Wstęp do logiki i teorii mnogości

Wyznaczyć matrycę logiczną formuły zdaniowej:

1. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$;
2. $\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$;
3. $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (\sim p \wedge q)$;
4. $[(p \Leftrightarrow q) \vee (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (\sim p \wedge r)$.

Zbadać, czy następujący schemat zdaniowy jest tautologią:

1. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$;
2. $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge r))$;
3. $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$;
4. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$;
5. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \vee q)$;
6. $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$.

Zbadać, która z poniższych formuł zdaniowych jest kontrtautologią:

1. $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$;
2. $\sim((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p))$;
3. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$;
4. $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$.

Pokazać, że następujące formuły są tautologiami:

1. $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$ (prawo Dunsa Scotusa);
2. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (prawo Clarisa);
3. $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow p$;
4. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$;
5. $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$;
6. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ (prawo Pierce'a);
7. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ (prawo eliminacji równoważności);
8. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (prawo Fregego).

Przez sprowadzenie do sprzeczności wykazać, że schemat zdaniowy

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$$

jest tautologią.

Czy schemat

$$\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow \sim r]\} \Rightarrow p \wedge q \wedge r$$

jest tautologią?

Nie korzystając z metody zero-jedynkowej, wykazać każdą z następujących czterech równoważności:

1. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Leftrightarrow [\sim p \wedge q]$;
2. $[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow \sim q]$;
3. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q]$;
4. $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p]$.

Zbadać logiczną równoważność schematów zdaniowych:

1. $\sim(p\vee \sim q) \vee (\sim p\wedge \sim q)$ i $\sim p$;
2. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ i $\sim q$;
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge q)]$ i $p \vee q$;
4. $(p \Rightarrow s) \vee (\sim s \Rightarrow t)$ i $p \Rightarrow (s \vee p)$;
5. $[(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow q$ i $q \vee (\sim q)$;
6. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ i $\sim p \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q)$;
7. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ i $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow q$.

Formuły zdaniowe $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ i $p \Leftrightarrow q$ zapisać za pomocą funktorów $\sim$ i $\wedge$, czyli w taki sposób, że w ich zapisie nie występuje żaden z funktorów $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$.

Formułę zdaniową

$$(p \vee (\sim q \Rightarrow r)) \Rightarrow (\sim r \vee p)$$

zapisać w postaci formuły logicznie równoważnej, korzystając tylko z funktorów $\sim$ i $\wedge$.

Formułę zdaniową

$$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim p$$

zapisać w postaci formuły logicznie równoważnej, korzystając tylko z funktorów $\sim$ i $\vee$.

Każdą z następujących formuł zdaniowych zapisać w możliwie najprostszej postaci:

1. $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$;
2. $[(p \vee q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow q$;
3. $\sim (p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$;
4. $(p \wedge q) \vee \sim (\sim p \vee q)$;
5. $(p \vee r) \Rightarrow [(q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)]$;
6. $((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)) \wedge (r \Rightarrow s)$.

Zbadać spełnialność następującego zbioru formuł zdaniowych:

1. $\{p \Rightarrow \sim q, q \vee \sim r, r \Rightarrow \sim p\}$;
2. $\{p \Rightarrow r, p \wedge q, q \Rightarrow \sim r\}$;
3. $\{\sim(\sim q \vee p), p \vee \sim r, q \Rightarrow r\}$.

Wykazać, że zbiór formuł zdaniowych

$$\{q \Rightarrow r, r \Rightarrow \sim p, q, p\}$$

jest sprzeczny.

Załóżmy, że prawdziwe są następujące dwa zdania:

(a) *Lubię Kasię lub lubię Basię.*

(b) *Jeśli lubię Kasię, to lubię też Basię.*

Czy z tego wynika, że lubię Basię? A może z tych założeń wynika, że lubię Kasię? Który z tych wniosków jest poprawny?

$$\frac{K \vee B,\ K \Rightarrow B}{B}$$

$$\frac{K \vee B,\ K \Rightarrow B}{K}$$

Zbadać, który z następujących schematów jest regułą wnioskowania:

1. $\dfrac{p \wedge q \Rightarrow \sim r,\ p}{r \Rightarrow \sim q}$;
2. $\dfrac{(p \Rightarrow q) \Rightarrow r, \sim p}{r}$;
3. $\dfrac{\sim (p \Rightarrow q)}{p}$;
4. $\dfrac{(p \vee q) \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$;
5. $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \sim p \Rightarrow q}{q}$;
6. $\dfrac{p \Rightarrow \sim q,\ r \Rightarrow q,\ r}{\sim p}$.

Metodą nie wprost udowodnić, że schemat

$$\frac{p \Rightarrow (r \Rightarrow s)}{(r \wedge \sim s) \Rightarrow \sim p}$$

jest regułą wnioskowania.

Zbadać formalną poprawność następującego rozumowania:

Jeśli Stefan jest matematykiem, to Stefan zna logikę. Stefan zna logikę. Zatem Stefan jest matematykiem.