

Nazwisko i imię	Nr albumu	Kierunek studiów	Rok studiów	Data egzaminu	A
-----------------	-----------	------------------	-------------	---------------	---

EGZAMIN ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

Prawdziwość każdego stwierdzenia zaznacz znakiem \boxplus , a jego fałszywość znakiem \boxminus . Brak odpowiedzi potraktujemy tak samo, jak błędną odpowiedź. Tam gdzie trzeba, przedstawić stosowny dowód.

1. Jeśli $A = \{2, 10, 8, 4, 6\}$ i $B = \{3, 4, 6, 9, 10\}$, to spośród równości

(1) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$,

(2) $A \cap B = \{4, 6, 10\}$,

(3) $A - B = \{2, 8, 6\}$

prawdziwe są: (a) tylko (1) i (2) ☐; (b) tylko (2) ☐; (c) tylko (3) ☐; (d) tylko (2) i (3) ☐.

2. Dane są podzbiory A , B i C zbioru X , gdzie $C = A - B$. Wtedy: (a) $C \subseteq A$ ☐; (b) $C \subseteq B$ ☐; (c) $C \cap B = \emptyset$ ☐; (d) $A \cap C \cap B' = \emptyset$ ☐; (e) $A \cap B' \cap C = C$ ☐.

3. Dane są zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 17\}$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 5\}$. Wtedy zbiorem $A \cap B$ jest: (a) $\{4\}$ ☐; (b) $\{1, 4\}$ ☐; (c) $\{(1, 4)\}$ ☐; (d) $\{(4, 1)\}$ ☐; (e) $\{(1, 4), (4, 1)\}$ ☐.

4. Zdanie $(p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r)$ jest fałszywe, gdy:

(a) p jest fałszywe, q fałszywe i r fałszywe ☐;

(b) p jest prawdziwe, q fałszywe i r fałszywe ☐;

(c) p jest prawdziwe, q prawdziwe i r fałszywe ☐;

(c) p jest prawdziwe, q prawdziwe i r prawdziwe ☐.

5. Zaciemniona część diagramu Venna reprezentuje zbiór:

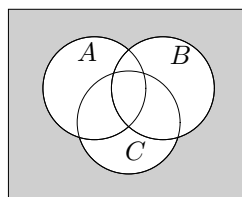
(a) $(A' \cap B') \cup (B' \cap C') \cup (C' \cap A')$ ☐;

(b) $A' \cup B' \cup C'$ ☐;

(c) $A' \cap B' \cap C'$ ☐;

(d) $(A \cap B') \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')$ ☐;

(e) $(A' \cap C') \cup (B' \cap C')$ ☐.



6. Spośród tablic wartości logicznych

(1)

p	q	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

(2)

p	q	$(p \Rightarrow (p \wedge q)) \vee ((p \wedge q) \Rightarrow p)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

i (3)

p	q	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

prawdziwe są: (a) (1), (2) i (3) ☐; (b) tylko (2) ☐; (c) tylko (1) i (2) ☐; (d) tylko (1) i (3) ☐.

7. Spośród 16 możliwych układów wartości logicznych zdań p , q , r i s , zdanie $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge s)$ jest prawdziwe dla dokładnie: (a) 6 układów ☐; (b) 7 układów ☐; (c) 8 układów ☐; (d) 12 układów ☐.

8. Sprawdzić, czy schemat $\frac{p \Rightarrow (\sim q), r \Rightarrow q, r}{\sim p}$ jest regułą wnioskowania? Uzasadnić swoje stwierdzenie.

9. Wykazać, że jeśli $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ i $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ dla $i \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ i $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

10. Indukcyjnie wykazać, że liczba $10^{3n+1} + 3(-1)^n$ jest podzielna przez 13 dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.

11. Dane są funkcje $f, g: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$, gdzie $\{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 4), (5, 3)\} \subseteq f$ i $g(x) = 2x$ dla każdego $x \in \mathbb{N}_+$. Wtedy:
(a) g jest surjekcją ☐; (b) g jest injekcją ☐; (c) f jest injekcją ☐; (d) $\exists x \in \mathbb{N}_+ f(x) = g(x)$ ☐; (e) $\forall x \in \mathbb{N}_+ \exists y \in \mathbb{N}_+ f(x) < g(y)$ ☐.

12. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ i $C = \{x, y, z\}$ oraz relacje $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ i $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$. Wtedy:
(a) $S \circ R =$
(b) $R^{-1} \circ S^{-1} =$
(c) $R \circ R^{-1} =$

13. Wykazać, że dla funkcji $f: X \rightarrow Y$ oraz podzbiorów A_1 i A_2 zbioru X mamy $f(A_1) - f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2)$. Podać przykład funkcji f oraz zbiorów A_1 i A_2 pokazujących, że może być $f(A_1) - f(A_2) \neq f(A_1 - A_2)$.

14. Wykazać, że zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych $\{0, 2, 4, \dots\}$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich nieparzystych liczb całkowitych $\{\dots, -3, -1, 1, 5, \dots\}$.