# Wstęp do logiki i teorii mnogości. Kwantyfikatory

## Ćwiczenie

Za pomocą kwantyfikatorów i innych symboli matematycznych zapisać zdania:

1. *Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny*;
2. *Pewna liczba naturalna jest podzielna przez 3 i 4*;
3. *Nie istnieje największa liczba naturalna*;
4. *Każda parzysta liczba naturalna jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą*;
5. *Każda parzysta liczba naturalna większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych*.

## Ćwiczenie

Podać wartość logiczną każdego z następujących zdań:

1. $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}$;
2. Jeśli $x < y$, to $x^3 < y^3$ dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $3^n \geqslant n^3$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.

## Ćwiczenie

Wyznaczyć (z uzasadnieniem) wartość logiczną następujących stwierdzeń:

1. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\, x^2 > 4x$;
2. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x^2 > 4x$;
3. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\, (x > 2 \Rightarrow x^2 > 4x)$;
4. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, (x > 2 \Rightarrow x^2 > 4x)$;
5. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\, (x > 2 \Rightarrow 2x/(x^2+1) < 1)$;
6. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, (x > 2 \Rightarrow 2x/(x^2+1) < 1)$;
7. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\; x + y^2 + 1 = 0$;
8. $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\; x + y^2 + 1 = 0$.

## Ćwiczenie

Zbadać prawdziwość następujących stwierdzeń:

1. $\forall_{m,\, n\in\mathbb{Z}}\; m \leqslant n$;
2. $\exists_{m,\, n\in\mathbb{Z}}\; m \leqslant n$;
3. $\forall_{m\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\; m \leqslant n$;
4. $\exists_{m\in\mathbb{Z}}\forall_{n\in\mathbb{Z}}\; m \leqslant n$;
5. $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\exists_{m\in\mathbb{Z}}\; m \leqslant n$;
6. $\exists_{n\in\mathbb{Z}}\forall_{m\in\mathbb{Z}}\; m \leqslant n$.

## Ćwiczenie

Zbadać prawdziwość następujących stwierdzeń:

1. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\, x+y=0$;
2. $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x+y=0$;
3. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\, xy=0$;
4. $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\, xy=0$;
5. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\, xy=1$;
6. $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\, xy=1$.

## Ćwiczenie

Niech $\varphi(x, y)$ oznacza predykat $0 \leqslant x - y \leqslant 2$ dla $x, y \in X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Określić wartość logiczną każdego z następujących czterech zdań:

1. $\exists_x \exists_y \ \varphi(x, y)$;
2. $\exists_x \forall_y \ \varphi(x, y)$;
3. $\forall_x \exists_y \ \varphi(x, y)$;
4. $\forall_x \forall_y \ \varphi(x, y)$.

## Ćwiczenie

Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi o zakresie zmienności $x \in X$, gdzie $X$ jest niepustym zbiorem. Wykazać prawdziwość każdej z następujących implikacji:

1. $\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\forall_{x\in X}\varphi(x) \Rightarrow \forall_{x\in X}\psi(x))$;
2. $\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\exists_{x\in X}\varphi(x) \Rightarrow \exists_{x\in X}\psi(x))$.

## Ćwiczenie

Za pomocą przykładów wykazać, że następujące wyrażenia nie są prawami rachunku kwantyfikatorów:

1. $\forall_x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Rightarrow (\forall_x \varphi(x) \vee \forall_x \psi(x))$;
2. $(\exists_x \varphi(x) \wedge \exists \psi(x)) \Rightarrow \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$;
3. $\forall_x \exists_y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists_x \forall_y \varphi(x, y)$;
4. $\exists_x \exists_y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists_x \varphi(x, x)$.

## Ćwiczenie

Napisać negacje następujących zdań:

1. $\forall_{x \in X} [\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]$;
2. $\forall_{x \in \mathbb{R}} [(x < 1 \text{ lub } x > 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0]$.

## Rodzina zbiorów

### Definicja

Niech $I$ oraz $X$ będą niepustymi zbiorami i niech $f$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór $I$ w zbiór $\mathcal{P}(X)$ podzbiorów zbioru $X$, czyli funkcją, która każdemu elementowi $i$ zbioru $I$ przyporządkowuje podzbiór $f(i) = A_i$ zbioru $X$. Wtedy zbiór

$$\{A_i\colon\ i \in I\},$$

czyli zbiór $\{f(i)\colon\ i \in I\}$, nazywamy rodziną zbiorów lub zbiorem zbiorów. Mówimy też, że $\{A_i\colon\ i \in I\}$ jest indeksowaną rodziną zbiorów lub rodziną zbiorów $A_i$ indeksowanych elementami zbioru $I$. W takim przypadku też mówimy, że $I$ jest zbiorem indeksów. Indeksowaną rodzinę zbiorów $\{A_i\colon\ i \in I\}$ często oznacza się też symbolem $\{A_i\}_{i \in I}$.

## Przykład

- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

## Przykład

- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $B_n = \{n, n+1\}$

## Przykład

- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $B_n = \{n, n+1\}$
- $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $C_t = \langle -|t|; |t|\rangle$

## Przykład

- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $B_n = \{n, n+1\}$
- $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $C_t = \langle -|t|; |t|\rangle$
- $\{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $D_t = \langle \frac{1}{t^2+1}; \frac{2}{t^2+1}\rangle$

### Definicja

Niech $\mathcal{A} = \{A_i \colon i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$. Sumą (dokładniej – sumą uogólnioną) zbiorów rodziny $\mathcal{A}$ nazywamy zbiór oznaczany symbolem $\bigcup_{i \in I} A_i$ (lub $\bigcup \mathcal{A}$) i do którego należy element $x$ zbioru $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ należy do co najmniej jednego ze zbiorów rodziny $\mathcal{A}$, czyli

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists_{i \in I}\, x \in A_i. \tag{1}$$

Zatem mamy

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \colon \exists_{i \in I}\, x \in A_i\}.$$

### Definicja

Iloczynem (dokładniej – iloczynem uogólnionym), częścią wspólną lub przekrojem niepustej rodziny $\mathcal{A} = \{A_i \colon i \in I\}$ podzbiorów zbioru $X$ nazywamy zbiór oznaczany symbolem $\bigcap_{i\in I} A_i$ (lub $\bigcap \mathcal{A}$) i do którego należy element $x$ zbioru $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ należy do każdego ze zbiorów rodziny $\mathcal{A}$, czyli

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I}\, x \in A_i. \tag{2}$$

W tym przypadku mamy

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \colon \forall_{i\in I}\, x \in A_i\}.$$

**Przykład**

Wyznaczyć $\bigcup_{i\in I} A_i$ i $\bigcap_{i\in I} A_i$, gdy

$$A_i = \{i, i+1\} \quad \text{dla} \quad i \in I = \{50, 51, \ldots, 100\}.$$

## Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon\ i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$. Wtedy:

(1) $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ dla każdego $i_0 \in I$;

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Niech $\{A_i\colon\ i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$. Wtedy:

(1) $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ dla każdego $i_0 \in I$;

(2) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ dla każdego $i_0 \in I$;

## Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon\ i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$. Wtedy:

(1) $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ dla każdego $i_0 \in I$;

(2) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ dla każdego $i_0 \in I$;

(3) jeśli $A_i \subseteq A$ dla każdego $i \in I$, to $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$;

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon\ i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$. Wtedy:

(1) $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ dla każdego $i_0 \in I$;
(2) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ dla każdego $i_0 \in I$;
(3) jeśli $A_i \subseteq A$ dla każdego $i \in I$, to $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$;
(4) jeśli $A \subseteq A_i$ dla każdego $i \in I$, to $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon\ i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$. Wtedy:

(1) $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ dla każdego $i_0 \in I$;

(2) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ dla każdego $i_0 \in I$;

(3) jeśli $A_i \subseteq A$ dla każdego $i \in I$, to $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$;

(4) jeśli $A \subseteq A_i$ dla każdego $i \in I$, to $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon\ i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$. Wtedy:

(1) $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ dla każdego $i_0 \in I$;

(2) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ dla każdego $i_0 \in I$;

(3) jeśli $A_i \subseteq A$ dla każdego $i \in I$, to $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$;

(4) jeśli $A \subseteq A_i$ dla każdego $i \in I$, to $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.

### Przykład

Uzasadnimy, że jeśli $A_n = \langle -n; n\rangle$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle -n; n\rangle = \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \langle -n; n\rangle = \{0\}.$$

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Niech $\{A_i\colon i \in I\}$ oraz $\{B_i\colon i \in I\}$ będą rodzinami podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$. Wtedy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$;

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Niech $\{A_i \colon i \in I\}$ oraz $\{B_i \colon i \in I\}$ będą rodzinami podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$. Wtedy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$;

- Weźmy pod uwagę rodziny $\{A_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$ oraz $\{B_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$A_n = \langle 1; 3 + (-1)^n \rangle \quad \text{i} \quad B_n = (3 + (-1)^n; 5\rangle \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon i \in I\}$ oraz $\{B_i\colon i \in I\}$ będą rodzinami podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$. Wtedy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$;

- Weźmy pod uwagę rodziny $\{A_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ oraz $\{B_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$A_n = \langle 1; 3 + (-1)^n \rangle \quad \text{i} \quad B_n = (3 + (-1)^n; 5\rangle \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\in I} B_i$;

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon i \in I\}$ oraz $\{B_i\colon i \in I\}$ będą rodzinami podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$. Wtedy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$;

- Weźmy pod uwagę rodziny $\{A_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ oraz $\{B_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$A_n = \langle 1; 3 + (-1)^n\rangle \quad \text{i} \quad B_n = (3 + (-1)^n; 5\rangle \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\in I} B_i$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{i\in I} B_i$;

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Niech $\{A_i\colon i \in I\}$ oraz $\{B_i\colon i \in I\}$ będą rodzinami podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$. Wtedy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$;

- Weźmy pod uwagę rodziny $\{A_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ oraz $\{B_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$A_n = \langle 1; 3 + (-1)^n\rangle \quad \text{i} \quad B_n = (3 + (-1)^n; 5\rangle \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\in I} B_i$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{i\in I} B_i$;

(4) $\bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$.

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Jeśli $\{A_i \colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcup_{i\in I} A_i$;

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Jeśli $\{A_i : i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcup_{i\in I} A_i$;

(2) $\bigcap_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcap_{i\in I} A_i$;

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Jeśli $\{A_i \colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcup_{i\in I} A_i$;

(2) $\bigcap_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcap_{i\in I} A_i$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{i\in I} A_i$;

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Jeśli $\{A_i : i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcup_{i\in I} A_i$;

(2) $\bigcap_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcap_{i\in I} A_i$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{i\in I} A_i$;

(4) $\bigcap_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcap_{i\in I} A_i$.

**Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)**

Jeśli $\{A_i\colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcup_{i\in I} A_i$;

(2) $\bigcap_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcap_{i\in I} A_i$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{i\in I} A_i$;

(4) $\bigcap_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcap_{i\in I} A_i$.

### Twierdzenie (działania na rodzinach zbiorów)

Jeśli $\{A_i \colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcup_{i\in I} A_i$;

(2) $\bigcap_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcap_{i\in I} A_i$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{i\in I} A_i$;

(4) $\bigcap_{i\in I}(A \cup A_i) = A \cup \bigcap_{i\in I} A_i$.

### Przykład

Dla zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ i rodziny $\{A_i \colon i \in I\}$, gdzie $A_i = \{i, i+1\}$ oraz $i \in I = \{50, 51, \ldots, 100\}$, wyznaczyć:

(1) $\bigcup_{i\in I}(A \cup A_i)$;

(2) $\bigcap_{i\in I}(A \cap A_i)$;

(3) $\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)$;

(4) $\bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$.

## Twierdzenie (Prawa de Morgana)

Jeśli $\{A_i \colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $A - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A - A_i)$;

**Twierdzenie (Prawa de Morgana)**

Jeśli $\{A_i\colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $A - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I}(A - A_i)$;

(2) $A - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I}(A - A_i)$.

**Twierdzenie (Prawa de Morgana)**

Jeśli $\{A_i \colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $A - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A - A_i)$;

(2) $A - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A - A_i)$.

## Twierdzenie (Prawa de Morgana)

Jeśli $\{A_i\colon i \in I\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $X$ i $A \subseteq X$, to mamy:

(1) $A - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A - A_i)$;

(2) $A - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A - A_i)$.

## Przykład

Dla zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ i rodziny $\{A_i\colon i \in I\}$, gdzie $A_i = \{i, i+1\}$ oraz $i \in I = \{50, 51, \ldots, 100\}$, wyznaczyć:

(1) $\bigcap_{i\in I}(A - A_i)$;

(2) $\bigcup_{i\in I}(A - A_i)$.

**Wniosek (Prawa de Morgana)**

Dla każdej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$ mamy:

(1) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$ (pierwsze prawo de Morgana)

**Wniosek (Prawa de Morgana)**

Dla każdej rodziny $\{A_i \colon i \in I\}$ podzbiorów ustalonej przestrzeni $X$ mamy:

(1) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$ (pierwsze prawo de Morgana)

(2) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$ (drugie prawo de Morgana)

### Definicja (ciało zbiorów)

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów ustalonego zbioru $X$ nazywamy ciałem zbiorów (lub ciałem podzbiorów zbioru $X$), gdy ma ona następujące trzy własności:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

## Definicja (ciało zbiorów)

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów ustalonego zbioru $X$ nazywamy ciałem zbiorów (lub ciałem podzbiorów zbioru $X$), gdy ma ona następujące trzy własności:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

(2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$;

### Definicja (ciało zbiorów)

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów ustalonego zbioru $X$ nazywamy ciałem zbiorów (lub ciałem podzbiorów zbioru $X$), gdy ma ona następujące trzy własności:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

(2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$;

(3) $A \cup B \in \mathcal{A}$ dla każdych zbiorów $A$, $B \in \mathcal{A}$.

### Definicja (ciało zbiorów)

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów ustalonego zbioru $X$ nazywamy ciałem zbiorów (lub ciałem podzbiorów zbioru $X$), gdy ma ona następujące trzy własności:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

(2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$;

(3) $A \cup B \in \mathcal{A}$ dla każdych zbiorów $A$, $B \in \mathcal{A}$.

### Definicja (ciało zbiorów)

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów ustalonego zbioru $X$ nazywamy ciałem zbiorów (lub ciałem podzbiorów zbioru $X$), gdy ma ona następujące trzy własności:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

(2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$;

(3) $A \cup B \in \mathcal{A}$ dla każdych zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$.

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru $X$ nazywamy $\sigma$-ciałem zbiorów, gdy $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów i

(4) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ dla każdych zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$.

**Twierdzenie**

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru $X$ jest ciałem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

**Twierdzenie**

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru $X$ jest ciałem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

(2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$;

**Twierdzenie**

Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru $X$ jest ciałem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(1) $X \in \mathcal{A}$;

(2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$;

(3′) $A \cap B \in \mathcal{A}$ dla każdych zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$.

## Aksjomatyka teorii mnogości

• **Aksjomat ekstensjonalności**. *Dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają one te same elementy, czyli*

$$\forall_x \forall_y \, [x = y \Leftrightarrow \forall_z \, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)].$$

• **Aksjomat zbioru pustego**. *Istnieje zbiór, który nie ma żadnego elementu, czyli*

$$\exists_x \forall_y \, \sim (y \in x).$$

• **Aksjomat pary**. *Dla każdych dwóch zbiorów $x$ i $y$ istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są $x$ i $y$, czyli*

$$\forall_x \forall_y \exists_z \forall_t \, [t \in z \Leftrightarrow t = x \vee t = y].$$

• **Aksjomat sumy**. *Każdy zbiór ma sumę, czyli dla każdego zbioru* $x$ *istnieje zbiór* $y$ (*oznaczany też przez* $\bigcup x$), *którego elementami są tylko i wyłącznie elementy elementów zbioru* $x$, *czyli*

$$\forall_x \exists_y \forall_z [z \in y \Leftrightarrow \exists_{t \in x} z \in t].$$

•**Aksjomat zbioru potęgowego**. *Dla każdego zbioru istnieje zbiór wszystkich jego podzbiorów, czyli*

$$\forall_x \exists_y \forall_z [z \in y \Leftrightarrow \forall_u (u \in z \Rightarrow u \in x)].$$

• **Aksjomat nieskończoności**. *Istnieje zbiór* $x$ *taki, że:*
(1) $\emptyset \in x$;
(2) $\forall_y [y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x]$.

- **Aksjomat wyróżniania** (**podzbiorów**, **oddzielania**). *Dla każdego zbioru* $x$ *i każdej formuły* $\varphi$ (*której zakresem zmienności jest zbiór* $x$) *istnieje zbiór* $\{y \in x \colon \varphi(y)\}$, *którego elementami są tylko i wyłącznie elementy zbioru* $x$ *spełniające* $\varphi$.
- **Aksjomat wyboru** (**pewnik wyboru**). *Dla każdej rodziny zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór, który z każdym ze zbiorów tej rodziny ma dokładnie jeden element wspólny.*
- **Aksjomat regularności** (**ufundowaniu**). *W każdym niepustym zbiorze* $x$ *istnieje element* $y$ *taki, że żaden element zbioru* $y$ *nie jest elementem zbioru* $x$.

## Ćwiczenie

Wykazać, że jeśli $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ i $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$ dla $i \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ i $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

## Ćwiczenie

Wyznaczyć sumę $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$, gdy $A_t = \{(x, tx)\colon x \in \mathbb{R}\}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

## Ćwiczenie

Wyznaczyć sumy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ oraz iloczyny $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ rodziny $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie:

1. $A_n = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geqslant n\}$;
2. $A_n = \{x \in \mathbb{R}\colon\ -\frac{1}{n+1} < x < 2 - \frac{1}{n+1}\}$;
3. $A_n = \{x \in \mathbb{R}\colon\ n^2 \leqslant x \leqslant (n+1)^2\}$;
4. $A_n = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant n+1\}$.

## Ćwiczenie

Wyznaczyć sumy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ oraz iloczyny $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ rodziny $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie:

1. $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + (y-n)^2 \leqslant n^2\}$;
2. $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \geqslant \frac{x^2}{n+1}\}$.