

Jméno: Ondřej Brož
Datum měření: 18.10.2021
Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

1. Domácí příprava: Odvoďte rovnici pro Poissonovu konstantu.
2. Změřte Poissonovu konstantu metodou kmitajícího pístku.
3. Změřte Poissonovu konstantu Clément-Désormesovou metodou.
4. Oba výsledky vzájemně porovnejte (procentuálně) a diskutujte, jestli je v rámci chyb můžete považovat za stejné.
5. Určete objem prachovnice metodou vážení.
6. Určete objem těžce prachovnice pomocí komprese plynu.
7. Oba výsledky vzájemně porovnejte

2 Pomůcky

Barometr, aparatura na měření Poissonovy konstanty Clément-Désormesovou metodou (skleněná baň se dvěma kohouty, otevřený manometr, gumový měch, stopky s fotoelektrickou bránou), aparatura pro měření Poissonovy konstanty metodou kmitajícího pístku (skleněná baňka, skleněná trubice s postranním otvorem, pístek, elektrická pumpička na vzduch, stopky s fotoelektrickou bránou, spojovací trubice), měrný objem (prachovnice), záslepka, speciální plynová byreta s porovnávacím ramenem, katetometr, teploměr, digitální váhy.

3 Teoretický úvod

Poissonova konstanta - hodnota určovaná v úkolech 2 a 3 - se vyjadřuje buďto pomocí měrného tepla (viz vztah (1)) nebo pomocí Poissonovy rovnice pro adiabatické děje (viz vztah (2))

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V} \quad (1)$$

$$pV^\kappa = \text{konst} \quad (2)$$

C_P označuje měrné teplo při stálém tlaku, C_V je měrné teplo při stálém objemu, p značí tlak, V značí objem a κ je označení pro samotnou Poissonovu konstantu.

3.1 Metoda kmitajícího pístku

(Pro srozumitelnost následujícího popisu viz Obr. 2) Při pouštění měřeného plynu do baňky (1) trubicí (5) se v baňce tvoří přetlak, nadzvedávající pístek (4). Pokud je pístek nadzvednut výše než postranní otvor (3), pak tlak v baňce klesá, pístek padá a proces se opakuje. Při správném nastavení bude pístek symetricky kmitat kolem rovnovážné polohy postranního otvoru podle pohybové rovnice (3).

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \pi r^2 dp \quad (3)$$

kde

$$p = b + \frac{mg}{\pi r^2}$$

Z čehož v kombinaci s rovnicí (2) (odvození viz Obr. 5) dostáváme vztah (4), kde m je hmotnost pístku, V je objem baňky (1), r je poloměr pístku, p je tlak v baňce a T je perioda kmitů pístku.

$$\kappa = \frac{4mV}{T^2 p r^4} \quad (4)$$

3.2 Clémentova-Désormesova metoda

V Clémentově-Désormesově metodě při měření dochází nejprve k téměř adiabatickému ději (pro výpočet předpokládáme dokonale adiabatický proces a nedokonalosti v něm extrapolujeme podle závislosti na čase ve vypracování) ze stavu V_1, p_1, T_1 do V_2, p_2, T_2 a následně izochorickému ději do stavu V_3, p_3, T_3 , který je vůči prvnímu stavu izotermický (čili $T_1 = T_3$ a $V_2 = V_3$). Vztah mezi prvním a druhým stavem je popsán Poissonovou rovnicí (5) a vztah mezi prvním a třetím je popsán Boyle-Mariotteovým zákonem (6).

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa \quad (5)$$

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{V_2}{V_1} \quad (6)$$

Tlaky v měření můžeme vyjádřit jako $p_1 = b + h_1$, $p_2 = b$ a $p_3 = b + h_2$, kde b je atmosférický tlak v okolí, h_1 je výška vodního sloupce H (viz Obr. 1) v prvním stavu a h_2 je výška stejného sloupce ve stavu tři. Umocníme-li vztah (6) na κ -tou, dosadíme do (5) a nakonec dosadíme vyjádření pro tlaky, pak získáme vztah pro κ (7) a využijeme-li Taylorův rozvoj pro $\ln(1+x)$ tak i finální vztah (8).

$$\kappa = \frac{\ln(b + h_1) - \ln(b)}{\ln(b + h_1) - \ln(b + h_2)} \quad (7)$$

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (8)$$

3.3 Metody měření dutých objemů

Výrazně jednodušší metoda měření dutého objemu je zaplnění objemu kapalinou známe hustoty (třeba vodou), zvážení kapaliny a přepočtem hmotnosti na objem pomocí oné hustoty dle vztahu (9).

$$V = \frac{m_{kap}}{\rho_{kap}} = m_{kap} V_{kap} \quad (9)$$

Příčemž V_{kap} je takzvaný jednotkový objem vody, pro který platí vztah (10).

$$V_{kap} = 0,9998 \cdot (1 + 0,00018\tau) \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}} \right] \quad (10)$$

O něco náročnější metoda měření dutých objemů je metoda komprese plynu, kdy zvednutím nádoby Z z polohy, kdy kapalina v byretě B sahá do výšky V_1 a plyn v ní má tlak p , do polohy, kdy kapalina sahá do výšky V_2 , změníme tlak na $p + \Delta p$ (viz Obr. 3). Pro tyto dva vztahy platí Boyle-Mariottův zákon ve tvaru (11)

$$p(V + V_{100} - v_1) = (p + \Delta p)(V + V_{100} - V_2) \quad \Rightarrow \quad V = (V_2 - V_1) \frac{p}{\Delta p} + V_2 - V_{100} \quad (11)$$

kde V_{100} značí objem byrety zaplněné na "100%" (vyznačeno na Obr. 3), V je objem měřené nádoby, V_1 je objem zabíraný kapalinou v byretě v prvním stavu, V_2 je objem zabíraný kapalinou v druhém stavu, p je počáteční tlak plynu a Δp je změna tlaku vyjádřena vztahem (12).

$$\Delta p = \Delta h \rho g \quad (12)$$

Zde Δh značí rozdíl mezi polohou V_2 a vrcholem vodního sloupce ve srovnávací trubici T , ρ a g označují hustotu vody a tíhová konstanta, které považujeme za konstanty^[1] o hodnotách $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a $g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.

4 Postup měření

4.1 Metoda kmitajícího pístku

Nejprve jsme za pomoci asistenta přepnuli do správného módu stopky s fotoelektrickou bránou (do módu impuls) a nastavili přívod plynu do pumpičky takový, aby pístek harmonicky kmital kolem postranního otvoru. Poté jsme stopky spustili na 5 minut a tím změřili počet proběhlých period za tuto dobu. Toto měření jsme opakovali pětkrát.

4.2 Clémentova-Désormesova metoda

Nejprve jsme za pomoci asistenta zapnuli a správně nastavili stopky s fotoelektrickou bránou (do módu gate). Poté jsme do baňky gumovým měchem napumpovali vzduch a zajistili ventil. Když se hladiny vodních sloupců v manometru ustálily, tak jsme odečetli jejich rozdíl. Poté jsme rychle otevřeli ventil snímaný stopkami s fotoelektrickou branou a zaznamenali si čas po který byl otevřený. Hladiny v manometru jsme opět nechali ustálit a odečetli jejich rozdíly. Celý proces jsme opakovali desetkrát.

4.3 Určování objemu metodou vážení

Nejprve jsme zvážili samotnou prachovnici (nádoby) bez kapaliny uvnitř. Poté jsme ji naplnili vodou, nechali teplotu vody ustálit a změřili ji teploměrem. Poté jsme zvážili prachovnici i s vodou.

4.4 Určování objemu kompresí plynu

Do soustavy pro měření dutých objemů kompresí plynu jsme nejprve připojili pouze záklopkou a změřili výšku kapaliny při otevřené horní aretě - čili za atmosférického tlaku - katetometrem (měřili jsme prvně pouze se záklopkou, abychom změřili objem trubice vedoucí do měřené nádoby, který od konečného výsledku odečteme). Poté jsme aretu uzavřeli, změnili výšku nádoby s kapalinou a změřili novou výšku kapaliny v byretě i ve srovnávací trubici. Toto jsme zopakovali pětkrát a poté ještě desetkrát s připojenou prachovnicí místo záklopy.

5 Naměřené hodnoty a vypracování

5.1 Metoda kmitajícího pístku

n_{per}	893	889	890	885	885
T [s]	0,336	0,337	0,337	0,339	0,339

Tab. 1: Počet nasnímaných period za 5 minut a z nich spočítaná délka jedné periody

Průměrem z period naměřených v Tab. 1 získáme $\bar{T} = 0,338 \pm 0,003s$, které když dosadíme do vztahu (4), přičemž m, V, r, g zadané v návodu považujeme za konstanty ($m = 0,00459kg$, $V = 0,001133m^3$, $r = 0,00595m$, $g = 9,81 \frac{N}{kg}$) a p je dle druhého vztahu (3) $p = (100500 \pm 50)Pa$ (barometrem jsme naměřili $b = (100,1 \pm 0,05)kPa$), dostáváme hodnotu pro hledanou Poissonovu konstantu $\kappa = (1,445 \pm 0,006)$.

5.2 Clémentova-Désormesova metoda

$h_1 (\pm 0,1)$ [cm]	20,9	22,4	23,8	24,7	21,8	21,6	25,1	27,2	26,8	23,7
$h_2 (\pm 0,1)$ [cm]	5,7	5,9	6,4	6,6	3,5	5,0	6,2	6,7	6,9	5,7
$\kappa (\pm 0,002)$	1,375	1,358	1,368	1,365	1,191	1,301	1,328	1,327	1,347	1,317
$t (\pm 0,5)$ [ms]	88	68	52	65	248	283	218	221	105	289

Tab. 2: Naměřené rozdíly hodnot vodních sloupců v prvním a třetím stavu, z nich spočítaná hodnota κ a časy otevření ventilu

V Tab. 2 máme vyznačené hodnoty rozdílů vodních sloupců v první a třetí poloze, dobu po kterou byl otevřený ventilek při přechodu do druhého stavu a nakonec hodnotu κ podle vztahu (8). Hodnoty κ v závislosti na čase jsme zobrazili v grafu pomocí programu GNUPLOT (viz Obr. 4) a extrapolovali do nuly za pomoci lineárního

fitu (abychom se pokud možno zbavili časového vlivu). Z fitu jsme tedy získali hodnotu v "nulovém čase" $\kappa_0 = (1,39 \pm 0,02)$ (také vyznačeno v Obr. 4).

5.3 Určování objemu metodou vážení

m_0 [g]	m_{cel} [g]	τ [K]
$97 \pm 0,5$	$212 \pm 0,5$	$296,5 \pm 0,1$

Tab. 3: Naměřené hodnoty hmotností prachovnice s a bez vody a teplota vody v prachovnici

V Tab. 3 máme vypsané naměřené hodnoty hmotností i teplotu vody. Dosazením τ do vztahu (10) dostáváme $V_{kap} = (1,0532 \pm 0,0003) \frac{\text{cm}^3}{\text{g}}$. Nakonec dosadíme-li do vztahu (9) získané V_{kap} a $m_{kap} = m_{cel} - m_0 = (115 \pm 0,5)\text{g}$, tak dostáváme hledaný objem prachovnice $V = (121,11 \pm 0,06)\text{cm}^3$.

5.4 Určování objemu kompresí plynu

$V_1 (\pm 0,004) [\text{cm}^3]$	8,955	8,650	8,557	8,528	8,460
$V_2 (\pm 0,004) [\text{cm}^3]$	9,335	9,384	9,223	9,737	9,020
$\Delta h (\pm 0,001) [\text{mm}]$	63,905	68,616	52,127	122,655	34,226

$V_1 (\pm 0,004) [\text{cm}^3]$	5,529	5,436	5,441	5,228	5,412
$V_2 (\pm 0,004) [\text{cm}^3]$	6,758	7,252	6,919	6,565	6,938
$\Delta h (\pm 0,001) [\text{mm}]$	69,051	91,454	65,617	48,863	68,967

$V_1 (\pm 0,004) [\text{cm}^3]$	5,520	5,280	5,211	5,199	5,077
$V_2 (\pm 0,004) [\text{cm}^3]$	6,629	6,816	6,533	6,750	6,601
$\Delta h (\pm 0,001) [\text{mm}]$	60,361	63,888	49,098	56,617	48,765

Tab. 4: Hodnoty naměřených objemů V_1 a V_2 přepočtených z výšky hladiny, na počet dílků a z nich na objem v cm^3 a rozdílů výšek hladin v byretě a srovnávací trubici. Prvních pět měření bez nádoby, zbylých deset s nádobou

V Tab. 4 máme naměřené hodnoty objemů v obou polohách a výšek vodních sloupců. Dosadíme-li je do vztahu (11), kde navíc $V_{100} = 65,6\text{cm}^3$ je objem byrety naplněné na maximum, $p = 100,1\text{kPa}$ je atmosférický tlak stejný jako v předchozích úkolech a Δp dosazujeme dle (12), tak získáme naměřené hodnoty objemu trubice V_{tru} a objemu nádoby s trubicí V_{cel} zobrazené v Tab. 5.

$V_{tru} (\pm 0,13) [\text{cm}^3]$	4,37	52,94	73,98	44,71	110,61
$V_{cel} (\pm 0,13) [\text{cm}^3]$	122,74	144,23	171,11	220,11	167,10
	128,55	186,47	215,62	220,63	259,76

Tab. 5: Spočítané hodnoty objemu trubice a trubice s nádobou

Spočítáme-li z nich průměrné hodnoty $\overline{V_{tru}} = (57 \pm 7)\text{cm}^3$ a $\overline{V_{cel}} = (183,6 \pm 0,2)\text{cm}^3$, tak z jejich rozdílu zjistíme samotný hledaný objem $V = \overline{V_{cel}} - \overline{V_{tru}} = (126 \pm 7)\text{cm}^3$.

6 Diskuse

6.1 Měření Poissonovy konstanty

Hodnotu Poissonovy konstanty pro měřený plyn (pravděpodobně vzduch) jsme metodou kmitajícího pístku určili jako $\kappa = (1,445 \pm 0,006)$ a Clément-Désormesovou metodou jako $\kappa = (1,39 \pm 0,02)$. Ty se tedy od sebe liší o 3,80%. Obě tyto hodnoty jsou podobné tabulkovým hodnotám pro vzduch při pokojových teplotách, ale vzhledem k menší chybě u měření metodou kmitajícího pístku je tato hodnota pravděpodobně správnější.

Další argument pro správnost metody kmitajícího pístku jsou možné zdroje chyb. Má totiž pouze jediný závažný zdroj nepřesnosti v měření a to podobnost kmitání námi nakalibrovaného pístku k harmonickému oscilátoru. Periody měřil stroj, nikoliv člověk, tudíž se eliminuje jiný lidský faktor, tlak v místnosti byl změřen s poměrně dobrou přesností a všechny ostatní hodnoty jsou nám zadány jako konstanty (tudíž eliminují možnost nepřesnosti našeho měření).

Naopak u Clément-Désormesovy hodnoty se objevuje hned několik možných zdrojů chyb. Jednou z nich je lidský faktor, při měření výšek vodních sloupců, jelikož voda se adhezivně upínala ke stěnám trubice, což netvořilo nerovnou hladinu, a zvyšovalo šanci nepřesného změření její výšky. Zároveň je možné, že jsme se při měření nepočkali dostatečně dlouho a hladina se ještě neustálila na konečné hodnotě (myšlena konečná hladina třetího stupně). V neposlední řadě je možné, že senzor u ventílku nesprávně registroval dobu otevření. K tomuto přesvědčení jsme došli, jelikož během experimentu jsme některá měření museli kompletně opakovat, protože senzor vůbec nezaznamenal, že ventílek byl otevřen. Znepokojivé jsou také časové hodnoty menší než 0,1s, vzhledem k tomu, že průměrná doba lidské reakce je cca 0,25s.

Pravděpodobná přítomnost těchto nepřesností je zřejmá z grafu s fitem, ve kterém se mnohé hodnoty poměrně dost liší od nafitované funkce a hodnota pro 0,248s je od ní liší výrazně.

6.2 Měření Dutých objemů

Hodnotu objemu prachovnice (duté nádoby) jsme metodou vážení kapaliny určili jako $V = (121,11 \pm 0,6)\text{cm}^3$ a metodou komprese plynu jako $V = (126 \pm 7)\text{cm}^3$. Ty jsou sice od sebe rozdílné pouze o 3.88%, ale hodnota získaná metodou vážení kapaliny je nepochybně správnější, vzhledem k řádovému rozdílu v chybách dvou měření.

To neznamená, že metoda vážení kapaliny nemá závažnější zdroje chyb. Naplnění otevřené nádoby (námi měřená nádoba měla permanentně otevřené hrdlo) téměř jistě vede k nedokonalému naplnění nádoby a vysoké šanci rozlití kapaliny při manipulaci s nádobou. Je možné, že teplota při měření se ještě neustálila, to by ale na měření nemělo mít přílišný vliv, vzhledem k tomu, že rozdíl od možná různé teploty okolí by byl až na třetím řádu a navíc by ovlivňoval pouze hodnotu hustoty, která je teplotou sama o sobě ovlivňována na relativně nízkém řádu. Důvěryhodnost měření by mohlo podpořit opakované měření, které jsme bohužel neprovedli, jelikož jsme tuto metodu považovali spíše za referenční hodnotu pro metodu komprese plynu.

Metoda komprese plynu sama o sobě nemá mnoho faktorů, které by mohly měření ovlivnit (to neznamená že neexistují: areta či záklopka mohly špatně těsnit, kapalina se nemusela chovat dokonale, ale jejich vliv nebude tak velký). Co evidentně ovlivnilo měření byla lidská chyba při měření katetometrem, kdy jsme na kapalinu špatně namířili nebo špatně četli z měrné mřížky. To je vidět na rozptylu naměřených hodnot a díky tomu i na chybě celkového měření, která je o dva řády vyšší než u metody vážení kapaliny, která jak zmíněno má mnoho neodstranitelných chyb.

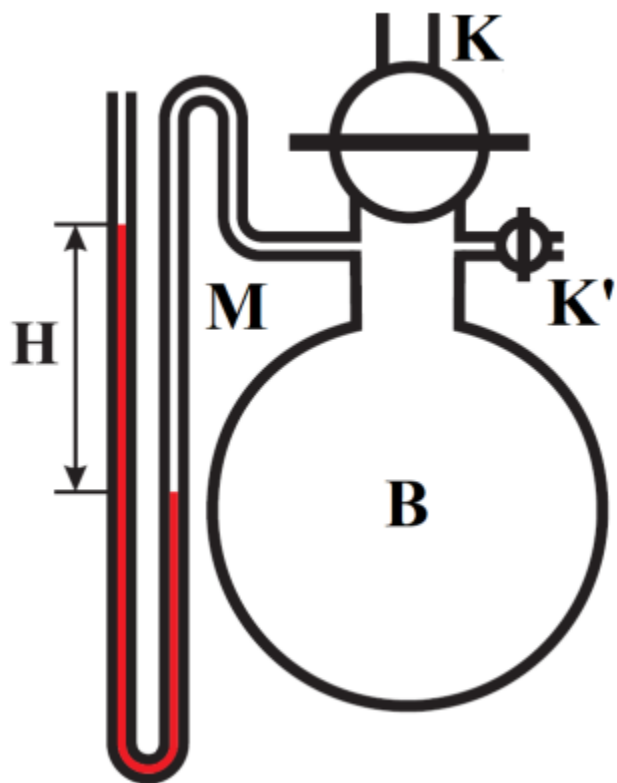
7 Závěr

Úspěšně jsme změřili Poissonovu konstantu pro měřený plyn jak metodou kmitajícího pístku $\kappa = (1,445 \pm 0,006)$ tak i Clément-Désormesovou metodou $\kappa = (1,39 \pm 0,02)$. Zároveň jsme změřili objem prachovnice (duté nádoby) jak metodou vážení kapaliny $V = (121,11 \pm 0,6)\text{cm}^3$ tak i metodou komprese plynu $V = (126 \pm 7)\text{cm}^3$.

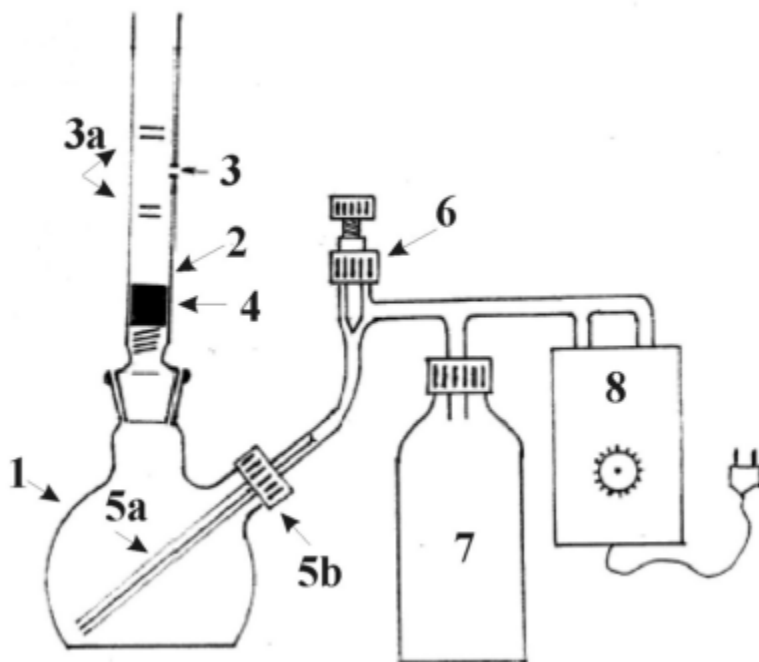
Literatura

1. Ivan Štoll, Mechanika, Vydavatelství ČVUT Praha, 2003

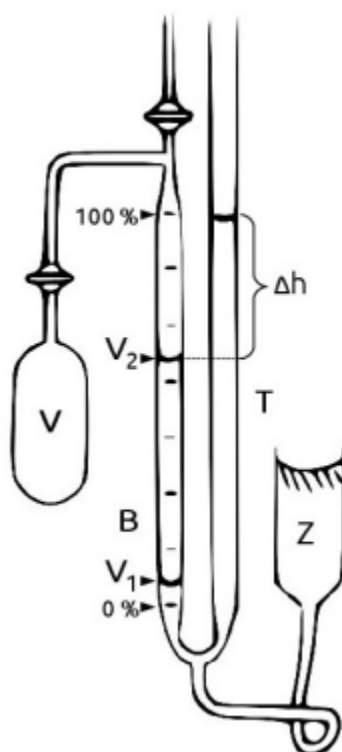
Přílohy



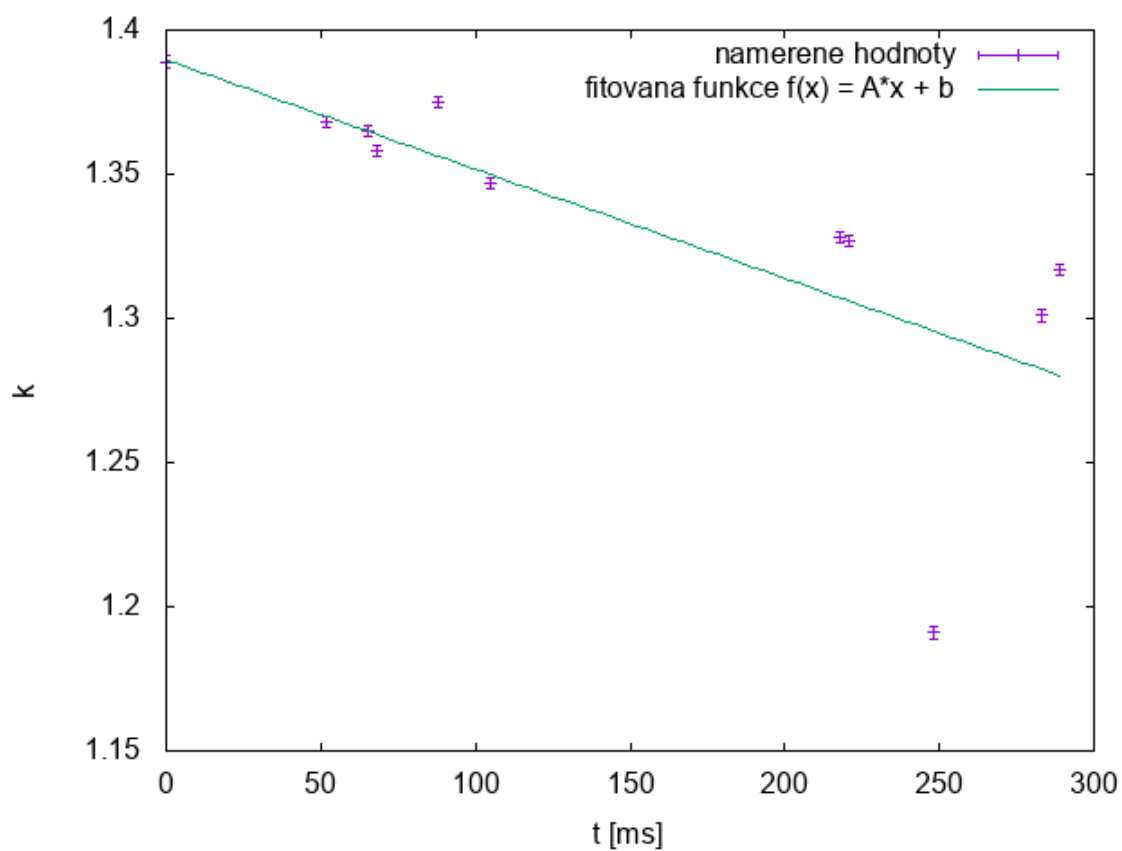
Obr. 1: Schéma aparatury pro měření Poissonovy konstanty Clément-Désormesovou metodou



Obr. 2: Schéma aparatury pro měření Poissonovy konstanty metodou kmitajícího pístku



Obr. 3: Schéma aparatury pro měření objemu nádoby metodou komprese plynu



Obr. 4: Graf získaných hodnot κ Clément-Désormesovou metodou a jejich lineární fit v závislosti na době otevření ventílku

$\textcircled{D\ddot{U}:}$ $m\ddot{x} = \pi n^2 dp$
 $p = p_0 + \frac{mg}{\pi n^2}$
 $(dV = \pi n^2 x)$

$pV^K = \text{konst}$
 \parallel
 $pK V^{K-1} dV + V^K dp = 0$
 $dp = \frac{pK dV}{V} = \frac{K \pi n^2 x - pK \pi n^2 x}{V}$

$m\ddot{x} = -\frac{pK \pi^2 n^4 x}{V}$
 $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \Lambda\right)$
 $\dot{x} = \frac{4\pi}{T^2} A \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \Lambda\right)\right)$

$m\ddot{x} + \frac{pK \pi^2 n^4}{V} x = 0$
 $-m \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{pK \pi^2 n^4}{V} = 0$
 $K = \frac{m 4\pi^2 V}{T^2 p \pi^2 n^4} = \frac{4mV}{T^2 p n^4}$

Obr. 5: Odvození vztahu (4) v domácí přípravě