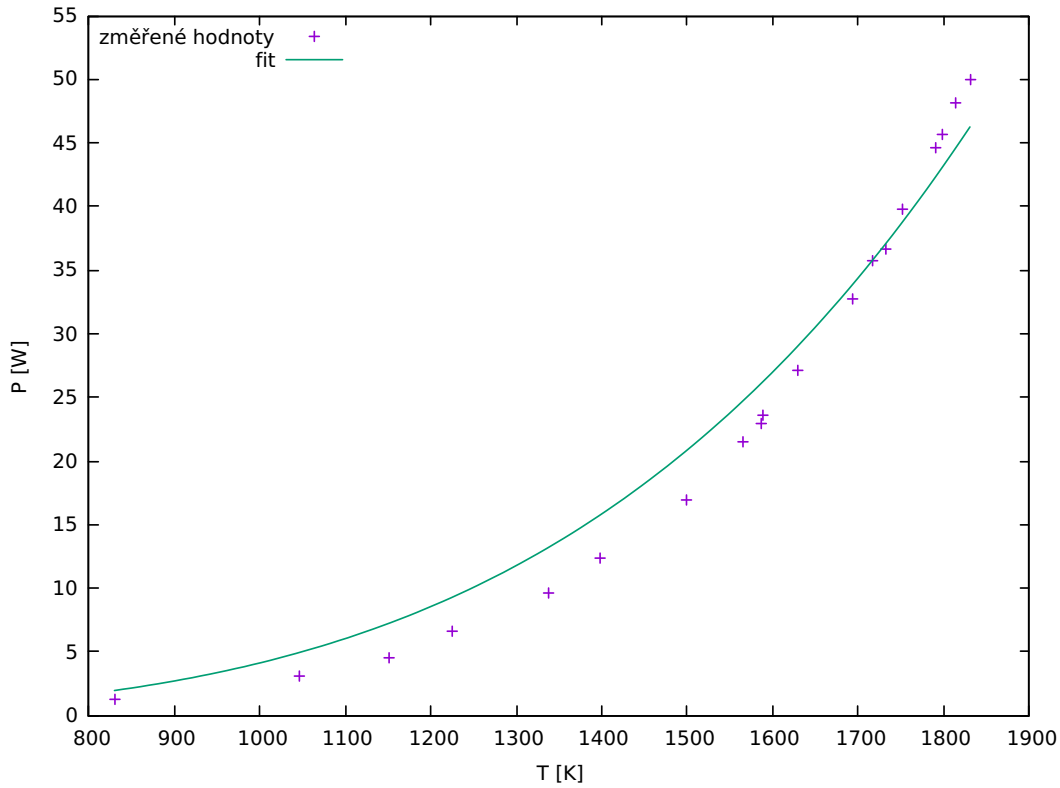
Tab. 2: Nastavené hodnoty transmise na cloně Pulfrichova fotometru pro jednotlivé filtry; uvedeno pro 6 různých nastavení variabilní žárovky.

Z této tabulky jsem vyloučil teploty, které jsou nad bodem tání wolframu i takové, při kterých by žárovka jistě nesvítla. Teplotu žárovky jsem odhadl pomocí aritmetického průměru zbylé poloviny hodnot. Určil jsem teplotu vlákna referenční žárovky T_r

$$T_r = (1200 \pm 500)\text{K} \quad (16)$$

6 Diskuze

Při cejchování žárovky jsem jeden bod vyloučil, očividně neodpovídal naší křivce. Odhaduji, že vznikl chybou při zapisování hodnoty. Spočtenou teplotní závislostí výkonu jsem proložil (5). Graficky je zřejmé, že jsme měli systematickou chybu. Domnívám se, že již samotný vztah (5) je nepřesný. Žárovka bude (byť ne ve viditelném



Obr. 1: Závislost výkonu žárovky na spočtené hodnotě teploty, fit (5). Koeficient fitu: $\beta = (4.12 \pm 0.08) \cdot 10^{-12}$

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|--|
| $T[K]$ | | 22921.1 | | 1769.55 | | 75083.3 | | 1074.98 | | 627.551 | | 150.036 | |
|--------|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|--|---------|--|

Tab. 3: Koeficienty fitů při určování teploty T

spektru) vyzařovat i při pokojové teplotě, což ve vztahu zahrnuto je. Nicméně v takovém stavu má žárovka nulový příkon. Je tedy jisté, že minimálně pro tento bod nebude vztah platit. Další možné vysvětlení je v samotném vlákne - je netriviálně stočené a proto teplotní roztažnost nemusí odpovídat teorii a předpoklad konstantního $\frac{l}{S}$ (8) nemusí být splněný.

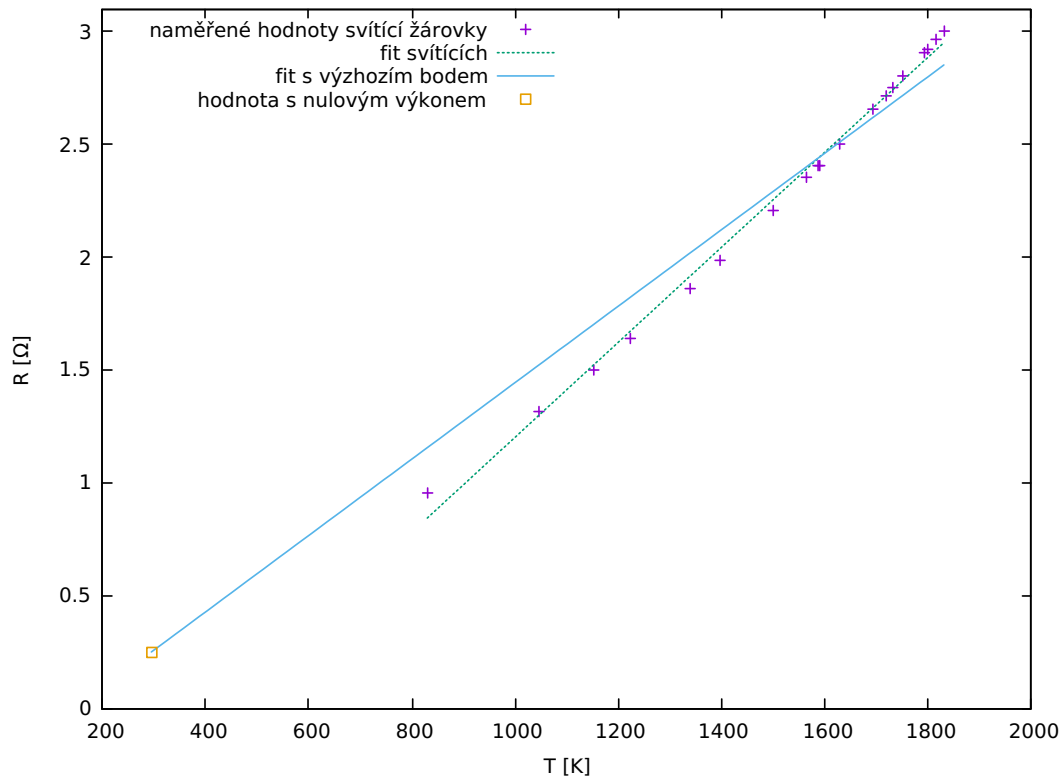
Při ověřování, zda je možno považovat α z (9) za konstantnu jsem uvažoval bod měření nulového výkonu za referenční bod, protože v pouze něm jsem měl experimentálně stanovenou teplotu. Z grafu lze vidět, že tato aproximace již příliš dobrá není. Rozdíl teplot je příliš velký. Problém je také, že referenční hodnota byla od ostatních dost vzdálená. Pokud bych chtěl popsat pouze body, kdy již žárovka svítí, byla by aproximace podstatě lepší.

Nebylo mi zcela jasné, jak mám postupovat při výpočtu emisivity a ověřování Stefan-Boltzmannova zákona. Spočtená emisivita mě trochu překvapila, čekal jsem hodnotu o cca 6 řádů větší.

Při určování teploty referenčního vlákna jsem musel vyloučit polovinu hodnot a i tak zůstal statistický rozptyl hodnot celkem vysoký. Zvolený postup očividně vykazoval i závislost na výkonu variabilní žárovky - pouze hodnoty podobné výkonu referenční žárovky byly rozumné. Usuzuji, že výsledek byl zatížen i systematickou chybou. Považuji toto měření za nezdařilé.

7 Závěr

Podařilo se ocejchovat žárovku. Stanovil jsem závislost teploty na výkonu i odporu vlákna na teplotě.



Obr. 2: Teplotní závislost odporu vlákna žárovky, pouze ilustrativní lineární fit pro svítící žárovky, fit (9) s výchozím bodem nulového výkonu. Koefficient fitu s výchozím bodem: $\alpha = (6.8 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$

Ocejšoval jsem žárovku na výkon, Obr. 1. Vykreslil jsem teplotní závislost odporu, Obr. 2. Rozhodl jsem, že pro celou oblast s referenční hodnotou bodu nulového výkonu nelze α považovat za konstantu.

Emisivu ϵ jsem určil

$$\epsilon = (8.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-9}. \quad (17)$$

Teplotu se rozumně určit nepodařilo, výsledky jsou diskutovány.

Literatura

- [1] Návod - Měření teploty wolframového vlákna - <http://praktikum.fjfi.cvut.cz/mod/resource/view.php?id=342> [cit.14.3.2017]