Wstęp do logiki i teorii mnogości

Jerzy Topp

Następujące formuły zdaniowe zmiennych zdaniowych p i q zapisać w postaci kanonicznej alternatywno-koniunkcyjnej:

1. $p \vee q$; 2. $p \Rightarrow q$; 3. $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$.

Następujące formuły zdaniowe zmiennych zdaniowych p, q i r zapisać w postaci kanonicznej alternatywno-koniunkcyjnej:

1. $(p \vee q) \wedge (r \Rightarrow \sim r)$;
2. $((p \wedge q) \Rightarrow \sim r) \Rightarrow ((p \Rightarrow \sim r) \Rightarrow p)$;
3. $((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \vee q) \wedge \sim p)$.

Zbadać spełnialność następującego zbioru formuł zdaniowych:

1. $\{p \Rightarrow \sim q, q \vee \sim r, r \Rightarrow \sim p\}$;
2. $\{p \Rightarrow r, p \wedge q, q \Rightarrow \sim r\}$;
3. $\{\sim(\sim q \vee p), p \vee \sim r, q \Rightarrow r\}$.

Wykazać, że zbiór formuł zdaniowych

$$\{q \Rightarrow r, r \Rightarrow \sim p, q, p\}$$

jest sprzeczny.

Zbadać, który z następujących schematów jest regułą wnioskowania:

1. $\dfrac{p \wedge q \Rightarrow \sim r,\ p}{r \Rightarrow \sim q}$;
2. $\dfrac{(p \Rightarrow q) \Rightarrow r, \sim p}{r}$;
3. $\dfrac{\sim (p \Rightarrow q)}{p}$;
4. $\dfrac{(p \vee q) \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$;
5. $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \sim p \Rightarrow q}{q}$;
6. $\dfrac{p \Rightarrow \sim q,\ r \Rightarrow q,\ r}{\sim p}$.

Metodą nie wprost udowodnić, że schemat

$$\frac{p \Rightarrow (r \Rightarrow s)}{(r \wedge \sim s) \Rightarrow \sim p}$$

jest regułą wnioskowania.

Załóżmy, że prawdziwe są następujące dwa zdania:

(a) Lubię Kasię lub lubię Basię.

(b) Jeśli lubię Kasię, to lubię też Basię.

Czy z tego wynika, że lubię Basię? A może z tych założeń wynika, że lubię Kasię? Który z tych wniosków jest poprawny?

Załóżmy, że prawdziwe są następujące dwa zdania:

(a) Lubię Kasię lub lubię Basię.

(b) Jeśli lubię Kasię, to lubię też Basię.

Czy z tego wynika, że lubię Basię? A może z tych założeń wynika, że lubię Kasię? Który z tych wniosków jest poprawny?

$$\frac{K \vee B,\ K \Rightarrow B}{B}$$

$$\frac{K \vee B,\ K \Rightarrow B}{K}$$

Zbadać formalną poprawność następującego rozumowania:

Jeśli Stefan jest matematykiem, to Stefan zna logikę.
Stefan zna logikę.
Zatem Stefan jest matematykiem.

Wyznaczyć wartość logiczną zdania:

Jeśli Jaś nie zna logiki, to jeśli Jaś zna logikę, to $1 + 2 = 5$.

Orygenes (III w.) jest autorem następującej wypowiedzi:

Jeśli wiesz, że umarłeś, to nie umarłeś!
Jeśli wiesz, że umarłeś, to umarłeś! Zatem nie wiesz, że umarłeś.

Czy konkluzja wypowiedzi Orygenesa jest poprawna?

O potrzebie logiki Arystoteles (384–322 r. p.n.e.) wypowiedział się w następujący sposób:

Logika jest potrzebna,
bo jeśli nie jest potrzebna,
to i tak jest potrzebna dla poprawnego uzasadnienia, że nie jest potrzebna.

Uzasadnić poprawność rozumowania Arystotelesa.

Niech p oznacza zdanie "logika jest potrzebna". Jaki jest schemat wypowiedzi Arystotelesa?

Od średniowiecza w środowisku żaków (i obecnych studentów) popularnością cieszy się następujący łańcuszek:

Kto pije, ten śpi;
kto śpi, nie grzeszy;
kto nie grzeszy, jest święty.
Zatem, kto pije, jest święty.

(Oryginalną wersją tego łańcuszka jest: *Qui bibit, dormit; qui dormit, non peccat; qui non peccat, sanctus est; ergo qui bibit, sanctus est.*) Czy konkluzja *Kto pije, jest święty* jest logicznie uzasadniona?
Ozn. odpowiednio przez p, q, r i s "ktoś pije", "ktoś śpi", "ktoś grzesz", "ktoś jest święty".

Według złośliwej legendy decyzję o spaleniu słynnej Biblioteki Aleksandryjskiej Kalif Omar miał uzasadniać w następujący sposób:

Jeżeli księgi z tej biblioteki zawierają to samo, co jest w Koranie, to są niepotrzebne i dlatego należy je spalić.
Jeżeli natomiast nie zgadzają się z treścią Koranu, to są szkodliwe i dlatego należy je spalić.
Skoro księgi z tej biblioteki są niepotrzebne lub szkodliwe, więc należy je spalić.

Przedstawić schemat rozumowania przypisywanego Kalifowi Omaraowi. Czy konkluzja o spaleniu biblioteki była logiczną konsekwencją wcześniejszych założeń? (Faktycznie starożytny księgozbiór zniszczyli legioniści Cezara w 48 r. p.n.e. Resztę księgozbioru kazał zniszczyć cesarz Teodozjusz I na mocy edyktu z 389 roku.)

Niech p, q s i r oznaczają odpowiednio zdania:

p – księgi zawierają to samo co jest w Koranie (wtedy $\sim p$ jest zdaniem *księgi nie zgadzają się z treścią Koranu*)
q – księgi są niepotrzebne,
s – spalić księgi,
r – księgi są szkodliwe.

Niech p, q s i r oznaczają odpowiednio zdania:

p – księgi zawierają to samo co jest w Koranie (wtedy $\sim p$ jest zdaniem *księgi nie zgadzają się z treścią Koranu*)
q – księgi są niepotrzebne,
s – spalić księgi,
r – księgi są szkodliwe.
Wtedy rozumowanie przypisywane Kalifowi Omarowi jest zgodne ze schematem

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s),\ (\sim p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s),\ q \vee r}{s}.$$

Niech p, q s i r oznaczają odpowiednio zdania:

p – księgi zawierają to samo co jest w Koranie (wtedy $\sim p$ jest zdaniem *księgi nie zgadzają się z treścią Koranu*)
q – księgi są niepotrzebne,
s – spalić księgi,
r – księgi są szkodliwe.
Wtedy rozumowanie przypisywane Kalifowi Omarowi jest zgodne ze schematem

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s),\ (\sim p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s),\ q \vee r}{s}.$$

A ponieważ schemat ten jest regułą wnioskowania (łatwo to sprawdzić), więc konkluzja o spaleniu biblioteki była logiczną konsekwencją poczynionych założeń.