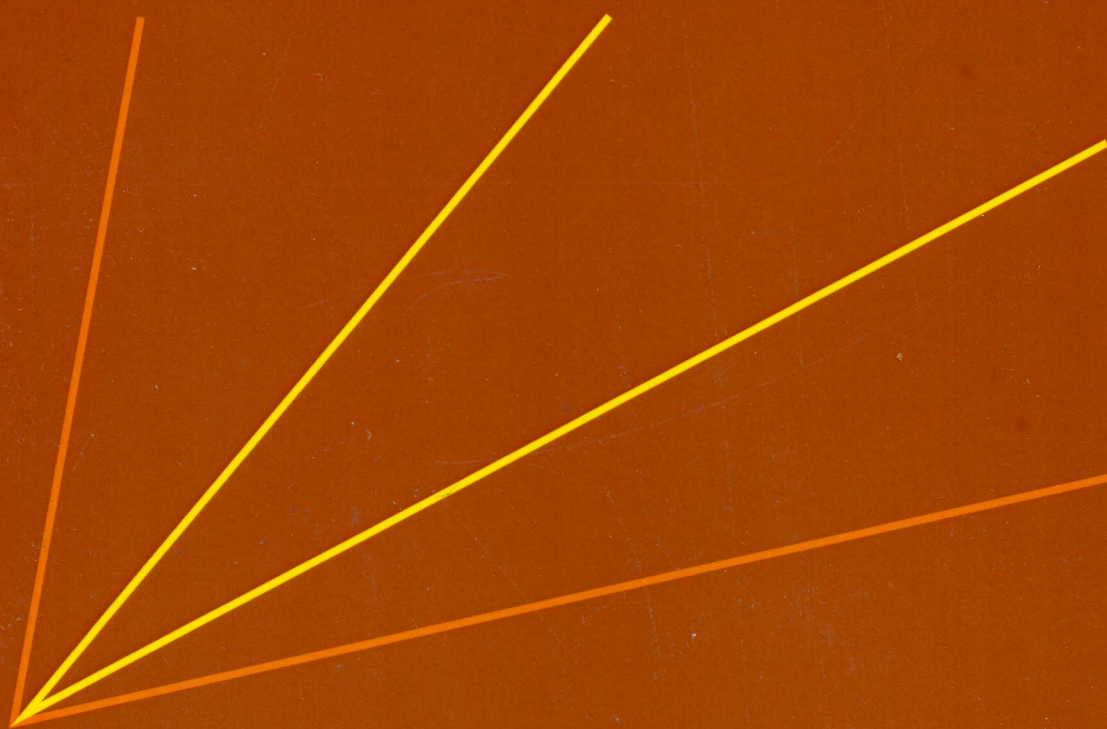


Jerzy Topp

# **Matematyka**

## **Funkcje jednej zmiennej**



Wydawnictwo PWSZ w Elblągu

Jerzy Topp

# Matematyka

## Funkcje jednej zmiennej

---

Elbląg 2012

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA PWSZ W ELBLĄGU  
*dr hab. inż. Jerzy Łabanowski, prof. PWSZ w Elblągu*

**RECENZENT**

*dr hab. Grażyna Kwiecińska, prof. AP*

REDAKCJA, KOREKTA I PROJEKT OKŁADKI

Wydawnictwo Techniczno-Naukowe JAS

e-mail: jagoda.szczerkowska@gmail.com

*Olga Strzelec*

*Jerzy Paczyński*

Wydano za zgodą Rektora PWSZ w Elblągu

© Copyright by Wydawnictwo PWSZ w Elblągu

**ISBN 978-83-62336-16-6**

# Spis treści

<b>PRZEDMOWA</b> . . . . .	5
<b>Rozdział 1. CIĄGI LICZBOWE</b> . . . . .	7
1.1. Ciągi i ich pierwsze własności . . . . .	7
1.2. Granica ciągu . . . . .	11
1.3. Pierwsze twierdzenia o granicach ciągów liczbowych . . . . .	14
1.4. Warunek konieczny i dostateczny zbieżności ciągu liczbowego . . . . .	22
1.5. Ważniejsze granice i kolejne przykłady obliczania granic ciągów . . . . .	22
1.6. Zbieżność ciągów monotonicznych . . . . .	26
1.7. Ciągi rekurencyjne . . . . .	30
1.8. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	31
<b>Rozdział 2. SZEREGI LICZBOWE</b> . . . . .	33
2.1. Szeregi liczbowe – pierwsze definicje i przykłady . . . . .	33
2.2. Szereg geometryczny . . . . .	35
2.3. Ogólne warunki zbieżności szeregów liczbowych . . . . .	37
2.4. Szeregi o nieujemnych wyrazach . . . . .	40
2.5. Bezwzględna i warunkowa zbieżność szeregu . . . . .	40
2.6. Szereg naprzemienny . . . . .	48
2.7. Szeregi potęgowe . . . . .	51
2.8. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	56
<b>Rozdział 3. GRANICA FUNKCJI I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI</b> . . . . .	59
3.1. Granica funkcji . . . . .	59
3.2. Granice jednostronne funkcji . . . . .	64
3.3. Podstawowe twierdzenia o granicach funkcji . . . . .	70
3.4. Ważniejsze granice . . . . .	76
3.5. Ciągłość funkcji . . . . .	81
3.6. Ciągłości jednostronne i nieciągłości funkcji . . . . .	88
3.7. Własności funkcji ciągłej na przedziale domkniętym . . . . .	92
3.8. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	98
<b>Rozdział 4. POCHODNA FUNKCJI</b> . . . . .	100
4.1. Definicja pochodnej funkcji . . . . .	100
4.2. Interpretacje pochodnej . . . . .	103
4.3. Obliczanie pochodnej funkcji . . . . .	105
4.4. Pochodna funkcji odwrotnej . . . . .	108
4.5. Funkcje kołowe (cyklometryczne) i ich pochodne . . . . .	109
4.6. Funkcje hiperboliczne i ich pochodne . . . . .	112
4.7. Pochodna funkcji złożonej . . . . .	115
4.8. Pochodne wyższych rzędów . . . . .	120
4.9. Pochodna funkcji uwikłanej . . . . .	123
4.10. Pochodna funkcji określonej parametrycznie . . . . .	127
4.11. Linearyzacja funkcji i różniczka funkcji . . . . .	129
4.12. Ekstremum funkcji . . . . .	133
4.13. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji . . . . .	135
4.14. Twierdzenia o wartościach pośrednich . . . . .	137
4.15. Wzór Taylora i wzór Maclaurina . . . . .	139
4.16. Badanie monotoniczności i ekstremum funkcji . . . . .	142
4.17. Wklęsłości, wypukłości i punkty przegięcia funkcji . . . . .	148
4.18. Twierdzenie de l'Hospitala . . . . .	151
4.19. Asymptoty . . . . .	155

4.20. Badanie funkcji . . . . .	159
4.21. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	163
<b>Rozdział 5. CAŁKA NIEOZNACZONA . . . . .</b>	<b>166</b>
5.1. Definicja całki nieoznaczonej . . . . .	166
5.2. Całkowanie przez podstawianie . . . . .	169
5.3. Całkowanie przez części . . . . .	176
5.4. Przykłady redukcyjnych metod obliczania całek . . . . .	178
5.5. Całkowanie funkcji wymiernych . . . . .	180
5.6. Całkowanie funkcji trygonometrycznych . . . . .	186
5.6.1. Całki z iloczynu potęg sinusa i cosinusa . . . . .	186
5.6.2. Całkowanie funkcji postaci $\sin mx \cos nx$ , $\sin mx \sin nx$ oraz $\cos mx \cos nx$ . . . . .	188
5.6.3. Uniwersalne podstawienie trygonometryczne . . . . .	192
5.7. Całkowanie niektórych funkcji niewymiernych . . . . .	195
5.7.1. Całkowanie prostych funkcji pierwiastkowych . . . . .	195
5.7.2. Całkowanie metodą współczynników nieoznaczonych . . . . .	197
5.7.3. Podstawienie Eulera . . . . .	198
5.7.4. Podstawienia trygonometryczne . . . . .	200
5.8. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	204
<b>Rozdział 6. CAŁKA OZNACZONA . . . . .</b>	<b>205</b>
6.1. Wprowadzenie do definicji całki oznaczonej . . . . .	205
6.2. Definicja całki oznaczonej . . . . .	208
6.3. Podstawowe własności całki oznaczonej . . . . .	214
6.4. Funkcja górnej granicy całkowania . . . . .	220
6.5. Wzór Wallisa i wzór Stirlinga . . . . .	228
<b>Rozdział 7. ZASTOSOWANIA CAŁEK . . . . .</b>	<b>230</b>
7.1. Pole obszaru . . . . .	230
7.2. Długość łuku krzywej . . . . .	240
7.3. Objętość bryły . . . . .	244
7.4. Objętość bryły obrotowej . . . . .	246
7.5. Pole powierzchni bryły obrotowej . . . . .	251
7.6. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	254
<b>Rozdział 8. CAŁKI NIEWŁAŚCIWE . . . . .</b>	<b>256</b>
8.1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju . . . . .	256
8.2. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju . . . . .	261
8.3. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych . . . . .	264
8.4. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	271
<b>Rozdział 9. ROZWIJANIE FUNKCJI W SZEREGI POTĘGOWE . . . . .</b>	<b>273</b>
9.1. Pierwsze przykłady . . . . .	273
9.2. Szereg Taylora i szereg Maclaurina . . . . .	280
9.3. Obliczenia z wykorzystaniem szeregów Taylora . . . . .	287
9.4. Ćwiczenia sprawdzające . . . . .	292
<b>Odpowiedzi do ćwiczeń . . . . .</b>	<b>293</b>
<b>Indeks . . . . .</b>	<b>302</b>

# PRZEDMOWA

Z przyjemnością udostępniam studentom kolejną część zbioru notatek do wykładów i ćwiczeń z matematyki, jakie prowadzę dla studentów informatyki, budownictwa i mechaniki w Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Elblągu oraz w Uniwersytecie Gdańskim (i jakie prowadziłem też w Politechnice Gdańskiej). Tu przedstawiam elementy rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej. Inne części notatek przedstawiłem w podręcznikach „Wstęp do matematyki” i „Algebra liniowa”.

Książka ta jest połączeniem klasycznego podręcznika ze zbiorem zadań. Przedstawiam w niej podstawowe definicje i twierdzenia, dużą liczbę przykładów i rysunków ilustrujących pojęcia i teorię oraz bardzo obszerne zestawy zadań do prowadzenia ćwiczeń w uczelniach oraz do samodzielnego rozwiązania. Ufam, że ta duża liczba przykładów i rysunków ułatwi zrozumienie przedstawianych treści, a dzięki załączonym zadaniom student odkryje dalsze zależności pomiędzy poznawanymi pojęciami i uzyska spodziewaną biegłość rachunkową. W celu kontroli poprawności rozwiązywania zadań, na końcu podręcznika przedstawiłem odpowiedzi do zadań.

Podręcznik ten przeznaczony jest dla studentów poprzednio wspomnianych kierunków studiów, ale ufam, że będzie on przydatny również dla wielu innych. Zakładam, że studenci, których będę uczył w oparciu o ten podręcznik, w stopniu zadawalającym znać będą podstawy matematyki w zakresie liceum – znać będą podstawowe własności działań na liczbach oraz własności podstawowych funkcji elementarnych. Zakładam też, że studenci aktywnie i uczciwie będą chcieli poznawać elementy matematyki na poziomie wymaganym w szkole wyższej. Tym podręcznikiem chcę im to ułatwić. Chcę też dostarczyć studentom prostych narzędzi matematycznych i przygotować ich do zrozumienia kolejnych przedmiotów ścisłych, informatycznych oraz technicznych znajdujących się w programach ich studiów. Osiągnięcie wspomnianych celów będzie wspólnym sukcesem autora i studentów. Dla takich studentów i celów napisałem ten podręcznik.

Wszelkie uwagi o tym podręczniku i informacje o zauważonych usterkach można kierować na adres [j.topp@inf.ug.edu.pl](mailto:j.topp@inf.ug.edu.pl). Pełna informacja o poprawionych fragmentach dostępna będzie pod adresem [inf.ug.edu.pl/~jtopp](mailto:inf.ug.edu.pl/~jtopp). Tam też znajdą się wskazówki do trudniejszych ćwiczeń.

Pragnę wyrazić swoje podziękowanie pani profesor Grażynie Kwiecińskiej za jej uwagi i poprawki, które pozwoliły ulepszyć przedkładany tekst.

Na koniec mam przyjemność napisać, że praca nad tym podręcznikiem nie byłaby możliwa bez wsparcia mojej rodziny, której tę książkę poświęcam.

*Jerzy Topp*



## Rozdział 1

# CIĄGI LICZBOWE

### 1.1. Ciągi i ich pierwsze własności

**Definicja 1.1.1.** Funkcję

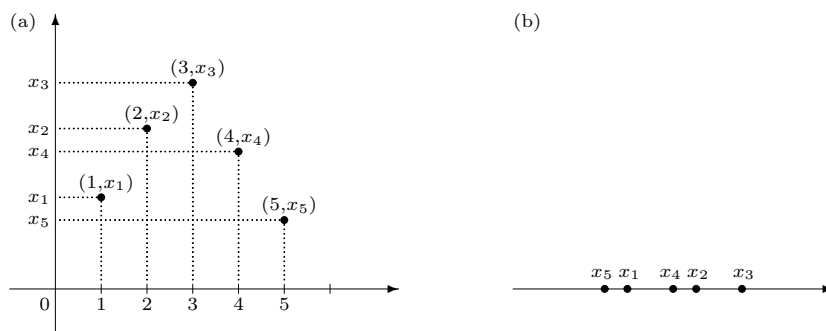
$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

która każdej liczbie naturalnej  $n$  przyporządkowuje liczbę rzeczywistą  $f(n) = x_n$ , nazywamy *nieskończonym ciągiem rzeczywistym* lub po prostu *ciągiem*. Wartość tej funkcji dla liczby  $n$ , czyli liczbę  $x_n$ , nazywamy  *$n$ -tym wyrazem* (a czasami — *wyrazem ogólnym*) ciągu (1.1). Ciąg (1.1) może być określony przez podanie reguły tworzenia jego wyrazów lub przez wyliczenie

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

początkowych jego wyrazów. (W tym ostatnim przypadku wyrażamy nadzieję, że czytając początkowe wyrazy ciągu, dobrze zrozumie się regułę tworzenia wszystkich wyrazów ciągu.) Na oznaczenie ciągu (1.1) używamy symbolu  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lub częściej  $(x_n)$ . W wielu przypadkach będziemy używać sformułowania „ciąg  $x_n$ ”, mając na myśli ciąg o wyrazie ogólnym  $x_n$ .

Na rys. 1.1 przedstawiliśmy dwie możliwe geometryczne ilustracje ciągu  $(x_n)$ . W pierwszym przypadku każdej liczbie naturalnej  $n$  odpowiada punkt  $(n, x_n)$  na płaszczyźnie. W drugim przypadku liczbie naturalnej  $n$  odpowiada punkt  $x_n$  na osi liczbowej.



Rysunek 1.1. Ciąg  $(x_n)$  na płaszczyźnie (a) i na osi liczbowej (b)

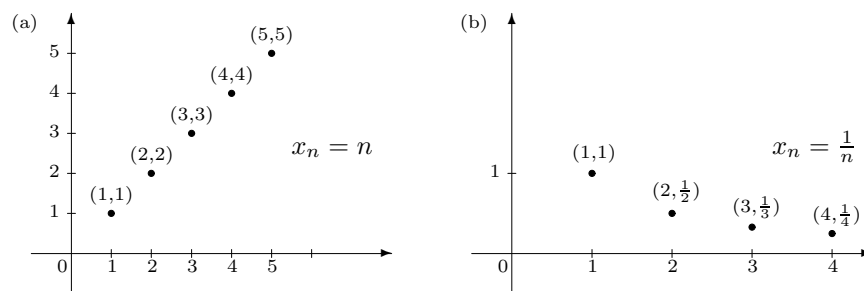
**Przykład 1.1.1.** Pierwszymi wyrazami ciągu  $(x_n) = \left(\frac{3n}{n+1}\right)$  są liczby  $\frac{3 \cdot 1}{1+1}, \frac{3 \cdot 2}{2+1}, \frac{3 \cdot 3}{3+1}, \frac{3 \cdot 4}{4+1}, \dots$ , czyli liczby  $\frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}, \frac{15}{6}, \dots$

**Przykład 1.1.2.** Ciąg  $\frac{3}{7}, \frac{5}{10}, \frac{7}{13}, \frac{9}{16}, \frac{11}{19}, \dots$  jest ciągiem, w którym  $n$ -ty wyraz określony jest wzorem  $x_n = \frac{2n+1}{3n+4}$  dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

**Przykład 1.1.3.** Ciąg liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, ... jest ciągiem, w którym  $x_n = n$  dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

**Przykład 1.1.4.** Ciąg  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  jest ciągiem odwrotności kolejnych liczb naturalnych i oczywiście  $x_n = \frac{1}{n}$  dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$ .



Rysunek 1.2. Ciąg  $x_n = n$  (a) i ciąg  $x_n = \frac{1}{n}$  (b)

**Przykład 1.1.5.** Jeśli  $a$  i  $r$  są liczbami rzeczywistymi, to ciąg  $a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots$ , czyli ciąg, którego  $n$ -ty wyraz dany jest wzorem

$$x_n = a + (n - 1)r$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ , nazywa się *ciągami arytmetycznymi*.

**Przykład 1.1.6.** Jeśli  $a$  i  $q$  są liczbami rzeczywistymi, to ciąg  $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$  nazywa się *ciągami geometrycznymi*<sup>1</sup>. Jest to ciąg, w którym każdy  $n$ -ty wyraz określony jest wzorem

$$x_n = a \cdot q^{n-1}.$$

**Przykład 1.1.7.** Ciąg, w którym, począwszy od pewnego miejsca, poszczególne wyrazy wyrażają się poprzez wyrazy wcześniejsze, nazywa się *ciągami rekurencyjnymi*. Przykładowo, ciąg  $(x_n)$ , w którym

$$x_1 = x_2 = 1 \quad \text{ i } \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \quad \text{ dla } \quad n \geq 3,$$

jest ciągiem rekurencyjnym (inne przykłady ciągów rekurencyjnych przedstawiono w przykładzie 1.7.1 i ćwiczeniu 1.7.1). W tym ciągu każdy wyraz, począwszy od trzeciego, jest sumą swoich dwóch bezpośrednich poprzedników. Łatwo można zauważyć, że początkowymi wyrazami tego ciągu są liczby

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Ten konkretny ciąg, obecnie nazywany ciągiem Fibonacciego, pochodzi z książki *Liber abaci* autorstwa tegoż matematyka. Uważa się, że właśnie w tej książce pierwszy raz w Europie zastosowano dziesiętny zapis liczb.

**Ćwiczenie 1.1.1.** Wyznaczyć wskazane wyrazy i wskazane różnice wyrazów ciągu  $(x_n)$ :

1.  $x_{2008}$  i  $x_{2009}$ , gdy  $x_n = 1 + (-1)^n$ ;
2.  $x_{2008}$  i  $x_{2009} - x_{2008}$ , gdy  $x_n = 1 + 2 + \dots + n$ ;
3.  $x_2, x_3$  i  $x_{2n} - x_{2n-1}$ , gdy  $x_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(2n)!}$ ;
4.  $x_2, x_3$  i  $x_4$ , gdy  $x_1 = 1$  i  $x_n = 2x_{n-1} + 1$  dla  $n \geq 2$ .

**Definicja 1.1.2.** Niech  $(x_n)$  i  $(y_n)$  będą dwoma ciągami. Wtedy ciąg  $(x_n + y_n)$ , w którym każdy  $n$ -ty wyraz jest sumą  $n$ -tych wyrazów ciągów  $(x_n)$  i  $(y_n)$ , nazywamy *sumą ciągów*  $(x_n)$  i  $(y_n)$ . Podobnie definiuje się ciągi  $(x_n - y_n)$ ,  $(x_n \cdot y_n)$  i  $(\frac{x_n}{y_n})$  (gdy  $y_n \neq 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ) nazywane *różnicą*, *iloczynem* i *ilorazem ciągów*  $(x_n)$  i  $(y_n)$ .

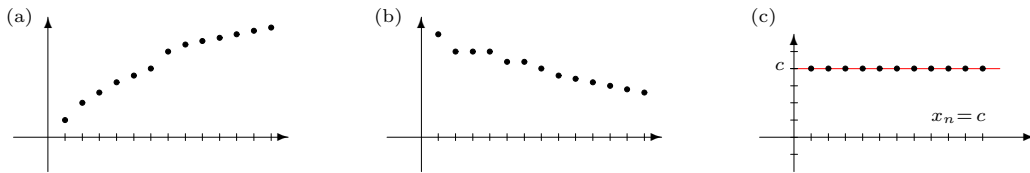
<sup>1</sup> Pierwsze pisemne wzmianki o liczbach tworzących ciąg geometryczny pochodzą z tzw. papirusu Rhinda (nazywanego też papirusem Ahmеса lub papirusem Ahmosa). Papirus ten powstał około 1650 r. p.n.e. (i jest kopią matematycznego tekstu spisane go około 2000 r. p.n.e.). Mówi się w nim o siedmiu domach, w których jest po siedem kotów. Każdy z tych kotów zjada po siedem myszy, każda mysz zjada po siedem kłosów zboża, a z każdego kłosa wyrasta siedem miar ziarna. Podobny tekst można znaleźć w opublikowanej w 1202 r. książce *Liber abaci* Fibonacciego: „7 starszych kobiet pojechało do Rzymu; każda z nich miała 7 mułów, z których każdy niósł 7 worków; każdy worek zawierał 7 pakunków; każdy pakunek zawierał 7 noży, z których każdy zapakowany był w 7 pochewek”.

**Przykład 1.1.8.** Ciąg  $(n + \frac{\sqrt{n^2+1}}{\operatorname{tg} n})$  jest sumą ciągów  $(n)$  i  $(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\operatorname{tg} n})$ , a ciąg  $(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\operatorname{tg} n})$  jest ilorazem ciągów  $(\sqrt{n^2+1})$  i  $(\operatorname{tg} n)$ .

**Definicja 1.1.3.** O ciągu  $(x_n)$  mówimy, że jest on

1. *rosnący*, jeżeli  $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} > x_n$ ;
2. *malejący*, jeżeli  $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} < x_n$ ;
3. *niemalejący*, jeżeli  $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} \geq x_n$ ;
4. *nierosnący*, jeżeli  $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} \leq x_n$ ;
5. *stały*, jeżeli  $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} = x_n$ .

Z powyższej definicji wynika, że ciąg  $(x_n)$  jest rosnący (malejący, niemalejący, nierosnący, stały) wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_{n+1} - x_n > 0$  ( $x_{n+1} - x_n < 0$ ,  $x_{n+1} - x_n \geq 0$ ,  $x_{n+1} - x_n \leq 0$ ,  $x_{n+1} - x_n = 0$ ) dla każdej liczby naturalnej  $n$ . Warto także zauważyć, że jeśli wszystkie wyrazy ciągu  $(x_n)$  są dodatnie, to ciąg  $(x_n)$  jest rosnący (malejący, niemalejący, nierosnący, stały) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$  ( $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ ) dla każdej liczby naturalnej  $n$ . O ciągu  $(x_n)$  mówimy, że jest on *rosnący od pewnego miejsca*, gdy  $x_{n+1} > x_n$  dla każdej liczby naturalnej  $n \geq n_0$ , gdzie  $n_0$  jest pewną liczbą naturalną. Podobnie definiuje się pojęcie ciągu malejącego (niemalejącego, nierosnącego lub stałego) od pewnego miejsca.



Rysunek 1.3. Ciąg rosnący (a), nierosnący (b) i stały (c)

**Definicja 1.1.4.** Mówimy, że ciąg  $(x_n)$  jest *monotoniczny*, gdy jest on niemalejący lub nierosnący. Mówimy też, że ciąg  $(x_n)$  jest *ściśle monotoniczny*, gdy jest on rosnący lub malejący. Powiemy też, że ciąg jest *monotoniczny od pewnego miejsca*, gdy jest on niemalejący lub nierosnący od pewnego miejsca. Podobnie definiuje się pojęcie ciągu ściśle monotonicznego od pewnego miejsca.

**Przykład 1.1.9.** Pokażemy, że ciąg  $(x_n)$ , w którym  $x_n = \frac{2n}{n+1}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , jest rosnący (rys. 1.4(a)). W tym celu wystarczy zauważyć, że różnica  $x_{n+1} - x_n$  jest dodatnia dla każdego  $n$  naturalnego. Istotnie, dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

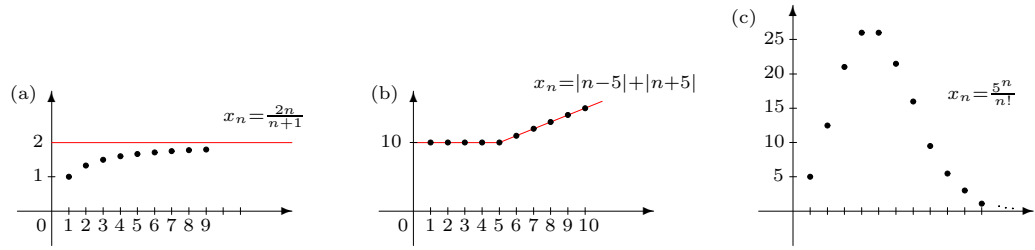
**Przykład 1.1.10.** Weźmy teraz pod uwagę ciąg, w którym  $x_n = |n-5| + |n+5|$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Bez problemu można zauważyć, że  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 10$  i  $x_n = 2n$  dla  $n \geq 5$ . Teraz zauważmy, że  $x_{n+1} - x_n = 0$  dla  $n = 1, 2, 3$  i  $4$  oraz  $x_{n+1} - x_n = 2(n+1) - 2n = 2 > 0$  dla  $n \geq 5$ . Z tego wynika, że ciąg  $x_n = |n-5| + |n+5|$  jest niemalejący (i rosnący od pewnego miejsca) (rys. 1.4(b)).

**Przykład 1.1.11.** Ciąg  $x_n = \frac{5^n}{n!}$  nie jest monotoniczny, bo różnica  $x_{n+1} - x_n = \frac{5^n(4-n)}{(n+1)!}$  zmienia znak w zależności od  $n$ . Dokładniej mamy  $x_{n+1} - x_n > 0$  dla  $n = 1, 2, 3$ , a jednocześnie  $x_{n+1} - x_n = 0$  dla  $n = 4$  oraz  $x_{n+1} - x_n < 0$  dla  $n \geq 5$ . Z tego także wynika, że rozważany ciąg jest malejący od pewnego miejsca (rys. 1.4(c)).

**Przykład 1.1.12.** Ciąg  $x_n = (n+3)!/4^n$  jest rosnący, bo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+4)!}{4^{n+1}}}{\frac{(n+3)!}{4^n}} = \frac{n+4}{4} > 1$$

dla każdej liczby naturalnej  $n$ .



Rysunek 1.4. Ciąg rosnący (a), niemalejący (b) i niemonotoniczny (c)

**Ćwiczenie 1.1.2.** Określając znak różnicy  $x_{n+1} - x_n$  lub wartość ułamka  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ , zbadać monotoniczność ciągu  $(x_n)$ , w którym:

- |                                 |  |   |
|---------------------------------|--|---|
| 1. $x_n = \frac{n}{3n+1}$ ;     | 6. $x_n = \frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$ ; | 11. $x_n = \frac{10^n}{2n^2}$ ;                 |
| 2. $x_n = \frac{10^n}{(2n)!}$ ; | 7. $x_n = \frac{n}{3^n}$ ;               | 12. $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$ ;                  |
| 3. $x_n = n - 2^n$ ;            | 8. $x_n = 1 - (1/3)^n$ ;                 | 13. $x_n = \frac{1}{n + \ln n}$ ;               |
| 4. $x_n = n^2 - n$ ;            | 9. $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ;              | 14. $x_n = \cos \frac{\pi}{n}$ .                |
| 5. $x_n = n!$ ;                 | 10. $x_n = \sqrt{n^2+1}$ ;               | 15. $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ . |

**Ćwiczenie 1.1.3.** Dany jest ciąg  $(x_n)$ , w którym  $x_1$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą, a  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{x_1^2}{x_n} \right)$  dla każdej liczby naturalnej  $n$ . Indukcyjnie wykazać, że ciąg  $(x_n)$  jest stały.

**Definicja 1.1.5.** Mówimy, że ciąg  $(x_n)$  jest *ograniczony z dołu*, gdy

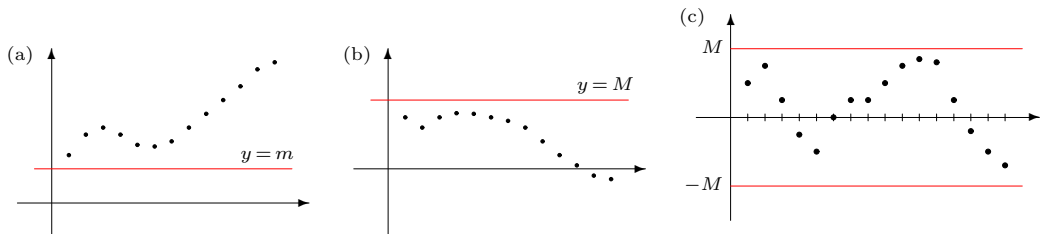
$$\exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m. \quad (1.2)$$

Podobnie mówimy, że ciąg  $(x_n)$  jest *ograniczony z góry*, gdy

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M. \quad (1.3)$$

Mówimy także, że ciąg  $(x_n)$  jest *ograniczony*, gdy jest on jednocześnie ograniczony z dołu i z góry. Z powyższego jest oczywiste, że ciąg  $(x_n)$  jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M. \quad (1.4)$$



Rysunek 1.5. Ciąg ograniczony z dołu (a), z góry (b), ograniczony (c)

**Przykład 1.1.13.** Ciąg  $x_n = 1/n$  jest ograniczony, bo  $|x_n| = |1/n| \leq 1$  dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$ .

**Przykład 1.1.14.** Ciąg  $x_n = \sin(n+1)$  jest ograniczony, bo  $|x_n| = |\sin(n+1)| \leq 1$  dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$ .

**Przykład 1.1.15.** Ciąg  $x_n = (2n+3)/n$  jest ograniczony, bo dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$|x_n| = \left| \frac{2n+3}{n} \right| = \frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \leq 5.$$

**Przykład 1.1.16.** Ciąg  $x_n = \frac{5^n}{n!}$  jest ograniczony, bo – jak to wynika z jego monotoniczności omówionej w przykładzie 1.1.11 – mamy  $|x_n| = x_n \leq x_4 = x_5 = \frac{5^4}{4!}$  dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$ .

**Przykład 1.1.17.** Ciąg  $x_n = (-1)^n n$  nie jest ograniczony, bo dla każdej liczby  $M \in \mathbb{R}$  i każdej liczby naturalnej  $n$ , jeśli  $n > M$ , to mamy  $|x_n| = |(-1)^n n| = n > M$ .

**Ćwiczenie 1.1.4.** Zbadać ograniczoność ciągu  $(x_n)$ , gdy:

1.  $x_n = \frac{5n}{1+n}$ ;      3.  $x_n = \frac{3^n}{3^n+3}$ ;      5.  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2}$ ;      7.  $x_n = \frac{\sqrt[4]{n^4+4}}{n+1}$ ;
2.  $x_n = \frac{1+n^2}{1+n^3}$ ;      4.  $x_n = 100 - \sqrt{n}$ ;      6.  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ;      8.  $x_n = n3^{-n/2}$ .

**Definicja 1.1.6.** Jeśli  $(x_n)$  jest ciągiem, a  $(k_n)$  jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg  $(x_{k_n})$ , czyli ciąg  $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots, x_{k_n}, \dots$ , nazywamy *podciągiem ciągu*  $(x_n)$ .

**Przykład 1.1.18.** Ciąg 2, 4, 6, 8, ... kolejnych parzystych liczb naturalnych jest podciągiem ciągu wszystkich liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, ...

**Przykład 1.1.19.** Ciąg  $(4n+1)$  jest podciągiem ciągu  $(2n-1)$  kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, a ciąg  $(2n-1)$  jest oczywiście podciągiem ciągu  $(n)$  wszystkich liczb naturalnych.

**Przykład 1.1.20.** Jeśli  $x_n = |n-5| + |n+5|$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , to – wobec naszych obserwacji z przykładu 1.1.10 – ciąg  $x_{n+5} = 2n+10$  jest rosnącym podciągiem ciągu  $x_n = |n-5| + |n+5|$ .

**Przykład 1.1.21.** Z analogicznych obserwacji z przykładu 1.1.11 wynika, że podciąg  $x_{n+4} = 5^{n+4}/(n+4)!$  jest malejącym podciągiem ciągu  $x_n = 5^n/n!$ .

**Przykład 1.1.22.** Weźmy teraz pod uwagę ciąg  $x_n = (-1)^n$ . Jego podciąg  $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$  jest stałym podciągiem ciągu  $x_n$ . Podobnie  $x_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$  jest stałym podciągiem ciągu  $x_n$ . Natomiast w podciągu  $x_{n^n} = (-1)^{n^n}$  na przemian występują liczby  $-1$  oraz  $1$  i nie jest on monotonicznym podciągiem ciągu  $x_n$ .

## 1.2. Granica ciągu

**Definicja 1.2.1.** Mówimy, że liczba rzeczywista  $x$  jest *granica* (dokładniej, *granicą właściwą*) ciągu  $(x_n)$ , piszemy  $x_n \rightarrow x$  przy  $n \rightarrow \infty$  lub

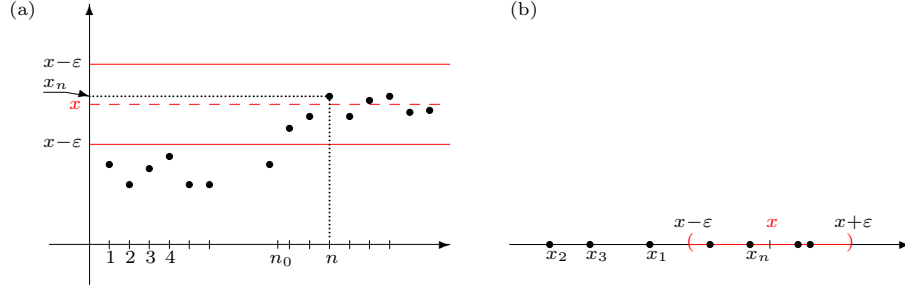
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

jeżeli dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje liczba  $n_0$  taka, że każdy wyraz ciągu o indeksie większym od  $n_0$  różni się od  $x$  o mniej niż  $\varepsilon$ .

Symbol  $\lim$  jest skrótem łacińskiego słowa *limes* oznaczającego granicę. Zapis  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  czytamy „limes  $x_n$  po  $n$  zmierzającym do nieskończoności równa się  $x$ ” lub „ $x_n$  dąży do  $x$  przy  $n$  dążącym do nieskończoności” albo „ $x_n$  zmierza do  $x$ , gdy  $n$  zmierza do nieskończoności”. Liczba  $n_0$  występująca w powyższej definicji zależy od liczby  $\varepsilon$  i od samego ciągu. Z powyższej definicji jest oczywiste, że mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 |x_n - x| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Zatem można powiedzieć, że liczba  $x$  jest granicą ciągu  $(x_n)$ , jeżeli wyrazy tego ciągu o dostatecznie dużych numerach różnią się dowolnie mało od liczby  $x$ . Równoważnie, liczba  $x$  jest granicą ciągu  $(x_n)$ , jeżeli w dowolnie małym otoczeniu liczby  $x$  znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, tj. wszystkie poza być może skończoną ich liczbą (rys. 1.6).



Rysunek 1.6. Granica właściwa  $x$  ciągu  $(x_n)$  na płaszczyźnie (a) i na osi (b)

**Definicja 1.2.2.** Ciąg mający granicę (będącą liczbą rzeczywistą) nazywa się *ciągą zbieżnym*. Każdy inny ciąg nazywamy *ciągą rozbieżnym*.

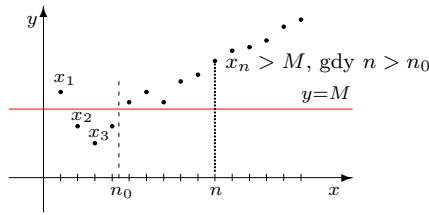
Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi, które mają granicę niewłaściwą.

**Definicja 1.2.3.** Mówimy, że ciąg  $(x_n)$  ma *granicę niewłaściwą plus nieskończoność* (lub mówimy, że ciąg  $(x_n)$  jest *rozbieżny do plus nieskończoności*), piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  lub  $x_n \rightarrow \infty$ , jeżeli

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad x_n > M. \quad (1.6)$$

Analogicznie mówimy, że ciąg  $(x_n)$  ma *granicę niewłaściwą minus nieskończoność* (lub mówimy, że ciąg  $(x_n)$  jest *rozbieżny do minus nieskończoności*), piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  lub  $x_n \rightarrow -\infty$ , gdy

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \quad x_n < M. \quad (1.7)$$

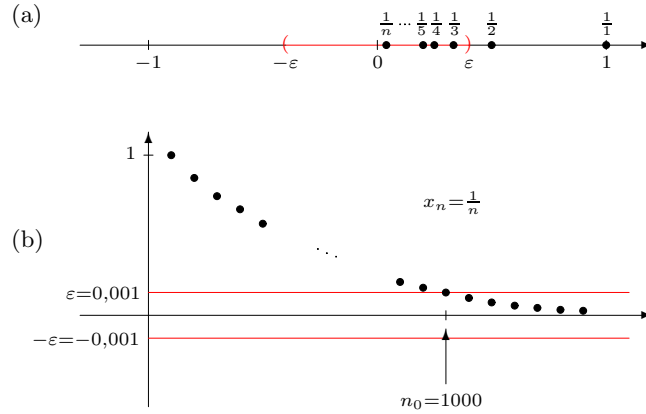


Rysunek 1.7. Ciąg  $(x_n)$  rozbieżny do  $\infty$

**Przykład 1.2.1.** Zauważmy, że jeśli  $x_n = \frac{1}{n}$ , to  $x_n \rightarrow 0$  przy  $n \rightarrow \infty$ , bo dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  mamy

$$|x_n - x| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

gdy  $n$  jest liczbą naturalną taką, że  $n > \frac{1}{\varepsilon} = n_0$ . To dowodzi, że istotnie mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Prześledźmy to jeszcze raz na konkretnych liczbach  $\varepsilon$ . Przykładowo, jeśli  $\varepsilon = 0,4$ , to mamy  $n_0 = 1/\varepsilon = 2,5$ . W tym przypadku, jeśli  $n$  jest liczbą naturalną i  $n > n_0 = 2,5$ , to  $|x_n - x| = |1/n - 0| = 1/n < 0,4 = \varepsilon$  (rys. 1.8 (a)). Natomiast dla  $\varepsilon = 0,001$  mamy  $n_0 = 1/\varepsilon = 1000$ . Tym razem, jeśli  $n$  jest liczbą naturalną i  $n > n_0 = 1000$ , to  $|x_n - x| = |1/n - 0| = 1/n < 0,001 = \varepsilon$  (rys. 1.8 (b)).



Rysunek 1.8. Równość  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  na osi (a) i płaszczyźnie (b)

**Przykład 1.2.2.** Podobnie jak wyżej uzasadnia się, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ .

Tak jest istotnie, bo dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  mamy

$$|x_n - x| = \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

gdy  $n > \sqrt{1/\varepsilon} = n_0$ .

**Przykład 1.2.3.** Odnotujmy, że jeśli ciąg  $(x_n)$  jest stały, powiedzmy  $x_n = x$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x = x.$$

Stwierdzenie to jest konsekwencją faktu, że dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  i każdej liczby naturalnej  $n$  mamy  $|x_n - x| = |x - x| = 0 < \varepsilon$ .

**Przykład 1.2.4.** Uzasadnimy teraz, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$ .

Niech  $\varepsilon$  będzie dowolną liczbą dodatnią. Zauważmy, że występująca w definicji granicy nierówność  $|x_n - x| < \varepsilon$  przybiera w tym przypadku postać

$$|x_n - x| = \left| \frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Ta nierówność jest równoważna nierówności  $n > \frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ . Zatem jeśli przyjmiemy  $n_0 = \frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ , to dla każdej liczby  $n > n_0$  mamy  $\left| \frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ . To dowodzi, że liczba  $\frac{1}{2}$  jest granicą ciągu  $x_n = \frac{n+1}{2n-1}$ , czyli mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$ .

**Przykład 1.2.5.** Udowodnimy, że jeśli  $x_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

Zauważmy, że

$$|x_n - x| = \left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})} = \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

jeśli  $n > n_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$ . Stąd wynika, że  $x_n \rightarrow 1$  przy  $n \rightarrow \infty$ .

**Przykład 1.2.6.** Zauważmy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = +\infty$ , bo dla każdej liczby  $M \in \mathbb{R}$  i każdej liczby naturalnej  $n > \frac{M+1}{2}$  mamy  $x_n = 2n-1 > 2 \cdot \frac{M+1}{2} - 1 = M$ .

$\sqrt{2}\arctg(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) - x + C$ ; 33.  $\cos x - (10/3)\arctg((\cos x)/3) + C$ ; 34.  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ ; 35.  $(1/5)\operatorname{tg}^5 x + C$ ; 36.  $2\arctg \sqrt{(1-x)/x} - 2\sqrt{(1-x)/x} + C$ ; 37.  $x \ln(x+x^2) - 2x + \ln(1+x) + C$ ; 38.  $(x^2/2)((\ln x)^2 - \ln x) + x^2/4 + C$ ; 39.  $\ln|\ln x + \sqrt{4 + \ln^2 x}| + C$ ; 40.  $15 \ln(4 + \cos x) + (1/2)\cos^2 x - 4\cos x + C$ ; 41.  $-\operatorname{ctg} x - x + C$ ; 42.  $(1/3)\operatorname{tg}^3 x + (1/5)\operatorname{tg}^5 x + C$ ; 43.  $\ln|\operatorname{tg} x| - 1(2\sin^2 x) + C$ ; 44.  $(1/5)\ln|(2\operatorname{tg}(x/2)+1)/(\operatorname{tg}(x/2)-2)| + C$ ; 45.  $(1/2)(\operatorname{tg} x + 1/\sqrt{2}\arctg(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)) + C$ ; 46.  $(2x-3)/2 + 2\sqrt{2x-3} + \ln(2x-2) - 2\arctg \sqrt{2x-3} + C$ ; 47.  $(2\sin x - \sin^2 x - 1)e^{\sin x} + C$ ; 48.  $\sqrt{x^2-9}/(9x) + C$ . **5.8.2.** 1.  $(x^2/2)\ln(4+x^4) - x^2 + 2\arctg(x^2/2) + C$ ; 2.  $-\sqrt{5+x-x^2} + (1/2)\arcsin((2x-1)/\sqrt{21}) + C$ ; 3.  $(x^2/2)\arccos(1/x) - \sqrt{x^2-1}/2 + C$ ; 4.  $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$ ; 5.  $(9/8)\arcsin((2x-1)/3) + (2x-1)\sqrt{2+x-x^2}/4$ ; 6.  $3(x \ln x - x) + C$ .

## Rozdział 6

**6.1.1.** 1.  $33/2$ ; 2.  $32/3$ ; 3. 21; 4.  $2/3$ ; 5.  $1/4$ ; 6.  $635/2$ . **6.2.1.** 1. 24; 2.  $\pi/4$ ; 3.  $a^2$ ; 4. 26; 5. 14; 6. 40; 7.  $\pi^2/2$ ; 8.  $2 - \pi^2/2$ ; 9.  $2\pi + 4$ . **6.3.2.** 1. 0; 2. 7; 3. -64; 4. 17; 5. -73; 6. 4. **6.3.3.** 1.  $\pi/4$ ; 2.  $9\pi/2$ ; 3. 0; 4.  $\pi/2 + 8$ . **6.4.1.** 1.  $\sin x^2$ ; 2. 0; 3.  $2x \int_0^x \sin t^2 dt + x^2 \sin x^2$ ; 4.  $-\sin a^2$ ; 5.  $2x\sqrt{1+x^4}$ ; 6.  $3x^2/\sqrt{1+x^{12}} - 2x/\sqrt{1+x^8}$ ; 7.  $-\sin x \cos(\pi \cos^2 x) - \cos x \cos x \cos(\pi \sin^2 x)$ ; 8. 0; 9.  $-\sin(x/2) \cos(x/3)$ ; 10.  $(72x^4 + 53x^2 - 2)/((16x^2 + 1)(9x^2 + 1))$ ; 11.  $2\sqrt{1+x^6}/x$ ; 12.  $\sqrt{1+\sin^4 x} \cos x$ . **6.4.2.** 1.  $\pi/4$ , 1,  $-1/2$ ; 2.  $-\pi$ ,  $-\pi$ ,  $(\pi^3 + 2\pi)/4$ ; 3. 0,  $2/e$ ,  $4/e$ ; 4. 0, 1, 0; 5. 0, 0. **6.4.3.**  $f(x)$  jest wypukła w przedziale  $(-\infty; -1/2)$  i wklęsła w przedziale  $(-1/2; \infty)$ . Punkt  $(-1/2; f(-1/2))$  jest punktem przegięcia funkcji  $f(x)$ . **6.4.4.** 1.  $3e^9$ ; 2. 1; 3.  $\pi^2/4$ ; 4. 0; 5. 1; 6.  $1/3$ ; 7. 3; 8.  $1/(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; 9. 1. **6.4.5.** 1. 52; 2.  $(162\sqrt{3} - 4\sqrt{2})/15$ ; 3.  $28 - 4e$ ; 4.  $((e+1)^6 - 64)/6$ ; 5.  $21/8$ ; 6.  $2/3$ ; 7.  $\pi/4 + 1$ ; 8.  $(\ln 3 - 1)/2$ ; 9.  $(\ln(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3})/4$ ; 10.  $2/3$ ; 11. 2; 12.  $e^2/4$ ; 13.  $4\sqrt{2}/3$ ; 14.  $\ln 3 - 1$ ; 15.  $(12\sqrt{3} - \pi - 12)/6$ ; 16.  $-7/2$ ; 17. 3; 18.  $\pi$ ; 19. -2; 20.  $16/35$ ; 21.  $2\sqrt{2} - 2$ ; 22. 8; 23.  $\pi$ ; 24.  $(2\sqrt{2} - 1)/3$ ; 25.  $1/3$ ; 26.  $\pi/2$ ; 27.  $\pi/2$ ; 28.  $\pi/3$ ; 29.  $\ln(e+1)$ ; 30.  $(\pi - 2)/2$ ; 31.  $e^2 - 3/e^2 + 2$ ; 32.  $(1/2)\sin(\pi/16)$ ; 33.  $8/15$ ; 34.  $\pi^2/4$ ; 35.  $2\ln(\sqrt{5} - 2) + \sqrt{5} - 1$ ; 36.  $1/\pi$ ; 37.  $20e^6/9$ ; 38.  $e - 2$ ; 39.  $\pi/4 - \pi^2/32 - (1/2)\ln 2$ . **6.4.6.** 1.  $\pi$ ; 2.  $\pi$ ; 3. 2; 4. 3. **6.4.7.** 1.  $fc = 1 = f(-1/2) = f(1/2)$ ; 2.  $fc = 1 = f(1) = f(3)$ ; 3.  $fc = 4/3 = f(2/\sqrt{3})$ ; 4.  $fc = 8/3 = f((6 - 2\sqrt{3})/3) = f((6 + 2\sqrt{3})/3)$ ; 5.  $fc = 4 = f((1 + \sqrt{7})/3)$ ; 6.  $fc = 30/13 = f(27000/2197)$ ; 7.  $fc = 0 = f(\pi/2) = f(3\pi/2)$ ; 8.  $fc = 3 = f(0)$ ; 9.  $fc = 0 = f(\pi/2)$ ; 10.  $fc = 0 = f(\pi)$ . **6.4.9.**  $\pi^2/4$ . **6.4.10.**  $\pi/4$  i  $\pi/4$ . **6.4.12.** 1. 5; 2. 5; 3. 2; 4.  $3/2$ ; 5. 5; 6. 10. **6.4.13.** 1.  $2/3$ ; 2. 1; 3.  $1/4$ ; 4. 0; 5.  $1/8$ ; 6.  $2/\pi$ ; 7.  $\sin 1$ ; 8.  $15/4$ ; 9.  $2\sqrt{2} - 2$ . **6.4.14.** 1.  $(4\sqrt{2} - 16)/3$ ; 2.  $2\sqrt{3} - 2/3 + 4/\pi$ ; 3.  $3/(\ln 2) - (4/\pi)\ln 2 - 2$ ; 4.  $22/3$ . **6.4.15.**  $I_0 = \pi/2$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_4 = 3\pi/16$  i  $I_5 = 8/15$ .

## Rozdział 7

**7.1.1.** 1.  $9/2$ ; 2.  $1/6$ ; 3.  $4/15$ ; 4.  $15/8 - 2\ln 2$ ; 5. 12; 6.  $5/12$ ; 7.  $2\ln 3 - 2$ ; 8.  $2\pi^2 - \pi^3/3$ ; 9.  $1/6$ ; 10. 2; 11. 2; 12.  $2\sqrt{2} - 2$ ; 13.  $8/\pi - 1$ ; 14.  $4/\pi - 1$ ; 15.  $4/\pi - 1/2$ ; 16.  $\pi/2$ ; 17. 1; 18.  $\pi/4 - \ln 2$ ; 19.  $3/4 - (2\ln 2)/\pi$ ; 20.  $4/3$ ; 21.  $128/15$ . **7.1.2.**  $e/2 - 1$ . **7.1.3.**  $e^2/2 - e - 1/2$ . **7.1.4.**  $2/3$ . **7.1.5.**  $(\pi + 3\sqrt{3} - 3)/24$ . **7.1.6.**  $a = 3/2$ . **7.1.7.** 1.  $256/15$ ; 2.  $72\sqrt{3}/5$ ; 3.  $8\sqrt{2}/15$ ; 4.  $3 - e$ ; 5.  $\pi/8$ ; 6.  $3\pi/4$ ; 7. 5; 8.  $1/6$ ; 9.  $22/5$ ; 10.  $4/3$ ; 11.  $9\pi/2$ ; 12.  $3\pi$ ; 13.  $\pi/8$ ; 14.  $\pi/32$ ; 15.  $2\pi + 80/\pi$ . **7.1.8.** 1.  $\pi^2$ ; 2.  $4\pi^3/3$ ; 3.  $(e^{4\pi} + e^{2\pi})/4$ ; 4. 1; 5.  $(2\pi + 3\sqrt{3})/24$ ; 6.  $3\pi/4$ . **7.1.9.** 1.  $\pi$ ; 2. 4; 3.  $4\pi$ ; 4.  $\pi/2$ ; 5.  $9\pi/4$ ; 6.  $27\pi/2$ ; 7.  $9\pi/2$ ; 8.  $9\pi/2$ . **7.1.10.** 1.  $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ ; 2.  $4\pi/3 - \sqrt{3}$ ; 3.  $5\pi/4 - 2$ ; 4.  $5\pi/24 - \sqrt{3}/4$ ; 5.  $3\pi/4$ ; 6.  $\pi/2 - 1$ ; 7.  $1 - \sqrt{2}/2$ ; 8.  $11\pi - 12\sqrt{2}$ ; 9.  $5\pi/4 - 2$ ; 10.  $5\pi/4$ . **7.1.11.** 1.  $\pi/3 + \sqrt{3}/2$ ; 2.  $2\pi/3 + \sqrt{3}$ ; 3.  $\pi/4$ ; 4.  $\pi/4 + 2$ ; 5.  $\pi/4$ ; 6.  $\pi$ ; 7.  $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$ ; 8.  $\pi/3 + 2 - \sqrt{3}$ . **7.1.12.** 1.  $2\pi + 3\sqrt{3}/2$  i  $\pi - 3\sqrt{3}/2$ ; 2.  $2\pi + 3\sqrt{3}/2$  i  $\pi - 3\sqrt{3}/2$ . **7.1.13.**  $(16\sqrt{2} - 20)/3$ . **7.2.1.** 1.  $e^2 + 1$ ; 2.  $e^3 - e^{-8} + 11$ ; 3.  $2\sqrt{2}$ ; 4.  $8\sqrt{2} - 4$ ; 5.  $4\sqrt{2} - 2$ ; 6.  $e^3 - e^{-3}$ ; 7.  $3/2$ ; 8.  $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$ ; 9.  $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$ ; 10.  $\sqrt{2} - \sqrt{10}/3 + \ln(3 + \sqrt{10}) - \ln(1 + \sqrt{2})$ ; 11.  $4 - 2\sqrt{2}$ ; 12.  $2\ln 2$ ; 13.  $8((\pi^2 + 1)^3 - 1)/3$ ; 14.  $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ ; 15.  $\sqrt{2}(1 - e^{-\pi/2})$ ; 16.  $(37\sqrt{37} - 1)/27$ ; 17.  $2\sqrt{5}\ln(2 + \sqrt{5})$ ; 18.  $\operatorname{tgh}(1/2)$ ; 19.  $(\ln(\sqrt{37} + 6) + 6\sqrt{37})/12$ ; 20.  $779/240$ ; 21. 1; 22.  $\sqrt{2}\pi$ ; 23.  $\pi^2/2$ ; 24. 12; 25.  $\ln 2$ ; 26.  $3\sqrt{2}/4$ . **7.2.2.** 1.  $52/3$ ; 2. 12; 3.  $50/3$ ; 4.  $31/6$ ; 5.  $53/6$ ; 6.  $32/3$ ; 7. 6; 8.  $(13\sqrt{13} - 8)/27$ ; 9.  $(e^2 + 1)/4$ ; 10.  $(24 - \ln 2)/8$ ; 11.  $2\ln 3 - 1$ ; 12.  $\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \sqrt{3}$ ; 13.  $\ln(e^2 + e^{-2})$ ; 14.  $595/144$ ; 15.  $17/6$ ; 16.  $2055/64$ ; 17. 1; 18.  $26\sqrt{3}/3$ . **7.2.3.** 1. 4; 2.  $2\pi a$ ; 3.  $4a$ ; 4.  $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$ ; 5.  $(\sqrt{(\pi^2 + 2)^3} - 2\sqrt{2})/3$ ; 6.  $a(\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}))$ . **7.3.1.**  $1/5$ . **7.3.2.**  $1/30$ . **7.3.3.**  $1/110$ . **7.3.4.**  $(e^4 - e^2)/2$ . **7.4.1.** 1.  $6\pi$ ; 2.  $20\pi/3$ ; 3.  $\pi$ ; 4.  $\pi^2/2$ ; 5.  $\pi(e - 2)$ ; 6.  $\pi^3/4 - 2\pi$ ; 7.  $\pi \ln(3/2)$ ; 8. 156; 9.  $6\pi$ ; 10.  $256\pi/35$ ; 11.  $12\pi$ ; 12.  $32\pi a^3/105$ ; 13.  $\pi/4$ ; 14.  $5\pi^2$ ; 15.  $\pi^2/4 + \pi/2$ ; 16.  $3\pi \ln 25$ . **7.4.2.** 1.  $198\pi$ ; 2.  $2\pi/3$ ; 3.  $\pi \ln 10$ ; 4.  $2\pi$ ; 5.  $2\pi(1 - \sqrt{3}/2)$ ; 6.  $\pi(e^2 + 1)/2$ ; 7.  $\pi^2/4$ ; 8.  $32\pi/35$ . **7.4.3.** 1.  $125\pi/3$  i  $125\pi/3$ ; 2.  $\pi(e^2 + 4e - 3)/2$  i  $\pi$ ; 3.  $8\pi/9$  i  $2\pi/3$ ; 4.  $25\pi/2$  i  $25\pi/3$ ; 5.  $5\pi/28$  i  $5\pi/28$ ; 6.  $16\pi/15$  i  $\pi/2$ . **7.4.4.** 1.  $162\pi$ ; 2.  $64\pi/15$ ; 3.  $\pi/6$ ; 4.  $1296\pi/5$ ; 5.  $16\pi/15$ ; 6.  $29\pi/30$ ; 7.  $(2\pi^4 - 3\pi^2)/12$ ; 8.  $8\pi$ . **7.5.1.** 1.  $98\pi/3$ ; 2.  $8\pi$ ; 3.  $61\pi/1728$ ; 4.  $8\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$ ; 5.  $\pi(2\sqrt{2} - \ln(3 - 2\sqrt{2}))$ ; 6.  $\sqrt{3}\pi/2 + \pi \ln(\sqrt{3} + 2)/4$ ; 7.  $\pi(\sqrt{2} - \sqrt{5}/4 + \ln 2 - \ln(\sqrt{10} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{5}))$ ; 8.  $\pi(e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln(e + \sqrt{1+e^2}) - \ln(1 + \sqrt{2}))$ ; 9.  $\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln 2 - \ln(\sqrt{10} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{5}))$ ; 10.  $32\pi a^2/5$ ; 11.  $263\pi/256$ ; 12.  $32\sqrt{5}\pi$ ; 13.  $8\sqrt{5}\pi$ ; 14.  $32\sqrt{2}\pi$ ; 15.  $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})\pi/6$ ; 16.  $\pi(1 + (1/2)\sinh 2)$ ; 17.  $348(1 + \sqrt{2})\pi/5$ ; 18.  $\pi(3\sqrt{10} - \sqrt{2} - \ln(3 + \sqrt{10}) + \ln(1 + \sqrt{2}))/\sqrt{2}$ ; 19.  $2\sqrt{2}\pi(e^\pi - 2)/5$ ; 20.  $64\pi/3$ .

**7.6.1.**  $180(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})) \approx 532,42 \text{ m}^2$ . **7.6.2.**  $4\pi^2 rR$ . **7.6.3.**  $19.8 \text{ m}$ . **7.6.4.**  $4\pi(r^3 - (r^2 - d^2)^{3/2})/3$ .

## Rozdział 8

**8.1.1.** 1.  $1/18$ ; 2.  $1/50$ ; 3. 2; 4.  $\pi/12$ ; 5.  $\pi/9$ ; 6.  $2/e$ ; 7.  $1/6$ ; 8. 0; 9. 1; 10.  $e^2/4$ ; 11.  $1/2$ ; 12.  $1/4$ ; 13.  $\pi/4$ ; 14.  $1 - \ln 2$ ; 15.  $(\ln 2)/2$ ; 16. rozbieżna; 17.  $e - 1$ ; 18.  $\pi/2$ ; 19.  $1/8$ ; 20.  $(\ln 2)/2 + \pi/4$ ; 21.  $\pi/4$ ; 22.  $1/2$ ; 23.  $(2\ln 2)/3$ ; 24.  $\pi$ ; 25. 1; 26.  $\pi/4$ ; 27.  $\ln 2$ ; 28.  $\arctg 2 + \ln 5 - \pi/2$ . **8.2.1.** 1. 4; 2.  $\pi/4$ ; 3.  $32/3$ ; 4.  $\pi/2$ ; 5. rozbieżna; 6. rozbieżna; 7.  $-6$ ; 8. 8; 9. rozbieżna; 10. rozbieżna; 11. 1; 12. 2; 13.  $\pi/2$ ; 14.  $(8/3)\ln 2 - 8/9$ ; 15.  $\pi$ ; 16. rozbieżna; 17. rozbieżna; 18. rozbieżna; 19.  $-2/e$ ; 20.  $\ln(2 + \sqrt{3})$ . **8.3.2.** 1.  $2\pi/(3\sqrt{3})$ ; 2.  $2\pi/(3\sqrt{3})$ ; 3. rozbieżna; 4. zbieżna; 5. zbieżna; 6. 2 $\pi$ ; 7. zbieżna; 8. rozbieżna; 9. zbieżna; 10. rozbieżna; 11. zbieżna; 12. zbieżna; 13. rozbieżna; 14. zbieżna; 15. rozbieżna; 16. zbieżna; 17. zbieżna; 18. zbieżna; 19. zbieżna; 20.  $\pi/4 + 1/2$ . **8.4.1.** 1.  $\pi$ ; 2.  $\pi/2$ ; 3.  $8\pi(2 + \ln^2 8 - 2\ln 8)/27$ ; 4.  $\ln(16)$ . **8.4.2.**  $16\pi/3$ . **8.4.3.** 1.  $2\pi$ ; 2.  $\pi$ ; 3.  $\pi$ ; 4.  $\pi^2/4$ . **8.4.4.**  $\pi$  i  $\infty$ .

## Rozdział 9

**9.1.1.** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ,  $|x| < 1$ ; 2.  $\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n}/3^{n+1}$ ,  $|x| < \sqrt[4]{3}$ ; 3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 5x^n/6^{n+1}$ ,  $|x| < 6$ ; 4.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/7^{n+1}$ ,  $|x| < \sqrt{7}$ ; 5.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 8x^{2n}/9^{n+1}$ ,  $|x| < 3$ ; 6.  $-1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$ ,  $|x| < 1$ . **9.1.2.** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ ,  $x \in (0; 2)$ ; 2.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n/2^{2n+1}$ ,  $x \in (-3; 5)$ ; 3.  $5/14 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n (x-1)^n/7^{n+1}$ ,  $x \in (-3/4; 11/4)$ ; 4.  $1 + (x-1)/2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n/2^n$ ,  $x \in (-1; 3)$ . **9.1.3.** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} ((-1/2)^{n+1} - 2)x^n$ ,  $|x| < 1$ ; 2.  $-2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ ,  $|x| < 1$ ; 3.  $\sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n/3^{n+1} - 2/5^{n+1})x^n$ ,  $|x| < 1$ ; 4.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n/2^{n+1}$ ,  $|x| < 1$ . **9.1.4.** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)(x+2)^n/3^{n+1}$ ,  $-7/2 < x < -1/2$ ; 2.  $\sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot 3^n/5^{n+1} - 1/3^{n+1})(x+2)^n$ ,  $-11/3 < x < -1/3$ ; 3.  $-5/3 + 2(x+2)/9 - (5/12) \sum_{n=2}^{\infty} 2^n (x+2)^n/3^n$ ,  $-7/2 < x < -1/2$ . **9.1.5.** 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^n$ ,  $|x| < 1/3$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}}x^{n+2}$ ,  $|x| < 3$ ; 3.  $\ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ ,  $|x| < 3$ ; 4.  $\ln 9 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}}$ ,  $|x| \leq 3$ ; 5.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}$ ,  $|x| \leq 3$ ; 6.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)}x^{2n+1}$ ,  $|x| \leq 1/3$ ; 7.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ ,  $|x| < 3$ ; 8.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $|x| < 1$ ; 9.  $1/3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2 \cdot 3^{n+1}}x^n$ ,  $|x| < 3/4$ . **9.1.7.** 1.  $1/(1+3x)$ ; 2.  $x/(1-x)^2$ ; 3.  $3/4$ ; 4.  $(5-4x)/(1-x)^2$ ; 5. 12; 6.  $2/(1-x^2)^2$ ; 7.  $(\pi^3 + \pi^2)/(\pi-1)^3$ ; 8.  $2/(1+x)^3$ ; 9.  $2/(1-x)^4$ ; 10.  $-56/27$ ; 11.  $\ln 2$ ; 12.  $(-1/x)\ln(1-x)$ ; 13.  $(1/x^2)\ln(1+x^2)$ ; 14.  $(-1/x)(1 + \ln(1-x))$ ; 15.  $-1/(2x) - 1/x^2 - (1/x^3)\ln(1-x)$ . **9.2.1.** 1.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ; 2.  $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$ ; 3.  $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ; 4.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ; 5.  $\frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ ; 6.  $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ ; 7.  $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$ ; 8.  $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$ ; 9.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$ ; 10.  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ ; 11.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ ; 12.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{e^{n+1}(n+1)}$ . **9.2.2.** 1.  $e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x-1)^n$ ; 2.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$ ; 3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$ ; 4.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2n+1} - \frac{2}{3n+1} \right) (x-5)^n$ ; 5.  $1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4n+1}$ ; 6.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$ ; 7.  $\ln 12 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{2n+1} \right) \frac{(x-6)^{n+1}}{n+1}$ ; 8.  $\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . **9.2.3.** 1.  $1 + x/2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n$ ; 2.  $1 - x^2/2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^{2n}$ ; 3.  $x - x^2/2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^{n+1}$ ; 4.  $x/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{3n+1} n!} x^{2n+1}$ ; 5.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+2}{2} x^n$ ; 6.  $x + 2x^2/3 + 8x^3/9 + 112x^4/81 + \dots$ ; 7.  $1 - x/3 - x^2/9 - 5x^3/81 - 10x^4/243 - \dots$ ; 8.  $x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+2}$ . **9.2.4.** 1.  $\sin \pi = 0$ ; 2.  $\cos e \approx -0,911734$ ; 3.  $\cos(\pi/3) = 1/2$ ; 4.  $e^{-x^2/3}$ ; 5.  $\sin(\pi/2) = 1$ ; 6.  $e^{-\ln 2} = 1/2$ . **9.3.1.** 1.  $2^{10} \cdot 10!$ ,  $2^{10} \cdot 10!/3^{11}$ ; 2. 0,  $(2n)!/n!$ ; 3. 0,  $2^4 \cdot 12!/4!$ ; 4.  $15!/5!$ , 8; 5. 41, 0; 6.  $105/16$ ,  $\binom{1/4}{48} 50!$ ; 7. 0,  $-1/2$ . **9.3.2.** 1. 1, 2214; 2. 3, 3201; 3. 0,9962; 4.  $-0,1054$ ; 5. 0,4226; 6. 1,5431; 7. 0,3681; 8. 0,0524; 9. 0,7314; 10. 0,1542; 11. 0,9962; 12. 0,1651. **9.3.3.** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/((2n+1)(2n+1)!)$ ; 2.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1}/((4n+1)(2n)!)$ ; 3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} x^{2n+1}/(2n+1)$ ; 4.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1}/((2n+1)(4n+1))$ . **9.3.4.** 1. 0,099998; 2. 0,00001; 3. 0,000008; 4. 0,124758; 5. 0,000331; 6. 0,000025; 7. 0,005; 8. 0,099888; 9. 0,097605. **9.3.5.** 1.  $1/2$ ; 2.  $-1$ ; 3.  $-1/3$ ; 4.  $1/2$ ; 5.  $1/3$ ; 6. 2; 7.  $-2$ ; 8.  $-1/5!$ ; 9.  $3/25$ ; 10. 1; 11. 1; 12.  $\infty$ . **9.4.1.**  $x + x^2 + x^3/3$ ,  $\ln 2 + x/2 + x^2/8$ ,  $e(1 - x^2/2)$ . **9.4.2.** 1,016. **9.4.3.** 0,501. **9.4.4.**  $-56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$ . **9.4.5.**  $-3 + 40(x-1)^2 + 120(x-1)^3 + 210(x-1)^4 + 252(x-1)^5 + 210(x-1)^6 + 120(x-1)^7 + 45(x-1)^8 + 10(x-1)^9 + (x-1)^{10}$ .



# Indeks

- Abela twierdzenie 276
- aksjomat ciągłości 27
- d'Alemberta kryterium 45
- aproksymacja funkcji 130
- arcus cosinus 88, 110
  - cotangens 88, 111
  - sinus 87, 109–110
  - tangens 88, 111
- arytmetyka funkcji ciągłych 83
  - granic ciągów (funkcji) 15, 72
  - pochodnych 106
- astroida 240
- asymptota pionowa 154
  - pozioma 155
  - ukośna 156–157
- badanie funkcji 158
- Bernoulliego nierówność 22
- bezwzględna zbieżność całki 266–267
  - szeregu 40
- Bolzano-Cauchy'ego twierdzenie 39, 70, 97, 266
- Bolzano-Weierstrassa twierdzenie 28
- bryła obrotowa 245
- całka bezwzględnie zbieżna 266–267
  - Darboux 209
  - nieoznaczona 165–203
  - niewłaściwa 255–271
    - drugiego rodzaju 260
    - pierwszego rodzaju 255
  - oznaczona 204–228
  - Riemanna 212
  - rozbieżna 255, 261
  - warunkowo zbieżna 266
  - zbieżna 255, 261
- całkowalność funkcji 209
- całkowanie 166
  - funkcji niewymiernych 194–203
  - pierwiastkowych 194
  - trygonometrycznych 177, 185–194
  - wykładniczych 171
  - wymiernych 179–185, 194
  - zawierających trójmian 172–174
  - przez części 175–177, 223
  - podstawianie 168–175, 223
  - szeregu 274
  - ułamków prostych 179
- ciąg arytmetyczny 8
  - Fibonacciego 8
  - geometryczny 8
  - liczbowy 7
  - malejący 9
    - monotoniczny 9, 27–28
    - monotoniczny i ograniczony 27
    - niemalejący 9
    - nierosnący 9
    - normalny podziałów 212
    - ograniczony 10, 15
    - rekurencyjny 8, 30
    - rosnący 9
    - rozbieżny 12
    - stały 9
    - zbieżny 12
- ciągłość funkcji 81
  - na przedziale 88
  - odwrotnej 86
  - w punkcie 82
  - złożonej 83
  - jednostajna funkcji 92
  - jedonstronna funkcji 88
- cykloida 235, 240
- definicja Cauchy'ego granicy funkcji 59
  - Heinego granicy funkcji 68
- długość krzywej 239–243
- druga pochodna funkcji 120
- ekstremum lokalne funkcji 133, 142–146
- funkcja arcus cosinus 88, 110
  - cotangens 88, 112
  - sinus 87, 109
  - tangens 88, 110
  - całkowalna 209
  - ciągła 81
    - na zbiorze 81, 83
    - w punkcie 81, 83, 89
  - Dirichleta 210
  - dwumianowa 285
  - Eulera 266
  - górnej granicy całkowania 219
  - jednostajnie ciągła 92
  - kawałkami ciągła 215
  - lewostronnie ciągła 88
  - logarytmiczna 87
  - niemalejąca (nierosnąca) 30
  - odwrotna 86
  - ograniczona 71, 95
  - pierwiastkowa 87
  - pierwotna 165
  - pochodna 102
  - podcałkowa 209
  - potęgowa 87
  - prawostronnie ciągła 88
  - rosnąca (malejąca) 30

- różniczkowalna 102
- różnowartościowa 86
- wklęsła 147, 149
- wykładnicza 87
- wypukła 147, 149
- funkcje hiperboliczne 113
- kołowe 113
  
- granica ciągu 11, 14
  - funkcji 59–60
  - — w nieskończoności 63
  - — złożonej 75
  - lewostronna funkcji 64–65
  - nieoznaczona 18, 73–74
  - niewłaściwa 12
  - — funkcji 62
  - prawostronna funkcji 64–65
- granice całkowania 209
  
- iloraz różnicowy 100
- interpretacja geometryczna pochodnej 103
  
- jednostajna ciągłość funkcji 92
  
- kardioida 236
- koniczynka 237
- kres dolny (górny) zbioru 26
- kryterium Bolzano-Cauchy’ego 22
  - całkowite zbieżności szeregu 267
  - Dirichleta 48, 269
  - ilorazowe d’Alemberta 45
  - Leibniza 49
  - pierwiastkowe Cauchy’ego 47
  - porównawcze zbieżności całek 263
  - — — szeregów 42–43
  - zbieżności całki niewłaściwej 263, 265
- krzywa biegunowa 236
  - Kocha 239
  - parametryczna 233, 239
  - prostowalna 239
  
- lemniskata 237
- liść Kartezjusza 125
- liczba  $e$  79–80
  - Eulera 29
  - Napiera 29
- linearyzacja funkcji 130
  
- Maclaurina szereg 280
- maksimum lokalne funkcji 133
- metoda współczynników nieoznaczonych 196
- minimum lokalne funkcji 133
- monotoniczność funkcji 142–146
  
- najmniejsza wartość funkcji 135
- największa wartość funkcji 135
- nieciągłość drugiego rodzaju 90
  - pierwszego rodzaju 90
  - usuwalna 90
- nierówność Bernoulliego 22
- normalna do wykresu funkcji 104
- normalny ciąg podziałów 212
- $n$ -ta pochodna funkcji 120
- $n$ -ta reszta szeregu 37
  
- objętość bryły 243–250
  - — obrotowej 245
  - kuli 249
  - stożka 249
- otoczenie punktu 59
  
- paradoks malarza 270
- pionowa styczna 104
- pochodna funkcji 100
  - — odwrotnej 108
  - — określonej parametrycznie 127
  - — uwikłanej 123
  - — złożonej 115
- iloczynu funkcji 106
- ilorazu funkcji 106
- lewostronna 102
- logarytmiczna funkcji 118
- odwrotności funkcji 107
- prawostronna 102
- różnicy funkcji 106
- sumy funkcji 106
- pochodne wyższych rzędów 120
- podłoga liczby 14
- podciąg ciągu 11, 14
- podstawienia Eulera 197–199
  - trygonometryczne 199–202
- podstawowe całki nieoznaczone 166
- twierdzenie rachunku różniczkowego 220
- pole obszaru 205, 229–238
  - powierzchni bryły 250–253
- promień zbieżności szeregu potęgowego 52
- przedział wklęsłości krzywej (funkcji) 147
  - wypukłości krzywej (funkcji) 147
- zbieżności szeregu potęgowego 52
- punkt ciągłości funkcji 81
  - krytyczny funkcji 134
  - nieciągłości drugiego rodzaju 90
  - — funkcji 81
  - — pierwszego rodzaju 90
  - przegięcia funkcji (krzywej) 148–149
  - skupienia 59
  - stacjonarny funkcji 134
  - wewnętrzny 59
- redukcyjne metody całkowania 177–179, 189–190
- równanie normalnej do wykresu funkcji 104
  - stycznej do wykresu funkcji 103
- równość Leibniza 277
- różniczka funkcji 129
  - $n$ -tego rzędu 129
- różniczkowalność funkcji 102
  - i ciągłość funkcji 105
- różniczkowanie funkcji 102
  - szeregu 274
- reszta szeregu 37
  - wzoru Taylora 140
- rozbieżność całki 255, 261

- rozwinięcie funkcji w szereg Maclaurina 280
- — — — Taylora 280
- sąsiedztwo punktu 59
- spirala Archimedesesa 243
- hiperboliczna 243
- logarytmiczna 243
- stała całkowania 166
- styczna do wykresu funkcji 103
- sufit liczby 14
- suma całkowita Darboux 208
- — Riemanna 212
- częściowa szeregu 33
- szeregu 33
- szereg anharmoniczny 41
- bezwzględnie zbieżny 40
- Dirichleta 44
- dwumienny 285
- geometryczny 35
- harmoniczny 39–40
- liczbowy 33
- Maclaurina 280
- naprzemienny 48
- potęgowy 51, 272–291
- rozbieżny 33
- Taylora 280
- teleskopowy 34
- warunkowo zbieżny 40
- zbieżny, 33
- śnieżynka Kocha 58
- średnica podziału 207
- Taylora szereg 280
- torus 247, 253–254
- trąbka Torricelliego 270–271
- twierdzenie Abela 276
- Bolzano-Cauchy’ego 39, 70, 97, 266
- Bolzano-Weierstrassa 28
- Cantora 94
- Cauchy’ego o kondensacji 44
- — — wartości średniej 139
- Darboux 97
- Fermata 133
- de l’Hospitála 151
- Lagrange’a 137
- o dwóch ciągach 20
- — działaniach na granicach 72
- — trzech ciągach 20
- — — funkcjach 71
- — — wartości średniej 137
- — zachowaniu nierówności dla granic 71
- Rolle’a 138
- Weierstrassa 95–96
- ułamek prosty 179
- uniwersalne podstawienie trygonometryczne 191
- ważniejsze granice 76–81
- wartość średnia funkcji 218
- główna całki 258
- najmniejsza funkcji 135
- największa funkcji 135
- warunek konieczny zbieżności szeregu 39
- zbieżności całki 266
- — ciągu 22
- — szeregu 39–40
- warunkowa zbieżność całki 266
- — szeregu 40
- wielomian Maclaurina 140
- Taylora 139
- wklęsłość funkcji 146–151
- współczynnik dwumianowy Newtona 285
- wypukłość funkcji 146–151
- wzór Newtona-Leibniza 222
- Stirlinga 228
- Taylora 140
- Wallisa 227
- zbieżność całki 255, 261
- ciągu 12
- szeregu Dirichleta 44
- — geometrycznego 35
- zbiór otwarty 97
- spójny 97
- złożenie funkcji ciągłych 83



PWSZ  
w ELBLĄGU

ISBN 978-83-62336-16-6