Rozdział 8

ODPOWIEDZI I PEŁNE ROZWIĄZANIA ZADAŃ

8.1. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Logika

Ćwiczenie 1.9.1. a) prawda; b) prawda; c) prawda; d) prawda; e) prawda; f) fałsz.

Ćwiczenie 1.9.2. a)

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	q	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

b)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge (\sim p \wedge q)$	$\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1

c)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

d)

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$\vee$	$r \Rightarrow q$	$\sim p \wedge r$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0

Ćwiczenie 1.9.3. a) nie; b) nie; c) tak; d) nie; e) nie; f) nie.
Ćwiczenie 1.9.4. a) i b) kontrtautologie; c) i d) nie są kontrtautologiami.
Ćwiczenie 1.9.5. Fakt, że każda z formuł a) – r) jest tautologią potwierdzamy matrycą wartości.

a) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$
0	1	0	1
1	0	0	1

b) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$

p	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow p$	$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
0	1	0	1
1	0	1	1

c) $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow p$

p	q	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$	$\Rightarrow p$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

e) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1

f) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

g) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

h) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

i) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

j) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

k) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

l) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

m) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)]$

p	q	r	s	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$	$p \vee q$	$r \vee s$	$(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

n) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)]$

p	q	r	s	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

o) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

p) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

q) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)]$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

r) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)]$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Ćwiczenie 1.9.6. Gdyby formuła $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ nie była tautologią, to istniałaby interpretacja ω_σ taka, że $\omega_\sigma((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = 1$ i $\omega_\sigma(p) = 0$. Jednakże z równości $\omega_\sigma(p) = 0$ wynikałoby, że mamy $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$ i wtedy też musiałoby być $\omega_\sigma((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = 0$, co byłoby sprzeczne z $\omega_\sigma((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = 1$.

Ćwiczenie 1.9.7. Niech σ będzie wartościowaniem takim, że $\sigma(p) = \sigma(q) = \sigma(r) = 0$. Wtedy dla interpretacji ω_σ mamy $\omega_\sigma((p \wedge q) \Rightarrow r) = 1$, $\omega_\sigma((p \vee q) \Rightarrow \sim r) = 1$, $\omega_\sigma(p \wedge q \wedge r) = 0$ i dlatego $\omega_\sigma(\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow \sim r]\} \Rightarrow p \wedge q \wedge r) = 0$. To dowodzi, że rozważana formuła nie jest tautologią.

Ćwiczenie 1.9.8.

$$
\begin{aligned}
a)\ (p \vee q) \wedge \sim p &\Leftrightarrow \sim p \wedge (p \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow 0 \vee (\sim p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow \sim p \wedge q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ p \Leftrightarrow \sim q &\Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p) \\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
&\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [(p \vee q) \wedge \sim q] \\
&\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p) \\
&\Leftrightarrow \sim (p \vee \sim q) \vee \sim (q \vee \sim p) \\
&\Leftrightarrow \sim (\sim q \vee p) \vee \sim (\sim p \vee q) \\
&\Leftrightarrow \sim (q \Rightarrow p) \vee \sim (p \Rightarrow q) \\
&\Leftrightarrow \sim [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)] \\
&\Leftrightarrow \sim (q \Leftrightarrow p) \\
&\Leftrightarrow \sim (p \Leftrightarrow q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee r) \vee \sim q \\
&\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim r) \vee \sim q \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\ (p \wedge \sim q) \Rightarrow q &\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee q \\
&\Leftrightarrow \sim p \vee q \vee q \\
&\Leftrightarrow \sim p \vee q \vee \sim p \\
&\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee \sim p \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p
\end{aligned}
$$

Ćwiczenie 1.9.9. Logiczną równoważność schematów można zbadać metodą zero-jedynkową (i tak to zrobimy w przypadku d)) lub korzystając z odpowiednich równoważności.

$$
\begin{aligned}
a)\ \sim (p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) &\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&\Leftrightarrow \sim p \wedge (q \vee \sim q) \\
&\Leftrightarrow \sim p \wedge 1 \\
&\Leftrightarrow \sim p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q) &\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee \sim q \\
&\Leftrightarrow 0 \vee \sim q \\
&\Leftrightarrow \sim q
\end{aligned}
$$

c) $$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p\vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge q)] &\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee [\sim (p\vee \sim q) \vee (p \wedge q)]\\ &\Leftrightarrow (p\wedge \sim q) \vee [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q)]\\ &\Leftrightarrow (p\wedge \sim q) \vee [(\sim p \vee p) \wedge q]\\ &\Leftrightarrow (p\wedge \sim q) \vee q\\ &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)\\ &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge 1\\ &\Leftrightarrow p \vee q\end{aligned}$$

d) Jeśli $\sigma(p) = 1$ i $\sigma(s) = \sigma(t) = 0$, to $\omega_\sigma((p \Rightarrow s) \vee (\sim s \Rightarrow t)) = 0$, ale $\omega_\sigma(p \Rightarrow (s \vee p)) = 1$. Zatem rozważane schematy nie są równoważne.

e) $$\begin{aligned}[(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow q &\Leftrightarrow [q] \Rightarrow q\\ &\Leftrightarrow 1\\ &\Leftrightarrow q\vee \sim q\end{aligned}$$

f) $(\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \vee (\sim p \vee q)) \Leftrightarrow (p\vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow 1 \vee q \Leftrightarrow 1$ i $\sim p \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p\vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow 1 \vee q \Leftrightarrow 1$.

g) $(\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \vee (\sim p \vee q)) \Leftrightarrow (p\vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow 1 \vee q \Leftrightarrow 1$ i $((\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee p) \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p) \vee q$. Zatem rozważane schematy nie są równoważne.

Ćwiczenie 1.9.10. a) Odwrotna: Jeśli $10 + 20 = 30$, to $1 + 2 = 3$. Przeciwna: Jeśli $1 + 2 \neq 3$, to $10 + 20 \neq 30$. Przeciwstawna: Jeśli $10 + 20 \neq 30$, to $1 + 2 \neq 3$. b) Odwrotna: Jeśli $a = 1$ lub $a = -1$, to $a^2 = 1$. Przeciwna: Jeśli $a^2 \neq 1$, to $a \neq 1$ i $a \neq -1$. Przeciwstawna: Jeśli $a \neq 1$ i $a \neq -1$, to $a^2 \neq 1$. c) Odwrotna: Jeśli $a^2 < b^2$, to $a < b$. Przeciwna: Jeśli $a \geqslant b$, to $a^2 \geqslant b^2$. Przeciwstawna: Jeśli $a^2 \geqslant b^2$, to $a \geqslant b$. d) Odwrotna: Jeśli jutro jest poniedziałek, to dzisiaj jest niedziela. Przeciwna: Jeśli dzisiaj nie jest niedziela, to jutro nie jest poniedziałek. Odwrotna: Jeśli jutro nie jest poniedziałek, to dzisiaj nie jest niedziela.

Ćwiczenie 1.9.11. $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p\wedge \sim q)$, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p\wedge \sim q)$, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p\wedge \sim q)\wedge \sim (q\wedge \sim p)$.

Ćwiczenie 1.9.12. $\sim (\sim (\sim p\wedge \sim q\wedge \sim r) \wedge r\wedge \sim p)$

Ćwiczenie 1.9.13. $\sim (\sim p \vee q) \vee q\vee \sim p$

Ćwiczenie 1.9.14. $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim (\sim p \Rightarrow \sim q)$

Ćwiczenie 1.9.15. $$\begin{aligned}p \Rightarrow q &\Leftrightarrow \sim p \vee q\\ &\Leftrightarrow (p \downarrow p) \vee p\\ &\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \Leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\\ &\Leftrightarrow [((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)] \wedge [((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)]\\ &\Leftrightarrow \{[((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)] \downarrow [((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)]\}\\ &\quad \downarrow \{[((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)] \downarrow [((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \Rightarrow (\sim q \vee r) &\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r)\\ &\Leftrightarrow (p \downarrow p) \vee [(q \downarrow q) \vee r]\\ &\Leftrightarrow (p \downarrow p) \vee [((q \downarrow q) \downarrow r) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow r)]\\ &\Leftrightarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [((q \downarrow q) \downarrow r) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow r)]\}\\ &\quad \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [((q \downarrow q) \downarrow r) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow r)]\}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.9.16. $$\begin{aligned}(p \wedge r) \Rightarrow \sim q &\Leftrightarrow \sim (p \wedge r)\vee \sim q\\ &\Leftrightarrow [(p \wedge r)|(p \wedge r)] \vee (q|q)\\ &\Leftrightarrow \{[(p \wedge r)|(p \wedge r)]|[(p \wedge r)|(p \wedge r)]\}|((q|q)|(q|q))\\ &\Leftrightarrow \{[((p|r)|(p|r))|((p|r)|(p|r))]|[((p|r)|(p|r))|((p|r)|(p|r))]\}\\ &\quad |((q|q)|(q|q))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (\sim q \vee r) &\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (p|p) \vee ((q|q) \vee r) \\ &\Leftrightarrow (p|p) \vee [((q|q)|(q|q))|(r|r)] \\ &\Leftrightarrow ((p|p)|(p|p))|\{[((q|q)|(q|q))|(r|r)]|[((q|q)|(q|q))|(r|r)]\} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.9.17. a) $\sim p \vee q$; b) $p \vee q$; c) $\sim p$; d) p; e) 1 (np. $p \vee \sim p$); f) $\sim r \vee s$.

Ćwiczenie 1.9.18. a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$; b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$; c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

Ćwiczenie 1.9.19. a) $(\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$; b) $(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r)$; c) $(\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

Ćwiczenie 1.9.20. a) Zbiór formuł jest spełnialny, bo jeśli σ jest wartościowaniem takim, że $\sigma(p) = \sigma(q) = \sigma(r) = 0$, to mamy $\omega_\sigma(p \Rightarrow \sim q) = 1$, $\omega_\sigma(q \vee \sim r) = 1$ i $\omega_\sigma(r \Rightarrow \sim p) = 1$; b) Zbiór rozważanych formuł jest niespełnialny. Istotnie, jeśli byłoby inaczej, to istniałoby wartościowanie σ takie, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow r) = 1$, $\omega_\sigma(p \wedge q) = 1$ i $\omega_\sigma(q \Rightarrow \sim r) = 1$, to musiałoby być $\sigma(p) = \sigma(q) = 1$ (bo $\omega_\sigma(p \wedge q) = 1$). Wtedy też musiałoby być $\sigma(r) = 1$ (bo $\sigma(p) = 1$ i $\omega_\sigma(p \Rightarrow r) = 1$) i jednocześnie $\sigma(r) = 0$ (bo $\sigma(q) = 1$ i $\omega_\sigma(q \Rightarrow \sim r) = 1$), co jest niemożliwe. c) Zbiór formuł $\{\sim (\sim q \vee p), p \vee \sim r, q \Rightarrow r\}$ jest niespełnialny. Inaczej istniałoby wartościowanie σ i interpretacja ω_σ takie, że $\omega_\sigma(\sim (\sim q \vee p)) = 1$, $\omega_\sigma(p \vee \sim r) = 1$ i $\omega_\sigma(q \Rightarrow r) = 1$. Wtedy z równości $\omega_\sigma(\sim (\sim q \vee p)) = 1$, czyli z równości $\omega_\sigma(q \wedge \sim p)) = 1$, wynikałoby, że $\sigma(q) = 1$ i $\sigma(p) = 0$. Natomiast z równości $\sigma(p) = 0$ i $\omega_\sigma(p \vee \sim r) = 1$ wywnioskowalibyśmy, że $\sigma(r) = 0$. Z zaobserwowanych równości $\sigma(q) = 1$ i $\sigma(r) = 0$ wynikałoby, że $\omega_\sigma(q \Rightarrow r) = 0$, co byłoby sprzeczne z $\omega_\sigma(q \Rightarrow r) = 1$.

Ćwiczenie 1.9.21. Przypuśćmy, że zbiór formuł $\{q \Rightarrow r, r \Rightarrow \sim p, p, q\}$ jest spełnialny. Wtedy istnieją wartościowanie σ i interpretacja ω_σ takie, że $\omega_\sigma(q \Rightarrow r) = 1$, $\omega_\sigma(r \Rightarrow \sim p) = 1$, $\sigma(q) = 1$ i $\sigma(p) = 1$. Wtedy z równości $\omega_\sigma(q \Rightarrow r) = 1$ i $\sigma(q) = 1$ wynika, że $\sigma(r) = 1$. Z kolei równości $\sigma(r) = 1$ i $\omega_\sigma(r \Rightarrow \sim p) = 1$ implikują, że $\sigma(p) = 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rozważany zbiór formuł jest niespełnialny.

Ćwiczenie 1.9.22. Łatwe uzasadnienie pozostawiamy czytelnikowi.

Ćwiczenie 1.9.23. Każda z tych formuł jest regułą wnioskowania. Można to uzasadnić metodą zero-jedynkową. Przedstawimy inne uzasadnienia. a) Niech ω_σ będzie interpretacją taką, że $\omega_\sigma(p \wedge q \Rightarrow \sim r) = 1$ i $\omega_\sigma(p) = 1$. Jeśli byłoby $\omega_\sigma(\sim q) = 1$, to natychmiast byłoby $\omega_\sigma(r \Rightarrow \sim q) = 1$. Zatem załóżmy, że $\omega_\sigma(\sim q) = 0$, czyli załóżmy, że $\omega_\sigma(q) = 1$. Wtedy $\omega_\sigma(p \wedge q) = 1$ i wtedy też z równości $\omega_\sigma(p \wedge q \Rightarrow \sim r) = 1$ wynika, że $\omega_\sigma(\sim r) = 1$. Zatem $\omega_\sigma(r) = 0$ i dlatego mamy $\omega_\sigma(r \Rightarrow \sim q) = 1$. b) Niech ω_σ będzie interpretacją taką, że $\omega_\sigma((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = 1$ i $\omega_\sigma(\sim p) = 1$. Wtedy $\omega_\sigma(p) = 0$ i $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$. Teraz z równości $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$ i $\omega_\sigma((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = 1$ wnika, że $\omega_\sigma(r) = 1$. c) Jeśli jest $\omega_\sigma(\sim (p \Rightarrow q) = 1$, to $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 0$ i natychmiast musi być $\omega_\sigma(p) = 1$ (i $\omega_\sigma(q) = 0$). d) Załóżmy, że $\omega_\sigma((p \vee q) \Rightarrow r) = 1$. Przypuśćmy, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow r) = 0$. Wtedy musi być $\omega_\sigma(p) = 1$ i $\omega_\sigma(r) = 0$. Jednakże wtedy $\omega_\sigma(p \vee q) = 1$, $\omega_\sigma(r) = 0$ i natychmiast mamy $\omega_\sigma((p \vee q) \Rightarrow r) = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. e) Załóżmy, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$ i $\omega_\sigma(\sim p \Rightarrow q) = 1$. Gdyby było $\omega_\sigma(q) = 0$, to wobec równości $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$ byłoby $\omega_\sigma(p) = 0$, ale wtedy byłoby $\omega_\sigma(\sim p) = 1$ i $\omega_\sigma(\sim p \Rightarrow q) = 0$, co byłoby sprzeczne z założeniem. f) Załóżmy, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow \sim q) = 1$, $\omega_\sigma(r \Rightarrow \Rightarrow q) = 1$ i $\omega_\sigma(r) = 1$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że musi być $\omega_\sigma(q) = 1$. Wtedy $\omega_\sigma(\sim q) = 0$ i teraz z równości

$\omega_\sigma(p \Rightarrow \sim q) = 1$ wynika, że musi być $\omega_\sigma(p) = 0$ i dlatego ostateczne $\omega_\sigma(\sim p) = 1$.

Ćwiczenie 1.9.24. Załóżmy, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow (r \Rightarrow s)) = 1$ i przypuśćmy, że $\omega_\sigma((r \wedge \sim s) \Rightarrow \sim p) = 0$. Z tego ostatniego wynika, że musi być $\omega_\sigma(r \wedge \sim s) = 1$ i $\omega_\sigma(\sim p) = 0$. Dlatego $\omega_\sigma(r) = 1$, $\omega_\sigma(s) = 0$ i $\omega_\sigma(p) = 1$. Stąd zaś wynika, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow (r \Rightarrow s)) = 0$, co jest sprzeczne z pierwotnym założeniem.

Ćwiczenie 1.9.26. Z równoważności $\sim(\sim s \vee \sim t) \Leftrightarrow s \wedge t$ i $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q)$ oraz z przechodniości implikacji wynika, że z prawdziwości implikacji $(p \vee q) \Rightarrow (s \wedge t)$ i $\sim(\sim s \vee \sim t) \Rightarrow (\sim r \vee q)$ wynika prawdziwość implikacji $(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$. To dowodzi, że rozważany schemat jest regułą wnioskowania.

Ćwiczenie 1.9.27. Niech p i q oznaczają odpowiednio zdania *Jaś nie zna logiki* i $1 + 2 = 5$. Zdanie *Jeśli Jaś nie zna logiki, to jeśli Jaś zna logikę, to* $1 + 2 = 5$ zostało utworzone zgodnie ze schematem $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$, który jest tautologią (zob. (1.25) i (1.62)). Zatem rozważane zdanie jest zdaniem prawdziwym.

Ćwiczenie 1.9.28. Równoważność zdań jest konsekwencją równoważności $p \vee q \Leftrightarrow \sim p \Rightarrow q$.//
Ćwiczenie 1.9.29. Zdanie p jest prawdziwe, a zdania q i r są jednocześnie prawdziwe, albo jednocześnie fałszywe.

Ćwiczenie 1.9.30. Niech i oraz p oznaczają odpowiednio zdania *Student jest inteligentny* i *Student jest pracowity.* Łatwo sprawdzić, że spośród schematów $\{i \vee p, i \Rightarrow p\} \vDash i$ oraz $\{i \vee p, i \Rightarrow p\} \vDash p$ tylko ten drugi jest regułą wnioskowania, więc z prawdziwości zdań *Student jest inteligentny lub pracowity* i *Jeśli student jest inteligentny, to na pewno jest on też pracowity* wolno tylko wywnioskować, że *Student jest pracowity.*

Ćwiczenie 1.9.31. Najpierw uzasadnimy, że schemat $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow q \wedge r)$ jest regułą wnioskowania. W tym celu załóżmy, że ω_σ jest interpretacją taką, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$, $\omega_\sigma(p \Rightarrow r) = 1$ i przypuśćmy, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow q \wedge r) = 0$. Z tego ostatniego wynika, że $\omega_\sigma(p) = 1$ i $\omega_\sigma(q \wedge r) = 0$. Z ostatniej równości wynika, że $\omega_\sigma(q) = 0$ lub $\omega_\sigma(r) = 0$. Wtedy $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 0$ lub $\omega_\sigma(p \Rightarrow r) = 0$, co przeczy założeniu, że $\omega_\sigma(p \Rightarrow q) = 1$ i $\omega_\sigma(p \Rightarrow r) = 1$. To dowodzi, że że schemat $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow q \wedge r)$ jest regułą wnioskowania. Zatem, czy rozważana przez nas implikacja $p \Rightarrow q \wedge r$ o kupowaniu motorynki i samochodu jest prawdziwa? Gdzie jest powód wątpliwości? Zaproponuj takie zmiany w rozważanych zdaniach q i r, aby prawdziwość implikacji $p \Rightarrow q \wedge r$ nie wzbudzała wątpliwości.

Ćwiczenie 1.9.32. Nich p i q oznaczają odpowiednio zdania *wiesz, że umarłeś* i *umarłeś.* Ponieważ wypowiedź Orygenesa została skonstruowana zgodnie ze schematem $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$ i ponieważ schemat ten jest tautologią (co łatwo pokazuje się metodą zero-jedynkowa), więc konkluzja wypowiedzi Orygenesa jest poprawna.

Ćwiczenie 1.9.33. Wypowiedź Arystoteles *Logika jest potrzebna, bo jeśli nie jest potrzebna, to i tak jest potrzebna dla poprawnego uzasadnienia, że nie jest potrzebna* możemy zapisać w postaci: *Jeśli logika nie jest potrzebna, to i tak jest potrzebna* (*dla poprawnego uzasadnienia, że nie jest potrzebna*)*. Zatem logika jest potrzebna.* Teraz widać, że to rozumowanie oparte jest o regułę wnioskowania Claviusa $\frac{\sim p \Rightarrow p}{p}$ (zob. 1.61) i jest poprawne.
Ćwiczenie 1.9.34. Jeśli p, q, r i s oznaczają odpowiednio zdania *ktoś pije, ktoś śpi, ktoś grzeszy* i *ktoś jest święty*, to łańcuszek żaków *Kto pije, ten śpi; kto*

śpi, nie grzeszy; kto nie grzeszy, jest święty. Zatem, kto pije, jest święty został utworzony zgodnie ze schematem

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \Rightarrow s)) \Rightarrow (p \Rightarrow s).$$

Ten schemat jest tautologią (bo implikacja jest przechodnia). Z niej otrzymujemy następującą regułę wnioskowania

$$\frac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow \sim r,\ \sim r \Rightarrow s}{p \Rightarrow s}.$$

Z niej wynika, że jeśli każde ze zdań *Kto pije, ten śpi*, *kto śpi, nie grzeszy*, *kto nie grzeszy, jest święty* jest prawdziwe, to także zdanie *kto pije, jest święty* jest prawdziwe.

Ćwiczenie 1.9.35. Jeśli S jest regułą, to przez $W(S)$ oznaczamy zbiór wyjątków reguły S. Chcemy uzasadnić, że zdanie *Nie ma reguły bez wyjątku* jest fałszywe, czyli chcemy uzasadnić, że istnieje reguła S taka, że $W(S) = \emptyset$.

Niech R oznacza regułę

$$\forall_{S-\text{reguła}} W(S) \neq \emptyset.$$

Weźmy teraz pod uwagę zbiór wyjątków reguły R, czyli zbiór

$$W(R) = \{S \colon W(S) = \emptyset\}.$$

Mamy dwie możliwości: $W(R) = \emptyset$ lub $W(R) \neq \emptyset$. W tym pierwszym przypadku R jest regułą bez wyjątku. W drugim przypadku $W(R) = \{S \colon W(S) = \emptyset\} \neq \emptyset$ i każdy element niepustego zbioru $W(R)$ jest regułą bez wyjątku. Z tego wynika, że zdanie *Nie ma reguły bez wyjątku* jest fałszywe.

Ćwiczenie 1.9.35. Niech p, q s i r oznaczają odpowiednio zdania:

p – *księgi zawierają to samo co jest w Koranie* (wtedy $\sim p$ jest zdaniem *księgi nie zgadzają się z treścią Koranu*)

q – *księgi są niepotrzebne*,

s – *spalić księgi*,

r – *księgi są szkodliwe.*

Wtedy rozumowanie przypisywane Kalifowi Omarowi jest zgodne ze schematem

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s),\ (\sim p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s),\ q \vee r}{s}.$$

A ponieważ schemat ten jest regułą wnioskowania (łatwo to sprawdzić), więc konkluzja o spaleniu biblioteki była logiczną konsekwencją poczynionych założeń.

Ćwiczenie 1.9.37. a) Niech a i b będą parzystymi liczbami całkowitymi i niech k oraz l będą liczbami całkowitymi, takimi że $a = 2k$ i $b = 2l$. Wtedy też $a + b$ jest liczbą parzystą, bo $a + b = 2(k + l)$ i $k + l$ jest liczbą całkowitą. Niech a i b będą nieparzystymi liczbami całkowitymi i niech k oraz l będą liczbami całkowitymi, takimi że $a = 2k + 1$ i $b = 2l + 1$. Wtedy ab jest liczbą nieparzystą, bo $ab = 2(2kl + k + l) + 1$ i $2kl + k + l$ jest liczbą całkowitą. c) Załóżmy, że $n = 2k$ i $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy $3n^2 + 5$ jest liczbą nieparzystą, bo $3n^2 + 5 = 3(2k)^2 + 5 = 2(6k^2 + 2) + 1$ i $6k^2 + 2 \in \mathbb{Z}$. d) Załóżmy, że $n \in Z$ i $5n+3$ jest liczbą nieparzystą. Twierdzimy, że n jest liczbą parzystą. Gdyby było inaczej, czyli gdybyśmy mieli $n = 2k + 1$ (dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}$), to liczba $5n + 3$ byłaby parzysta, bo mielibyśmy $5n + 3 = 5(2k + 1) + 3 = 2(5k + 4)$ i $5k + 4 \in \mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 1.9.38. a) Załóżmy, że liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3. Wtedy $n = 3k + 1$ lub $n = 3k + 2$ dla pewnej liczby całkowitej k. W pierwszym przypadku mamy $n^2 = (3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$ i $p = 3k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, a w drugim $n^2 = (3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1 = 3r+1$ i $r = 3k^2+4k+1 \in \mathbb{Z}$. To dowodzi, że liczba n^2 nie jest podzielna przez 3. b) Dla liczby całkowitej n implikacja $3|n^2 \Rightarrow 3|n$ równoważna jest jej kontrapozycji $3 \not| n \Rightarrow 3 \not| n^2$. Z udowodnionej w części a) prawdziwości implikacji $3 \not| n \Rightarrow 3 \not| n^2$ wynika prawdziwość implikacji $3|n^2 \Rightarrow 3|n$.

Ćwiczenie 1.9.39. Weźmy pod uwagę dowolną liczbę naturalną n. Dla liczby n istnieją liczby całkowite l i r takie, że $n = 3l + r$, gdzie $r = 0$, 1 lub 2. Teraz zauważmy, że:

— jeśli $r = 0$, to $n = 3l$ i $n^2 = (3l)^2 = 3k$, gdzie $k = 3l^2 \in \mathbb{Z}$;
— jeśli $r = 1$, to $n = 3l+1$ i $n^2 = (3l+1)^2 = 3k$, gdzie $k = 3l^2 + 2l \in \mathbb{Z}$;
— jeśli $r = 2$, to $n = 3l+2$ i $n^2 = (3l+2)^2 = 3k$, gdzie $k = 3l^2 + 4l + 1 \in \mathbb{Z}$.

Stąd wynika, że liczba n^2 jest postaci $3k$ lub $3k+1$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Ćwiczenie 1.9.40. Jeśli n jest liczbą naturalną, to $n = 2l$ albo $n = 2l+1$ dla pewnej liczby naturalnej l. Wtedy odpowiednio $n^2 = (2l)^2 = 4k$ i $k = l^2 \in \mathbb{Z}$ albo $n^2 = (2l+1)^2 = 4k+1$ i $k = l^2 + l \in \mathbb{Z}$. To kończy dowód stwierdzenia.

Ćwiczenie 1.9.41. Wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją liczby naturalne k i r takie, że $n = 6k + r$ i $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Jest też oczywiste, że każda liczba postaci $6k$, $6k+2$, $6k+3$ i $6k+4$ jest podzielna przez 2 lub 3. Stąd wynika, że żadna z liczb $6k$, $6k+2$, $6k+3$ i $6k+4$ nie jest liczbą pierwszą większą od 3. Z tego w końcu wynika, że jeśli $n = 6k + r$ ($k \in N$ i $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$) jest liczbą pierwszą większą od 3, to musi być $r = 1$ lub $r = 5$.

Ćwiczenie 1.9.42. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi. Chcemy wykazać, że jeśli średnia arytmetyczna liczb a i b jest większa od 1, to co najmniej jedna z liczb a i b jest większa od 1, czyli chcemy wykazać prawdziwość implikacji

$$\frac{a+b}{2} > 1 \Rightarrow (a > 1 \quad \text{lub} \quad b > 1).$$

W tym celu wystarczy wykazać prawdziwość jej kontrapozycji, czyli wykazać prawdziwość implikacji

$$\sim (a > 1 \quad \text{lub} \quad b > 1) \Rightarrow \sim \left(\frac{a+b}{2} > 1\right).$$

Zauważmy, że istotnie mamy

$$\begin{aligned}
\sim (a > 1 \text{ lub } b > 1) &\Leftrightarrow (\sim (a > 1) \wedge \sim (b > 1)) \\
&\Leftrightarrow a \leqslant 1 \wedge b \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow a + b \leqslant 2 \\
&\Leftrightarrow \tfrac{a+b}{2} \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow \sim \left(\tfrac{a+b}{2} > 1\right).
\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.9.43. Dowód niewymierności liczby $\sqrt{3}$ będzie podobny do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$ (zob. przykład 1.7.6). Zatem przypuśćmy, że $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, czyli przypuśćmy, że $\sqrt{3} = \frac{n}{m}$ dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych n i m. Wtedy $3 = n^2/m^2$ i $3m^2 = n^2$. Z tej ostatniej równości wynika, że liczba n^2 jest podzielna przez 3. Z tego też wynika, że sama liczba n jest podzielna przez 3 (zob. ćwiczenie 32) i dlatego $n = 3k$ dla pewnej liczby naturalnej k. Teraz z równości $3m^2 = n^2 = (3k)^2$ wynika, że $m^2 = 3k^2$. Z tej ostatniej równości wynika podzielność przez 3 liczby m^2 i samej liczby m. Zaobserwowana podzielność przez 3 liczb m i n przeczy względnej pierwszości liczb m i n. To kończy dowód niewymierności liczby $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 1.9.44. a) Przypuśćmy, że istnieje najmniejsza dodatnia liczba wymierna. Niech nią będzie liczba m/n, gdzie m i n są dodatnimi liczbami naturalnymi. Wtedy także liczba $m/(2n)$ jest liczbą wymierną i dla niej spełnione są nierówności $0 < \frac{m}{2n} < \frac{m}{n}$, co przeczy założeniu, że liczba m/n jest najmniejszą dodatnią liczbą wymierną. b) Niech x_0 będzie liczbą niewymierną i niech m/n będzie liczbą wymierną, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Gdyby liczba $x_0+\frac{m}{n}$ była liczbą wymierną, to istniałyby liczby całkowite k i l takie, że $x_0 + \frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. Wtedy liczba $x_0 = \frac{k}{l} - \frac{m}{n} = \frac{kn-lm}{ln}$ byłaby wymierna i to przeczyłoby niewymierności liczby x_0. c) Niech x_0 będzie liczbą niewymierną i niech m/n będzie niezerową liczbą wymierną, gdzie m i n są niezerowymi liczbami całkowitymi. Gdyby liczba $x_0 \cdot \frac{m}{n}$ była liczbą wymierną, to istniałyby liczby całkowite k i l takie, że $x_0 \cdot \frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. Wtedy liczba $x_0 = \frac{k}{l} \cdot \frac{n}{m}$ byłaby wymierna i to przeczyłoby niewymierności liczby x_0.

Ćwiczenie 1.9.32. Łatwo wykazuje się, że schemat $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ jest tautologią. Stąd wynika, że zdanie *Jeśli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i jest podzielna przez 5, to z faktu, że n nie jest podzielna przez 3 wynika, że n nie jest podzielna przez 5* jest prawdziwe. Nasze wątpliwości co do prawdziwości tego zdania wynikają z obserwacji, że istnieją liczby naturalne podzielne przez 5, a które nie są podzielne przez 5 (i odwrotnie). Problem obserwowanych tu niejednoznaczności jest konsekwencją tak zwanej intensjonalności spójników logicznych języka potocznego. Intensjonalność ta wyraża się tym, że w języku potocznym wartość logiczna zdania złożonego zależy nie tylko od wartości zdań składowych i łączącego je składnika, ale także od treści łączonych zdań.

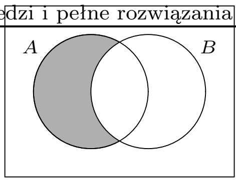
Ćwiczenie 1.9.46. 1. Tak; 2. Tak; 3. Tak; 4. Tak; 5. Tak; 6. Nie; 7. Tak; 8. Tak; 9. Tak; 10. Tak; 11. Tak; 12. Tak; 13. Tak; 14. Tak; 15. Nie; 16. Tak; 17. Tak; 18. Nie; 19. Tak.

8.2. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Zbiory

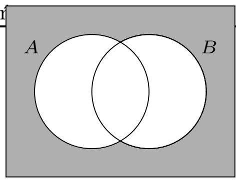
1. a) Elementami zbioru A są 2, 3, 4, 5 i 6, jego podzbiorami są zbiory $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}$, $\{5,6\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}$, $\{3,5,6\}, \{4,5,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}$; b) Elementami zbioru A są 1, $\{1\}$, 2 i $\{2\}$, a jego podzbiorami są $\emptyset$, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$, $\{2\}$, $\{\{2\}\}$, $\{1,\{1\}\}$, $\{1,2\}$, $\{1,\{2\}\}$, $\{\{1\},2\}$, $\{\{1\},\{2\}\}$, $\{2,\{2\}\}$, $\{1,\{1\},2\}$, $\{1,\{1\},\{2\}\}$, $\{1,2,\{2\}\}$, $\{\{1\},2,\{2\}\}$, $\{1,\{1\},2,\{2\}\}$; c) Elementami zbiór A są $\emptyset$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, a podzbiorami $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\}$ i $\{\emptyset, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\}$; d) Zbiór A składa się z czterech elementów i są nimi $\emptyset$, 1, $\{2\}$ i $\{3,\{4\}\}$. Natomiast jego podzbiorami są $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{1\}$, $\{\{2\}\}$, $\{\{3,\{4\}\}\}$, $\{\emptyset,1\}$, $\{\emptyset,\{2\}\}$, $\{\emptyset,\{3,\{4\}\}\}$, $\{1,\{2\}\}$, $\{1,\{3,\{4\}\}\}, \{\{2\},\{3,\{4\}\}\}, \{\emptyset,1,\{2\}\}, \{\emptyset,1,\{3,\{4\}\}\}, \{\emptyset,\{2\},\{3,\{4\}\}\}, \{1,\{2\},\{3,\{4\}\}\}$ i $\{\emptyset,1,\{2\},\{3,\{4\}\}\}$.

2. a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,10\}$; b) $A - B = \{7,10\}$; c) $B - C = \{1,3,5\}$; d) $A \cap C = \{4\}$; e) $A' = \{2,3,5,6,8,9\}$; f) $X' = \emptyset$; g) $C \cap \emptyset = \emptyset$; h) $B \cup \emptyset = B = \{1,2,3,4,5\}$; i) $B' \cup (C - A)' = \{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; j) $B \cup X = X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; k) $A \cap (B \cup C) = \{1,4\}$; l) $(A \cup B) - C = \{1,3,5,7,10\}$; m) $(A \cap B)' \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; n) $(A \cup B) - (B \cap C) = \{1,3,5,7,10\}$; o) $A \vartriangle B = \{2,3,5,7,10\}$; p) $A \vartriangle A = \emptyset$; q) $A \vartriangle A' = X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; r) $X \vartriangle B = B' = \{6,7,8,9,10\}$; s) $\emptyset \vartriangle A = A = \{1,4,7,10\}$.

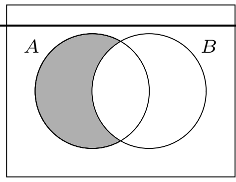
3.



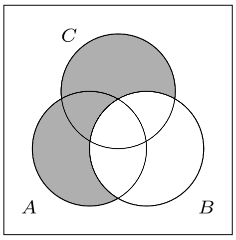
a) $A\cap B'=A-B$



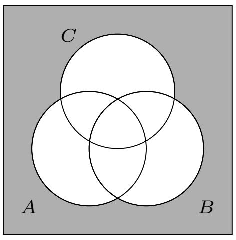
b) $A'-B$



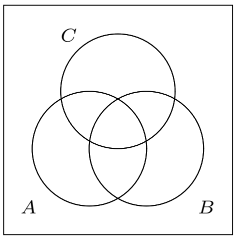
c) $(A\cup B)-B$



d) $B'\cap(A\cup C)$



e) $(A'-B)\cap(A\cup C')$



f) $((A\cap B)-(C-A'))\cap C$

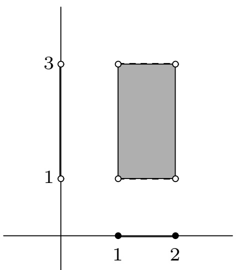
4. a) $\langle 1;7)$; b) $(3;5\rangle$; c) $\langle 1;3\rangle$; d) $\langle 2;5\rangle$; e) $\emptyset$; f) $(5;\infty)$; g) $(3;5\rangle$; h) $\emptyset$; i) $\langle 1;3\rangle \cup (5;7)$; j) $(-\infty;1)\cup\langle 2;5\rangle$.

5. a) $A\subseteq B$; b) $B\subseteq A$; c) $A=B=X$; d) $A=X$; e) $B'\subseteq A$; f) $A\subseteq B'$; g) $A\cup B=X$; h) $A=X$; i) $A\subseteq B$; j) $A\subseteq B$; k) $A\cap B=\emptyset$; l) $A=\emptyset$.

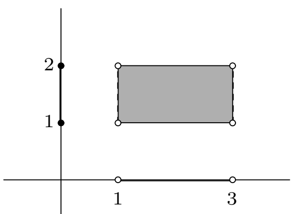
6. a) $\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$; b) $\{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b)\}$; c) $\{(1,a,x),(1,a,y),(1,b,x),(1,b,y),(2,a,x),(2,a,y),(2,b,x),(2,b,y),(3,a,x),(3,a,y),(3,b,x),(3,b,y)\}$; d) $\{(1,1,x),(1,1,y),(1,2,x),(1,2,y),(1,3,x),(1,3,y),(2,1,x),(2,1,y),(2,2,x),(2,2,y),(2,3,x),(2,3,y),(3,1,x),(3,1,y),(3,2,x),(3,2,y),(3,3,x),(3,3,y)\}$.

7. a) $\emptyset$; b) $\{(1,5),(1,\{6,\{7\}\}),(\{2,\{3,\{4\}\}\},5),(\{2,\{3,\{4\}\}\},\{6,\{7\}\})\}$; c) $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$; d) $\{(\{0,1\},\{0,1\},\{0,1\})\}$.

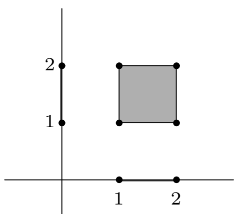
8.



a) $A\times B$



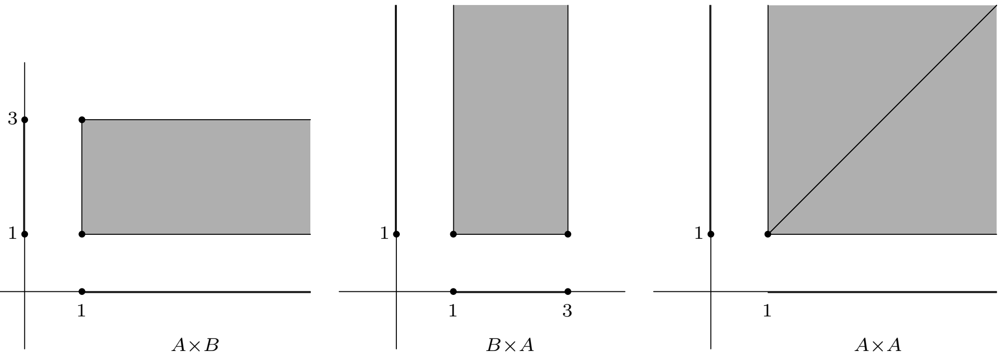
$B\times A$



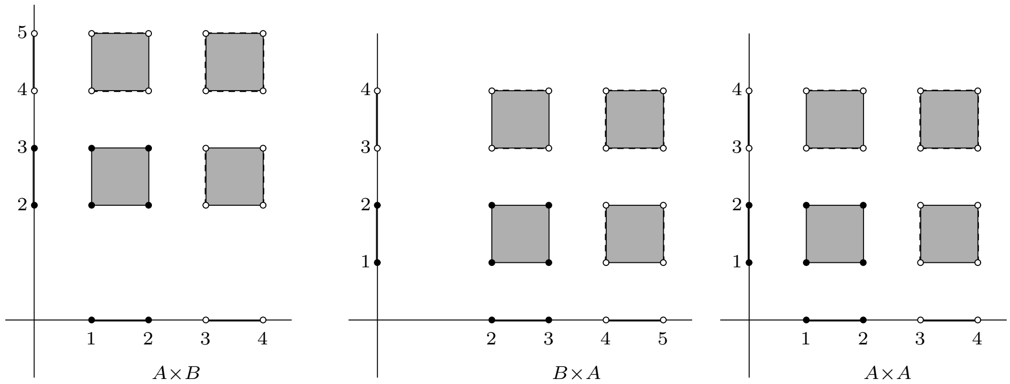
$A\times A$

Nie umiem pozbyć się tej przekątnej z ostatniego rysunku. Jak to można osiągnąć w LATEX-u? Czy ktoś ma pomysł?

b)



c)



9. a) $A \cup B$; b) X; c) $A \cap (B \cup C)$; d) X.

10. a) Załóżmy, że $A \subseteq B$. Teraz zauważmy, że

$$\begin{aligned} x \in C - B &\Rightarrow x \in\in C \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in\in C \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow x \in\in C - A. \end{aligned}$$

Stad wynika, że jeśli $A \subseteq B$, $C - B \subseteq C - A$.

b) Jeżeli $A \subseteq B$, to $B \cap A = A$ i wtedy też wobec równości $B \cap A' = B - A$ mamy

$$\begin{aligned} B &= B \cap X = B \cap (A \cup A') \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap A') \\ &= A \cup (B - A). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, jeśli $A \cup (B - A) = B$, to $A \subseteq B$, bo mamy $A \subseteq A \cup (B - A) = B$.

c) $(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap (B \cap B') = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

d) $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

e)
$$\begin{aligned} A \triangle (A \triangle B) &= (A \cap (A \triangle B)') \cup (A' \cap (A \triangle B)) \\ &\;\;\vdots \\ &= (A \cap B) \cup (A' \cap B) \\ &= (A \cup A') \cap B \\ &= X \cap B \\ &= B \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B) \\ &\Leftrightarrow (X \in \mathcal{P}(A)) \wedge (X \in \mathcal{P}(B)) \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} (A \cup B) - C &= (A \cup B) \cap C' \\ &= (A \cap C') \cup (B \cap C') \\ &= (A - C) \cup (B - C) \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}A-(B-C) &= A-(B\cap C')\\ &= A\cap(B\cap C')'\\ &= A\cap(B'\cup C)\\ &= (A\cap B')\cup(A\cap C)\\ &= (A-B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned}A\cap(B-C) &= A\cap(B\cap C')\\ &= (A\cap B)\cap C'\\ &= \emptyset\cup((A\cap B)\cap C')\\ &= ((A\cap B)\cap A')\cup((A\cap B)\cap C')\\ &= (A\cap B)\cap(A'\cup C')\\ &= (A\cap B)\cap(A\cap C)'\\ &= (A\cap B)-(A\cap C)\end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned}A-(B\cap C) &= A\cap(B\cap C)'\\ &= A\cap(B'\cup C')\\ &= (A\cap B')\cup(A\cap C')\\ &= (A-B)\cup(A-C)\end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(B\cup C) &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(y\in B\cup C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge((y\in B)\vee(y\in C))\\ &\Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(y\in B))\vee((x\in A)\wedge(y\in C))\\ &\Leftrightarrow ((x,y)\in A\times B)\vee((x,y)\in A\times C)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)\end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(y\in B\cap C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge((y\in B)\wedge(y\in C))\\ &\Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(y\in B))\wedge((x\in A)\wedge(y\in C))\\ &\Leftrightarrow ((x,y)\in A\times B)\wedge((x,y)\in A\times C)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)\end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(B\,\triangle\,C) &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(y\in B\,\triangle\,C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge((y\in B-C)\vee(y\in C-B))\\ &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge((y\in B\wedge y\notin C)\vee(y\in C\wedge y\notin B))\\ &\Leftrightarrow ((x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C))\\ &\qquad\vee((x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in A\wedge y\notin B))\\ &\Leftrightarrow ((x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C)\\ &\qquad\vee((x,y)\in A\times C\wedge(x,y)\notin A\times B)\\ &\Leftrightarrow ((x,y)\in(A\times B)-(A\times C))\\ &\qquad\vee((x,y)\in(A\times C)-(A\times B))\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in((A\times B)-(A\times C))\\ &\qquad\cup((A\times C)-(A\times B))\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\,\triangle\,(A\times C)\end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned}(A\cap C)-(B\cup D) &= (A\cap C)\cap(B\cup D)'\\ &= (A\cap C)\cap(B'\cap D')\\ &= (A\cap B')\cap(C\cap D')\\ &= (A-B)\cap(C-D)\end{aligned}$$

o)
$$\begin{aligned}(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) &\Leftrightarrow ((x,y)\in A\times B)\wedge((x,y)\in C\times D)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in C\wedge y\in D)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\cap C)\wedge(y\in B\cap D)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D) & \Leftrightarrow & ((x,y)\in A\times B)\vee((x,y)\in C\times D)\\ & \Leftrightarrow & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in C\wedge y\in D)\\ & \Leftrightarrow & (x\in A\vee(x\in C\wedge y\in D))\\ & & \wedge(y\in B\vee(x\in C\wedge y\in D))\\ \text{p)} & \Leftrightarrow & (x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in A\vee y\in D)\\ & & \wedge(y\in B\vee x\in C)\wedge(y\in B\vee y\in D))\\ & \Rightarrow & (x\in A\vee x\in C)\wedge(y\in B\vee y\in D))\\ & \Leftrightarrow & (x\in A\cup C)\wedge(y\in B\cup D)\\ & \Leftrightarrow & (x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)\end{array}$$

11. a) Tak; b) Tak; c) Tak; d) Nie; e) Nie; f) Nie; g) Tak; h) Tak.

12. a) Uzasadnimy, że $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$. Zauważmy, że jeśli $X\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$, to $X\in\mathcal{P}(A)$ lub $X\in\mathcal{P}(B)$. Zatem $X\subseteq A$ lub $X\subseteq B$ i dlatego też $X\subseteq A\cup B$. Stąd wynika, że $X\in\mathcal{P}(A\cup B)$. To dowodzi, że $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$. Zauważmy teraz, że zbiory $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(A\cup B)$ nie muszą być równe. Przykładowo, jeśli $A=\{1\}$ i $B=\{2\}$, to $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(\{1\})\cup\mathcal{P}(\{2\})=\{\emptyset,\{1\}\}\cup\{\emptyset,\{2\}\}=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}\subsetneq\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=\mathcal{P}(\{1,2\})=\mathcal{P}(A\cup B)$. b) Z faktu, że $\emptyset\in\mathcal{P}(A-B)$ i $\emptyset\notin\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(B)$ wynika, że zbiory $\mathcal{P}(A-B)$ i $\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(B)$ nie są równe. Uzasadnimy, że w ogólnym przypadku żaden ze zbiorów $\mathcal{P}(A-B)$ i $\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(B)$ nie zawiera się w drugim. Przykładowo dla zbiorów $A=\{1,2\}$ i $B=\{2,3\}$ mamy $A-B=\{1\}$ i $\mathcal{P}(A-B)=\{\emptyset,\{1\}\}$ oraz $\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}-\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}=\{\{1\},\{1,2\}\}$. c) Nierówność zbiorów $\mathcal{P}(A\bigtriangleup B)$ i $\mathcal{P}(A)\bigtriangleup\mathcal{P}(B)$ wynika już z obserwacji, że $\emptyset\in\mathcal{P}(A\bigtriangleup B)$ i $\emptyset\notin\mathcal{P}(A)\bigtriangleup\mathcal{P}(B)$. Weźmy jeszcze pod uwagę zbiory $A=\{1,2\}$ i $B=\{2,3\}$. Dla tych zbiorów mamy $\mathcal{P}(A\bigtriangleup B)=\mathcal{P}(\{1,3\})=\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$ i $\mathcal{P}(A)\bigtriangleup\mathcal{P}(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\bigtriangleup\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}=\{\{1\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}$ i to dowodzi, że w ogólnym przypadku zbiory $\mathcal{P}(A\bigtriangleup B)$ i $\mathcal{P}(A)\bigtriangleup\mathcal{P}(B)$ są nieporównywalne. d) Każdy element zbioru $\mathcal{P}(A\times B)$ jest zbiorem składającym się z par (x,y) elementów x i y ze zbioru A i B. Natomiast zbiór $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ jest zbiorem par (X,Y) podzbiorów X i Y zbiorów A i B. Stąd wynika, że zbiory te nigdy nie są równe.

13. a) $A=\emptyset$ i $B\neq\emptyset$ (np. $B=\{1\}$); b) $A=\emptyset$ i $B\neq\emptyset$ w ustalonej niepustej przestrzeni X; c) $A=\emptyset$, B dowolny w ustalonej niepustej przestrzeni X; d) dowolne zbiory A, B i C takie, że $A\cap(B\cup C)\neq\emptyset$ (np. $A-\{1,2\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$); e) dowolne dwa różne zbiory A i B (np. $A=\emptyset$ i $B=\{1\}$); f) dowolne trzy zbiory A, B i C takie, że $B\cap C\neq\emptyset$ (np. $A=\emptyset$, $B=\{1\}$ i $C=\{1,2\}$); g) $A\neq\emptyset$, $B=C=\emptyset$; h) dowolne trzy zbiory A, B i C takie, że $A\cap C\neq\emptyset$ (np. $A=\{1,2\}$, $B=\emptyset$ i $C=\{2\}$); i) dowolne trzy zbiory A, B i C takie, że $(A\cap C)-B\neq\emptyset$ (np. $A=C=\{1\}$ i $B=\emptyset$); j) dowolne dwa zbiory A i B w niepustej przestrzeni X takie, że $(A\times B')\cup(A'\times B)\neq\emptyset$ (np. $A=B=\{1\}$ w przestrzeni $X=\{1,2\}$).

14. a) Ponieważ $(A\cap B)\cup(C\cap B)=(A\cup C)\cap B$, więc $(A\cap B)\cup(C\cap B)=B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(A\cup C)\cap B=B$, a tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy $B\subseteq BA\cup C$. b) Ponieważ $(A\cup B)\cap(C\cup B)=(A\cap C)\cup B$, więc $(A\cup B)\cap(C\cup B)=B$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(A\cap C)\cup B=B$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $A\cap C\subseteq B$. c) Z diagramu Venna łatwo widać, że $A\cup B=(A-B)\cup B=(A-C)\cup((A\cap C)-B)\cup B$. Zatem mamy $A\cup B=(A-C)\cup B$ wtedy i tylko wtedy, $(A\cap C)-B=\emptyset$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $A\cap C\subseteq B$. d) Z diagramu Venna widać, że $(A-C)\cup B=(A-C)\cup(B-C)\cup(B\cap C)=((A\cup B)-C)\cup(B\cap C)$. Zatem widać, że $(A-C)\cup B=(A\cup B)-C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B\cap C=\emptyset$.

15. a) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo mamy $A-(A\cap B)=$

$A\cap(A\cap B)' = A\cap(A'\cup B') = (A\cap A')\cup(A\cap B') = \emptyset\cup(A\cap B') = A\cap B' A-B$. b) Związek nie jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo przykładowo dla zbiorów $A=\{1,2\}$ i $B=\{2,3\}$ mamy $(A\cup B)-B=\{1\}\neq A$. c) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo mamy $(A\cup B)-B = (A\cup B)\cap B' = (A\cap B')\cup(B\cap B') = (A\cap B')\cup\emptyset = A\cap B' = A-B$. d) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo $A \subseteq A\cup(A\cap B) \subseteq A\cup A = A$. e) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo $A\cup(A\cup B) = (A\cup A)\cup B = (A)\cup B = A\cup B$. f) Związek nie jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo, przykładowo, jeśli $A\neq\emptyset$ i $B=\emptyset$, to $B-A=\emptyset-A=\emptyset\neq A=A-\emptyset=A-B$. g) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo $A-(A-B) = A-(A\cap B') = A\cap(A\cap B')' = A\cap(A'\cup B) = (A\cap A')\cup(A\cap B) = \emptyset\cup(A\cap B) = A\cap B$. h) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów: $(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)\cap(A\cap C)' = (A\cap B)\cap(A'\cup C') = ((A\cap B)\cap A')\cup((A\cap B)\cap C') = \emptyset\cup((A\cap B)\cap C') = (A\cap B)\cap C' = A\cap(B\cap C') = A\cap(B-C)$. i) Równość $A\cup(B-C) = (A\cup B)-(A\cup C)$ nie jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo jeśli, przykładowo, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ i $C=\{3\}$, to $A\cup(B-C)\{1,2\}\neq\{2\}=(A\cup B)-(A\cup C)$. j) Równość $A-(B-C)=(A-B)-C$ nie jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo, przykładowo, dla zbiorów $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2\}$ i $C=\{2,3\}$ mamy $(A-B)-C=\{1\}\neq\{1,2,3\}=A-(B-C)$.

16. Niech X będzie ustalonym zbiorem. Uzasadnimy, że rodzina $\mathcal{A}=\{A\subseteq X\colon\ A \text{ lub } X-A \text{ jest skończony}\}$ spełnia warunki definicji 2.8.1. (1) Jest oczywiste, że zbiór X należy do rodziny $\mathcal{A}$, bo zbiór $X-X=\emptyset$ jest skończony. (2) Jeśli zbiór A jest elementem rodziny $\mathcal{A}$, to A lub $X-A$ jest skończony. Stąd wynika, że $X-A$ lub $X-(X-A)=A$ jest skończony. To dowodzi, że $X-A\in\mathcal{A}$, gdy $A\in\mathcal{A}$. (3) Załóżmy, że $A,B\in\mathcal{A}$. Wykażemy, że $A\cup B\in\mathcal{A}$. Przede wszystkim, jeśli zbiory A i B są skończone, to także ich suma $A\cup B$ jest skończona (bo $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| \leqslant |A|+|B|$) i dlatego $A\cup B\in\mathcal{A}$. Załóżmy teraz, że co najmniej jeden ze zbiorów A i B jest taki, że $X-A$ lub $X-B$ jest skończony. Wtedy także zbiór $(X-A)\cap(X-B) = X-(A\cup B)$ jest skończony i stąd znowu wynika, że $A\cup B\in\mathcal{A}$. To kończy dowód fakt, że rodzina $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów.

17. Udowodnimy, że rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X ma (niżej przedstawione) własności (a), (b) i (c) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona własności (1), (2) i (3):

(a) $X\in\mathcal{A}$,	(1) $\emptyset, X\in\mathcal{A}$,
(b) $\forall_{A\in\mathcal{A}}\ A'\in\mathcal{A}$,	(2) $\forall_{A,B\in\mathcal{A}}\ A\cap B\in\mathcal{A}$,
(c) $\forall_{A,B\in\mathcal{A}}\ A\cup B\in\mathcal{A}$,	(3) $\forall_{A,B\in\mathcal{A}}\ A-B\in\mathcal{A}$.

Na początek załóżmy, że rodzina $\mathcal{A}$ ma własności (a), (b) i (c). Udowodnimy, że ma ona własności (1), (2) i (3).

(1) Wobec (a) mamy $X\in\mathcal{A}$. Teraz $\emptyset = X'\in\mathcal{A}$ wobec (b). Dlatego $\emptyset, X\in\mathcal{A}$.

(2) Zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} A,B\in\mathcal{A} &\Rightarrow A',B'\in\mathcal{A} \quad \text{(wobec (b))} \\ &\Rightarrow A'\cup B'\in\mathcal{A} \quad \text{(wobec (c))} \\ &\Rightarrow (A'\cup B')'\in\mathcal{A} \quad \text{(wobec (b))} \\ &\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{A} \quad (\text{bo } A\cap B = (A'\cup B')'). \end{aligned}$$

(3) Ostatniej własności dowodzą implikacje:

$$\begin{aligned} A,B\in\mathcal{A} &\Rightarrow A,B'\in\mathcal{A} \quad \text{(wobec (b))} \\ &\Rightarrow A\cap B'\in\mathcal{A} \quad \text{(wobec już udowodnionej (2))} \\ &\Rightarrow A-B\in\mathcal{A} \quad (\text{bo } A-B = A\cap B'). \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że rodzina $\mathcal{A}$ ma własności (1), (2) i (3). Udowodnimy, że ma ona własności (a), (b) i (c).

Wobec (1) jest oczywiste, że $X \in \mathcal{A}$ (bo $\emptyset, X \in \mathcal{A}$) i dlatego rodzina $\mathcal{A}$ ma własność (a).

Dla dowodu własności (b) rodziny $\mathcal{A}$ zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A, X \in \mathcal{A} \quad \text{(bo wiemy już, że } X \in \mathcal{A}) \\ &\Rightarrow \quad X - A \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec (3))} \\ &\Rightarrow \quad A' \in \mathcal{A} \quad (\text{bo } A' = X - A). \end{aligned}$$

W końcu zauważmy, że rodzina $\mathcal{A}$ ma własność (c), bo mamy

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A', B' \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec już udowodnionej własności (b))} \\ &\Rightarrow \quad A' \cap B' \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec (2))} \\ &\Rightarrow \quad (A' \cap B')' \in \mathcal{A} \quad \text{(znowu wobec (b))} \\ &\Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A} \quad (\text{bo } A \cup B = (A' \cap B')'). \end{aligned}$$

18. Udowodnimy, że rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X ma (niżej przedstawione) własności (a), (b) i (c) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona własności (α) i (β):

(a) $X \in \mathcal{A}$,
(b) $\forall_{A \in \mathcal{A}}\ A' \in \mathcal{A}$,
(c) $\forall_{A,B \in \mathcal{A}}\ A \cup B \in \mathcal{A}$,

(α) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
(β) $\forall_{A,B \in \mathcal{A}}\ A' \cap B' \in \mathcal{A}$.

Na początek załóżmy, że rodzina $\mathcal{A}$ ma własności (a), (b) i (c). Udowodnimy, że ma ona własności (α) i (β). Wobec (1) mamy

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad \emptyset = X' \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec własności (b))} \\ &\Rightarrow \quad \emptyset, X \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

To dowodzi, że rodzina $\mathcal{A}$ ma własność (α). Własność (β) jest konsekwencją następującego ciągu implikacji:

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec (c))} \\ &\Rightarrow \quad (A \cup B)' \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec (b))} \\ &\Rightarrow \quad A' \cap B' \in \mathcal{A} \quad (\text{bo } A' \cap B' = (A \cup B)'). \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że rodzina $\mathcal{A}$ ma własności (α) i (β). Udowodnimy, że ma ona własności (a), (b) i (c). Z własności (α) jest oczywiste, że ma ona własność (1). Własność (2) też jest oczywista, bo widać, że

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A' \cap A' \in \mathcal{A} \quad (\text{wobec } (\beta)) \\ &\Rightarrow \quad A' \in \mathcal{A} \quad (\text{bo } A' \cap A' = A'). \end{aligned}$$

Własność (3) uzasadnia następujący ciąg implikacji:

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A' \cap B' \in \mathcal{A} \quad (\text{wobec własności } (\beta)) \\ &\Rightarrow \quad (A' \cap B')' \in \mathcal{A} \quad \text{(wobec już udowodnionej własności (b))} \\ &\Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A} \quad (\text{bo } A \cup B = (A' \cap B')'). \end{aligned}$$

19. a) $\forall_x\, [\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]$;
b) $\exists_x\, [\varphi(x) \wedge \psi(x)]$;
c) $\forall_x\, [\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)]$;
d) $\forall_x\, [\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)]$.

20. Przez $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{P}$ oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich liczb pierwszych. Wtedy rozważane zdania można zapisać następująco: a) $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geqslant 0$; b) $\exists_{n \in \mathbb{N}}(3|n \wedge 4|n)$; c) $\sim (\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\, n \leqslant n_0)$ lub równoważnie $\forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\, n > n_0$; d) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{p \in \mathbb{P}}\, p|2n$; e) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{p,q \in \mathbb{P}}\, 2n = p + q$.

21. a) Zdanie jest prawdziwe, bo $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą np. dla $n = 2$, $n = 3$ i $n = 5$. b) Zdanie jest prawdziwe, bo funkcja $f(x) = x^3$ jest rosnąca w całym zbiorze $\mathbb{R}$. c) Zdanie jest prawdziwe, bo nierówność $3^x > x^3$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, więc także jest $3^n > n^3$ dla każdej liczby naturalne n.

22. a) Zdanie jest prawdziwe, bo nierówność $x^2 > 4x$ jest prawdziwa dla każdego $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$. b) Zdanie jest fałszywe, bo nierówność $x^2 > 4x$ nie jest prawdziwa dla każdego $x \in \langle 0; 4\rangle$. c) Zdanie jest prawdziwe, bo przykładowo mamy $5 > 2$ i nierówność $5^2 > 4{\cdot}5$. d) Zdanie jest fałszywe, bo $x^2 \leqslant 4x$ $x \in (2; 4\rangle$. e) Zdanie jest prawdziwe, bo nierówność $2x/(x^2+1) < 1$ jest prawdziwa np. dla $x = 3$. f) Zdanie jest prawdziwe, bo nierówność $2x/(x^2 + 1) < 1$ jest prawdziwa dla każdego $x \neq 1$, więc także dla każdego $x \in (2; \infty)$. g) Zdanie jest fałszywe, bo ze względu na y równanie $x + y^2 + 1 = 0$ ma co najwyżej dwa rozwiązania dla każdego $x \in \mathbb{R}$. h) Zdanie jest prawdziwe, bo ze względu na x równanie $x + y^2 + 1 = 0$ ma rozwiązania dla każdego $y \in \mathbb{R}$.

23. a) Zdanie jest fałszywe, bo prawdziwe jest jego zaprzeczenie $\exists_{m,\, n\in\mathbb{Z}}\, m > n$. Przykładowo dla liczb całkowitych $m = 5$ i $n = 3$ spełniona jest nierówność $m = 5 > 3 = n$ (i dlatego nie jest spełniona nierówność $m \leqslant n$). b) Zdanie jest prawdziwe, bo przykładowo dla liczb całkowitych $m = 5$ i $n = 6$ spełniona jest nierówność $m = 5 \leqslant 6 = n$. c) Zdanie jest prawdziwe, bo jeśli $m \in \mathbb{Z}$ i jeśli przyjmiemy $n = m + 1$, to $n = m + 1 \in \mathbb{Z}$ i spełniona jest nierówność $m \leqslant m + 1 = n$. d) Zdanie jest fałszywe, bo prawdziwe jest jego zaprzeczenie $\forall_{m,\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\, m \leqslant n$. Istotnie, bo jeśli $m \in \mathbb{Z}$ i jeśli przyjmiemy $n = m - 1$, to $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ i spełniona jest nierówność $m > n = m - 1$ (i nie jest spełniona nierówność $m \leqslant n$). e) Zdanie jest prawdziwe, bo jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i jeśli (przykładowo) przyjmiemy, że $m = n - 1$, to $m = n - 1 \in \mathbb{Z}$ i spełniona jest nierówność $m = n - 1 \leqslant n$. f) Zdanie jest fałszywe, bo jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i $m = n + 1$, to $m = n+1 \in \mathbb{Z}$ i spełniona jest nierówność $m = n+1 > n$ (i nie jest spełniona nierówność $m \leqslant n$).

24. a) Stwierdzenie jest prawdziwe, bo jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $y = -x \in \mathbb{R}$ i $x + y = x + (-x) = 0$. b) Stwierdzenie jest fałszywe, bo prawdziwe jest jego zaprzeczenie $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\, x + y \neq 0$. Istotnie, bo jeśli $y \in \mathbb{R}$ i jeśli przyjmiemy $x = -y + 1$, to $x \in \mathbb{R}$ i $x + y = (-y + 1) + y = 1 \neq 0$. c) i d) Stwierdzenia są prawdziwe, bo $y = 0 \in \mathbb{R}$ i $xy = x \cdot 0 = 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. e) Stwierdzenie jest fałszywe, bo prawdziwe jest jego zaprzeczenie $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\, xy \neq 1$. Istotnie tak jest, bo $x = 0 \in \mathbb{R}$ i $xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$ dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$. f) Stwierdzenie jest fałszywe, bo prawdziwe jest jego zaprzeczenie $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\, xy \neq 1$. Istotnie, bo dla $x = 0 (\in \mathbb{R})$ i dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$ mamy $xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$.

25. a) Zdanie jest prawdziwe, bo przykładowo dla liczb $x = 1$ i $y = 1$ ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mamy $0 \leqslant 0 = x - y \leqslant 2$. b) Zdanie jest fałszywe, bo – jak łatwo zauważyć – żadna z nierówności $0 \leqslant 1-y \leqslant 2$, $0 \leqslant 2-y \leqslant 2$, $0 \leqslant 3-y \leqslant 2$ $0 \leqslant 4-y \leqslant 2$ i $0 \leqslant 5-y \leqslant 2$ nie jest prawdziwa dla dowolnego $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. c) Zdanie jest prawdziwe, bo jeśli $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i jeśli przyjmiemy $y = x$, to $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i spełnione są nierówności $0 \leqslant x - y = 0 \leqslant 2$. d) Ponieważ zdanie $\exists_x\forall_y\ \varphi(x, y)$ jest fałszywe (zob. b)), więc także i zdanie $\forall_x\forall_y\ \varphi(x, y)$ jest zdaniem fałszywym.

26. a) Przypuśćmy, że implikacja $\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\forall_{x\in X}\varphi(x) \Rightarrow \forall_{x\in X}\psi(x))$ nie jest prawdziwa. Zatem przypuśćmy, że $\omega(\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) = 1$, a jednocześnie $\omega\,(\forall_{x\in X}\varphi(x) \Rightarrow \forall_{x\in X}\psi(x)) = 0$. Z tego ostatniego przypuszczenia wynika, że $\omega\,(\forall_{x\in X}\varphi(x)) = 1$ i $\omega\,(\forall_{x\in X}\psi(x)) = 0$. Dlatego istnieje $x_0 \in X$

takie, że $\omega(\varphi(x_0)) = 1$ i $\omega(\psi(x_0)) = 0$. Wtedy $\omega(\varphi(x_0) \Rightarrow \psi(x_0)) = 0$, więc $\omega(\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) = 0$, co przeczy przypuszczeniu $\omega(\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) = 1$. b) Podobnie jak w poprzedniej części przypuśćmy, że implikacja $\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\exists_{x\in X}\varphi(x) \Rightarrow \exists_{x\in X}\psi(x))$ nie jest prawdziwa. Zatem przypuśćmy, że $\omega(\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) = 1$ i $\omega(\exists_{x\in X}\varphi(x) \Rightarrow \exists_{x\in X}\psi(x)) = 0$. Z tego ostatniego przypuszczenia wynika, że $\omega(\exists_{x\in X}\varphi(x)) = 1$ i $\omega(\exists_{x\in X}\psi(x)) = 0$. Dlatego istnieje $x_0 \in X$ takie, że $\omega(\varphi(x_0)) = 1$ i $\omega(\psi(x_0)) = 0$. Wtedy $\omega(\varphi(x_0) \Rightarrow \psi(x_0)) = 0$, więc $\omega(\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) = 0$, co przeczy przypuszczeniu $\omega(\forall_{x\in X}(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) = 1$.

27. a) i b) Niech $\varphi(n)$ i $\psi(n)$ oznaczają odpowiednio „n jest liczbą parzystą" i „n jest liczbą nieparzystą" dla $n \in \mathbb{Z}$. Zdanie $\forall_{n\in\mathbb{Z}}(\varphi(n) \vee \psi(n))$ jest zdaniem prawdziwym, bo każda liczba całkowita n jest parzysta lub nieparzysta. Natomiast zdanie $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n) \vee \forall_{n\in\mathbb{Z}}\psi(n)$ jest zdaniem fałszywym, bo każde ze zdań $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n)$ i $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\psi(n)$ jest fałszywe (bo nie jest prawdą, że każda liczba całkowita n jest parzysta i nie jest prawdą, że każda liczba całkowita n jest nieparzysta. Stąd wynika, że implikacja $\forall_{n\in\mathbb{Z}}(\varphi(n) \vee \psi(n)) \Rightarrow (\forall_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n) \vee \forall_{n\in\mathbb{Z}}\psi(n))$ jest zdaniem fałszywym.

Zdanie $\exists_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n) \wedge \exists\psi(n)$ jest prawdziwe, bo każde ze zdań $\exists_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n)$ i $\exists\psi(n)$ jest prawdziwe (bo istniej parzysta liczba całkowita i istnieje nieparzysta liczba całkowita). Natomiast zdanie $\exists_{n\in\mathbb{Z}}(\varphi(n) \wedge \psi(n))$ jest fałszywe, bo żadna liczba całkowita n nie jest jednocześnie parzysta i nieparzysta. Z tego wynika, że implikacja $(\exists_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n) \wedge \exists\psi(n)) \Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{Z}}(\varphi(n) \wedge \psi(n))$ jest zdaniem fałszywym.

c) i d) Niech $\varphi(m,n)$ oznacza „$m+n$ jest liczbą nieparzystą" dla $m,n \in \mathbb{Z}$. Zdanie $\forall_{m\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(m,n)$ jest zdaniem prawdziwym, bo jeśli $m \in \mathbb{Z}$ i jeśli przyjmiemy $n = m+1$, to $n = m+1 \in \mathbb{Z}$ i $m+n = m+(m+1) = 2m+1$ jest liczbą nieparzystą. Natomiast zdanie $\exists_{m\in\mathbb{Z}}\forall_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(m,n)$ jest zdaniem fałszywym, bo dla każdej jakkolwiek wybranej liczby całkowitej m i zawsze znajdzie się liczba całkowita n (choćby $n = m$), taka że suma $m+n$ jest liczbą parzystą. To implikuje, że implikacja $\forall_{m\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(m,n) \Rightarrow \exists_{m\in\mathbb{Z}}\forall_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(m,n)$ jest zdaniem fałszywym.

Zdanie $\exists_{m\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\ \varphi(m,n)$ jest zdaniem prawdziwym, bo przykładowo dla $m = 0$ i $n = 1$ suma $m+n = 0+1 = 1$ jest liczbą nieparzystą. Zdanie $\exists_{m\in\mathbb{Z}}\varphi(m,m)$ jest zdaniem fałszywym, bo jeśli $m \in \mathbb{Z}$, to $m+m = 2m$ jest liczbą parzystą (i nie jest liczbą nieparzystą). To dowodzi, że implikacja $\exists_{m\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(m,n) \Rightarrow \exists_{m\in\mathbb{Z}}\varphi(m,m)$ jest zdaniem fałszywym.

28. a)
$$\begin{aligned} \sim(\forall_{x\in X}[\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]) &\Leftrightarrow \exists_{x\in X} \sim[\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)] \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in X} \sim[\sim\varphi(x) \vee \sim\psi(x)] \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in X}[\varphi(x) \wedge \sim\psi(x)] \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &\sim\left(\forall_{x\in\mathbb{R}}[(x<1 \text{ lub } x>2) \Rightarrow x^2-3x+2>0]\right) \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}} \sim[(x<1 \text{ lub } x>2) \Rightarrow x^2-3x+2>0] \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}} \sim[\sim(x<1 \text{ lub } x>2) \vee x^2-3x+2>0] \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}[(x<1 \text{ lub } x>2) \wedge \sim(x^2-3x+2>0)] \\ &\Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}[(x<1 \text{ lub } x>2) \wedge (x^2-3x+2 \leqslant 0)]. \end{aligned}$$

29. Przypuśćmy, że liczba $y = \log_2 9$ jest wymierna. Wtedy dla pewnych dodatnich liczb naturalnych m i n mielibyśmy równości

$$\log_2 9 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2^{m/n} = 9 \Leftrightarrow 2^m = 9^n,$$

ale ta ostatnia równość jest niemożliwa, bo liczba 2^m jest parzysta, a liczba 9^n nieparzysta. To dowodzi, że liczba $y = \log_2 9$ jest niewymierna. Teraz zauważmy niewymierna potęga liczby niewymiernej $\sqrt{2}^{\log_2 9}$ jest liczbą wymierną, bo mamy $\sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 9} = 2^{\log_2 9^{1/2}} = 2^{\log_2 3} = 3$. (Podobny przykład przedstawiamy w następnym ćwiczeniu (zob. też przykład 2.6.7 na str. 63)).

30. Gdyby liczba $\log_x q$ (gdzie x jest dodatnią liczbą przestępną, a q jest dodatnią liczbą wymierną różną od 1) była liczbą wymierną, to istniałyby dodatnia liczba naturalna n i niezerowa liczba całkowita n, dla których mielibyśmy równości

$$\log_x q = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x^{m/n} = q \Leftrightarrow x^m = q^n$$

i ta ostatnia równość przeczyłaby założeniu, że x jest liczbą przestępną (bo x jest pierwiastkiem wielomianu $t^m - q^n$ i współczynniki tego wielomianu są liczbami wymiernymi). Zatem liczba $\log_x q$ jest niewymierna, a liczba $x^{\log_x q} = q$ jest liczbą wymierną.

31. Ponieważ $A_i \subseteq \mathbb{N}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, więc $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \mathbb{N}$. Z drugiej strony $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ dla każdego $i_0 \in \mathbb{N}$, więc w szczególności $A_0 \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, czyli $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ (bo $\mathbb{N} = A_0$). Stąd wynika, że $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$.
Z faktu, że $A_i \subseteq \mathbb{N}$ (dla $i \in \mathbb{N}$) wynika, że $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \mathbb{N}$. Teraz zauważmy, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $n \notin A_{n+1}$ i dlatego $n \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$. To oznacza, że żadna liczba naturalna nie jest elementem zbioru $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Stąd wynika, że $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

32. Ponieważ $A_t = \{(x, tx) \colon x \in \mathbb{R}\}$ jest zbiorem wszystkich punktów leżących na prostej $y = tx$, więc A_t jest podzbiorem zbioru $B = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\}$ i dlatego $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \subseteq B$. Z drugiej strony jest oczywiste, że punkt $(0,0)$ należący do zbioru B, należy do każdego zbioru A_t (bo $t0 = 0$) i do sumy $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$. Jeśli natomiast (a,b) należy do zbioru B i $a \neq 0$, to $(a,b) \in A_{b/a}$ (bo $\frac{b}{a}a = b$) i dlatego $(a,b) \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$. Stąd wynika, że $B \subseteq \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$. To kończy dowód równości $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = B$.

33. a) Ponieważ każdy ze zbiorów $A_n = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant n\}$ jest podzbiorem zbioru A_0, więc także suma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest podzbiorem zbioru A_0. Z drugiej strony zbiór A_0 jest podzbiorem sumy $A_0 \cup A_1 \cup \ldots = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Stąd wynika, że $A_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_0$ i dlatego $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 = \langle 0; \infty)$.
Jest oczywiste, że $\emptyset \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_{m_0} \subseteq \mathbb{R}$ dla każdej liczby $m_0 \in \mathbb{N}$. Weźmy teraz pod uwagę dowolną liczbę $x \in \mathbb{R}$. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że $n_0 > x$. Wtedy $x \notin A_{n_0}$ i dlatego $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Stąd wynika, że żadna liczba rzeczywista nie należy do zbioru $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. To dowodzi, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
Teraz zauważmy, że z powyższego i wobec prawa de Morgana mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\emptyset} = \mathbb{R}$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\langle 0; \infty)} = (-\infty; 0)$.
b) Jeśli $x \in A_n$, to spełnione są nierówności $-\frac{1}{n+1} < x < 2 - \frac{1}{n+1}$, więc także $-1 < x < 2$. Stąd wynika, że $A_n \subseteq (-1;2)$, więc także mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq (-1;2)$. Dla dowodu przeciwnego zawierania weźmy pod uwagę dowolne x ze zbioru $(-1;2)$. Wykażemy, że $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Rozważamy dwa przypadki: $x \in (-1;1) = A_0$, $x \in \langle 1; 2)$. W pierwszym przypadku jest oczywiste, że $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Jeśli natomiast $x \in \langle 1;2)$, to $1 \leqslant x < 2$ i z nierówno $x < 2$ oraz z faktu, że ciąg $2 - \frac{1}{n+1}$ jest rosnącym ciągiem zbieżnym do 2 wynika, że istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $x < 2 - \frac{1}{n_0+1} < 2$. Wtedy także spełnione są nierówności $-\frac{1}{n_0+1} < 0 < 1 \leqslant x < 2 - \frac{1}{n_0+1}$. To dowodzi, że $x \in A_{n_0}$ i dlatego $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Z powyższego wynika, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1;2)$.
Udowodnimy teraz, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 0; 1)$. Przede wszystkim zauważmy, że mamy następujący ciąg implikacji:

$$\begin{aligned}
x \in \langle 0;1) \quad &\Rightarrow \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&\rightarrow \quad -\tfrac{1}{n+1} < 0 \leqslant x < 1 \leqslant 2 - \tfrac{1}{n+1} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad -\tfrac{1}{n+1} < x <\leqslant 2 - \tfrac{1}{n+1} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad x \in A_n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad x \in \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.
\end{aligned}$$

Stad wynika, że $\langle 0;1) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wystarczy teraz zauważyć, że $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, gdy $x \geqslant 1$ albo $x < 0$. Jeśli $x \geqslant 1$, to $x \notin A_0$ i dlatego też $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Jeśli $x < 0$, to z faktu, że ciąg $-\frac{1}{n+1}$ jest rosnącym ciągiem zbieżnym do zera, wynika, że $x < -\frac{1}{n_0+1}$ dla pewnej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że $x \notin A_{n_0}$ i dlatego też $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Z powyższego i z praw de Morgana teraz mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\langle 0;1)} = (-\infty;0) \cup \langle 1;\infty)$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{(-1;2)} = (-\infty;-1\rangle \cup \langle 2;\infty)$.
c) Ponieważ $A_n = \langle n^2;(n+1)^2\rangle \subseteq \langle 0;\infty)$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, więc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \langle 0;\infty)$. Weźmy teraz pod uwagę x ze zbioru $\langle 0;\infty)$ i przyjmijmy, że $n = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Wtedy $n \leqslant \sqrt{x} < n+1$ i $n^2 \leqslant x < (n+1)^2$. Stąd wynika, że $x \in A_n$ (dla $n = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$) i $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Zatem $\langle 0;\infty) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i to kończy dowód równości $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 0;\infty)$. Udowodnimy teraz, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. W tym celu wystarczy zauważyć, że $\emptyset \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_0 \cap A_1 \cap A_0 \cap \ldots = A_0 \cap A_2 = \emptyset$. W końcu zauważmy, że tak jak w części a) mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\emptyset} = \mathbb{R}$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\langle 0;\infty)} = (-\infty;0)$.

34. a) Każdy zbiór A_n jest kołem o środku w punkcie $(0,n)$ i promieniu długości n, więc każdy jego element jest elementem zbioru $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$. Stąd wynika, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A$. Udowodnimy teraz, że $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. W tym celu weźmy pod uwagę dowolny element (a,b) ze zbioru A. Udowodnimy, że $(a,b) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Jest to oczywiste, gdy $(a,b) = (0,0)$. Załóżmy teraz, że $(a,b) \in A$ i $b > 0$. Weźmy pod uwagę liczbę naturalną n taką, że $n \geqslant (a^2+b^2)/(2b)$. Wtedy $a^2+b^2 \leqslant 2bn$ i $(a,b) \in A_n$, bo $a^2+(b-n)^2 = a^2+b^2-2bn+n^2 \leqslant 2bn-2bn+n^2 = n^2$. Stąd wynika, że $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i to ostatecznie dowodzi równości $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Z inkluzji $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ natychmiast wnioskujemy, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 = \{(0,0)\}$. Teraz zauważmy, że mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\{(0,0)\}} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leqslant 0\} - \{(0,0)\}$.
b) Podobnie jak w części a) pokazuje się, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$. Z inkluzji $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ wynika też, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant x^2\}$. Teraz jest oczywiste, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{A_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < x^2\}$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leqslant 0\} - \{(0,0)\}$.

35. Jeśli $t \in \mathbb{R}$, to $\sin t \in \langle -1;1\rangle$ i dlatego mamy $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{\sin t\} = \{\sin t \colon t \in \mathbb{R}\} = \langle -1;1\rangle$.

36. Zauważmy, że mamy następujące implikacje:

$$\begin{aligned} x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i \quad &\Rightarrow \quad x \in A_{i_0} \quad \text{dla pewnego } i_0 \in I \\ &\Rightarrow \quad x \in B_{i_0} \quad \text{bo } A_i \subseteq B_i \text{ dla każdego } i \in I \\ &\Rightarrow \quad x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} B_i. \end{aligned}$$

Z tego wynika, że $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. Podobnie z prawdziwości implikacji

$$\begin{aligned} x \in \textstyle\bigcap_{i\in I} A_i \quad &\Rightarrow \quad x \in A_i \quad \text{dla każdego } i \in I \\ &\Rightarrow \quad x \in B_i \quad \text{bo } A_i \subseteq B_i \text{ dla każdego } i \in I \\ &\Rightarrow \quad x \in \textstyle\bigcap_{i\in I} B_i \end{aligned}$$

wynika zawieranie $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$.

37. Pierwsza inkluzja jest konsekwencją następujących implikacji:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}}(\overline{A_t} \cup B_t) &\Rightarrow \forall_{t\in\mathbb{T}}(x \in \overline{A_t} \cup B_t)\\
&\Rightarrow \forall_{t\in\mathbb{T}}(x \in \overline{A_t} \vee x \in B_t)\\
&\Rightarrow \big(\forall_{t\in\mathbb{T}} x \in \overline{A_t}\big) \vee \exists_{t\in\mathbb{T}}(x \notin \overline{A_t} \wedge x \in B_t)\\
&\Rightarrow x \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \overline{A_t} \vee x \in \bigcup_{t\in\mathbb{T}} B_t\\
&\Rightarrow x \in \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{T}} A_t} \cup \bigcup_{t\in\mathbb{T}} B_t, \quad \text{bo} \quad \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \overline{A_t} = \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{T}} A_t}.
\end{aligned}$$

Podobnie druga inkluzja jest konsekwencją implikacji:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}}(\overline{A_t} \cup B_t) &\Rightarrow \forall_{t\in\mathbb{T}}(x \in \overline{A_t} \cup B_t)\\
&\Rightarrow \forall_{t\in\mathbb{T}}(x \in \overline{A_t} \vee x \in B_t)\\
&\Rightarrow (\forall_{t\in\mathbb{T}} x \in B_t) \vee \exists_{t\in\mathbb{T}}(x \notin B_t \wedge x \in \overline{A_t})\\
&\Rightarrow x \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}} B_t \vee x \in \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \overline{A_t}\\
&\Rightarrow x \in \overline{\bigcap_{t\in\mathbb{T}} A_t} \cup \bigcap_{t\in\mathbb{T}} B_t, \quad \text{bo} \quad \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \overline{A_t} = \overline{\bigcap_{t\in\mathbb{T}} A_t}.
\end{aligned}$$

38.

39. Inkluzja $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$ jest konsekwencją następujących implikacji:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n &\Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \vee x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\\
&\Rightarrow (\forall_{n\in\mathbb{N}} x \in A_n) \vee (\forall_{n\in\mathbb{N}} x \in B_n)\\
&\Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}(x \in A_n \vee x \in B_n) \quad \text{(tw. 2.6.2)}\\
&\Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}(x \in A_n \cup B_n)\\
&\Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n).
\end{aligned}$$

W dowodzie inkluzji $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ wykorzystamy założenie, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są zstępującymi rodzinami zbiorów, czyli takimi rodzinami, że $A_n \supseteq A_{n+1}$ i $B_n \supseteq B_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n. Weźmy x ze zbioru $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$. Przypuśćmy, że x nie jest elementem zbioru $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Wtedy mamy implikacje

$$\begin{aligned}
x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n &\Rightarrow x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \wedge x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\\
&\Rightarrow (\exists_{n_0\in\mathbb{N}} x \notin A_{n_0}) \wedge (\exists_{m_0\in\mathbb{N}} x \notin B_{m_0})\\
&\Rightarrow (\forall_{n\geqslant n_0} x \notin A_n) \wedge (\forall_{m\geqslant m_0} x \notin B_m)\\
& (\text{bo } \forall_{n\geqslant n_0} A_{n_0} \supseteq A_n \text{ i } \forall_{m\geqslant m_0} B_{m_0} \supseteq B_m)\\
&\Rightarrow \forall_{k\geqslant \max\{n_0,m_0\}} x \notin A_k \wedge \forall_{k\geqslant \max\{n_0,m_0\}} x \notin B_k\\
&\Rightarrow \forall_{k\geqslant \max\{n_0,m_0\}}(x \notin A_k \wedge x \notin B_k) \quad \text{(tw. 2.6.2)}\\
&\Rightarrow \forall_{k\geqslant \max\{n_0,m_0\}}(x \notin A_k \cup B_k)\\
&\Rightarrow \exists_{k\in\mathbb{N}} x \notin A_k \cup B_k\\
&\Rightarrow x \notin \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(A_k \cup B_k),
\end{aligned}$$

co przeczy założeniu, że $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(A_k \cup B_k)$. To kończy dowód równości $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$.

40. Z faktu, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów wynika, że $A_n - A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A_0$ dla każdej liczby naturalnej n. Stad wnioskujemy, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - A_{n+1}) \subseteq A_0$. Udowodnimy teraz, że $A_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - A_{n+1}) \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - A_{n+1})$. W tym celu weźmy pod uwagę dowolny element x ze zbioru A_0. Wystarczy teraz udowodnić, że $x \in A_n - A_{n+1}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathbb{N}_x$ będzie zbiorem tych liczb naturalnych n, dla których $x \in A_n$. Zauważmy, że zbiór $\mathbb{N}_x$ jest niepusty, bo $x \in A_0$ i dlatego $0 \in \mathbb{N}_x$. Z faktu, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów wynika też, że jeśli liczba naturalna n należy do zbioru $\mathbb{N}_x$, to każda z liczb $0, 1, \ldots, n$ należy do zbioru $\mathbb{N}_x$. To znowu implikuje, że w zbiorze $\mathbb{N}_x$ istnieje element największy (bo inaczej byłoby $\mathbb{N}_x = \mathbb{N}$ i wtedy element x należałby do każdego zbioru A_n, więc także należałby on do zbioru $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$,

co przeczyłoby założeniu $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$). Niech teraz n_0 będzie największym elementem ze zbioru $\mathbb{N}_x$. Wtedy $x \in A_{n_0}$ i $x \notin A_{n_0+1}$, więc także $x \in A_{n_0} - A_{n_0+1}$ i to kończy dowód równości $A_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - A_{n+1})$.

41. Każdy ze zbiorów $A_1 - A_2$, $A_2 - A_3$, …, $A_{n-1} - A_n$, $A_n - A_1$ i $\bigcap_{i=1}^n A_i$ jest podzbiorem co najmniej jednego ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, więc suma $(A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup \bigcap_{i=1}^n A_i$ jest podzbiorem sumy $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Dla dowodu odwrotnej inkluzji wystarczy uzasadnić, że jeśli $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ i $x \notin \bigcap_{i=1}^n A_i$, to $x \in A_n - A_1$ lub $x \in A_i - A_{i+1}$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dla dowodu tego faktu zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ „sadzamy” wokół okrągłego stołu w taki sposób, że prawym sąsiadem zbioru A_i jest zbiór A_{i+1} dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, a prawym sąsiadem zbioru A_n jest A_1. Ponieważ x należy do co najmniej jednego ze zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ i nie należy on do każdego z tych zbiorów, więc musi znaleźć się taki zbiór A_i, że x należy do A_i i nie należy do jego prawego sąsiada (którym jest A_{i+1}, gdy $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, albo A_1, gdy $i = n$). Stąd wynika, że $x \in A_i - A_{i+1}$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ lub $x \in A_n - A_1$. To kończy dowód równości $\bigcup_{i=1}^n A_i = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup \bigcap_{i=1}^n A_i$.

42. a) Udowodnimy, że $C_n \cap C_m = \emptyset$, gdy $n \neq m$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $n > n-1 \geqslant m$. Z faktu, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zbiorów wynika wtedy, że $C_m = A_m - A_{m-1} \subseteq A_m \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n$. Z równości $C_n = A_n - A_{n-1}$ jest oczywiste, że $C_n \cap A_{n-1} = \emptyset$. Stąd zaś wynika, że $C_n \cap C_m = \emptyset$, bo $C_m \subseteq A_{n-1}$. b) Indukcyjnie udowodnimy, że $A_n = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$ dla każdej liczby naturalnej n. Z definicji mamy $A_0 = C_0$. Załóżmy teraz, że $A_{n-1} = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1}$, gdzie $n \geqslant 1$ jest ustaloną liczbą naturalną. Z faktu, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zbiorów wynika, że $A_n \cap A_{n-1} = A_{n-1}$. Dlatego teraz wobec definicji zbioru C_n i wobec założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} A_n &= (A_n - A_{n-1}) \cup (A_n \cap A_{n-1}) \\ &= (A_n - A_{n-1}) \cup A_{n-1} \\ &= C_n \cup (C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1}) \\ &= C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1} \cup C_n. \end{aligned}$$

c) Ponieważ $C_n \subseteq A_n$ dla każdej liczby naturalnej n, więc z tw. 2.7.1 łatwo wynika, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Przeciwna implikacja $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ jest konsekwencją następujących implikacji:

$$\begin{aligned} x \in \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &\Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} x \in A_n \\ &\Rightarrow \exists_{k\in\mathbb{N}} x \in C_k \quad (\text{bo } An = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n) \\ &\Rightarrow x \in \textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k. \end{aligned}$$

43. a) Wprost z definicji rodziny $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wynika, że mamy $B_{n+1} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ i stąd widać, że $B_n \subseteq B_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n. b) Z zawierania $A_n \subseteq A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_n$ i z tw. 2.7.1 wnioskujemy o inkluzji $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Inkluzja przeciwna jest konsekwencją następujących implikacji:

$$\begin{aligned} x \in \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n &\Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} x \in B_n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \\ &\Rightarrow x \in A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \\ &\Rightarrow \exists_{k\in\{0,1,\ldots,n\}} x \in A_k \\ &\Rightarrow x \in \textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k. \end{aligned}$$

44. Wobec definicji rodziny $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mamy $C_0 = A_0$ i $C_n = A_n - (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ dla $n \geqslant 1$. Z tego ostatniego wynika, że $C_n \subseteq A_n$ i $C_n \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \emptyset$. Stąd zaś natychmiast wynika, że zbiór C_n jest rozłączny z każdym zbiorem C_k dla $k = 0, \ldots, n-1$. To implikuje, że $C_n \cap C_m = \emptyset$, gdy $n \neq m$. Jednocześnie

z inkluzji $C_n \subseteq A_n$ wynika, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Udowodnimy teraz inkluzję $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. W tym celu weźmy pod uwagę dowolny element x ze zbioru $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Udowodnimy, że $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Niech n_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną, taką że $x \in A_{n_0}$. Z wyboru liczby n_0 jest oczywiste, jeśli $n_0 = 0$, to $x \in C_0 = A_0$. Jeśli zaś jest $n_0 > 0$, to $x \in A_{n_0}$ i $x_0 \notin A_0 \cup \ldots \cup A_{n_0-1}$, więc $x \in C_{n_0} = A_{n_0} - (A_0 \cup \ldots \cup A_{n_0-1}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. To kończy dowód inkluzji $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ i równości $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

45. Przypuśćmy, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Wtedy dla każdego x (ze zbioru $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$) istnieje liczba $i_x \in \mathbb{N}$, taka że $x \notin A_{i_x}$. Weźmy teraz pod uwagę zbiór A_0 z rodziny $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Możemy założyć, że $A_0 = \{x_1, \ldots, x_l\}$ dla pewnej liczby naturalnej l. Ponieważ $x_j \notin A_{i_{x_j}}$ (dla $j = 1, \ldots, l$), więc zbiór

$$A_0 \cap A_{i_{x_1}} \cap A_{i_{x_2}} \cap \ldots \cap A_{i_{x_l}}$$

jest pusty. To przeczy założeniu, że $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów skończonych, takich że $A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ dla każdych $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

46. 1. Nie; 2. Nie; 3. Nie; 4. Nie; 5. Tak; 6. Tak; 7. Nie; 8. Nie; 9. Nie; 10. Tak; 11. Nie; 12. Nie; 13. Nie; 14. Nie; 15. Nie; 16. Nie; 17. Nie; 18. Nie; 19. Nie; 20. Tak; 21. Nie; 22. Tak; 23. Nie; 24. Tak; 25. Nie; 26. Tak.

47. 1. Tak; 2. Tak; 3. Nie; 4. Tak; 5. Nie; 6. Tak; 7. Nie; 8. Nie; 9. Tak; 10. Nie; 11. Nie; 12. Nie; 13. Nie; 14. Tak.

8.3. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Indukcja

1. Uzasadnimy, że każda liczba $n \in \mathbb{N} - \{1, 3\}$ jest naturalną kombinacją liczb 2 i 5, czyli uzasadnimy, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N} - \{1, 3\}$ istnieją liczby naturalne x i y takie, że $n = 2x + 5y$. To stwierdzenie jest oczywiste dla $n = 0$ i dla $n = 2$. Prawdziwość tego stwierdzenia dla $n \geqslant 4$ uzasadnimy indukcyjnie. Przede wszystkim zauważmy, że mamy:

$$4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \quad \text{i} \quad 5 = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1.$$

Niech teraz $n \geqslant 5$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Zakładamy, że dla każdej liczby $k \in \{4, \ldots, n\}$ istnieją liczby naturalne x i y takie, że

$$k = 2x + 5y. \tag{8.1}$$

Uzasadnimy, że $n + 1$ jest naturalną kombinacją liczb 2 i 5. Z równości (8.1) dla $k = n - 1$ wnosimy, że $n - 1 = 2\overline{x} + 5\overline{y}$ dla pewnych liczb naturalnych $\overline{x}$ i $\overline{y}$. Teraz zauważmy, że faktycznie $n + 1$ jest naturalną kombinacją liczb 2 i 5, bo

$$n + 1 = (n - 1) + 2 = (2\overline{x} + 5\overline{y}) + 2 = 2(\overline{x} + 1) + 5\overline{y}$$

i $\overline{x} + 1$ oraz $\overline{y}$ są liczbami naturalnymi. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że każda liczba naturalna $n \geqslant 4$ jest naturalną kombinacją liczb 2 i 5.
Inne uzasadnienie: Tak jak poprzednio mamy $4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$. Załóżmy teraz, że $n \geqslant 4$ jest liczbą naturalną i

$$n = 2x + 5y \tag{8.2}$$

dla pewnych liczb naturalnych x i y. Uzasadnimy teraz, że $n+1$ też jest naturalną kombinacją liczb 2 i 5. Rozróżniamy dwa przypadki w zależności od wartości liczby y w równości (8.2): $y \geqslant 1$ albo $y = 0$. Jeśli $y \geqslant 1$, to mamy

$$n + 1 = 2(x + 3) + 5(y - 1).$$

Jeśli natomiast $y = 0$, to z nierówności $n = 2x + 5 \cdot 0 \geqslant 4$ wynika, że $x \geqslant 2$ i tym razem

$$n + 1 = 2(x - 2) + 5(y + 1).$$

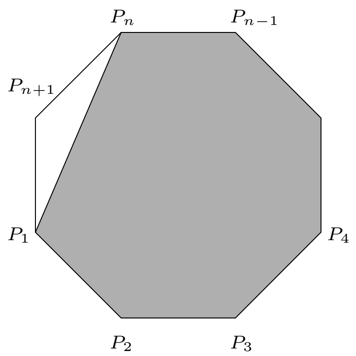
Z powyższego i z twierdzenia o indukcji znowu wynika, że każda liczba naturalna $n \geqslant 4$ jest naturalną kombinacją liczb 2 i 5.
(Uzasadnimy, że każda liczba naturalna $n \geqslant 8$ jest naturalną kombinacją liczb 3 i 5. Widać, że $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$. Niech teraz $\geqslant 8$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że dla tej liczby n istnieją liczby naturalne x i y takie, że $n = 3x + 5y$. Uzasadnimy, że liczba $n + 1$ jest naturalną kombinacją liczb 3 i 5. Jeśli jest $n = 3x + 5y$ i jeśli $y \geqslant 1$, to natychmiast mamy $n + 1 = 3(x + 2) + 5(y - 1)$. Gdy $n = 3x + 5y$ i $y = 0$, to z nierówności $n = 3x + 5y = 3x \geqslant 8$ wynika, że liczba naturalna x jest nie mniejsza od 3 i tym razem mamy $n + 1 = 3(x - 3) + 5(y + 2)$. Z tego i z twierdzenia o indukcji wynika, że każda liczba naturalna $n \geqslant 8$ jest naturalną kombinacją liczb 3 i 5.)

2. Uzasadnimy, że każda liczba naturalna $n \geqslant 32$ jest naturalną kombinacją liczb 5 i 9. Na początek zauważmy, że mamy $32 = 5 \cdot 1 + 9 \cdot 3$. Niech teraz $\geqslant 32$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że dla tej liczby n istnieją liczby naturalne x i y takie, że $n = 5x + 9y$. Uzasadnimy, że liczba $n + 1$ też jest naturalną kombinacją liczb 5 i 9. Jeśli jest $n = 5x + 9y$ i jeśli $y \geqslant 1$, to natychmiast mamy $n + 1 = 5(x + 2) + 9(y - 1)$. Gdy $n = 5x + 9y$ i $y = 0$, to z nierówności $n = 5x + 9y = 5x \geqslant 32$ wynika, że liczba naturalna x jest nie mniejsza od 7 i tym razem mamy $n + 1 = 5(x - 7) + 9(y + 4)$. Z tego i z twierdzenia o indukcji wynika, że każda liczba naturalna $n \geqslant 32$ jest naturalną kombinacją liczb 5 i 9.

3. Niech l_n będzie liczbą przekątnych w n-kącie wypukłym. Indukcyjnie udowodnimy, że $l_n = n(n - 3)/2$. Jest to oczywiste dla $n = 3$. Niech teraz $n \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Zakładamy, że dla tej liczby mamy $l_n = n(n - 3)/2$. Udowodnimy teraz, że $l_{n+1} = (n+1)(n-2)/2$. Weźmy pod uwagę $(n+1)$-kąt wypukły W, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ (zob. niżej przedstawiony rysunek). Wielokąt wypukły W', którego wierzchołkami są $P_1, P_2, \ldots, P_n$, zgodnie z założeniem ma $l_n = n(n-3)/2$ przekątnych i oczywiście każda z tych przekątnych jest przekątną w wielokącie W. W wielokącie W, poza przekątnymi wielokąta W', przekątnymi są dodatkowo odcinek P_1P_n oraz każdy z odcinków $P_{n+1}i$ dla $i = 2, \ldots, n - 1$. Stąd wynika, że

$$l_{n+1} = l_n + 1 + (n - 2) = \frac{n(n - 3)}{2} + (n - 1) = \frac{(n + 1)(n - 2)}{2}.$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $l_n = n(n - 3)/2$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$.

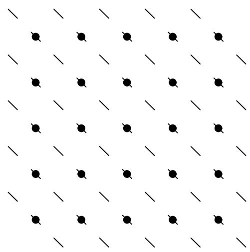


4. Poniższy rysunek (dla $n = 5$) pozwala domyślać się, że liczba $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 3 + 2 + 1$ jest sumą liczb punktów kratownicy

o wymiarach $(n-1)\times(n-1)$ liczonych wzdłuż prostych równoległych do głównej przekątnej, czyli pozwala domyślać się, że $S_n = n^2$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Udowodnimy to. Jest oczywiste, że jeśli $n = 1$, to $S_1 = 1 = 1^2$. Niech teraz $n \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że dla tej liczby jest $S_n = n^2$. Udowodnimy, że $S_{n+1} = (n+1)^2$. Zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1 \\ &= (1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1)+2n+1 \\ &= S_n+2n+1 \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $S_n = n^2$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.



5. Zauważmy, że jeśli liczba naturalna n należy do zbioru $S = \{n \in \mathbb{N}\colon n^2 - 3n+3 \text{ jest liczbą parzystą}\}$, to $n^2-3n+3 = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wtedy też liczba $(n+1)^2-3(n+1)+3$ jest parzysta, bo

$$(n+1)^2-3(n+1)+3 = (n^2-3n+3)+2(n-1) = 2k+2(n-1) = 2(k+n-1)$$

i $k+n-1$ jest liczbą całkowitą. To dowodzi, że $n+1 \in S$, gdy $n \in S$. Stąd wynika, że zbiór S jest nieskończony, jeśli jest on niepusty. Niestety zbiór S jest pusty, bo – jak zaraz uzasadnimy – żadna liczba naturalna nie jest jego elementem. Przede wszystkim zero nie należy do zbioru S, bo $0^2-3\cdot 0+3$ nie jest liczbą parzystą. Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że $n \notin S$. Wtedy $n^2-3n+3 = 2l+1$ dla pewnej liczby całkowitej l. Teraz zauważmy, że $n+1 \notin S$, bo

$$(n+1)^2-3(n+1)+3 = (n^2-3n+3)+2(n-1) = (2l+1)+2(n-1)$$

jest liczbą nieparzystą. Z tego i z twierdzenia o indukcji wynika, że żadna liczba naturalna nie należy do zbioru S. Zatem zbiór S jest pusty.

6. a) Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli $L_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ i $P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, to $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Przede wszystkim zauważmy, że $L_1 = 1(1+1) = 2$ i $P_1 = 1(1+1)(1+2)/3 = 2$, więc $L_1 = P_1$. Niech teraz n będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $L_n = P_n$. Udowodnimy, że wtedy też $L_{n+1} = P_{n+1}$. Zauważmy, że istotnie mamy

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(n+1)(n+2) \\ &= L_n + (n+1)(n+2) \\ &= P_n + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\ &= P_{n+1}. \end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

b) Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ i $P_n = \frac{n}{3n+1}$, to $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Przede wszystkim zauważmy, że $L_1 = \frac{1}{(3-2)(3+1)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = P_1$. Niech teraz n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że $L_n = P_n$. Udowodnimy, że $L_{n+1} = P_{n+1}$. Zauważmy, że istotnie mamy

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= L_n + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= P_n + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= \frac{n+1}{3n+4} \\ &= P_{n+1}. \end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

c) Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli $L_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2$ i $P_n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$, to $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Widać, że $L_1 = (-1)^2 1^1 = 1 = (-1)^2 \frac{1(1+1)}{2} = P_1$. Niech teraz n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że $L_n = P_n$. Udowodnimy, że $L_{n+1} = P_{n+1}$. Istotnie mamy

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\ &= L_n + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\ &= P_n + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= P_{n+1}. \end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.
d) Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ i $P_n = \frac{n}{n+1}$, to $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Widać, że $L_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} = P_1$. Niech teraz n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że $L_n = P_n$. Udowodnimy, że $L_{n+1} = P_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= L_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= P_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \\
&= P_{n+1}.
\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.
e) Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli $L_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ i $P_n = (n+1)! - 1$, to $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Widać, że $L_1 = 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = P_1$. Niech teraz n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że $L_n = P_n$. Udowodnimy, że $L_{n+1} = P_{n+1}$. Łatwo widać, że

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \\
&= L_n + (n+1)(n+1)! \\
&= P_n + (n+1)(n+1)! \\
&= ((n+1)! - 1) + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+2)! - 1 \\
&= P_{n+1}.
\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.
f) Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli $L_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k$ i $P_n = n2^{n+1}$, to $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Mamy $L_1 = (1+1)2^1 = 1 \cdot 2^2 = P_1$. Niech teraz n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że $L_n = P_n$. Udowodnimy, że $L_{n+1} = P_{n+1}$. Widać też, że

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k + (n+2)2^{n+1} \\
&= L_n + (n+2)2^{n+1} \\
&= P_n + (n+2)2^{n+1} \\
&= n2^{n+1} + (n+2)2^{n+1} \\
&= (n+1)2^{n+2} \\
&= P_{n+1}.
\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $L_n = P_n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

7. Tu i w następnym zadaniu tylko wyprowadzamy wzory na odpowiednie sumy. Opuszczamy ich indukcyjne dowody. Zauważmy, że kolejno mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n(4n^2-1)}{3}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}(8k^3-12k^2+6k-1) \\ &= 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= 2n^4 - n^2.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(3n^3+11n+10)}{12}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}k^3 &= \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\cdot 8\sum_{k=1}^{n} k^3 \\ &= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - 16\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^2(4n+1).\end{aligned}$$

9. a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$; b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$; c) Indukcyjnie ze względu na n udowodnimy równość $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$. Jest ona oczywista, gdy $n = 0$. Niech teraz n będzie ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy, że dla tej liczby

mamy $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Wtedy wobec równości $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$ oraz wobec założenia indukcyjnego mamy

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1}\\
&= \left(\binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}x^ny^0\right)(x+y)\\
&= \binom{n}{0}x^0y^n + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)x^1y^n + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)x^2y^{n-1} + \ldots\\
&\qquad + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)x^ny^1 + \binom{n}{n}x^{n+1}y^0\\
&= \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^1y^n + \ldots + \binom{n+1}{n}x^ny^1 + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^n,
\end{aligned}
$$

bo $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ i $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ dla $k = 1, \ldots, n$. To kończy indukcyjny dowód równości $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

10. a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$; b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1+(-1))^n = 0^n = 0$; c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = (1+2)^n = 3^n$; d) Z równości $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, po jej zróżniczkowaniu, otrzymujemy równość $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}$. Z tej ostatniej równości dla $x = 1$ otrzymujemy $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

11. a) 1. Dla $n = 1$ mamy $(x-y)\sum_{k=0}^{0} x^{1-1-k}y^k = (x-y)\cdot 1 = x - y = x^1 - y^1$.

2. Załóżmy, że $(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k x^n - y^n$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

3. Teraz mamy

$$
\begin{aligned}
(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k &= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k + x^{n-n}y^n\right)\\
&= (x-y)\left(x\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k + y^n\right)\\
&= x(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k + (x-y)y^n\\
&= x(x^n - y^n) + (x-y)y^n\\
&= x^{n+1} - y^{n+1}.
\end{aligned}
$$

b) 1. Dla $n = 1$ mamy $(x+y)\sum_{k=0}^{2}(-1)^k x^{2-k}y^k = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

2. Załóżmy, że $(x+y)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n-k}y^k = x^{2n+1} + y^{2n+1}$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

3. Teraz mamy

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\sum_{k=0}^{2(n+1)}(-1)^k x^{2n+2-k}y^k\\
&\quad= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n+2-k}y^k + \sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k x^{2n+2-k}y^k\right)\\
&\quad= (x+y)\left(x^2\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n-k}y^k - xy^{2n+1} + y^{2n+2}\right)\\
&\quad= x^2(x+y)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n-k}y^k + (x+y)(-xy^{2n+1} + y^{2n+2})\\
&\quad= x^2(x^{2n+1} + y^{2n+1}) + (x+y)(-xy^{2n+1} + y^{2n+2})\\
&\quad= x^{2n+3} + y^{2n+3}.
\end{aligned}
$$

12. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x}, \ldots, x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ i $x^n + \frac{1}{x^n}$ są liczbami całkowitymi. Wtedy także liczba $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ jest liczbą całkowitą, bo mamy

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Stąd wynika, że $x^n + \frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdej liczby naturalnej n.

13. Dodałem nowe: $3|4^n + 5$.

a) Przede wszystkim zauważmy, że jeśli n jest liczbą naturalną, to jedna z liczb n i $n+1$ jest parzysta. Z tego wynika, że liczba $n(n+1)$ jest parzysta i dlatego liczba $3n(n+1)$ jest podzielna przez 6 dla każdej liczby naturalnej

n. Teraz indukcyjnie udowodnimy, że liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6 dla każdej liczby naturalnej n.

Jeśli $n = 0$, to liczba $n^3 + 5n = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$ jest podzielna przez 6.

Niech teraz $n \geqslant 0$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $6|n^3 + 5n$, czyli załóżmy, że $n^3 + 5n = 6k$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Udowodnimy, że liczba $(n + 1)^3 + 5(n + 1)$ jest podzielna przez 6.

Z założenia indukcyjnego i z wcześniejszej obserwacji wynika, że $n^3+5n = 6k$ i $3n(n + 1) = 6l$ dla pewnych liczby całkowitych k i l. Zatem mamy

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6 \\ &= 6k + 6l + 6 \\ &= 6(k + l + 1)\end{aligned}$$

i $k + l + 1$ jest liczbą całkowitą. To dowodzi, że liczba $(n + 1)^3 + 5(n + 1)$ jest podzielna przez 6.

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6 dla każdej liczby naturalnej n.

b) Ponieważ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ i liczby 2, 3 i 5 są względnie pierwsze, więc liczba 30 dzieli liczbę $n^5 - n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb 2, 3 i 5 dzieli liczbę $n^5 - n$. Teraz z równości $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ i z faktu, że w ostatnim iloczynie występują trzy kolejne liczby naturalne ($n - 1$, n i $n + 1$) wynika, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 2 i przez 3. Wystarczy teraz udowodnić, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

Jeśli $n = 0$, to liczba $n^5 - n = 0^5 - 0 = 0$ jest podzielna przez 5.

Niech teraz n będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $5|n^5 - n$, czyli załóżmy, że $n^5 - n = 5k$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Udowodnimy, że liczba $(n + 1)^5 - (n + 1)$ jest podzielna przez 5.

Z przekształceń algebraicznych i z założenia indukcyjnego wynika, że mamy

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5k + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)\end{aligned}$$

i $k+n^4+2n^3+2n^2+n$ jest liczbą całkowitą. To dowodzi, że liczba $(n+1)^5-(n+1)$ jest podzielna przez 5.

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że liczba n^5-n jest podzielna przez 5 dla każdej liczby naturalnej n. Z tego w końcu wynika, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30 dla każdej liczby naturalnej n.

c) Podobnie jak wyżej mamy $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ i liczby 2, 3 i 7 są względnie pierwsze, więc liczba 42 dzieli liczbę $n^7 - n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb 2, 3 i 7 dzieli liczbę $n^7 - n$. Teraz z równości $n^7 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^4 + n^2 + 1)$ i z faktu, że w ostatnim iloczynie występują trzy kolejne liczby naturalne ($n-1$, n i $n+1$) wynika, że liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 2 i przez 3. Zatem wystarczy udowodnić, że liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 7.

Jeśli $n = 0$, to liczba $n^7 - n = 0^7 - 0 = 0$ jest podzielna przez 7.

Niech teraz n będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $7|n^7 - n$, czyli załóżmy, że $n^7 - n = 7k$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Udowodnimy, że liczba $(n + 1)^7 - (n + 1)$ jest podzielna przez 7.

Z przekształceń algebraicznych i z założenia indukcyjnego wynika, że mamy

$$\begin{aligned}(n+1)^7 - (n+1) &= (n^7 - n) + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n \\ &= 7k + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n \\ &= 7(k + n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n)\end{aligned}$$

i $k + n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n$ jest liczbą całkowitą. To dowodzi, że liczba $(n + 1)^7 - (n + 1)$ jest podzielna przez 7.

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że liczba n^7-n jest podzielna przez 7 dla każdej liczby naturalnej n. Z tego w końcu wynika, że liczba n^7-n jest podzielna przez 42 dla każdej liczby naturalnej n.

d) 1. $37^{4n}-1=1-1=10\cdot 0$;
2. $37^{4n}-110k$;
3. $37^{4(n+1)}-1=37^4\cdot 37^{4n}-1=37^4(10k+1)-1=37^4\cdot 10k+37^4-1=10(37^4k+36\cdot 38\cdot 137)$;

e) 1. $11^n-4^n=1-1=7\cdot 0$;
2. $11^n-4^n=7k$;
3. $11^{n+1}-4^{n+1}=11\cdot 11^n-4\cdot 4^n=11(7k+4^n)-4\cdot 4^n=7(11k+4^n)$;

f) 1. $6\cdot 7^n-2\cdot 3^n=6-2=4\cdot 1$;
2. $6\cdot 7^n-2\cdot 3^n=4k$;
3. $6\cdot 7^{n+1}-2\cdot 3^{n+1}=7\cdot 6\cdot 7^n-6\cdot 3^n=7(4k-2\cdot 3^n)-6\cdot 3^n=4(7k-5\cdot 3^n)$;

g) 1. $5^{2n}-2^{5n}=1-1=7\cdot 0$;
2. $5^{2n}-2^{5n}=7k$:
3. $5^{2(n+1)}-2^{5(n+1)}=25\cdot 5^{2n}-32\cdot 2^{5n}=25(7k+2^{5n})-32\cdot 2^{5n}=7(25k-2^{5n})$;

h) 1. $10^n-(-1)^n=1-1=11\cdot 0$;
2. $10^n-(-1)^n=11k$;
3. $10^{n+1}-(-1)^{n+1}=10\cdot 10^n+(-1)^n=10(11k+(-1)^n)+(-1)^n=11(10k+(-1)^n)$;

i) 1. $10^{2n}-(-1)^n=1-1=101\cdot 0$;
2. $10^{2n}-(-1)^n=101k$;
3. $10^{2(n+1)}-(-1)^{n+1}=100\cdot 10^{2n}+(-1)^n=100(101k+(-1)^n)+(-1)^n=101(100k+(-1)^n)$;

j) 1. $10^{3n}-(-1)^n=1-1=1001\cdot 0$;
2. $10^{3n}-(-1)^n=1001k$;
3.$10^{3(n+1)}-(-1)^{n+1}=1000\cdot 10^{3n}+(-1)^n=1000(1001k+(-1)^n)+(-1)^n=1001(1000k+(-1)^n)$;

k) 1. $10^{3n+1}+3(-1)^n=10+3=13\cdot 1$;
2. $10^{3n+1}+3(-1)^n=13k$;
3. $10^{3(n+1)+1}+3(-1)^{n+1}=1000\cdot 10^{3n+1}-3(-1)^n=1000(13k-3(-1)^n)-3(-1)^n=13(1000k-231(-1)^n)$;

l) 1. $10^{3n+2}-2(-1)^n=10^2-2=98=14\cdot 7$;
2. $10^{3n+2}-2(-1)^n=14k$;
3. $10^{3(n+1)+2}-2(-1)^{n+1}=1000\cdot 10^{3n+2}+2(-1)^n=1000(14k+2(-1)^n)+2(-1)^n=14(1000k+143(-1)^n)$;

m) 1. $10^{3n+2}+4(-1)^n=10^2+4=104=52\cdot 2$;
2. $10^{3n+2}+4(-1)^n=52k$;
3. $10^{3(n+1)+2}+4(-1)^{n+1}=10^3\cdot 10^{3n+2}-4(-1)^n=10^3(52k-4(-1)^n)-4(-1)^n=52(1000k-77(-1)^n)$;

n) 1. $2^{6n+1}+3^{2n+2}=2+9=11\cdot 1$;
2. $2^{6n+1}+3^{2n+2}=11k$;
3. $2^{6(n+1)+1}+3^{2(n+1)+2}=64\cdot 2^{6n+1}+9\cdot 3^{2n+2}=64(11k-3^{2n+2})+9\cdot 3^{2n+2}=$

$11(64k - 5 \cdot 3^{2n+2})$;

o) 1. $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2} = 10 + 9 = 19 \cdot 1$;
2. $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2} = 19k$;
3. $5 \cdot 2^{3(n+1)+1} + 3^{3(n+1)+2} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot 3^{3n+2} = 8(19k - 3^{3n+2}) + 27 \cdot 3^{3n+2} = 19(8k + 3^{3n+2})$;

p) 1. $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} = 5 + 16 + 1 = 11 \cdot 2$;
2. $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} = 11k$;
3. $5^{5(n+1)+1} + 4^{5(n+1)+2} + 3^{5(n+1)} = 5^5 \cdot 5^{5n+1} + 4^5 \cdot 4^{5n+2} + 3^5 \cdot 3^{5n} = 5^5(11k - 4^{5n+2} - 3^{5n}) + 4^5 \cdot 4^{5n+2} + 3^5 \cdot 3^{5n} = 11 \cdot 5^5 k - 2101 \cdot 4^{5n+2} - 2882 \cdot 3^{5n} = 11(5^5 k - 191 \cdot 4^{5n+2} - 262 \cdot 3^{5n})$;

q) 1. $2^{n+2}3^n + 5n - 4 = 4 + 0 - 4 = 0 = 25 \cdot 0$;
2. $2^{n+2}3^n + 5n - 4 = 25k$;
3. $2^{(n+1)+2}3^{n+1} + 5(n+1) - 4 = 2 \cdot 2^{n+2} \cdot 3 \cdot 3^n + 5n + 1 = 6(25k - 5n + 4) + 5n + 1 = 25(6k - n + 1)$;

r) 1. $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 + 12^1 = 133 = 133 \cdot 1$;
2. $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$;
3. $11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} = 11(133k - 12^{2n+1}) + 144 \cdot 12^{2n+1} = 133(11k + 12^{2n+1})$;

s) 1. $5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n} = 5 \cdot 7^2 + 1 = 246 = 41 \cdot 4$;
2. $5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n} = 41k$;
3. $5 \cdot 7^{2(n+1)+2} + 2^{3(n+1)} = 49 \cdot 5 \cdot 7^{2n+2} + 8 \cdot 2^{3n} = 41(49k - 2^{3n})$;

t) 1. $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 36 + 7 = 43 = 43 \cdot 6^{n+2} + 7^{2n+1}1$;
2. $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43k$;
3. $6^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} = 6 \cdot 6^{n+2} + 49 \cdot 7^{2n+1} = 6(43k - 7^{2n+1}) + 49 \cdot 7^{2n+1} = 43(6k + 7^{2n+1})$;

u) 1. $3^{3n} - 26n - 1 = 1 - 0 - 1 = 0 = 169 \cdot 0$;
2. $3^{3n} - 26n - 1 = 169k,\ k \in \mathbb{Z}$;
3. $3^{3(n+1)} - 26(n+1) - 1 = 27 \cdot 3^n - 26n - 27 = 27(169k + 26n + 1) - 26n - 27 = 169(27k + 4n)$.

14. a) Dla $n = 5$ mamy $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2 = n^2$. Załóżmy teraz, że $n \geqslant 5$ jest liczbą naturalną i $2^n > n^2$. Udowodnimy, że $2^{n+1} > (n+1)^2$. Zauważmy, że wobec założenia indukcyjnego mamy $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$. Ponieważ $2 \cdot n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, gdy $n \geqslant 5$, więc z powyższego wnioskujemy, że $2^{n+1} > (n+1)^2$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $2^n > n^2$ dla $n \geqslant 5$.
b) Jeśli $n = 7$, to $n! = 7! = 5040 \geqslant 2187 = 3^7 = 3^n$. Niech teraz $n \geqslant 7$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że dla tej liczby $n! \geqslant 3^n$. Udowodnimy, że $(n+1)! \geqslant 3^{n+1}$. Wobec założenia indukcyjnego mamy $(n+1)! = (n+1)n! \geqslant (n+1)3^n \geqslant 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, bo $n + 1 \geqslant 3$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $n! \geqslant 3^n$ dla $n \geqslant 7$.
c) Jeśli $n = 6$, to $\frac{n^n}{3^n} = \frac{6^6}{3^6} = 2^6 = 64 < 720 = 6! = n! = 6! < 729 = 3^6 = \frac{6^6}{3^6}\frac{n^n}{2^n}$. Niech teraz $n \geqslant 6$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że dla tej liczby jest $\frac{n^n}{3^n} < n! < \frac{n^n}{2^n}$. Udowodnimy, że wtedy $\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}} < (n+1)! < \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}$.

W tym celu najpierw zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned}
\tfrac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}} &= \tfrac{(n+1)^n(n+1)}{3\cdot 3^n}\\
&= \tfrac{n^n}{3^n}(n+1)\tfrac{(n+1)^n}{3\cdot n^n}\\
&< n!\,(n+1)\tfrac{(n+1)^n}{3\cdot n^n} \quad \text{(z założenia indukcyjnego } \tfrac{n^n}{3^n} < n!)\\
&= (n+1)!\,\tfrac{1}{3}\,\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\\
&< (n+1)!\,\tfrac{e}{3} \quad \text{(bo } \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < e)\\
&< (n+1)! \quad \text{(bo } e<3).
\end{aligned}$$

Z drugiej strony podobnie mamy

$$\begin{aligned}
\tfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} &= \tfrac{(n+1)^n(n+1)}{2\cdot 2^n}\\
&= \tfrac{n^n}{2^n}(n+1)\tfrac{(n+1)^n}{2\cdot n^n}\\
&> n!\,(n+1)\tfrac{(n+1)^n}{2\cdot n^n} \quad \text{(z założenia indukcyjnego } \tfrac{n^n}{2^n} > n!)\\
&= (n+1)!\,\tfrac{1}{2}\,\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\\
&\geqslant (n+1)! \quad \text{(bo } \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 1).
\end{aligned}$$

Z tego wynika, że mamy $\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}} < (n+1)! < \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}$. Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{n^n}{3^n} < n! < \frac{n^n}{2^n}$ dla $n \geqslant 6$.
d) Jeśli $n=0$ i $x>-1$, to $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1 \geqslant 1+0\cdot x$. Załóżmy teraz, że $n \geqslant 0$, $x>-1$ i $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Wtedy $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$. Z powyższego wynika, ze $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ dla każdej liczby naturalnej n (gdy $x>-1$).
e) Jeśli $n=2$, to $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$. Załóżmy teraz, że $n \geqslant 2$ jest liczną naturalną i $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$. Udowodnimy, że $\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)} > \frac{13}{24}$. Zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{(n+1)+1}+\tfrac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\tfrac{1}{2(n+1)}\\
&\quad= \tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{(n+1)+1}+\tfrac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{2n+1}+\tfrac{1}{2(n+1)}-\tfrac{1}{n+1}\\
&\quad= \tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{(n+1)+1}+\tfrac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\tfrac{1}{2n}+\left(\tfrac{1}{2n+1}+\tfrac{1}{2(n+1)}-\tfrac{1}{n+1}\right)\\
&\quad> \tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}+\ldots+\tfrac{1}{2n} \quad \text{(bo } \tfrac{1}{2n+1}+\tfrac{1}{2n+2}-\tfrac{1}{n+1}<0)\\
&\quad> \tfrac{13}{24} \quad \text{(z założenia indukcyjnego).}
\end{aligned}$$

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.
f) Dla $n=1$ mamy $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geqslant 1 = \sqrt{1} = \sqrt{n}$. Załóżmy teraz, że $n \geqslant 1$ jest ustaloną liczbą naturalną i $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$. Udowodnimy, że $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1}$. Istotnie mamy

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\sqrt{1}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&\qquad= \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&\qquad\geqslant \sqrt{n}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{(z założenia indukcyjnego)}\\
&\qquad\geqslant \sqrt{n+1} \quad \text{(bo } \sqrt{n}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1}).
\end{aligned}$$

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. (Zauważmy, że $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$. Wtedy (po przemnożeniu obu stron nierówności przez $\sqrt{n}$) otrzymujemy $\sqrt{n+1}\sqrt{n} > n$ i po dodaniu 1 do obu stron $\sqrt{n+1}\sqrt{n}+1 > n+1$, wiec po podzieleniu przez $\sqrt{n+1}$ $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$.)
g) Jeśli $n=2$, to $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{n}$. Niech teraz $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{n}$. Wtedy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2} < 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} <$

$1-\frac{1}{n+1}$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$ dla $n\geqslant 2$.
h) Dla $n=1$ mamy $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}=\frac{1}{2n}$. Załóżmy teraz, że $n\geqslant 1$ jest liczbą naturalną i $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\geqslant\frac{1}{2n}$. Udowodnimy, że $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}\geqslant\frac{1}{2n+2}$. Z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}&=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\\&\geqslant\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\\&=\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n}\\&\geqslant\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\geqslant\frac{1}{2n}$ dla $n\geqslant 1$.
i) Jeśli $n=1$, to $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Załóżmy teraz, że $n\geqslant 1$ jest liczbą naturalną i dla tej liczby spełniona jest nierówność $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Wtedy także mamy

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}&=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+2}}.\end{aligned}$$

Z tego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ dla $n\geqslant 1$.
j) Jeśli $n=2$, to mamy $\binom{2n}{n}=\binom{4}{2}=6<\frac{4^2}{\sqrt{3\cdot2+1}}=\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$. Niech teraz $n\geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że dla tej liczby mamy $\binom{2n}{n}<\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\binom{2n+2}{n+1}&=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{4n+2}{n+1}\\&<\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{4n+2}{n+1}\quad\text{(z założenia indukcyjnego)}\\&=\frac{4^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}\cdot\frac{(4n+2)\sqrt{3n+4}}{(4n+4)\sqrt{3n+1}}\\&<\frac{4^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}\quad\left(\text{bo }\frac{(4n+2)\sqrt{3n+4}}{(4n+4)\sqrt{3n+1}}<1\right).\end{aligned}$$

Z tego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\binom{2n}{n}<\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$ dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$.

15. Wystarczy indukcyjnie wykazać, że $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$ dla każdej liczby $n\in\mathbb{N}_+$. Zauważmy, że mamy $\frac{1}{1^2}\leqslant 2-\frac{1}{1}$. Niech teraz $n\geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n-1}$. Wtedy $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}$, a ponieważ $2-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$, więc $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ dla każdej liczby $n\in\mathbb{N}_+$.

16. Zauważmy, że $x_0=\sqrt{2}<2$. Niech teraz $n\geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $x_{n-1}<2$. Wtedy $x_{n-1}+1<3<4$ i dlatego $x_n=\sqrt{x_{n-1}+1}<\sqrt{4}=2$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $x_n<2$ dla każdej liczby naturalnej n.
Zauważmy, że mamy $x_1=\sqrt{x_0+1}=\sqrt{\sqrt{2}+1}>\sqrt{2}=x_0$. Niech teraz $n\geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $x_n>x_{n-1}$. Wtedy $x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}>\sqrt{x_{n-1}+1}=x_n$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $x_n>x_{n-1}$ dla każdej liczby naturalnej n.

17. Udowodnimy, że $x_n = 2^n + 3^n$ dla każdej liczby naturalnej n. Zauważmy, że jeśli $n = 0$, to $2^n + 3^n = 2^0 + 3^0 = 2 = x_0$. Dla $n = 1$ mamy $2^n + 3^n = 2^1 + 3^1 = 5 = x_1$. Niech teraz $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $x_k = 2^k + 3^k$ dla $k = 0, \ldots, n-1$. Udowodnimy, że $x_n = 2^n + 3^n$. Z definicji ciągu x_n i z założenia indukcyjnego istotnie mamy

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} = 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) = 2^n + 3^n.$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $x_n = 2^n + 3^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

18. Udowodnimy, że $x_n = 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n. Zauważmy, że jeśli $n = 0$, to $2^n + 1 = 2^0 + 1 = 2 = x_0$. Natomiast dla $n = 1$ mamy $2^n + 1 = 2^1 + 1 = 3 = x_1$. Niech teraz $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $x_k = 2^k + 1$ dla $k = 0, \ldots, n-1$. Udowodnimy, że $x_n = 2^n + 1$. Z definicji ciągu x_n i z założenia indukcyjnego istotnie mamy

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} = 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) = 2^n + 1.$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $x_n = 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

19. a) Udowodnimy, że $x_n = (3 + (-1)^{n+1})/2$ dla każdej liczby naturalnej n. Zauważmy, że jeśli $n = 0$, to $(3+(-1)^{n+1})/2 = (3+(-1)^{0+1})/2 = 1 = x_0$. Niech teraz n będzie dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że $x_k = (3+(-1)^{k+1})/2$ dla $k = 0, \ldots, n-1$. Wtedy wobec równości $x_n = 2/x_{n-1}$ mamy

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{x_{n-1}} = \frac{2}{(3+(-1)^{(n-1)+1})/2} = \frac{4}{3+(-1)^n} \\ &= \frac{4(3+(-1)^{n+1})}{(3+(-1)^n)((3+(-1)^{n+1}))} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $x_n = (3+(-1)^{n+1})/2$ dla każdej liczby naturalnej n.

b) Udowodnimy, że $x_n = (n+1)2^n$ dla każdej liczby naturalnej n. Zauważmy, że jeśli $n = 0$, to $(n+1)2^n = (0+1)2^0 = 1 = x_0$. Dla $n = 1$ mamy $(n+1)2^n = (1+1)2^1 = 4 = x_1$. Niech teraz $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że $x_k = (k+1)2^k$ dla $k = 0, \ldots, n-1$. Z założenia indukcyjnego i z równości $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ mamy

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} = 4((n-1)+1)2^{n-1} - 4((n-2)+1)2^{n-2} = (n+1)2^n.$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $x_n = (n+1)2^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

20. a) Mamy $F_0 = 0 < 1 = 2^0$ i $F_1 = 1 < 2^1$. Załóżmy teraz, że $n \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną i $F_k < 2^k$ dla $k = 0, \ldots, n-1$. Wtedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} < 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $F_n < 2^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

b) Łatwo indukcyjnie pokazuje się, że jeśli $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, to $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ dla każdej liczby naturalnej n. Teraz z własności potęgowania macierzy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{r+s+1} & F_{r+s} \\ F_{r+s} & F_{r+s-1} \end{bmatrix} &= Q^{r+s} = Q^r \cdot Q^s = \begin{bmatrix} F_{r+1} & F_r \\ F_r & F_{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{s+1} & F_s \\ F_s & F_{s-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{r+1}F_{s+1} + F_rF_s & F_{r+1}F_s + F_rF_{s-1} \\ F_rF_{s+1} + F_{r-1}F_s & F_rF_s + F_{r-1}F_{s-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Z tej równości wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych r i s mamy

$$F_{r+s} = F_{r-1}F_s + F_rF_{s+1}. \tag{8.3}$$

Indukcyjnie udowodnimy teraz, że $F_m|F_{mn}$ dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych n i m. Stąd będzie wynikało, że $2|F_{3n}$ (bo $F_3|F_{3n}$ i $F_3 = 2$) i $3|F_{4n}$ (bo $F_4 = 3$). Jest oczywiste, że jeśli $n = 1$, to $F_m|F_{m\cdot 1}$. Niech teraz $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że $F_m|F_{mn}$. Udowodnimy, że $F_m|F_{m(n+1)}$. Wobec równości (8.3) mamy

$$F_{m(n+1)} = F_{mn+m} = F_{mn-1} \cdot F_m + F_{mn} \cdot F_{m+1}.$$

Z tej równości i z założenia $F_m|F_{mn}$ wynika, że $F_m|F_{m(n+1)}$. Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że$F_m|F_{mn}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n (i każdej dodatniej liczby naturalnej m).
c) Udowodnimy teraz równość

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{8.4}$$

Równość ta jest tzw. równością Cassiniego. Zauważmy, że mamy

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2 = \det\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}^n = \left(\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^n = (-1)^n.$$

Można też przedstawić łatwy indukcyjny dowód równości (8.4). Dla $n = 1$ mamy $F_2F_0-F_1^2 = 1\cdot 0-1 = (-1)^1$. Niech teraz $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_n + F_{n+1})(F_{n+1} - F_{n-1}) - F_{n+1}^2 \\
&= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\
&= F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1} - F_{n-1}F_{n+1} \\
&= F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1} - F_n^2 - (-1)^n \quad \text{(z założenia)} \\
&= F_nF_{n+1} - F_n(F_{n-1} + F_n) + (-1)^2 \\
&= F_nF_{n+1} - F_nF_{n+1} + (-1)^n = (-1)^n.
\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.
d) Z równości (8.4) wynika, że $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$. Podobnie dowodzi się, że $F_{n-2}F_{n+2} = F_n^2 - (-1)^n$. Teraz z powyższych równości widać, że mamy

$$\begin{aligned}
F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} &= (F_{n-2}F_{n+2})(F_{n-1}F_{n+1}) \\
&= (F_n^2 - (-1)^n)(F_n^2 + (-1)^n) \\
&= F_n^4 - 1.
\end{aligned}$$

21. Niech x będzie liczbą taką, że $x^2 = 1 - x$. Indukcyjnie udowodnimy, że $x^{2n} = F_{2n-1} - xF_{2n}$ dla każdej liczby naturalnej n, gdzie F_n jest n-tą liczbą Fibonacciego (czyli taką, że $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$). Jeśli $n = 1$, to $x^{2\cdot 1} = 1 - x = F_1 - xF_2$. Niech teraz $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że $x^{2(n-1)} = F_{2n-3} - xF_{2n-2}$. Udowodnimy teraz, że $x^{2n} = F_{2n-1} - xF_{2n}$. Zauważmy, że z założenia indukcyjnego, z równości $x^2 = 1 - x$ oraz z definicji ciągu Fibonacciego mamy

$$\begin{aligned}
x^{2n} &= x^{2n-2} \cdot x^2 \\
&= (F_{2n-3} - xF_{2n-2})(1 - x) \\
&= F_{2n-3} - x(F_{2n-2} + F_{2n-3}) + x^2F_{2n-2} \\
&= F_{2n-3} - xF_{2n-1} + (1 - x)F_{2n-2} \\
&= (F_{2n-3} + F_{2n-2}) - x(F_{2n-1} + F_{2n-2}) \\
&= F_{2n-1} - xF_{2n}.
\end{aligned}$$

22. Z niżej przedstawionego schematu (dla $n = 5$) oraz z równości $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ (zob. zadanie 1), że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n mamy $1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + n \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} l = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 4 & 4 & & & \\ \hline 5 & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ 4 & 4 & & & \\ 5 & & & & \end{array}$$

23. Korzystamy z równości $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Do budowy ściętej piramidy potrzeba

$$\sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$$

pomarańczy. Liczba ta nie jest mniejsza od 100 dla $n = 4$.

24. Niech $(a_1, a_2, \ldots)$ będzie malejącym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ jest niepustym podzbiorem podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ i posiada on element najmniejszy. Niech nim będzie a. Oczywiście $a \in A$, więc $a = a_{n_0}$ dla pewnej liczby naturalnej n_0. Teraz zauważmy, że a_{n_0} jest ostatnim elementem ciągu $(a_1, a_2, \ldots)$, bo inaczej w tym ciągu istniałby element a_{n_0+1} i byłoby $a_{n_0} > a_{n_0+1}$, co byłoby sprzeczne z wyborem elementu $a = a_{n_0}$. Stąd wynika, że ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ jest skończony i $(a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_0})$.

25. Niech A będzie niepustym zbiorem liczb naturalnych i niech a będzie dowolnym elementem zbioru A. Wtedy najmniejszy element skończonego zbioru $\{x \in A\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a\}$ jest najmniejszym elementem zbioru A.

26. Nieindukcyjne dowody obu równości przedstawiono w twierdzeniu 2.7.3 na stronie 75. Tu przedstawiamy dowody indukcyjne. Najpierw udowodnimy równość $A \cup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$. Równość ta jest oczywista, gdy $n = 1$. Jeśli $n = 2$, to jest ona konsekwencją twierdzenia 2.4.2 ze strony 52. Niech teraz $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że $A \cup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$. Teraz zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i \right) &= A \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) \cap B_{n+1} \right) \\ &= \left(A \cup \bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) \cap (A \cup B_{n+1}) \quad \text{(z tw. 2.4.2)} \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i) \right) \cap (A \cup B_{n+1}) \quad \text{(z założenia)} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n+1} (A \cup B_i). \end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $A \cup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.
Jeśli w wyżej przedstawionym dowodzie każdy znak $\cup$ zastąpimy znakiem $\cap$, a znak $\cap$ znakiem $\cup$, to otrzymamy indukcyjny dowód równości $A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)$.

27. Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są zbiorami z przestrzeni X, to rozważane równości są konsekwencjami następujących równoważności:

$$\begin{array}{rcl} x \in \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} & \Leftrightarrow & x \in X \wedge x \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\ & \Leftrightarrow & x \in X \wedge \forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} x \notin A_i \\ & \Leftrightarrow & \forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} (x \in X \wedge x \notin A_i) \\ & \Leftrightarrow & \forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} x \in \overline{A_i} \\ & \Leftrightarrow & x \in \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \end{array}$$

i

$$\begin{array}{rcl} x \in \overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} & \Leftrightarrow & x \in X \wedge x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\ & \Leftrightarrow & x \in X \wedge \exists_{i \in \{1,\ldots,n\}} x \notin A_i \\ & \Leftrightarrow & \exists_{i \in \{1,\ldots,n\}} (x \in X \wedge x \notin A_i) \\ & \Leftrightarrow & \exists_{i \in \{1,\ldots,n\}} x \in \overline{A_i} \\ & \Leftrightarrow & x \in \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}. \end{array}$$

28. Jeśli n jest dodatnią liczbą naturalną, to łatwo widać, że mamy

$$\begin{array}{rcl} 2^{2^n} - 1 & = & 2^{2^{n-1}\cdot 2} - 1 \\ & = & (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1) \\ & = & (2^{2^{n-2}} - 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1) \\ & \vdots & \\ & = & (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1) \\ & = & (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1) \\ & = & F_0 F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-2} F_{n-1}, \end{array}$$

gdzie $F_k = 2^{2^k} + 1$ dla każdej liczby naturalnej k (i jest to k-ta liczba Fermata). Z równości tej wynika, że mamy $F_0 F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-2} F_{n-1} = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^n} + 1) - 2 = F_n - 2$, czyli wynika, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n mamy równość

$$F_n = F_0 F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-2} F_{n-1} + 2. \tag{8.5}$$

Z ostatniej równości i z faktu, że każda liczba Fermata jest nieparzysta natychmiast wynika, że każde dwie liczby Fermata są względnie pierwsze. (Czy to wymaga dokładniejszego uzasadnienia?) Niech teraz D_i będzie zbiorem pierwszych dzielników liczby F_i. Wtedy $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{n-1}$ jest zbiorem wszystkich dzielników iloczynu $F_0 F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-2} F_{n-1}$, a ponieważ każdy ze zbiorów $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ jest niepusty i są one wzajemnie rozłączne, więc liczba $F_0 F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-2} F_{n-1} = 2^{2^n} - 1$ ma $|D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{n-1}| = |D_0| + |D_1| + \ldots + |D_{n-1}| \geqslant 1 + \ldots + 1 = n$ dzielników będących liczbami pierwszymi.

29. (1) Z prawdziwości zdania $\varphi(0,0)$ i prawdziwości implikacji $\varphi(n,0) \Rightarrow \varphi(n+1,0)$ oraz z twierdzenia o indukcji wynika prawdziwość $\varphi(n,0)$ dla każdej liczby naturalnej n. Teraz z prawdziwości $\varphi(n,0)$ i prawdziwości implikacji $\varphi(n,m) \Rightarrow \varphi(n,m+1)$ oraz z twierdzenia o indukcji wynika prawdziwość $\varphi(n,m)$ dla każdej liczby naturalnej m. Z powyższego wynika prawdziwość $\varphi(n,m)$ dla każdej pary $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (2) Jeśli $(n,m) = (0,0)$, to $n^3 + m^3 + 2n - m = 0$ i liczba ta jest podzielna przez 3. Niech teraz (n,m) będzie ustaloną parą liczb naturalnych i załóżmy, że liczba $n^3 + m^3 + 2n - m$ jest podzielna przez 3, czyli załóżmy, że $n^3 + m^3 + 2n - m = 3k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wobec (1) wystarczy teraz uzasadnić, że każda z liczb $(n+1)^3 + m^3 + 2(n+1) - m$ i $n^3 + (m+1)^3 + 2n - (m+1)$ jest podzielna przez 3. Zauważmy, że mamy

$$\begin{array}{rcl} (n+1)^3 + m^3 + 2(n+1) - m & = & (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2n + 2 - m \\ & = & (n^3 + m^3 + 2n - m) + 3n^2 + 3n + 3 \\ & = & 3k + 3(n^2 + n + 1) \\ & = & 3(k + n^2 + n + 1) \end{array}$$

i $k+n^2+n+1 \in \mathbb{Z}$. Podobnie

$$\begin{aligned} n^3+(m+1)^3+2n-(m+1) &= n^3+(m^3+3m^2+3m+1)+2n-m-1 \\ &= (n^3+m^3+2n-m)+3m^2+3m \\ &= 3k+3m^2+3m \\ &= 3(k+m^2+m) \end{aligned}$$

i $k+m^2+m \in \mathbb{Z}$. Stąd i z (1) wynika, że liczba n^3+m^3+2n-m jest podzielna przez 3 dla każdych liczb naturalnych n i m.

30. (1) Dla dodatnich liczb x_1 i x_2 nierówność $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1} \geqslant 2$ jest konsekwencją następujących równoważności:

$$\begin{aligned} \tfrac{x_1}{x_2}+\tfrac{x_2}{x_1} \geqslant 2 &\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2 \geqslant 2x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(2) Jeśli a i b są dodatnimi liczbami takimi, że $ab=1$, to $b=\frac{1}{a}$ i wobec (1) mamy

$$a+b=a+\frac{1}{a}=\frac{a}{1}+\frac{1}{a} \geqslant 2.$$

(3) Indukcyjnie uzasadnimy, że jeśli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dodatnie i $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n=1$, to $x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant n$. Stwierdzenie to jest oczywiste dla $n=1$. Dla $n=2$ jest to konsekwencją (2). Niech teraz $\geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy też, że jeśli liczby $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są dodatnie i $y_1y_2 \cdot \ldots \cdot y_n=1$, to

$$y_1+y_2+\ldots+y_n \geqslant n. \tag{8.6}$$

Weźmy teraz pod uwagę dodatnie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ takie, że $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_nx_{n+1}=1$. Uzasadnimy, że dla nich spełniona jest nierówność

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1} \geqslant n+1.$$

Przede wszystkim, jeśli liczy $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ są równe, to $x_1=x_2=\ldots=x_n=x_{n+1}=1$ i natychmiast mamy $x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}=n+1 \geqslant n+1$. Załóżmy teraz, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ nie są równe. Wtedy co najmniej jedna z nich musi być mniejsza od jedności, a inna musi być większa od jedności. Możemy przyjąć, że $x_1<1$ i $x_{n+1}>1$. Jeśli teraz przyjmiemy $y_1=x_1x_{n+1}$, to $y_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n=(y_1x_{n+1})x_2 \cdot \ldots \cdot x_n=1$ i wobec (8.6) mamy

$$y_1+2_2+\ldots+x_n \geqslant n. \tag{8.7}$$

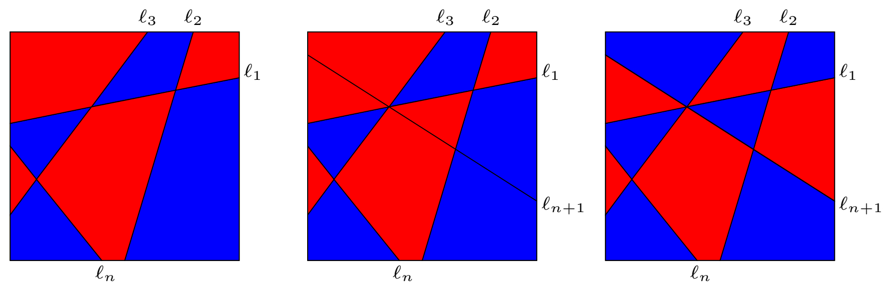
Teraz zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1} &= (y_1+x_2+\ldots+x_n)+x_{n+1}-y_1+x_1 \\ &\geqslant n+x_{n+1}-y_1+x_1 \\ &= (n+1)+x_{n+1}-y_1+x_1-1 \\ &= (n+1)+x_{n+1}-x_1x_{n+1}+x_1-1 \\ &= (n+1)+(x_{n+1}-1)(1-x_1) \\ &> n+1, \end{aligned}$$

bo z nierówności $x_1<1$ i $x_{n+1}>1$ wynika, że $(x_{n+1}-1)(1-x_1)>0$. To kończy indukcyjny dowód (3).
(4) Niech g będzie średnią geometryczną dodatnich liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, czyli liczbą taką, że $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=g$. Wtedy $\sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\cdot\frac{x_2}{g}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{g}}=1$, więc także $\frac{x_1}{g}\cdot\frac{x_2}{g}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{g}=1$ i teraz wobec (3) mamy $\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\ldots+\frac{x_n}{g} \geqslant n$, więc także $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant g$, czyli mamy nierówność $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. (W zadaniu 30 błędnie wpisałem $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ zamiast $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant$

$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.)

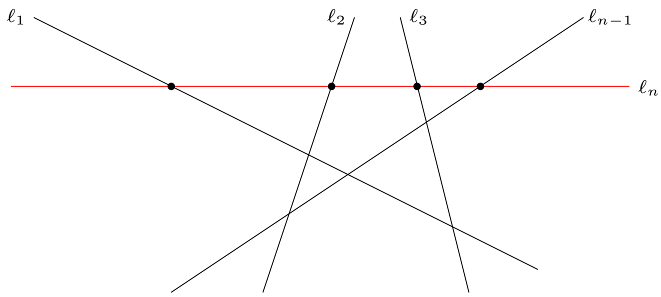
31. Za pomocą n prostych dzielimy płaszczyznę na obszary. Indukcyjnie uzasadnimy, że każdy z otrzymanych obszarów można pomalować kolorem niebieskim albo czerwonym w taki sposób, że żadne dwa obszary o tym samym kolorze nie mają wspólnego boku. Takie pomalowanie obszarów, jeśli istnieje, nazywamy poprawnym. Jest oczywiste, że pomalowanie poprawne istnieje, gdy płaszczyznę dzielimy za pomocą jednej prostej. Niech teraz $n \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że istnieje poprawne pomalowanie obszarów powstałych w wyniku dzielenia płaszczyzny za pomocą prostych $\ell_1, \ldots, \ell_n$. Weźmy pod uwagę jedno takie pomalowanie (zob. rys.). Tak podzieloną i pomalowaną płaszczyznę dalej dzielimy za pomocą kolejnej prostej ℓ_{n+1} (różnej od każdej z prostych $\ell_1, \ldots, \ell_n$). Teraz nowo powstałe sąsiednie obszary leżące po różnych stronach prostej ℓ_{n+1} mają ten sam kolor i aktualne pokolorowanie nie jest poprawne (zob. rys.). Jeśli teraz przemalujemy wszystkie obszary (stare i nowo powstałe) leżące po jednej ustalonej stronie prostej ℓ_{n+1}, to otrzymamy poprawne pomalowanie całej płaszczyzny (zob. rys.).



32. Możemy założyć, że na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe, ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Niech a_n będzie liczbą punktów, w których przecinają się te proste. Indukcyjnie uzasadnimy, że $a_n = n(n-1)/2$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Jest oczywiste, że $a_1 = 0$. Weźmy teraz pod uwagę proste $\ell_1, \ldots, \ell_n$, $n \geqslant 2$, z których żadne dwie nie są równoległe, ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Proste $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$ przecinają się w $a_{n-1} = (n-1)(n-2)/2$ punktach. Prosta ℓ_n przecina każdą z prostych $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$. Zatem wszystkich punktów przecięcia jest

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Stąd i z twierdzenia o indukcji wynika, że $a_n = n(n-1)/2$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.



Rysunek 8.1. Prosta ℓ_n przecina każdą z prostych $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$

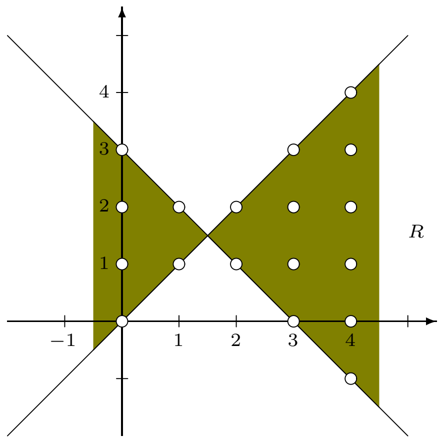
33. Mamy $S_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1}$ i $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n = (a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1}) + a_1q^n - a_1 = (S_n - a_1) + a_1q^n$. Stąd $S_n - qS_n = a_1 - a_1q$ i dlatego $S_n = a_1(q_n - 1)/(q-1)$, gdy $q \neq 1$.
34. 1. Nie; 2. Tak; 3. Tak; 4. Tak; 5. Tak.

35. 1. Tak; 2. Tak; 3. Nie; 4. Tak; 5. Tak; 6. Nie; 7. Nie; 8. Nie; 9. Tak; 10. Tak; 11. Tak; 12. Nie.

8.4. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Funkcje

1. a) Tak; b) Tak; c) Tak; d) Nie. W tej ostatniej części błędnie wpisałem $(1,4)$ zamiast $(4,1)$.

2. a) Dla każdej liczby naturalnej n istnieją co najmniej dwie liczby naturalne m takie, że $(n-m)(n+m+3) \geqslant 0$. Przykładowo dla par $(2,1)$ i $(2,2)$ mamy $(n-m)(n+m+3) = (2-1)(2+1+3) = 0 \geqslant 0$ i $(n-m)(n+m+3) = (2-2)(2+2+3) = 0 \geqslant 0$. Stąd wynika, że zbiór R (który przedstawiliśmy na rys. 9.1) nie jest funkcją.



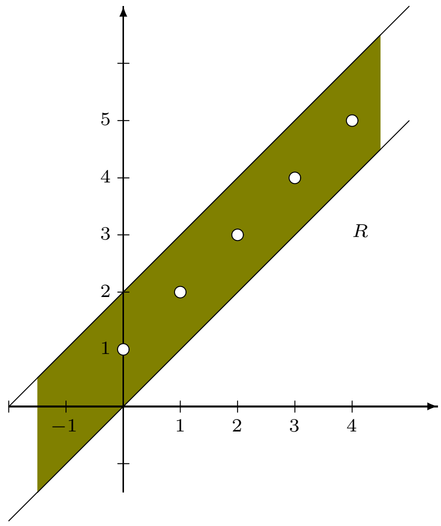
Rysunek 8.2. Ilustracja zbioru $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon (x-y)(x+y-3) \geqslant 0\}$

b) Rozwiązując nierówność $(x-y)(x-y+2) < 0$, dochodzimy do wniosku, że zbiór $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon (x-y)(x-y+2) < 0\}$ jest zbiorem tych par $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, dla których spełnione są nierówności $x < y < x+2$ (zob. rys. 9.2). Tym razem dla każdego $x \in \mathbb{N}$ tylko $y = x+1$ jest liczbą taką, że $(x,y) \in R$. Zatem zbiór R jest funkcją i temu zbiorowi odpowiada odwzorowanie $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = n+1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

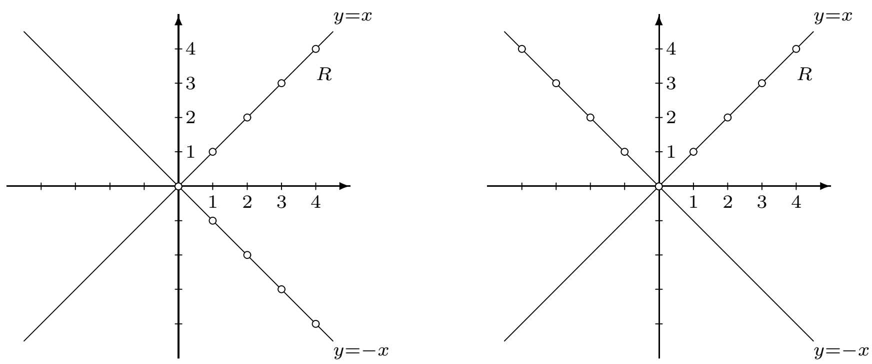
c) Zbiór $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \colon |x| = |y|\}$ jest identyczne ze zbiorem $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \colon x = |y|\}$, a ten jest zbiorem wszystkich par (n,n) i $(n,-n)$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną (zob. rys. 9.3). Dla $x \in \mathbb{N} - \{0\}$ nie jest spełniony warunek (4.1) definicji funkcji (bo $|\{y \in \mathbb{Z} \colon (x,y) \in R\}| = |\{x,-x\}| = 2$). Zatem zbiór R nie jest funkcją.

d) Tym razem $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \colon |x| = |y|\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \colon |x| = y\} = \{(m,|m|) \colon m \in \mathbb{Z}\}$ (zob. rys. 9.3). Stąd widać, że zbiór R jest funkcją. Zbiorowi temu odpowiada odwzorowanie $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = |n|$ dla $n \in \mathbb{Z}$.
3. $f = \{(0,0),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ i funkcja f jest różnowartościowa i na.

4. Jeśli zbiory A i B są niepuste, to zbiór $A \times B$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór B jest jednoelementowy. Inaczej dla każdego $x \in A$ jest $|\{y \in$



Rysunek 8.3. Ilustracja zbioru $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon\ (x - y)(x + y - 3) < 0\}$



Rysunek 8.4. Ilustracje zbiorów $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\colon\ |x| = |y|\}$ i $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\colon\ |x| = |y|\}$

$B\colon (x, y) \in A \times B\}| = |B| \geqslant 2$ i nie jest spełniony warunek (4.1) definicji funkcji.

5. Ponieważ zero i jeden są jedynymi wartościami funkcji charakterystycznych, więc w celu dowodu równości dwóch funkcji charakterystycznych wystarczy wykazać, że liczba 1 jest wartością jednej z nich wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona wartością drugiej funkcji. Zatem dla dowodu równości $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ wystarczy wykazać, że dla $x \in X$ mamy $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$. Zauważmy, że dla $x \in X$ mamy równoważności

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B}(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad x \in A \cap B \\
&\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \in B \\
&\Rightarrow \quad \chi_A(x) = 1 \wedge \chi_B(x) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \\
&\Rightarrow \quad (\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1.
\end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że $\chi_{A\cup B} = 1-(1-\chi_A)(1-\chi_B)$, bo dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$\begin{aligned}(1-(1-\chi_A)(1-\chi_B))(x) = 1 &\Rightarrow 1-(1-\chi_A(x))(1-\chi_B(x))) = 1\\ &\Rightarrow (1-\chi_A(x))(1-\chi_B(x)) = 0\\ &\Rightarrow (1-\chi_A(x)) = 0 \vee (1-\chi_B(x)) = 0\\ &\Rightarrow \chi_A(x) = 1 \vee \chi_B(x) = 1\\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in B\\ &\Rightarrow x \in A \cup B\\ &\Rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 1.\end{aligned}$$

6. Dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = |x+2|-3$, i dla zbioru $A = \langle -5;1\rangle$ mamy:
$f(A) = f(\langle -5;1\rangle) = \langle -3;0\rangle$,
$f^{-1}(A) = f^{-1}(\langle -5;1\rangle) = \langle -6;2\rangle$,
$f(f(A)) = f(f(\langle -5;1\rangle)) = f(\langle -3;0\rangle) = \langle -3;-1\rangle$,
$f(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(\langle -5;1\rangle)) = f(\langle -6;2\rangle) = \langle -3;1\rangle$,
$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\langle -5;1\rangle)) = f^{-1}(\langle -3;0\rangle) = \langle -5;1\rangle$,
$f^{-1}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(f^{-1}(\langle -5;1\rangle)) = f^{-1}(\langle -6;2\rangle) = \langle -7;3\rangle$.

7. Dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = x^2$, oraz dla zbiorów $A = \langle -2;2)$ i $B = (0;4\rangle$ mamy:
$f(A) \cup f(B) = f(\langle -2;2)) \cup f((0;4\rangle) = \langle 0;4\rangle \cup (0;16\rangle = \langle 0;16\rangle$,
$f(A \cup B) = f(\langle -2;2) \cup (0;4\rangle) = f(\langle -2;4\rangle) = \langle 0;16\rangle$,
$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(\langle -2;2)) \cup f^{-1}((0;4\rangle) = (-\sqrt{2};\sqrt{2}) \cup (\langle -2;0) \cup (0;2\rangle) = \langle -2;2\rangle$,
$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(\langle -2;2) \cup (0;4\rangle) = f^{-1}(\langle -2;4\rangle) = \langle -2;2\rangle$,
$f(A) \cap f(B) = f(\langle -2;2)) \cap f((0;4\rangle) = \langle 0;4\rangle \cap (0;16\rangle = (0;4\rangle$,
$f(A \cap B) = f(\langle -2;2) \cap (0;4\rangle) = f((0;2)) = (0;4)$,
$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(\langle -2;2)) \cap f^{-1}((0;4\rangle) = (-\sqrt{2};\sqrt{2}) \cap (\langle -2;0) \cup (0;2\rangle) = (-\sqrt{2};0) \cup (0;\sqrt{2})$,
$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\langle -2;2) \cap (0;4\rangle) = f^{-1}((0;2)) = (-\sqrt{2};0) \cup (0;\sqrt{2})$.

8. a) $f(\{1,102,303\}) = \{0,103,302\}$, $f^{-1}(\{1,101,2008\}) = \{0,100,2009\}$;
b) $f(\{1,102,303\}) = \{1,100\}$, $f^{-1}(\{1,101,2008\}) = \{1\}$;
c) $f(\{1,102,303\}) = \{15,112,313\}$, $f^{-1}(\{1,101,2008\}) = \{91,1998\}$;
d) $f(\{1,102,303\}) = \{0,51,151\}$, $f^{-1}(\{1,101,2008\}) = \{2,3,202,203,4016,4017\}$.

9. a) $f(n) = 2n$; b) $f(n) = \lfloor n/2\rfloor$; c) $f(n) = 1$; d) $f(n) = n$.

10. Oznaczmy zbiór $\{1,\ldots,n\}$ symbolem $[n]$. Chcemy pokazać, że funkcja $f\colon [n] \to [n]$ jest iniekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona surjekcją.

Załóżmy najpierw, że funkcja f jest iniekcją. Twierdzimy, że jest ona surjekcją. Przypuśćmy, że jest inaczej. Wtedy zbiór $[n]-f([n])$ jest niepusty. Niech n_0 będzie dowolnym elementem zbioru $[n]-f([n])$. Wtedy $f([n]) \subseteq [n]-\{n_0\}$, więc $|\{f(1),\ldots,f(n)\}| = |f([n])| \leqslant |[n]-\{n_0\}| = n-1$. Teraz z nierówności $|\{f(1),\ldots,f(n)\}| \leqslant n-1$ i z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją liczby $k,l \in [n]$ takie, że $k \neq l$ i $f(k) = f(l)$. To przeczy założeniu, że f jest iniekcją.

Z drugiej strony zauważmy, że jeśli funkcja $f\colon [n] \to [n]$ nie jest iniekcją, to nie jest też ona surjekcją. Istotnie, jeśli funkcja $f\colon [n] \to [n]$ nie jest iniekcją, to istnieją liczby $k,l \in [n]$ takie, że $k \neq l$ i $f(k) = f(l)$. Wtedy $f([n]) = f([n]-\{l\})$ i $|f([n])| = |f([n]-\{l\})| \leqslant |[n]-\{l\}| = n-1$. Stąd wynika, że $[n]-f([n]) \neq \emptyset$, co dowodzi, że funkcja f nie może być surjekcją.

11. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = |x| - 2$, nie jest różnowartościowa (bo przykładowo $f(-3) = f(3)$) ani nie jest na (bo – jak łatwo zauważyć – $f(\mathbb{R}) = \langle -2; \infty) \subsetneq \mathbb{R}$). b) Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(n) = |n| - 2 = n - 2$, jest, co łatwo zaobserwować, różnowartościowa, ale nie jest ona na (bo – jak widać – $f(\mathbb{N}) = \{-2, -1\} \cup \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$).

12. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = 3x^3 - x$ dla $x \in \mathbb{R}$, nie jest różnowartościowa, bo przykładowo mamy $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{3}/3) = 0$. Z ciągłości funkcji $f(x) = 3x^3 - x$ i z faktu, że $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ wynika, że dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = y$. To dowodzi, że f jest surjekcją.

13. Funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gdzie $f(x) = 3x^3 - x$ dla $x \in \mathbb{Z}$, jest różnowartościowa, bo dla dowolnych liczb całkowitych n i m mamy

$$
\begin{aligned}
f(n) = f(m) \quad &\Leftrightarrow \quad 3n^3 - n = 3m^3 - m \\
&\Leftrightarrow \quad 3(n^3 - m^3) - (n - m) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (n - m)(3n^2 + 3nm + 3m^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n = m \quad \text{(bo równanie } 3n^2 + 3nm + 3m^2 - 1 = 0 \text{ nie ma} \\
&\qquad\ \text{rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych)}
\end{aligned}
$$

Funkcja $f(x) = 3x^3 - x$ jest rosnąca na zbiorze $\mathbb{Z}$, bo $f(x+1) - f(x) = 9x^2 + 9x + 2 > 0$ dla każdej liczby całkowitej x. Z tego też wynika, że żadna liczba ze zbioru $\{f(n) + 1, f(n) + 2, \ldots, f(n+1) - 1\}$ (a tych liczb jest $9n^2 + 9n + 2$) nie jest wartością funkcji f dla $k \in \mathbb{Z}$. To dowodzi, że funkcja f nie jest surjekcją.

14. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = x^2 - 10x + 7$ dla $x \in \mathbb{R}$, nie jest różnowartościowa, bo $f(5 - x) = x^2 - 18 = f(5 + x)$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Wykresem funkcji f jest wypukła parabola o wierzchołku w punkcie $(5, -18)$. Stąd wynika, że $f(\mathbb{R}) = \langle -18; \infty)$.

b) Funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \{x \in \mathbb{Z}\colon x \geqslant -18\}$, gdzie $f(x) = x^2 - 10x + 7$ dla $x \in \mathbb{Z}$, nie jest różnowartościowa, bo $f(5 - x) = x^2 - 18 = f(5 + x)$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{Z}$. Z faktu, że równanie $x^2 - 10x + 7 = 0$ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych wynika, że $0 \in \{x \in \mathbb{Z}\colon x \geqslant -18\} - f(\mathbb{Z})$. To dowodzi, że funkcja f nie jest surjekcją.

c) Funkcja $f\colon \{x \in \mathbb{N}\colon x \geqslant 5\} \to \{x \in \mathbb{Z}\colon x \geqslant -18\}$, gdzie $f(x) = x^2 - 10x + 7$ dla $x \in \{x \in \mathbb{N}\colon x \geqslant 5\}$ jest różnowartościowa, bo $f(x) = x^2 - 10x + 7$ jako funkcja zmiennej $x \in \mathbb{R}$ jest rosnąca na zbiorze $\langle 5; \infty)$, wiec także jest ona rosnąca i różnowartościowa na zbiorze $\{x \in \mathbb{N}\colon x \geqslant 5\}$. Znowu z faktu, że równanie $x^2 - 10x + 7 = 0$ nie ma rozwiązania w zbiorze $\{x \in \mathbb{N}\colon x \geqslant 5\}$ (bo nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych) wynika, że $0 \in \{x \in \mathbb{Z}\colon x \geqslant -18\} - f(\{x \in \mathbb{N}\colon x \geqslant 5\})$. To dowodzi, że funkcja f nie jest surjekcją.

15. a) Dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = x|x|$ dla $x \in \mathbb{R}$, mamy

$$
f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x^2, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}
$$

Teraz z faktu, że funkcja $y = x^2$ jest rosnąca na przedziale $\langle 0; \infty)$, a funkcja $y = -x^2$ jest rosnąca na przedziale $(-\infty; 0)$ oraz z rozłączności zbiorów $f((-\infty; 0)) = (-\infty; 0)$ i $f(\langle 0; \infty)) = \langle 0; \infty)$ wynika różnowartościowość funkcji f. Z tego także wynika, że $f(\mathbb{R}) = f((-\infty; 0) \cup \langle 0; \infty)) = (-\infty; 0) \cup \langle 0; \infty) = \mathbb{R}$.

b) Funkcja $f\colon (4; \infty) \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \ln_2(x - 4)$ dla $x \in (4; \infty)$, jest różnowartościowa, bo dla $x_1, x_2 \in (4; \infty)$ mamy

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln_2(x_1 - 4) = \ln_2(x_2 - 4) \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 - 4 = x_2 - 4 \quad \text{(z różnowartościowości funkcji } y = \ln_2 x) \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.
\end{aligned}
$$

Jest oczywiste, że $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Z drugiej strony każda liczba $y \in \mathbb{R}$ jest wartością funkcji f, bo mamy $y = \ln_2(x-4) \Leftrightarrow x - 4 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y + 4$. Stąd wynika, że $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

c) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = 2^{x-1}+1$ dla $x \in \mathbb{R}$, jest różnowartościowa, bo dla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{x_1-1} + 1 = 2^{x_2-1} + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{x_1-1} = 2^{x_2-1} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 - 1 = x_2 - 1 \quad \text{(z różnowartościowości funkcji } y = 2^x) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że $f(\mathbb{R}) = (1; \infty)$, bo mamy równoważności

$$\begin{aligned} \{2^x \colon x \in \mathbb{R}\} = (0; \infty) \quad &\Leftrightarrow \quad \{2^{x-1} \colon x \in \mathbb{R}\} = (0; \infty) \\ &\Leftrightarrow \quad f(\mathbb{R}) = \{2^{x-1} + 1 \colon x \in \mathbb{R}\} = (1; \infty). \end{aligned}$$

16. a) Funkcja $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie $f(n,m) = 2n + 3m$ dla $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nie jest różnowartościowa. Przykładowo mamy

$$f(n,m) = 2n + 3m = 2(n+3) + 3(m-2) = f(n+3, m-2),$$

gdy n i m są liczbami naturalnymi i $m \geqslant 2$.

Ponieważ każda naturalna kombinacja liczb 2 i 3 jest liczbą naturalną, więc $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Uzasadnimy teraz, że $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1\}$ (i w ten sposób uzasadnimy, że f nie odwzorowuje zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{N}$). W tym celu wystarczy wykazać, że $1 \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ i uzasadnić, że każda liczba k ze zbioru $\mathbb{N} - \{1\}$ jest wartością funkcji f. Przede wszystkim zauważmy, że $0 = f(0,0) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Teraz warto zaobserwować, że jeśli para (n,m) jest różna od pary $(0,0)$, to $n \geqslant 1$ lub $m \geqslant 1$, więc odpowiednio $f(n,m) = 2n + 3m \geqslant 2n \geqslant 2$ lub $f(n,m) = 2n + 3m \geqslant 3m \geqslant 3 \geqslant 2$. Stąd wynika, że jeśli $f(n,m) \neq 0$, to $f(n,m) \geqslant 2$ i dlatego $1 \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Uzasadnimy teraz, że każda liczba naturalna $k \geqslant 2$ jest wartością funkcji f. Na początek zauważmy, że

$$2 = f(1,0) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \quad \text{i} \quad 3 = f(0,1) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

Niech teraz $k \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że $k = f(n,m)$ dla pewnych liczb naturalnych n i m. Uzasadnimy, że $k + 1 = f(n', m')$ dla pewnych liczb naturalnych n' i m'. Zauważmy, że jeśli $k = f(n,m) = 2n + 3m$ i $m \geqslant 1$, to $(n+2, m-1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz

$$k + 1 = 2(n+2) + 3(m-1) = f(n+2, m-1).$$

Jeśli natomiast $k = f(n,m) = 2n + 3m$ i $m = 0$, to $n \geqslant 1$, $(n-1, m+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz

$$k + 1 = 2(n-1) + 3(m+1) = f(n-1, m+1).$$

To kończy dowód równości $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1\}$.

b) Funkcja $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gdzie $f(n,m) = 2n + 3m$ dla $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nie jest różnowartościowa, bo

$$f(n,m) = 2n + 3m = 2(n+3) + 3(m-2) = f(n+3, m-2),$$

gdy n i m są liczbami całkowitymi. Uzasadnimy teraz, że $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (i w ten sposób uzasadnimy, że f odwzorowuje zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na zbiór $\mathbb{Z}$). Z określoności funkcji f jest oczywiste, że $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. Dla dowodu inkluzji $\mathbb{Z} \subseteq f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ wystarczy zauważyć, że dla każdej liczby $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$k = 2(-k) + 3k = f(-k, k) \in f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

c) Jeśli l jest liczbą naturalną i $l \neq 0$, to przez $l\mathbb{Z}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez l. Przykładowo, $2\mathbb{Z} = \{2k \colon k \in \mathbb{Z}\} = X$. Funkcja $f \colon 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, gdzie $f(n,m) = 2n + 6m$ dla $(n,m) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$, nie jest różnowartościowa, bo przykładowo mamy $(6,0) \neq (0,2)$, ale

$$f(6,0) = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0 = 12 = 2 \cdot 0 + 6 \cdot 2 = f(0,2).$$

Zauważmy, że jeśli $(n,m) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$, to $(n,m) = (2k, 2l)$ dla pewnych liczb całkowitych k i l, więc

$$f(n,m) = 2n + 6m = 2(2k) + 6(2l) = 4(k + 3l) \in 4\mathbb{Z}.$$

Stąd już wynika, że $f(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}) \subseteq 4\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z}$. To także dowodzi, że funkcja f nie odwzorowuje zbioru $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ na zbiór $2\mathbb{Z}$.

d) Funkcja $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gdzie $f(n,m) = 17n + 25m$ dla $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nie jest różnowartościowa, bo dla każdej pary $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mamy

$$f(n,m) = 17n + 25m = 17(n + 25) + 25(m - 17) = f(n + 25, m - 17).$$

Uzasadnimy teraz, że $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (i w ten sposób uzasadnimy, że f odwzorowuje zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na zbiór $\mathbb{Z}$). Z określoności funkcji f jest oczywiste, że $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. Dla dowodu inkluzji $\mathbb{Z} \subseteq f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ weźmy dowolną liczbę k ze zbioru $\mathbb{Z}$. Wystarczy zauważyć, że $k = f(n', m')$ dla pewnej pary $(n', m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Z równości $1 = 3 \cdot 17 + (-2)25$ natychmiast wynika, że

$$k = 17 \cdot (3k) + 25 \cdot (-2k) = f(3k, -2k)$$

i to kończy dowód równości $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

17. a) Funkcjami odwzorowującymi zbiór $X = \{1,2\}$ w zbiór $Y = \{3,4,5\}$ są funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_9$ określone następującymi tabelami:

x	1	2
f_1	3	3

,

x	1	2
f_2	4	4

,

x	1	2
f_3	5	5

,

x	1	2
f_4	3	4

,

x	1	2
f_5	4	3

,

x	1	2
f_6	3	5

,

x	1	2
f_7	5	3

,

x	1	2
f_8	4	5

,

x	1	2
f_9	5	4

.

b) Funkcje $f_4, \ldots, f_9$ są wszystkimi różnowartościowymi funkcjami odwzorowującymi zbiór X w zbiór Y.

c) Z faktu, że $|Y| = 3 > 2 = |X|$ wynika, że nie istnieje funkcja różnowartościowa odwzorowująca zbiór Y w zbiór X.

18. $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$, $\{1,2\}^\emptyset = \{\emptyset\}$ i $\emptyset^{\{1,2\}} = \{\emptyset\}$. (W każdym z tych przypadków funkcja pusta, czyli zbiór pusty, jest jedynym podzbiorem odpowiedniego iloczynu kartezjańskiego.)

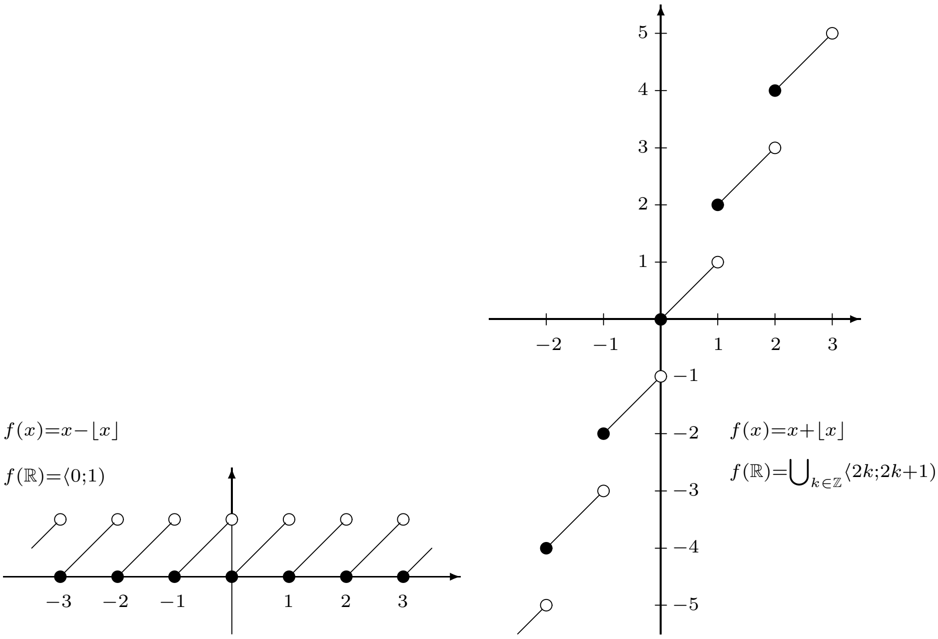
19. $f(\{0, e, \pi\}) = \{1, 3, 4\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon \lfloor x \rfloor + 1 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon \lfloor x \rfloor = -1\} = \langle -1; 0)$ i $f^{-1}(\{\mathbb{N}\}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{k\}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) = k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \colon \lfloor x \rfloor + 1 = k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \colon \lfloor x \rfloor = k - 1\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \langle k - 1; k) = \langle -1; \infty)$.

20. a) $f(\mathbb{R}) = \langle 0; 1)$, b) $f(\mathbb{R}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 2k; 2k+1)$, c) $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, d) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$, zob. rys. 9.4 i 9.5.

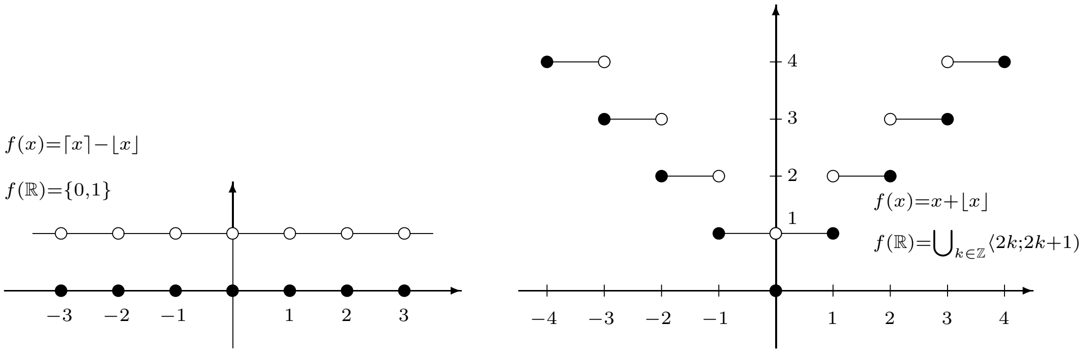
21. $f^{-1} = \{(1,4), (2,1), (3,3), (4,2), (5,5)\}$.

22. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$; b) $f^{-1}(x) = 2^x + 4$; c) $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$.

23. a) $g \circ f$ nie istnieje, bo $f(A) = B \subsetneq D_g = A$, $f \circ g = \{(1,1), (2,1), (3,8), (4,9), (5,1)\}$, $f \circ f$ nie istnieje, bo $f(A) = B \subsetneq D_f = A$, $g \circ g = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,1),$



Rysunek 8.5. Wykresy funkcji $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ i $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$



Rysunek 8.6. Wykresy funkcji $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$ i $f(x) = \lceil |x| \rceil$

$(5,2)\}$; b) $f^{-1} = \{(1,2),(2,5),(3,4),(8,1),(9,3)\}$, g^{-1} nie istnieje, bo funkcja g nie jest różnowartościowa.

24. a) $g^{-1} \circ f \circ g = \{(1,3),(2,1),(3,2),(4,4)\}$;
b) $f \circ g^{-1} \circ g = f = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,1)\}$;
c) $g \circ f \circ g^{-1} = \{(1,2),(2,4),(3,3),(4,1)\}$;
d) $g \circ g^{-1} \circ f = f = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,1)\}$;
e) $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g = \{(1,1),(2,4),(3,2),(4,3)\}$.

25. Jeśli f, g, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami takimi, że $f(x) = x-1$, $g(x) = \frac{-1}{x^2+2}$ oraz $h(x) = 4$, to $f^{-1}(x) = x+1$ i mamy: a) $(g \circ f)(x) g(f(x)) = g(x-1) = \frac{-1}{(x-1)^2+2}$; b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-1}{x^2+2}\right) = \frac{-1}{x^2+2} - 1 = -(x^2+3)/(x^2+2)$; c) $(h \circ g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = 4$; d) $(g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x))) = g(4) = \frac{-1}{18}$; e) $(g \circ f^{-1} \circ f)(x) = g(x) = \frac{-1}{x^2+2}$; f) $(f^{-1} \circ g \circ f)(x) = f^{-1}((g \circ f)(x)) = f^{-1}\left(\frac{-1}{(x-1)^2+2}\right) = \frac{-1}{(x-1)^2+2} + 1 = ((x-1)^2+1)/((x-1)^2+2)$.

26. a) Udowodnimy najpierw, że funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_+$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -2x & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

jest różnowartościowa. W tym celu uzasadnimy, że jeśli $x, x' \in \mathbb{Z}$ i $x \neq x'$, to $f(x) \neq f(x')$. Rozważamy trzy przypadki: $x, x' \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$; $x, x' \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ i $x' \in \mathbb{N}$.

1) Jeśli $x, x' \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ i $x \neq x'$, to $2x + 1 \neq 2x' + 1$, więc $f(x) \neq f(x')$.

2) Jeśli $x, x' \in \mathbb{N}$ i $x \neq x'$, to $-2x \neq -2x'$, więc $f(x) \neq f(x')$.

3) Jeśli $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ i $x' \in \mathbb{N}$, to $-2x \neq 2x' + 1$, czyli $f(x) \neq f(x')$.

Zauważmy teraz, że funkcja f odwzorowuje zbiór $\mathbb{Z}$ na cały zbiór $\mathbb{N}_+$, bo jak widać mamy

$$\begin{aligned} f(\mathbb{Z}) &= f((\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}) \\ &= f(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cup f(\mathbb{N}) \\ &= \{-2n\colon m \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}\} \cup \{2n+1\colon n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2k\colon k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{2n+1\colon n \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathbb{N}_+. \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że rozważana funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_+$ jest bijekcją. Stąd też wynika istnienie funkcji $f^{-1}\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Z}$.

b) Z równości $2006 = -2 \cdot (-1003)$, czyli z równości $f(-1003) = 2006$ wynika, że $f^{-1}(2006) = -1003$. Podobnie z równości $2007 = 2 \cdot 1003 + 1$ wynika, że $f^{-1}(2007) = 1003$.

27. Niech $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ i $g\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ będą funkcjami takimi, że $f(x) = x/(x-2)$ i $g(x) = 2x/(x-1)$. Zauważmy, że dla $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ mamy

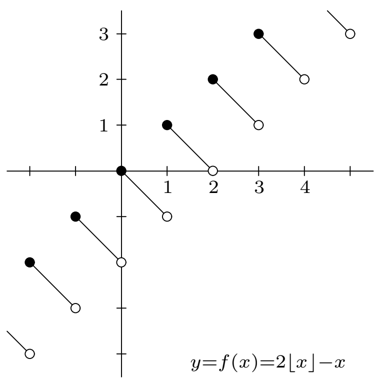
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{x}{x-2} - 1} = x.$$

Podobnie dla $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ mamy

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - 2} = x.$$

Z tego wynika, że funkcje f i g są wzajemnie odwrotne.

28. a) Wykres funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = 2\lfloor x \rfloor - x = \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)$ dla $x \in \mathbb{R}$ przedstawiliśmy na poniższym rysunku.



b) Udowodnimy, że funkcja f jest różnowartościowa. Weźmy $x, x' \in \mathbb{R}$ takie, że $x \neq x'$. Wystarczy udowodnić, że $f(x) \neq f(x')$. Ponieważ $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$

i $x' = \lfloor x' \rfloor + (x' - \lfloor x' \rfloor)$, więc rozważamy dwa przypadki: $\lfloor x \rfloor \neq \lfloor x' \rfloor$, $\lfloor x \rfloor = \lfloor x' \rfloor$ i $x - \lfloor x \rfloor \neq x' - \lfloor x' \rfloor$. Załóżmy najpierw, że $\lfloor x \rfloor \neq \lfloor x' \rfloor$. Możemy założyć, że $\lfloor x \rfloor < \lfloor x' \rfloor$. Wtedy mamy następujący ciąg nierówności:

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor < \lfloor x' \rfloor &\Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x' \rfloor - 1\\
&\Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x' \rfloor - 1 < \lfloor x' \rfloor - (x' - \lfloor x' \rfloor) \quad (\text{bo } 0 \leqslant x' - \lfloor x' \rfloor < 1)\\
&\Rightarrow \lfloor x \rfloor < f(x') \quad (\text{bo } f(x') = \lfloor x' \rfloor - (x' - \lfloor x' \rfloor))\\
&\Rightarrow \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor) \leqslant \lfloor x \rfloor < f(x') \quad (\text{bo } x - \lfloor x \rfloor \geqslant 0)\\
&\Rightarrow f(x) < f(x') \quad (\text{bo } f(x) = \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor))\\
&\Rightarrow f(x) \neq f(x').
\end{aligned}$$

Jeśli $\lfloor x \rfloor = \lfloor x' \rfloor$ i $x - \lfloor x \rfloor \neq x' - \lfloor x' \rfloor$, to natychmiast mamy

$$f(x) = \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor) \neq \lfloor x \rfloor - (x' - \lfloor x' \rfloor) = \lfloor x' \rfloor - (x' - \lfloor x' \rfloor) = f(x')$$

i to kończy dowód różnowartościowości funkcji f.

c) Jest oczywiste, że $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Dla dowodu równości $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ pozostaje wykazać, że $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$. W tym celu weźmy dowolne $y \in \mathbb{R}$. Uzasadnimy, że $y = f(x)$ dla pewnego x ze zbioru $\mathbb{R}$. Zauważmy, że $y = \lceil y \rceil - (\lceil y \rceil - y)$ i teraz dla $x = \lceil y \rceil + (\lceil y \rceil - y)$ $(= 2\lceil y \rceil - y)$ mamy

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\lfloor x \rfloor - x\\
&= 2\lfloor 2\lceil y \rceil - y \rfloor - (2\lceil y \rceil - y)\\
&= 2\lfloor \lceil y \rceil + (\lceil y \rceil - y) \rfloor - 2\lceil y \rceil + y\\
&= 2\lfloor \lceil y \rceil \rfloor - 2\lceil y \rceil + y \quad (\text{bo } \lceil y \rceil \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leqslant \lceil y \rceil - y < 1)\\
&= 2\lceil y \rceil - 2\lceil y \rceil + y \quad (\text{bo } \lfloor \lceil y \rceil \rfloor = \lceil y \rceil)\\
&= y.
\end{aligned}$$

To kończy dowód inkluzji $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$ i równości $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

d) Niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $g(x) = 2\lceil x \rceil - x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykażemy, że $(g \circ f)(x) = x = (f \circ g)(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$, to $f(x) = x$ i $g(x) = x$, więc także $(g \circ f)(x) = x$ i $(f \circ g)(x) = x$. Zauważmy teraz, że jeśli $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, to, podobnie jak w części c), mamy

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2\lfloor x \rfloor - x)\\
&= 2\lceil 2\lfloor x \rfloor - x \rceil - (2\lfloor x \rfloor - x)\\
&= 2\lceil \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor) \rceil - 2\lfloor x \rfloor + x\\
&= 2\lceil \lfloor x \rfloor \rceil - 2\lfloor x \rfloor + x\\
&= 2\lfloor x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor + x\\
&= x
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2\lceil x \rceil - x)\\
&= 2\lfloor 2\lceil x \rceil - x \rfloor - (2\lceil x \rceil - x)\\
&= 2\lfloor \lceil x \rceil + (\lceil x \rceil - x) \rfloor - 2\lceil x \rceil + x\\
&= 2\lfloor \lceil x \rceil \rfloor - 2\lceil x \rceil + x\\
&= x.
\end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f, czyli mamy $f^{-1}(x) = 2\lceil x \rceil - x$.

29. Ponieważ funkcja $f(x) = x/\sqrt{x^2+2}$ jest nieparzysta, więc badając jej różnowartościowość, wystarczy ograniczyć się do zbioru $\langle 0; \infty)$. Dodatkowo, ponieważ $f(0) = 0$ i $f(x) > 0$ dla $x \in (0; \infty)$, wystarczy wykazać różnowartościowość funk-

cji $f(x)$ na zbiorze $(0;\infty)$. Zatem weźmy $x, y \in (0;\infty)$ i załóżmy, że $f(x) = f(y)$. Udowodnimy, że $x = y$. Istotnie tak jest, bo mamy następujące implikacje:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \tfrac{y}{\sqrt{y^2+2}} \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{x^2}{x^2+2} = \tfrac{y^2}{y^2+2} \\ &\Rightarrow \quad x^2(y^2+2) = y^2(x^2+2) \\ &\Rightarrow \quad x^2 = y^2 \\ &\Rightarrow \quad x = y \quad \text{lub} \quad x = -y \\ &\Rightarrow \quad x = y \quad (\text{bo } x, y \in (0;\infty)). \end{aligned}$$

To kończy dowód różnowartościowości funkcji f.

Teraz zauważmy, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} < \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = 1.$$

Stąd wynika, że $f(\mathbb{R}) \subseteq (-1;1)$. Uzasadnimy, że $f(\mathbb{R}) = (-1;1)$. W tym celu wykażemy, że dla $y \in (-1;1)$ istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = y$. Jeśli $y \in (-1;1)$, to z równania $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ (po uwzględnieniu, że x i y muszą mieć zgodne znaki) wynika, że $x = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{1-y^2}}$ (i dla tego x mamy $f(x) = y$). Zatem $f(\mathbb{R}) = (-1;1)$. Jednocześnie mamy $f^{-1}(y) = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{1-y^2}}$ dla $y \in (-1;1)$.

30. Niech $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie funkcją taką, że $f(n) = n-3$ dla $n \geqslant 100$ i $f(f(n+5))$, gdy $n < 100$. Stąd widać, że:

$$\begin{aligned} f(101) &= 101 - 3 = 98, \\ f(100) &= 100 - 3 = 97, \\ f(99) &= f(f(99+5)) = f(f(104)) = f(101) = 98, \\ f(98) &= f(f(98+5)) = f(f(103)) = f(100) = 97, \\ f(97) &= f(f(97+5)) = f(f(102)) = f(99) = 98, \\ f(96) &= f(f(96+5)) = f(f(101)) = f(98) = 97. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Korzystając teraz z „odwróconej" indukcji udowodnimy, że

$$f(n) = 97 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$$

dla każdej liczby całkowitej $n \leqslant 100$. Z równości (9.1) widać, że $f(n) = 97 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$, gdy $n = 100, 99, 98, 97$ i 96. Niech teraz $n \leqslant 96$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Załóżmy też, że

$$f(k) = 97 + \frac{1+(-1)^{k-1}}{2} \quad \text{dla} \quad k = n, n+1, \ldots, 99, 100. \tag{8.9}$$

Udowodnimy, że

$$f(n-1) = 97 + \frac{1+(-1)^{(n-1)-1}}{2}.$$

Rozróżniamy dwa przypadki w zależności od parzystości liczby n. Jeśli n jest liczbą parzystą, to wobec definicji funkcji f i wobec równości (8.9) dla $k = n+4$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(n-1) &= f(f(n+4)) = f(f(n+4)) \\ &= f\left(97 + \tfrac{1+(-1)^{(n+4)-1}}{2}\right) \\ &= f\left(97 + \tfrac{1+(-1)}{2}\right) \\ &= f(97) = 98 = 97 + \tfrac{1+(-1)^{(n-1)-1}}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie, jeśli n jest liczbą nieparzystą, to

$$\begin{aligned} f(n-1) &= f(f(n+4)) = f(f(n+4)) \\ &= f\left(97 + \tfrac{1+(-1)^{(n+4)-1}}{2}\right) \\ &= f\left(97 + \tfrac{1+1)}{2}\right) \\ &= f(98) = 97 = 97 + \tfrac{1+(-1)^{(n-1)-1}}{2}. \end{aligned}$$

Z powyższego i z twierdzenia o indukcji wynika, że $f(n) = 97 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ dla każdej liczby całkowitej $n \leqslant 99$. Stąd też wnioskujemy, że

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{dla } n \geqslant 100, \\ 97 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} & \text{dla } n < 100. \end{cases}$$

Można też zauważyć, że

$$f(n) = \max\left\{n-3,\ 97 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right\}$$

dla każdej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$. Stąd też widać, że wartością funkcji f jest każda liczba całkowita większa od 96, czyli mamy $f(\mathbb{Z}) = \{97, 98, 99, \ldots\}$.

31. Z faktu, że istnieje funkcja odwrotna $f{-}1$ do funkcji $f\colon A \to A$ (gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$) wynika, że funkcja f jest bijekcją. Stąd zaś wynika, ze gdyby zero należało do zbioru A, to istniałby element $x \in A$ taki, że $f(x) = 0$. Taki element x nie może istnieć, bo dla niego nie mogłaby być spełniona równość $f^{-1}(x) = 1/f(x)$. Teraz, ponieważ $0 \notin A$, więc $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in A$, równość $f^{-1}(x) = 1/f(x)$ jest równoważna równości $f(x) = 1/f^{-1}(x)$. Łatwo teraz zauważyć, że dla każdego $x \in A$ mamy

$$f^2(x) = \frac{1}{f^{-1}(f(x))} = \frac{1}{x}$$

i dlatego

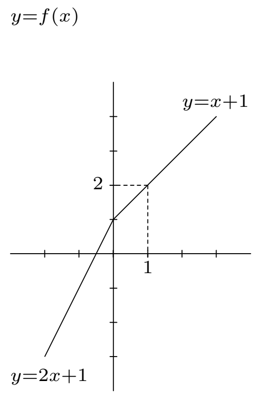
$$f^4(x) = f^2(f^2(x)) = f^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x.$$

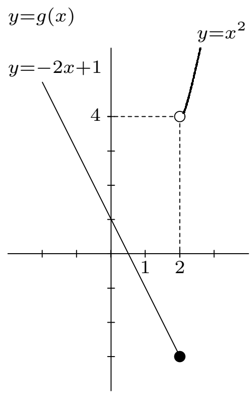
32. a) Wyznaczając funkcję $f \circ g$, bierzemy pod uwagę te przedziały, w których funkcja g (z uwagi na definicję funkcji f) ma wartości ujemne oraz te w których ma ona wartości nieujemne (zob. poniższy rys.). Rozróżniamy trzy przypadki:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty; \tfrac{1}{2}\rangle &\Rightarrow g(x) = -2x+1 \geqslant 0 \\ &\Rightarrow f(g(x)) = f(-2x+1) = (-2x+1)+1 = -2x+2, \\ x \in (\tfrac{1}{2}; 2\rangle &\Rightarrow g(x) = -2x+1 < 0 \\ &\Rightarrow f(g(x)) = f(-2x+1) = 2(-2x+1)+1 = -4x+3, \\ x \in (2; \infty) &\Rightarrow g(x) = x^2 \geqslant 0 \\ &\Rightarrow f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1. \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy wyznaczając złożenie $g \circ f$. Tym razem też rozważamy trzy przypadki:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty; 0\rangle &\Rightarrow f(x) = 2x+1 \leqslant 2 \\ &\Rightarrow g(f(x)) = g(2x+1) = -2(2x+1)+1 = -4x-1, \\ x \in (0; 1\rangle &\Rightarrow f(x) = x+1 \leqslant 2 \\ &\Rightarrow g(f(x)) = g(x+1) = -2(x+1)+1 = -2x-1, \\ x \in (1; \infty) &\Rightarrow f(x) = x+1 > 2 \\ &\Rightarrow g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2. \end{aligned}$$





b) $(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x^2+y) = (x^2+y, 2(x^2+y)^2)$ oraz $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x, 2x^2) = x^2 + 2x^2 = 3x^2$.

c) $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(x-1, x+y) = ((x-1)^2, 2(x+y))$ oraz $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^2, 2y) = (x^2 - 1, x^2 + 2y)$.

33. a) $f^{-1}(x, y) = ((3x+y)/5, (2x-y)/5)$; b) $f^{-1}(x, y) = ((-5x+2y+3)/3, (4x-y-6)/3)$.

34. Niektóre części tego zadania są powtórzeniami tego, co przedstawiliśmy w tw. 4.5.2 i 4.5.3. Tu przedstawiamy inne lub zmodyfikowane uzasadnienia. a) Weźmy dwa elementy y_1 i y_2 ze zbioru B. Dla dowodu, że g jest iniekcją wystarczy wykazać, że z równości $g(y_1) = g(y_2)$ wynika równość $y_1 = y_2$. Ponieważ f jest surjekcją, więc istnieją elementy x_1 i x_2 w zbiorze A takie, że $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$. Teraz zauważmy, że mamy implikacje:

$$\begin{aligned} g(y_1) = g(y_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{(bo } g \circ f \text{ jest iniekcją)} \\ &\Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2. \end{aligned}$$

To kończy dowód faktu, że g jest iniekcją.

b) Weźmy dowolny element $y \in B$. Dla dowodu, że f jest surjekcją wystarczy wykazać, że $y = f(x)$ dla pewnego $x \in A$. Zauważmy, że istotnie mamy

$$\begin{aligned} y \in B &\Rightarrow g(y) \in C \\ &\Rightarrow \exists_{x\in A}\, (g \circ f)(x) = g(y) \quad \text{(bo } g \circ f \text{ jest surjekcją)} \\ &\Rightarrow \exists_{x\in A}\, g(f(x)) = g(y) \\ &\Rightarrow \exists_{x\in A}\, f(x) = y \quad \text{(bo } g \text{ jest iniekcją).} \end{aligned}$$

c) Weźmy dowolne dwa elementy x_1 i x_2 ze zbioru A takie, że $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Dla dowodu, że $g \circ f$ jest iniekcją wystarczy wykazać, że $x_1 = x_2$. Faktycznie mamy:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{(bo } g \text{ jest iniekcją)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{(bo } f \text{ jest iniekcją).} \end{aligned}$$

d) Niech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ i $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ będą funkcjami takimi, że $f(n) = n$ i $g(m) = |m|$. Zauważmy, że funkcja $g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją tożsamościową, bo

$$(g \circ f)(n) = g(f(n))g(n) = |n| = n$$

dla każdej liczby naturalnej n. Zatem funkcja $g \circ f$ jest też iniekcją. Jednakże funkcja g nie jest iniekcją, bo $g(m) = g(-m)$ dla każdej liczby całkowitej m.

e) Załóżmy, że funkcja $g \circ f$ jest iniekcją. Udowodnimy, że funkcja f jest iniekcją. Przypuśćmy, że jest inaczej. Wtedy istnieją elementy $x_1, x_2 \in A$ takie, że $f(x_1) = f(x_2)$ i $x_1 \neq x_2$. Wtedy też prawdziwe są następujące implikacje:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow \quad (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow \quad g \circ f \quad \text{nie jest iniekcją, bo } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

f) Załóżmy, że funkcje f i g są surjekcjami. Weźmy dowolny element z ze zbioru C. Dla dowodu, że funkcja $g \circ f$ jest surjekcją wystarczy uzasadnić, $z = (g \circ f)(x)$ dla pewnego x ze zbioru A. To zaś jest konsekwencją następujących implikacji:

$$\begin{aligned} z \in C \quad &\Rightarrow \quad \exists_{y \in B} z = g(y) \quad \text{(bo } g \text{ jest surjekcją)} \\ &\Rightarrow \quad \exists_{x \in A} y = f(x) \quad \text{(bo } f \text{ jest surjekcją)} \\ &\Rightarrow \quad \exists_{x \in A} z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x). \end{aligned}$$

g) Weźmy pod uwagę funkcje f i g z części d), czyli $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ i $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = n$ i $g(m) = |m|$. Funkcja $g \circ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – jak to już pokazaliśmy – jest funkcją tożsamościową, więc jest surjekcją. Jednakże funkcja g nie jest surjekcją, bo $g(\mathbb{Z}) = \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.
h) Załóżmy, że funkcja $g \circ f$ jest surjekcją i przypuśćmy, że g nie jest surjekcją. Wtedy $(g \circ f)(A) = C$ i $g(B) \subsetneq C$. Jednakże, ponieważ $f(A) \subseteq B$ i $g(f(A)) \subseteq g(B)$, więc mamy

$$C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B) \subsetneq C,$$

co jest sprzeczne. Zatem także funkcja g jest surjekcją.

35. Jeśli równość $h \circ f = h$ jest prawdziwa dla każdej funkcji $h \colon X \to X$, to w szczególności dla funkcji $h = 1_X$ jest $f = 1_X \circ f = 1_X$. Zatem funkcja f musi być funkcją tożsamościową na zbiorze X.

36. Jeśli funkcja $f \colon X \to Y$ jest bijekcją, to istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} \colon Y \to X$, czyli funkcja taka, że

$$f^{-1} \circ f = 1_X \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = 1_Y.$$

Z równości $f^{-1} \circ f = 1_X$ i z faktu, że funkcja 1_X jest surjekcją wynika, że funkcja f^{-1} jest surjekcją (zob. tw. 4.5.3 oraz część h) ćwiczenia 34). Podobnie z równości $f \circ f^{-1} = 1_Y$ i z faktu, że funkcja 1_Y jest iniekcją wynika, że funkcja f^{-1} jest iniekcją (zob. tw. 4.5.3 oraz część e) ćwiczenia 34). Stąd wynika, że funkcja $f^{-1} \colon Y \to X$ jest bijekcją.

37. a) Ponieważ przeciwdziedzina $\mathbb{R}$ funkcji f nie jest równa dziedzinie $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcji g, więc nie jest spełniony warunek definicji 4.5.1 i dlatego powinniśmy powiedzieć, że złożenie $g \circ f$ nie istnieje. b) Ponieważ $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, więc $g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2+1}$ istnieje dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. c) Niech $f \colon X \to Y$ i $g \colon \overline{Y} \to Z$ będą funkcjami takimi, że $f(X) \subseteq D_g = Y$. Wtedy $f(x) \in D_g$ i dlatego istnieje $g(f(x))$ dla każdego $x \in X$. Zatem, jeśli $f(X) \subseteq D_g = Y$, to możemy przyjąć, że $g \circ f \colon X \to Z$ jest funkcją taką, że $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dla każdego $x \in X$.

38. Jeśli funkcja $f \colon A \to B$ jest różnowartościowa, to wobec twierdzenia 4.7.3 mamy $f^{-1}(f(X)) = X$ dla każdego podzbioru X zbioru A. Twierdzimy, że implikacja odwrotna też jest prawdziwa. Zatem załóżmy, że $f^{-1}(f(X)) = X$ dla każdego podzbioru X zbioru A i przypuśćmy, że f nie jest różnowartościowa. Wtedy istnieją elementy x_1 i x_2 w zbiorze A takie, że $x_1 \neq x_2$ i $f(x_1) = f(x_2)$.

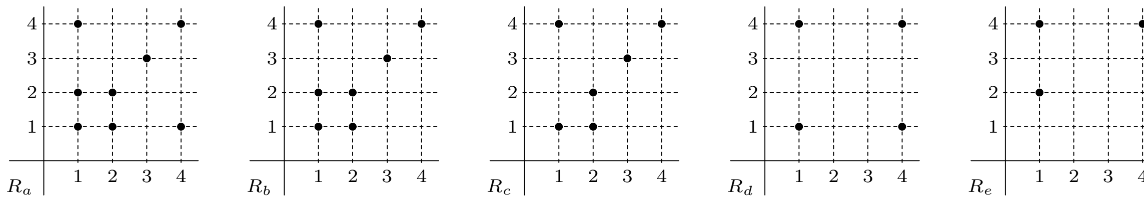
Teraz zauważmy, że dla jednoelementowego zbioru $X = \{x_1\}$ nie mamy równości $f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$, bo do zbioru $f^{-1}(f(\{x_1\}))$ należą oba elementy x_1 i x_2. Otrzymana sprzeczność kończy dowód implikacji i całej równoważności.

39. Wobec twierdzenia 4.7.3 jest oczywiste, że jeśli funkcja $f\colon A \to B$ jest surjekcją, to $f(f^{-1}(Y)) = Y$ dla każdego podzbioru Y zbioru B. Załóżmy teraz, że $f(f^{-1}(Y)) = Y$ dla każdego podzbioru Y zbioru B i przypuśćmy, że f nie jest surjekcją. Wtedy $B - f(A) \neq \emptyset$ i dla $y_0 \in B - f(A)$ mamy $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$ i $f(f^{-1}(\{y_0\})) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{y_0\}$, co przeczy założeniu, że $f(f^{-1}(Y)) = Y$ dla każdego podzbioru Y zbioru B. Otrzymana sprzeczność kończy dowód implikacji i całej równoważności.

40. 1. Tak; 2. Tak; 3. Nie; 4. Tak; 5. Nie; 6. Nie.

8.5. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Relacje

1. Każda relacja w zbiorze X jest podzbiorem zbioru $X \times X$. Ponieważ zbiór $X \times X$ ma 100 elementów, więc ma on 2^{100} różnych podzbiorów. Zatem w zbiorze X mamy 2^{100} różnych relacji dwuargumentowych.
2. Ilustracje przykładowych relacji do poszczególnych części zadania przedstawiono na rys. 9.6.



Rysunek 8.7. Ilustracje relacji R_a, R_b, R_c, R_d i R_e

a) $R_a = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$,
R_a jest zwrotna, bo $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R_a$,
R_a jest symetryczna, bo jednocześnie $(1,2),(2,1) \in R_a$ i $(1,4),(4,1) \in R_a$,
R_a nie jest przechodnia, bo np. $(2,1),(1,4) \in R_a$, ale $(2,4) \notin R_a$.

b) $R_b = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,
R_b jest zwrotna, bo $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R_b$,
R_b nie jest symetryczna, bo jednocześnie $(1,4) \in R_b$ i $(4,1) \notin R_b$,
R_b nie jest przechodnia, bo np. $(2,1),(1,4) \in R_b$, ale $(2,4) \notin R_b$.

c) $R_c = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,
R_c jest zwrotna, bo $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R_c$,
R_c jest antysymetryczna, bo spośród par (x,y) i (y,x), gdzie $x \neq y$, co najwyżej jedna z nich należy do zbioru R_c,
R_c nie jest przechodnia, bo np. $(2,1),(1,4) \in R_b$, ale $(2,4) \notin R_b$.

d) $R_d = \{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}$,
R_d jest symetryczna, bo jednocześnie $(1,4),(4,1) \in R_d$,
R_d jest przechodnia, bo spełniony jest warunek „ jeśli $(x,y),(y,z) \in R_d$, to $(x,z) \in R_d$: $(1,1),(1,4) \in R_d$ i $(1,4) \in R_d$, $(1,4),(4,1) \in R_d$ i $(1,1) \in R_d$, $(1,4),(4,4) \in R_d$ i $(1,4) \in R_d$, $(4,1),(1,1) \in R_d$ i $(4,1) \in R_d$, $(4,1),(1,4) \in R_d$ i $(4,4) \in R_d$ i $(4,4),(4,1) \in R_d$ i $(4,1) \in R_d$,
R_d nie jest antysymetryczna, bo $(1,4),(4,1) \in R_d$ i $1 \neq 4$,

R_d nie jest zwrotna, bo np. $(2,2) \notin R_d$.
e) $R_e = \{(1,2),(1,4),(4,4)\}$,
R_e jest przechodnia, bo $(1,4),(4,4) \in R_e$ i $(1,4) \in R_e$,
R_e nie jest zwrotna, bo np. $(1,1) \notin R_e$,
R_e nie jest symetryczna, bo np. $(1,2) \in R_e$, ale $(2,1) \notin R_e$.

3. a) S nie jest zwrotna, bo np. $(2,2) \notin S$,
S nie jest przechodnia, bo $(2,1),(1,2) \in S$, ale $(2,2) \notin S$,
S nie jest symetryczna, bo np. $(3,4) \in S$ i $(4,3) \notin S$,
S nie jest antysymetryczna, bo $(1,2),(2,1) \in S$ i $1 \neq 2$.

b) S nie jest zwrotna, bo np. $(2,2) \notin S$,
S nie jest przechodnia, bo np. $(2,4),(4,16) \in S$, ale $(2,16) \notin S$,
S nie jest symetryczna, bo np. $(2,4) \in S$ i $(4,2) \notin S$,
S jest antysymetryczna, bo jeśli $(x,y) \in S$ i $(y,x) \in S$, to $y = x^2$ i $x = y^2$ i dlatego $x = y = 0$ lub $x = y = 1$.

c) S jest zwrotna, bo $x = x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S jest przechodnia, bo jeśli $x = y$ i $y = z$, to $x = z$,
S jest symetryczna, bo jeśli $x = y$, to $y = x$,
S jest antysymetryczna, bo jeśli $x = y$ i $y = x$, to $x = y$.

d) S jest zwrotna, bo $5|x - x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S jest przechodnia, bo jeśli $5|x-y$ i $5|y-z$, to łatwo pokazuje się, że $5|x-z$,
S jest symetryczna, bo jeśli $5|x-y$, to także $5|y-x$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $5|6-1$ i $5|1-6$, ale $6 \neq 1$.

e) S jest zwrotna, bo $2|x+x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{Z}$,
S jest przechodnia, bo jeśli $2|x+y$ i $2|y+z$, to łatwo pokazuje się, że $2|x+z$,
S jest symetryczna, bo jeśli $2|x+y$, to także $2|y+x$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $2|3+1$ i $2|1+3$, ale $3 \neq 1$.

f) S jest zwrotna, bo $xx \geqslant 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{Z}$,
S nie jest przechodnia, bo np. $1 \cdot 0 \geqslant 0$ i $0 \cdot (-1) \geqslant 0$, ale $1 \cdot (-1) \ngeqslant 0$,
S jest symetryczna, bo jeśli $xy \geqslant 0$, to także $yx \geqslant 0$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $2 \cdot 3 \geqslant 0$ i $3 \cdot 2 \geqslant 0$, ale $3 \neq 2$.

g) S jest zwrotna, bo $x - x \leqslant 2$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S nie jest przechodnia, bo np. $5 - 3 \leqslant 2$ i $3 - 1 \leqslant 2$, ale $5 - 1 \nleqslant 2$,
S nie jest symetryczna, bo np. $5 - 8 \leqslant 2$, ale $8 - 5 \nleqslant 2$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $3 - 2 \leqslant 2$ i $2 - 3 \leqslant 2$, ale $3 \neq 2$.

h) S jest zwrotna, bo $x - x = y - y$ dla każdej pary $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$,
S jest przechodnia, bo jeśli dla par $(x,y),(z,t),(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ jest $((x,y),(z,t)) \in S$ i $((z,t),(u,v)) \in S$, to $x - z = y - t$ i $z - u = t - v$, to $x - u = y - v$, czyli $((x,y),(u,v)) \in S$,
S jest symetryczna, bo jeśli dla par $(x,y),(z,t) \in \mathbb{Z}^2$ jest $x - z = y - t$, to także $y - t = x - z$, co oznacza, że z przynależności $((x,y),(z,t)) \in S$ wynika przynależność $((z,t),(x,y)) \in S$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $((5,3),(4,2)) \in S$ (bo $5 - 4 = 3 - 2$) i $((4,2),(5,3)) \in S$ (bo $4 - 5 = 2 - 3$), ale $(5,3) \neq (4,2)$.

i) S nie jest zwrotna (jest antyzwrotna), bo $x = x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S nie jest przechodnia, bo np. $1 \neq 2$ i $2 \neq 1$, ale nie jest prawdą, że $1 \neq 1$,
S jest symetryczna, bo jeśli $x \neq y$, to $y \neq x$,

S nie jest antysymetryczna, bo np. $1 \neq 2$ i $2 \neq 1$ i nie jest prawdą, że $1 = 2$.

j) S jest zwrotna, bo $x + y \leqslant x + y$ dla każdej pary $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

S jest przechodnia, bo jeśli dla par $(x, y), (z, t), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ jest $((x, y), (z, t)) \in S$ i $((z, t), (u, v)) \in S$, to $x + y \leqslant z + t$ i $z + t \leqslant u + v$, to $x + y \leqslant u + v$, więc $((x, y), (u, v)) \in S$,

S nie jest symetryczna, bo np. $((2, 1), (5, 7) \in S$ (bo $2 + 1 \leqslant 5 + 7$), ale $((5, 7), (2, 1)) \notin S$ (bo $5 + 7 \nleqslant 2 + 1$),

S nie jest antysymetryczna, bo np. $((2, 1), (7, -4)) \in S$ (bo $2+1 \leqslant 7+(-4)$) i $((7, -4), (2, 1)) \in S$ (bo $7 + (-4) \leqslant 2 + 1$), ale $(2, 1) \neq (7, -4)$.

k) S jest zwrotna, bo $X \subseteq X$ dla każdego zbioru $X \in \mathcal{P}(B)$,

S jest przechodnia, bo jeśli $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$, to $X \subseteq Z$ dla $X, Y, Z \in \mathcal{P}(B)$,

S nie jest symetryczna, bo np. $\emptyset \subseteq B$, ale $B \nsubseteq \emptyset$,

S jest antysymetryczna, bo jeśli $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, to $X = Y$ dla $X, Y \in \mathcal{P}(B)$.

l) S nie jest zwrotna, bo nie jest możliwe, że $X \subsetneq X$ dla $X \in \mathcal{P}(B)$,

S jest przechodnia, bo jeśli $X \subsetneq Y$ i $Y \subsetneq Z$, to $X \subsetneq Z$ dla $X, Y, Z \in \mathcal{P}(B)$,

S nie jest symetryczna, bo np. $\emptyset \subsetneq B$, ale nie jest prawdą, że $B \subsetneq \emptyset$,

S jest antysymetryczna, bo nie istnieją zbiory $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ takie, że $X \subsetneq Y$ i $Y \subsetneq X$.

m) S nie jest zwrotna, bo jeśli $X \in \mathcal{P}(B)$ i $X \neq \emptyset$, to nie jest prawdą, że $X \cap X = \emptyset$,

S nie jest przechodnia, bo jeśli $x, y \in B$ i $x \neq y$, to dla zbiorów $X = \{x\} = Z$ i $Y = \{y\}$ mamy $X \cap Y = \emptyset$ i $Y \cap Z = \emptyset$, ale $X \cap Z \neq \emptyset$,

S jest symetryczna, bo jeśli $X \cap Y = \emptyset$, to $Y \cap X = \emptyset$,

S nie jest antysymetryczna, bo jeśli $x, y \in B$ i $x \neq y$, to dla zbiorów $X = \{x\}$ i $Y = \{y\}$ mamy $X \cap Y = \emptyset$ i $Y \cap X = \emptyset$, ale $X \neq Y$.

4. a) i b) Niech R i S będą relacjami zwrotnymi w zbiorze X. Wtedy $(x, x) \in R$ i $(x, x) \in S$ dla każdego $x \in X$. Zatem $(x, x) \in R \cup S$ i $(x, x) \in R \cap S$ dla każdego $x \in X$. To oznacza, że każda z relacji $R \cup S$ i $R \cap S$ jest zwrotne na zbiorze X.

c) Jeśli R i S są relacjami zwrotnymi w zbiorze X, to $(x, x) = (x_1, x_2) \in S$ oraz $(x, x) = (x_2, x_3) \in R$ dla każdego $x \in X$. Wtedy też $(x, x) = (x_1, x_3) \in R \circ S$ i to dowodzi, że $R \circ S$ jest relacją zwrotną w zbiorze X.

d) Jeśli R jest relacją zwrotną w zbiorze X, to $(x, x) = (x_1, x_2) \in R$ dla każdego $x \in X$. Wtedy też $(x, x) = (x_2, x_1) \in R^{-1}$ i to dowodzi, że R^{-1} jest relacją zwrotną w zbiorze X.

e) Relacje $R = \{(1, 2)\}$ i $S = \{(2, 1)\}$ są przechodnie, ale ich suma $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ nie jest przechodnia, bo $(1, 2), (2, 1) \in R \cup S$ i $(1, 1) \notin R \cup S$. To pokazuje, że suma relacji przechodnich nie musi być relacją przechodnią.

f) Pokażemy, że jeśli relacje R i S są przechodnie, to także relacja $R \cap S$ jest przechodnia. Załóżmy, że $(x, y), (y, z) \in R \cap S$. Wtedy $(x, y), (y, z) \in R$ i teraz z przechodniości relacji R wynika, że $(x, z) \in R$. Podobnie Wtedy $(x, y), (y, z) \in S$ i teraz z przechodniości relacji S wynika, że $(x, z) \in S$. Zatem $(x, z) \in R \cap S$ i relacja $R \cap S$ jest przechodnia.

g) Relacje $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ i $S = \{(2, 3), (4, 5)\}$ są przechodnie. Natomiast ich złożenie $R \circ S = \{(1, 3), (3, 5)\}$ nie jest relacją przechodnią, bo $(1, 3), (3, 5) \in R \circ S$, ale $(1, 5) \notin R \circ S$. To pokazuje, że złożenie relacji przechodnich nie musi być relacją przechodnią.

h) Uzasadnimy, że jeśli relacja R jest przechodnia, to także relacja odwrotna R^{-1} jest przechodnia. Załóżmy, że $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$. Wtedy wobec definicji relacji odwrotnej $(y, x), (z, y) \in R$. Stąd i z przechodniości relacji R wnioskujemy, że $(z, x) \in R$ i wtedy też $(x, y) \in R^{-1}$. To dowodzi, że relacja R^{-1} jest przechodnia.

i) Jeśli R i S są symetryczne, to także relacja $R \cup S$ jest symetryczna. Istotnie, jeśli $(x, y) \in R \cup S$, to $(x, y) \in R$ lub $(x, y) \in S$. Wtedy wobec symetryczności relacji R i S mamy $(y, x) \in R$ lub $(y, x) \in S$, więc także $(y, x) \in R \cup S$ i to dowodzi symetryczności relacji $R \cup S$.

j) Udowodnimy teraz, że jeśli relacje R i S są symetryczne, to relacja $R \cap S$ też jest symetryczna. W tym celu załóżmy, że $(x, y) \in R \cap S$. Wtedy $(x, y) \in R$ i $(x, y) \in S$. Stąd i z symetryczności relacji R i S wynika, że $(y, x) \in R$ i $(y, x) \in S$, więc także $(y, x) \in R \cap S$. To dowodzi symetryczności relacji $R \cap S$.

k) Z symetryczności relacji R i S nie wynika symetryczność relacji $R \circ S$. Przykładowo relacje $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ i $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ są symetryczne, ale ich złożenie $R \circ S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ nie jest relacją symetryczną.

l) Uzasadnimy, że jeśli relacja R jest symetryczna, to także relacja R^{-1} jest symetryczna. Załóżmy, że $(x, y) \in R^{-1}$. Wtedy wobec definicji relacji odwrotnej mamy $(y, x) \in R$. Teraz $(x, y) \in R$ z symetryczności relacji R. I dlatego wobec definicji relacji odwrotnej mamy $(y, x) \in R^{-1}$. To dowodzi, że relacja R^{-1} jest symetryczna.

m) Pokażemy, że jeśli relacje R i S są antysymetryczne, to relacja $R \cup S$ nie musi być antysymetryczna. Widać, że relacje $R = \{(1, 2)\}$ i $S = \{(2, 1)\}$ są antysymetryczne, ale ich suma $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ nie jest antysymetryczna, bo $(1, 2), (2, 1) \in R \cup S$ i $1 \neq 2$.

n) Uzasadnimy, że jeśli relacje R i S są antysymetryczne, to także relacja $R \cap S$ jest antysymetryczna. W tym celu załóżmy, że $(x, y), (y, x) \in R \cap S$. Wtedy $(x, y), (y, x) \in R$ (i $(x, y), (y, x) \in S$) i $x = y$, bo R jest antysymetryczna. To dowodzi, że relacja $R \cap S$ jest antysymetryczna.

o) Jeśli relacje R i S są antysymetryczne, to relacja $R \circ S$ nie musi być antysymetryczna. Przykładowo, relacje $S = \{(1, 1), (2, 1)\}$ i $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$ w zbiorze $\{1, 2\}$ są antysymetryczne, ale ich złożenie $R \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ nie jest relacją antysymetryczną.

p) Uzasadnimy, że jeśli relacja R jest antysymetryczna, to także relacja R^{-1} jest antysymetryczna. W tym celu załóżmy, że $(x, y), (y, x) \in R^{-1}$. Uzasadnimy, że $x = y$. Z założenia $(x, y), (y, x) \in R^{-1}$ wynika, że $(y, x), (x, y) \in R$ i stąd wnioskujemy, że $y = x$, bo R jest antysymetryczna.

5. a) Relacja R nie jest zwrotna, bo $(2, 2) \notin R$, więc nie jest ona relacją równoważności. b) Relacja R nie jest symetryczna, bo $(2, 3) \in R$ i $(3, 2) \notin R$, więc nie jest ona relacją równoważności.

6. a) Niech $w(x)$ oznacza wzrost osoby $x \in L$. Ponieważ $w(x) = w(x)$ dla każdego $x \in L$, więc relacja R_1 jest zwrotna. Jeśli $x, y \in L$, to z równości $w(x) = w(y)$ wnioskujemy o równości $w(y) = w(x)$ i o symetryczności relacji R_1. Jeśli $x, y, z \in L$, to z równości $w(x) = w(y)$ i $w(y) = w(z)$ wnioskujemy o równości $w(x) = w(z)$ i to dowodzi przechodniości relacji R_1. Z tego wynika, że relacja R_1 jest relacją równoważności w zbiorze L.

b) Niech $n(x)$ oznacza nazwisko osoby $x \in L$. Ponieważ $n(x) = n(x)$ dla każdego $x \in L$, więc relacja R_2 jest zwrotna. Jeśli $x, y \in L$, to z równości $n(x) = n(y)$ wnioskujemy o równości $n(y) = n(x)$ i o symetryczności relacji R_2. Jeśli $x, y, z \in L$, to z równości $n(x) = n(y)$ i $n(y) = n(z)$ wnioskujemy o równości $n(x) = n(z)$ i to dowodzi przechodniości relacji R_2. To dowodzi, że relacja R_2 jest relacją równoważności w zbiorze L.

c) Niech $r(x)$ oznacza zbiór rodziców osoby $x \in L$. Przyjmujemy, że $r(x)$ jest dwuelementowym podzbiorem zbioru L. (Myślimy tu o tradycyjnie pojmowanych rodzicach biologicznych, nie uwzględniamy najnowszych osiągnięć nauki, nie myślimy o Bogu, ani o Adamie lub Ewie. Pewnie powinniśmy też założyć, że $x \notin r(x)$, czyli powinniśmy wykluczyć klonowanie i samorództwo, a zapewne powinniśmy też wykluczyć pare innych rzeczy związanych z relacjami między pokoleniami, uwzględnić prawo, etykę itd.) Ponieważ $r(x) = r(x)$ i $r(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in L$, więc $r(x) \cap r(x) \neq \emptyset$ i relacja R_3 jest zwrotna. Jeśli $x, y \in L$, to z nierówności $r(x) \cap r(y) \neq \emptyset$ wnioskujemy o nierówności $r(y) \cap r(x) \neq \emptyset$ i o symetryczności relacji R_3. Jeśli $x, y, z \in L$, to z nierówności $r(x) \cap r(y) \neq \emptyset$ i $r(y) \cap r(z) \neq \emptyset$ nie wynika nierówność $r(x) \cap r(z) \neq \emptyset$. Przykładowo, może być tak, że $r(x) = \{A, B\}$, $r(y) = \{B, C\}$, $r(z) = \{C, D\}$, gdzie A, B, C, D są różnymi elementami elementami zbioru L. W takim przypadku jest $r(x) \cap r(y) = \{B\} \neq \emptyset$ i $r(y) \cap r(z) = \{C\} \neq \emptyset$, ale $r(x) \cap r(z) = \emptyset$. Zatem relacja R_3 nie jest relacją równoważności w zbiorze L.

7. Przyjmujemy, że dla liczb $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ mamy $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a/b \in \mathbb{Q}$. Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{R} - \{0\}$, bo:
1. $a \sim a$, bo $a/a = 1 \in \mathbb{Q}$ dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,
2. jeśli $a \sim b$, to $a/b \in \mathbb{Q}$, więc $b/a \in \mathbb{Q}$ i $b \sim a$,
3. jeśli $a \sim b$ i $b \sim c$, to $a/b \in \mathbb{Q}$ i $b/c \in \mathbb{Q}$, więc $a/c = a/b \cdot b/c \in \mathbb{Q}$ i $a \sim c$.

Teraz zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} [\,1\,]_\sim &= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \colon x \sim 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \colon x/1 \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \colon x \in \mathbb{Q}\} \\ &= \mathbb{Q} - \{0\}. \end{aligned}$$

Dla dowodu równości $\left[\sqrt{3}\right]_\sim = \left[\sqrt{12}\right]_\sim$ wystarczy wykazać, że $\left[\sqrt{3}\right]_\sim \cap \left[\sqrt{12}\right]_\sim \neq \emptyset$. Ponieważ $\sqrt{3} \in \left[\sqrt{3}\right]_\sim$, więc wystarczy wykazać, że $\sqrt{3} \in \left[\sqrt{12}\right]_\sim$. To zaś jest oczywiste, bo z faktu, że $\sqrt{12}/\sqrt{3} = 2 \in \mathbb{Q}$ wnioskujemy o równoważności $\sqrt{3} \sim \sqrt{12}$. Teraz z faktu, że $\sqrt{12} \in \left[\sqrt{12}\right]_\sim$ i z równoważności $\sqrt{3} \sim \sqrt{12}$ wynika, że $\sqrt{3} \in \left[\sqrt{12}\right]_\sim$. To kończy dowód równości $\left[\sqrt{3}\right]_\sim = \left[\sqrt{12}\right]_\sim$.

8. Przyjmujemy, że dla liczb $a, b \in \mathbb{R}$ mamy $a\,R\,b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b \in \mathbb{Q}$. Relacja R jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{R}$, bo:
1. $a\,R\,a$, bo $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$ dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$,
2. jeśli $a\,R\,b$, to $a - b \in \mathbb{Q}$, więc $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Q}$ i $b\,R\,a$,
3. jeśli $a\,R\,b$ i $b\,R\,c$, to $a - b \in \mathbb{Q}$ i $b - c \in \mathbb{Q}$, więc $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Q}$ i $a\,R\,c$.

Teraz dla klas abstrakcji mamy:

$$[0]_R = \{x \in \mathbb{R} \colon x\,R\,0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x - 0 \in \mathbb{Q}\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$$

oraz

$$\begin{aligned} [\pi]_R &= \{x \in \mathbb{R} \colon x\,R\,\pi\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x - \pi \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon x - \pi = q' \quad \text{dla pewnego } q' \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon x = q + \pi \quad \text{dla pewnego } q \in \mathbb{Q}\} \\ &= \mathbb{Q} + \pi \subsetneq \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

9. a) Pokażemy, że relacja $\sim$ w zbiorze $\mathbb{Z}$, gdzie dla liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ mamy $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2a + 3b$ jest podzielna przez 5, jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Z}$. Jest oczywiste, że relacja $\sim$ jest zwrotna, bo liczba $2a + 3a$ jest podzielna przez 5 (czyli jest $a \sim a$) dla każdej liczby $a \in \mathbb{Z}$. Odrobinę trudniej pokazuje się, że relacja $\sim$ jest symetryczna. Załóżmy, że dla liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ mamy $a \sim b$, czyli załóżmy, że $2a + 3b = 5k$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}$. Chcemy pokazać, że $b \sim a$, czyli chcemy pokazać, że liczba $2b + 3a$ jest podzielna przez 5. Najpierw pokażemy, że liczba $a - b$ jest podzielna przez 5. Niech l i r będą liczbami takimi, że $a - b = 5l + r$, gdzie $0 \leqslant r < 5$. Wtedy $5k = 2a + 3b = 2(5l + r + b) + 3b = 5(2l + b) + 2r$ i dlatego liczba $2r$, więc także i liczba r,

jest podzielna przez 5. Stąd wynika, że $r = 0$ i $a - b = 5l$. Teraz zauważmy, że mamy $2b + 3a = (2a + 3b) + (a - b) = 5k + 5l = 5(k + l)$, więc $b \sim a$. To dowodzi, że relacja $\sim$ jest symetryczna. W celu dowodu, że relacja $\sim$ jest przechodnia zakładamy, że dla liczb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mamy $a \sim b$ i $b \sim c$, czyli zakładamy, że $2a + 3b = 5k$ i $2b + 3c = 5l$ dla pewnych liczb $k, l \in \mathbb{Z}$. Wtedy $2a + 3c = (2a + 3b) + (2b + 3c) - 5b = 5(k + l - b)$ i $k + l - b \in \mathbb{Z}$. To dowodzi, że $a \sim c$ i kończy dowód faktu, że relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Z}$.

b) Z definicji klas abstrakcji mamy $[\,0\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5|2x + 3 \cdot 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5|2x\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5|x\} = 5\mathbb{Z}$ i $[\,1\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5|2x + 3 \cdot 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 2x + 3 = 5k \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z} + 1$. Podobnie pokazuje się, że $[\,2\,]_\sim = 5\mathbb{Z} + 2$, $[\,3\,]_\sim = 5\mathbb{Z} + 3$ i $[\,4\,]_\sim = 5\mathbb{Z} + 4$.

c) Ponieważ zbiory $[\,0\,]_\sim, [\,1\,]_\sim, \ldots, [\,4\,]_\sim$ tworzą rozbicie zbioru $\mathbb{Z}$, wiec mamy $\mathbb{Z}/{\sim} = \{[\,0\,]_\sim, [\,1\,]_\sim, \ldots, [\,4\,]_\sim\} = \{5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z} + 1, 5\mathbb{Z} + 2, 5\mathbb{Z} + 3, 5\mathbb{Z} + 4\}$.

10. a) Niech $\sim$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{Z}$ taką, że $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3a + 4b = 7n$ dla pewnej liczby całkowitej n. Wykażemy, że jest to relacja równoważności. Przede wszystkim jest to relacja zwrotna, bo mamy $a \sim a$ (bo $3a + 4a = 7a$) dla każdej liczby $a \in \mathbb{Z}$. Pokażemy teraz, że relacja $\sim$ jest symetryczna. Weźmy pod uwagę liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ takie, że $a \sim b$, czyli takie, że $3a + 4b = 7n$ dla pewnej liczby całkowitej n. Zauważmy, że liczba $a - b$ też musi być krotnością liczby 7. Gdyby było inaczej, to istniałyby liczby całkowite l i r takie, że $a - b = 7l + r$ i $r \in \{1, \ldots, 6\}$. Wtedy byłoby $7n = 3a + 4b = 3(7l + r + b) + 4b = 7(3l + b) + 3r$ i liczba $3r$ (więc także i liczba r) musiałaby być podzielna przez 7, co przeczy założeniu, że $r \in \{1, \ldots, 6\}$. Zatem załóżmy, że $a - b = 7l$ dla pewnej liczby całkowitej l. Teraz z równości $3a + 4b = 7n$ wynika, że mamy $3b + 4a = (3a + 4b) + (a - b) = 7n + 7l = 7(n + l)$, czyli wynika, że $b \sim a$. Uzasadnimy teraz, że relacja $\sim$ jest przechodnia. Weźmy pod uwagę liczby całkowite a, b i c takie, że $a \sim b$ i $b \sim c$. Wtedy istnieją liczby całkowite k i l takie, że $3a + 4b = 7k$ i $3b + 4c = 7l$. Obecnie zaobserwujmy, że mamy $3a + 4c = (3a + 4b) + (3b + 4c) - 7b = 7(k + l - b)$ i to dowodzi, że $a \sim c$ (bo $k + l - b \in \mathbb{Z}$). w ten sposób pokazaliśmy, że $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Z}$.

b) Z definicji klas abstrakcji mamy $[\,0\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7|3x + 4 \cdot 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7|3x\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7|x\} = 7\mathbb{Z}$ i podobnie $[\,1\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7|3x + 4 \cdot 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7|3x + 4\} = 7\mathbb{Z} + 1$.

11. a) Niech $\sim$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{Z}$ taką, że $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 3. Fakt, że $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Z}$ wynika z następujących trzech prostych obserwacji:

1. $a \sim a$, bo $3|a^2 - a^2 = 0$ dla każdej liczby $a \in \mathbb{Z}$,
2. jeśli $a \sim b$, to $3|a^2 - b^2$, więc $3|b^2 - a^2$ i dlatego $b \sim a$,
3. jeśli $a \sim b$ i $b \sim c$, to $3|a^2 - b^2$ i $3|b^2 - c^2$, więc także $3|a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2)$ i dlatego $a \sim c$.

b) Z definicji klas abstrakcji mamy $[\,0\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x^2 - 0^2\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x^2\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x\} = 3\mathbb{Z}$, $[\,1\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x^2 - 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|(x - 1)(x + 1)\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x - 1 \text{ lub } 3|x + 1\} = (3\mathbb{Z} + 1) \cup (3\mathbb{Z} + 2) = 3\mathbb{Z} + \{1, 2\} = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$ i $[\,2\,]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x^2 - 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3|x^2 - 1\} = 3\mathbb{Z} + \{1, 2\} = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$.

c) Z faktu, że klasy $[\,0\,]_\sim = 3\mathbb{Z}$ i $[\,1\,]_\sim = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$ tworzą rozbicie zbioru $\mathbb{Z}$ wynika, że $\mathbb{Z}/{\sim}\ \{[\,0\,]_\sim, [\,0\,]_\sim\} = \{3\mathbb{Z}, \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}\}$.

12. Weźmy pod uwagę zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{3, 4\}$. Niech R będzie relacją w zbiorze $\mathcal{P}(X)$, gdzie dla $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mamy $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cup Y =$

$B \cup Y$. Z następujących trzech obserwacji wynika, że R jest relacją równoważności w zbiorze $\mathcal{P}(X)$:

1. $(A, A) \in R$ dla $A \in \mathcal{P}(X)$, bo $A \cup Y = A \cup Y$,
2. jeśli $(A, B) \in R$, to $A \cup Y = B \cup Y$, więc $B \cup Y = A \cup Y$ i $(B, A) \in R$,
3. jeśli $(A, B), (B, C) \in R$, to $A \cup Y = B \cup Y$ i $B \cup Y = C \cup Y$, więc $A \cup Y = C \cup Y$ i dlatego $(A, C) \in R$.

b) Teraz zauważmy, że jeśli $A \in \mathcal{P}(X)$, to wobec definicji klasy abstrakcji mamy

$$[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon (A, B) \in R\} = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon A \cup Y = B \cup Y\}$$

i warto rozróżniać dwa przypadki: $A \subseteq Y$, $A - Y \neq \emptyset$. Jeśli $A \subseteq Y$, to $A \cup Y = Y$ i stąd

$$[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon Y = B \cup Y\} = \mathcal{P}(Y).$$

Jeśli natomiast $A - Y \neq \emptyset$, to $A \cup Y = (A - Y) \cup Y$ i tym razem

$$[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon (A - Y) \cup Y = B \cup Y\} = (A - Y) \cup \mathcal{P}(Y).$$

W szczególności widać teraz, że mamy

$$\begin{aligned} [\{1,3\}]_R &= (\{1,3\} - \{3,4\}) \cup \mathcal{P}(Y) \\ &= \{1\} \cup \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\} \\ &= \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}\}. \end{aligned}$$

c) Z tego co przedstawiliśmy w b) wynika, że mamy

$$\mathcal{P}(X)/R = \{C \cup \mathcal{P}(Y) \colon C \in \mathcal{P}(X - Y)\} = \{C \cup \mathcal{P}(Y) \colon C \in \mathcal{P}(\{1, 2, 5\})\}.$$

Zatem zbiór $\mathcal{P}(X)/R$ ma dokładnie tyle elementów co zbiór $\mathcal{P}(\{1, 2, 5\})$, czyli 8.

13. Niech $\sim$ będzie relacją w zbiorze $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, gdzie $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej.

a) Łatwo pokazuje się, że $\sim = \{(1,1), (1,4), (1,9), (2,2), (2,8), (3,3), (4,1), (4,4), (4,9), (5,5), (6,6), (7,7), (8,2), (8,8), (9,1), (9,4), (9,9)\}$.

b) $[1]_\sim = \{1,4,9\} = [4]_\sim = [9]_\sim$, $[2]_\sim = \{2,8\} = [8]_\sim$, $[3]_\sim = \{3\}$, $[5]_\sim = \{5\}$, $[6]_\sim = \{6\}$, $[7]_\sim = \{7\}$.

c) Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze A, bo zbiory $\{1,4,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$ tworzą rozbicie zbioru A. Równoważnie, korzystając z a) można wykazać, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

d) $A/{\sim} = \{\{1,4,9\}, \{2,8\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\}$.

14. Niech $\sim$ będzie relacją w zbiorze $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$ taką, że $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a/b = 2^m$ dla pewnej liczby całkowitej m.

a) Łatwo pokazuje się, że $\sim = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (3,6), (4,1), (4,2), (4,4), (5,5), (6,3), (6,6), (7,7)\}$.

b) $[1]_\sim = \{1,2,4\} = [2]_\sim = [4]_\sim$, $[3]_\sim = \{3,6\} = [6]_\sim$, $[5]_\sim = \{5\}$ i $[7]_\sim = \{7\}$.

c) Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze A, bo zbiory $\{1,2,4\}$, $\{3,6\}$, $\{5\}$, $\{7\}$ tworzą rozbicie zbioru A. Równoważnie, korzystając z a) można wykazać, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

d) $A/{\sim} = \{\{1,2,4\}, \{3,6\}, \{5\}, \{7\}\}$.

15. Niech funkcja $f \colon X \to Y$ będzie surjekcją. Udowodnimy, że dla rodziny $\mathcal{S} = \{f^{-1}(\{y\}) \colon y \in Y\}$ spełnione są warunki definicji 5.4.1.

1. Z faktu, że f jest surjekcją wynika, że $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ dla każdego $y \in Y$. Zatem $\mathcal{S}$ jest rodziną niepustych podzbiorów zbioru X.

2. Teraz zauważmy, że $\mathcal{S}$ jest rodziną zbiorów rozłącznych. W tym celu wystarczy wykazać, że jeśli dla pewnych elementów $y, y' \in Y$ jest $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) \neq \emptyset$, to $y = y'$. Załóżmy, że $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$. Wtedy $x \in f^{-1}(\{y\})$ i $x \in f^{-1}(\{y'\})$, więc $f(x) = y$ i $f(x') = y'$ i dlatego mamy $y = y'$.

3. Ponieważ jest oczywiste, że $\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$, więc pozostaje nam pokazać, że $X \subseteq \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})$. To też jest oczywiste, bo jeśli $x \in X$, to $f(x) \in Y$ i dlatego $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})$.

Rodzina $\mathcal{S}$ definiuje w zbiorze X relację $\sim_{\mathcal{S}}$, gdzie dla $x, x' \in X$ mamy $x \sim_{\mathcal{S}} x'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x, x' \in f^{-1}(\{y\})$ dla pewnego $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{S}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = f(x')$. Tak jak w przykładzie 5.4.8 pokazuje się, że relację $\sim_{\mathcal{S}}$ jest relacją równoważności w zbiorze X określoną przez rozbicie $\mathcal{S}$. Widać też, że dla każdego $x \in X$ mamy $[x]_{\sim_{\mathcal{S}}} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

16. Niech $\approx$ będzie relacją W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, gdzie dla funkcji $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mamy $f \approx g$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{n \in \mathbb{N} \colon f(n) \neq g(n)\}$ jest skończony, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $f(n) = g(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$. Udowodnimy, że $\approx$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wynika to z następujących trzech obserwacji:

1. $f \approx f$, bo $f(n) = f(n)$ dla każdej liczby $n \geqslant n_0 = 0$.

2. Załóżmy teraz, że $f \approx g$. Zatem istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $f(n) = g(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$. Wtedy też $g(n) = f(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ i dlatego $g \approx f$.

3. Niech teraz $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą takie, że $f \approx g$ i $g \approx h$. Wtedy istnieją liczby naturalne n_0 i m_0 takie, że $f(n) = g(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ i $g(n) = h(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant m_0$. Wtedy $f(n) = h(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ i to dowodzi, że $f \approx h$.

17. Przedstawimy podział zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele nieskończonych zbiorów. Temu podziałowi będzie odpowiadała relacja równoważności mająca nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji. W celu lepszej prezentacji rozważanego podziału weźmy pod uwagę pierwszą ćwiartkę płaszczyzny podzieloną za pomocą prostych $x = k$ i $y = l$ $(k, l \in \mathbb{N})$ na jednostkowe kwadraty. W kwadrat odpowiadający iloczynowi kartezjańskiemu odcinków $\langle m; m+1\rangle$ i $\langle n; n+1\rangle$ wstawiamy liczbę naturalną $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$. Przykładowo, kwadrat $\langle 2; 3\rangle \times \langle 1; 2\rangle$ wypełniamy liczbą $\frac{(2+1)(2+1+1)}{2} + 2 = 8$. W ten sposób tworzymy nieskończoną tablicę, której narożnik przedstawiliśmy na rys. 9.7. Ten sposób wypełniania tablicy określa funkcję $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie $f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ dla każdych liczb $m, n \in \mathbb{N}$. Tak określona funkcja f jest bijekcją i więcej na ten temat powiemy w następnym rozdziale (zob. ćwiczenia 34 i 35 oraz tw. 6.3.3 w rozdziale 6). Niech teraz X_k będzie zbiorem wszystkich liczb znajdujących się w k-tej kolumnie tej nieskończonej tablicy, czyli przyjmujemy, że

$$X_k = \{f(k, n) \colon n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{(k+n)(k+n+1)}{2} + k \colon n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Rodzina $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tworzy podział zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele nieskończonych zbiorów. Relacja $\sim \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gdzie przyjmujemy, że dla liczb naturalnych m i n jest $m \sim n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m, n \in X_k$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$, czyli relacja równoważności wyznaczona przez podział $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zbioru $\mathbb{N}$, ma żądane własności, czyli ma ona nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji.

18. a) Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{R}$, gdzie $a \preccurlyeq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geqslant b$. Z własności relacji $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ wynika, że relacja $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}$. Tak jest, bo dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ mamy: 1.

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\cdots$
$\cdots$						
10	$\cdots$					
6	11	$\cdots$				
3	7	12	$\cdots$			
1	4	8	13	$\cdots$		
0	2	5	9	14	$\cdots$	

Rysunek 8.8. Podział zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele nieskończonych zbiorów X_i

$a \preccurlyeq a$, gdyż $a \geqslant a$; 2. jeśli $a \preccurlyeq b$ i $b \preccurlyeq a$, to $a \geqslant b$ i $b \geqslant a$, więc $a = b$; 3. jeśli $a \preccurlyeq b$ i $b \preccurlyeq c$, to $a \geqslant b$ i $b \geqslant c$, więc $a \geqslant c$ i dlatego $a \preccurlyeq c$.

b) Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{R}$ taką, że $a \preccurlyeq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$. Ponieważ relacja $<$ nie jest zwrotna w zbiorze $\mathbb{R}$, więc także relacja $\preccurlyeq$ nie jest zwrotna w zbiorze $\mathbb{R}$. Zatem relacja $\preccurlyeq$ nie jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}$.

c) Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{R}$ taką, że $a \preccurlyeq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 \leqslant b^2$. Przykładowo mamy $-1 \preccurlyeq 1$ (bo $(-1)^2 \leqslant 1^2$) i $1 \preccurlyeq -1$ (bo $1^2 \leqslant (-1)^2$), ale $-1 \neq 1$. Zatem relacja $\preccurlyeq$ nie jest antysymetryczna i dlatego nie jest ona częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}$.

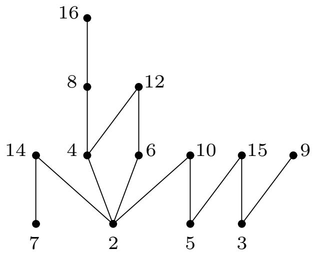
d) Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}^2$ taką, że $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leqslant c$. Wprost z tej definicji widać, że $(1,1) \preccurlyeq (1,2)$ i $(1,2) \preccurlyeq (1,1)$ i $(1,1) \neq (1,2)$. Dlatego relacja $\preccurlyeq$ nie jest antysymetryczna, więc nie jest ona częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{N}^2$.

e) Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}^2$ taką, że $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leqslant c$ i $b \geqslant d$. Uzasadnimy, że $\preccurlyeq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}^2$. Ponieważ dla $a, b \in \mathbb{N}$ mamy $a \leqslant a$ i $b \geqslant b$, więc $(a,b) \preccurlyeq (a,b)$ i relacja $\preccurlyeq$ jest zwrotna. Załóżmy teraz, że dla par $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^2$ mamy $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ i $(c,d) \preccurlyeq (a,b)$. Wtedy $a \leqslant c$ i $b \geqslant d$ oraz $c \leqslant a$ i $d \geqslant b$, więc także $a = c$ i $b = d$ i mamy równość $(a,b) = (c,d)$. To dowodzi, że relacja $\preccurlyeq$ jest antysymetryczna. Udowodnimy teraz, że relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia. Zauważmy, że jeśli dla par $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N}^2$ mamy $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ i $(c,d) \preccurlyeq (e,f)$, to spełnione są nierówności $a \leqslant c$ i $b \geqslant d$ oraz $c \leqslant e$ i $d \geqslant f$, z których wynika, że $a \leqslant e$ i $b \geqslant f$ i dlatego $(a,b) \preccurlyeq (e,f)$. To dowodzi, że $\preccurlyeq$ jest relacją przechodnią i kończy dowód faktu, że $\preccurlyeq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}^2$.

f) Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N}^2$ taką, że $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy gdy $a \leqslant c$ i $a + b \leqslant c + d$. Uzasadnimy, że $\preccurlyeq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}^2$. Ponieważ dla $a, b \in \mathbb{N}$ mamy $a \leqslant a$ i $a + b \geqslant a + b$, więc $(a,b) \preccurlyeq (a,b)$ i relacja $\preccurlyeq$ jest zwrotna. Załóżmy teraz, że dla par $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^2$ mamy $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ i $(c,d) \preccurlyeq (a,b)$. Wtedy $a \leqslant c$ i $a + b \geqslant c + d$ oraz $c \leqslant a$ i $c + d \geqslant a + b$, więc także $a = c$ i $b = d$ i mamy równość $(a,b) = (c,d)$. To dowodzi, że relacja $\preccurlyeq$ jest antysymetryczna. Udowodnimy teraz, że relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia. Zauważmy, że jeśli dla par $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N}^2$ mamy $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ i $(c,d) \preccurlyeq (e,f)$, to spełnione są nierówności $a \leqslant c$ i $a + b \geqslant c + d$ oraz $c \leqslant e$ i $c + d \geqslant e + f$, z których wynika, że $a \leqslant e$ i $a + b \geqslant e + f$ i dlatego $(a,b) \preccurlyeq (e,f)$. To dowodzi, że $\preccurlyeq$ jest relacją przechodnią i kończy dowód faktu, że $\preccurlyeq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}^2$.

19. Diagram Hassego częściowego porządku $(A, \leqslant)$, gdzie $A = \{2, 3, \ldots, 16\}$ i $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x|y$, przedstawiliśmy na rys. 9.8. Najdłuższym łańcuchem w $(A, \leqslant)$ jest $L = \{2, 4, 8, 16\}$. Zbiorem wszystkich elementów maksymalnych w $(A, \leqslant)$ jest $\{9, 10, 14, 15, 12, 16\}$. Zbiór $\{4, 6, 9, 10, 14, 15\}$ jest jednym

z dziewięciu największych podzbiorów elementów nieporównywalnych w $(A, \leqslant)$.



Rysunek 8.9. Diagram Hassego częściowego porządku $(A, \leqslant)$ z ćw. 5.19

20. Niech X będzie niepustym zbiorem i niech R będzie relacją w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ taką, że $(A, B) \in R$, gdy $A \subseteq B$. Tak jak w Przykładzie 5.5.3 pokazuje się, że relacja R jest częściowym porządkiem.

21. Relacja R jest zwrotna, bo dla każdego ciągu $xyzt \in \{0,1\}^4$ jest $(xyzt, xyzt) \in R$, bo przykładowo podciąg xy pierwszego ciągu $xyzt$ jest też podciągiem drugiego ciągu $xyzt$. Relacja R jest symetryczna, bo jeśli $s_1, s_2 \in \{0,1\}^4$ i $(s_1, s_2) \in R$, to pewien podciąg xy ciągu s_1 jest też podciągiem ciągu s_2 i odwrotnie. Stad wynika, że $(s_2, s_1) \in R$. Relacja R nie jest antysymetryczna, bo np. $(0000, 0001) \in R$ i $(0001, 0000) \in R$, ale $0000 \neq 0001$. Relacja R nie jest też przechodnia, bo np. $(0001, 0100) \in R$ i $(0100, 1110) \in R$, ale $(0001, 1110) \notin R$. Z tego też wynika, że relacja R nie jest częściowym porządkiem w zbiorze $\{0,1\}^4$.

22. Niech $\leqslant_A$ i $\leqslant_B$ będą odpowiednio częściowymi porządkami w zbiorach A i B. Niech $\leqslant_p$ będzie relacją porządku produktowego w zbiorze $A \times B$, czyli relacją taką, że dla par $(x, y), (x', y') \in A \times B$ jest $(x, y) \leqslant_p (x', y')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant_A x'$ i $y \leqslant_B y'$. Udowodnimy, że $\leqslant_p$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $A \times B$.

Jeśli $(x, y) \in A \times B$, to $x \leqslant_A x$ i $y \leqslant_B y$ (bo relacje $\leqslant_A$ i $\leqslant_B$ są zwrotne), więc mamy $(x, y) \leqslant_p (x, y)$. To dowodzi, że relacja $\leqslant_p$ jest zwrotna.

Załóżmy teraz, że $(x, y), (x', y') \in A \times B$ i $(x, y) \leqslant_p (x', y')$ oraz $(x', y') \leqslant_p (x, y)$. Wtedy $x \leqslant_A x'$ i $y \leqslant_B y'$ oraz $x' \leqslant_A x$ i $y' \leqslant_B y$. Stąd $x \leqslant_A x'$ oraz $x' \leqslant_A x$, więc i $x = x'$ (bo relacja $\leqslant_A$ jest antysymetryczna). Podobnie $y \leqslant_B y'$ oraz $y' \leqslant_B y$, więc i $y = y'$ (bo relacja $\leqslant_B$ jest antysymetryczna). Zatem $(x, y) = (x', y')$ i w ten sposób udowodniliśmy, że $\leqslant_p$ jest relacją antysymetryczną.

Niech $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in A \times B$ będą parami takimi, że $(x, y) \leqslant_p (x', y')$ oraz $(x', y') \leqslant_p (x'', y'')$. Wtedy $x \leqslant_A x'$ i $y \leqslant_B y'$ oraz $x' \leqslant_A x''$ i $y' \leqslant_B y''$. Stąd i z przechodniości relacji $\leqslant_A$ i $\leqslant_B$ wynika, że $x \leqslant_A x''$ i $y \leqslant_B y''$, więc także mamy $(x, y) \leqslant_p (x'', y'')$. To implikuje, że relacja $\leqslant_p$ jest przechodnia. Z powyższego wynika, że $\leqslant_p$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $A \times B$.

23. Niech $\leqslant_A$ i $\leqslant_B$ będą odpowiednio częściowymi porządkami w zbiorach A i B. Wykażemy, że relacja porządku leksykograficznego $\leqslant_l$ w zbiorze $A \times B$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $A \times B$. Niech $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ będą elementami zbioru $A \times B$.

Jest oczywiste, że $(x, y) \leqslant_l (x, y)$, bo $x = x$ i $y \leqslant_B y$ (gdyż relacja $\leqslant_B$ jest zwrotna). Zatem relacja $\leqslant_l$ jest zwrotna.

Niech teraz (x, y) i (x', y') będą parami takimi, że $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ oraz $(x', y') \leqslant_l (x, y)$. Chcemy udowodnić, że relacja $\leqslant_l$ jest antysymetryczna. W tym celu wystarczy wykazać, że $(x, y) = (x', y')$. Z relacji $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ oraz $(x', y') \leqslant_l (x, y)$ wynika, że spełnione są warunki Wtedy (1) $x <_A x'$ lub (2)

$x = x'$ i $y \leqslant_B y'$ oraz (1′) $x' <_A x$ lub (2′) $x' = x$ i $y' \leqslant_B y$. Stąd wynika, że spełnione muszą być warunki (2) i (2′), czyli musi być $x = x'$, $y \leqslant_B y'$ i $y' \leqslant_B y$. Zatem $x = x'$ i $y = y'$ (bo relacja $\leqslant_B$ jest antyzwrotna) i dlatego $(x, y) = (x', y')$.

Udowodnimy teraz, że relacja $\leqslant_l$ jest przechodnia. W tym celu zakładamy, $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ oraz $(x', y') \leqslant_l (x'', y'')$. Wtedy musi być (1) $x <_A x'$ lub (2) $x = x'$ i $y \leqslant_B y'$ oraz (1′) $x' <_A x''$ lub (2′) $x' = x''$ i $y' \leqslant_B y''$. Jeśli spełnione są warunki (1) i (1′), czyli jeśli $x <_A x'$ i $x' <_A x''$, to $x <_A x''$, więc natychmiast mamy $(x, y) \leqslant_l (x'', y'')$. Jeśli spełnione są warunki (1) i (2′), czyli jeśli $x <_A x'$ i $x' = x''$ i $y' \leqslant_B y''$, to znowu to $x <_A x''$ i $(x, y) \leqslant_l (x'', y'')$. Jeśli spełnione są warunki (2) i (1′), to $x = x'$ i $y \leqslant_B y'$ oraz $x' <_A x''$, to ponownie $x <_A x''$ i dlatego $(x, y) \leqslant_l (x'', y'')$. W końcu, jeśli spełnione są warunki (2) i (2′), to $x = x' = x''$ oraz $y \leqslant_B y'$ i $y' \leqslant_B y''$. Dlatego $x = x''$ i $y \leqslant_B y''$, więc $(x, y) \leqslant_l (x'', y'')$. To dowodzi, że relacja $\leqslant_l$ jest przechodnia i to kończy dowód faktu, że relacja porządku leksykograficznego $\leqslant_l$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $A \times B$.

24. a) Niech R będzie relacją określona w zbiorze wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$, gdzie dla zbiorów $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ jest $(A, B) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $a \in A$ i $b \in B$ takie, że $|a - b| < \varepsilon$. (Intuicyjnie, $(A, B) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy odległość pomiędzy zbiorami A i B jest równa zero.)

Relacja R jest zwrotna, bo jeśli $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego $a \in A$ i dla $b = a$ mamy $|a - b| = 0 < \varepsilon$ i $(A, A) \in R$.

Relacja R jest symetryczna, bo jeśli $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ i $(A, B) \in R$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $a \in A$ i $b \in B$ takie, że $|a - b| < \varepsilon$. Wtedy też istnieją $b \in B$ i $a \in A$ takie, że $|b - a| < \varepsilon$, więc $(B, A) \in R$.

Relacja R nie jest antysymetryczna, bo jeśli np. $A = \langle 0; 1\rangle$ i $B = \langle 1; 2\rangle$, to oczywiście mamy $(A, B) \in R$ i $(B, A) \in R$ (bo dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla $a = b = 1$ ze zbiorów A i B mamy $|1 - 1| < \varepsilon$), ale $A \neq B$.

Relacja R nie jest przechodnia, bo jeśli np. $A = \langle 0; 1\rangle$, $B = \langle 1; 2\rangle$ i $C = \langle 2; 3\rangle$, to oczywiście mamy $(A, B) \in R$ i $(B, C) \in R$, ale $(A, C) \notin R$ (bo jeśli $\varepsilon \in (0; 1)$, to dla każdego $a \in \langle 0; 1\rangle$ i dla każdego $b \in \langle 2; 3\rangle$ jest $|a - b| \geqslant 1 > \varepsilon$). Z tego także wynika, że relacja R nie jest częściowym porządkiem.

b) Niech R będzie relacją określona w zbiorze wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$, gdzie dla zbiorów $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ jest $(A, B) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $b \in B$ takie, że $|a - b| < \varepsilon$. (Intuicyjnie, $(A, B) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym otoczeniu każdego punktu ze zbioru A istnieje punkt należący do zbioru B.)

Relacja R jest zwrotna, bo jeśli $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego $a \in A$ oraz dla $b = a$ mamy $|a - b| = 0 < \varepsilon$ i $(A, A) \in R$.

Relacja R nie jest symetryczna, bo jeśli np. $A = \langle 0; 1\rangle$ i $B = \langle 0; 2\rangle$, to $(A, B) \in R$ (bo dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $a \in A$ istnieje $b \in B$, np. $b = a$, takie, że $|a - b| < \varepsilon$. Jednakże $(B, A) \notin R$, bo np. dla $b = 2$ (ze zbioru B) i dla $\varepsilon \in (0; 1)$ oraz dla dla dowolnego $a \in A$ jest $|b - a| \geqslant 1 > \varepsilon$.

Relacja R nie jest antysymetryczna, bo jeśli np. $A = \langle 0; 1)$ i $B = (0; 1\rangle$, to oczywiście mamy $(A, B) \in R$ (bo, jak widać, dla dowolnego $a \in \langle 0; 1)$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy $b \in (0; 1\rangle$ taki, że $|a - b| < \varepsilon$) i podobnie $(B, A) \in R$, ale $A \neq B$.

Uzasadnimy, że relacja R jest przechodnia. Weźmy pod uwagę zbiory $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ takie, że $(A, B) \in R$ i $(B, C) \in R$. Weźmy dowolne $a \in A$ i liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $(A, B) \in R$, więc istnieje $b \in B$ takie, że $|a - b| < \varepsilon/2$. Teraz z tego, że $b \in B$ i $(B, C) \in R$ wynika, że istnieje $c \in C$ takie, że $|b - c| < \varepsilon/2$. Stąd teraz wynika, że $|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leqslant |a - b| + |b - c| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, co implikuje, że $(A, C) \in R$. To dowodzi, że relacja R jest przechodnia.

Z tego, że relacja R nie jest antysymetryczna wynika, że nie jest ona częściowym porządkiem.

c) Niech R będzie relacją określona w zbiorze wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$, gdzie dla zbiorów $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ jest $(A, B) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$, każdego $b \in B$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $a' \in A$ i $b' \in B$ takie, że $|a - b'| < \varepsilon$ i $|a' - b| < \varepsilon$. (Intuicyjnie, $(A, B) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym otoczeniu każdego punktu ze zbioru A istnieje punkt należący do zbioru B, a w każdym otoczeniu każdego punktu ze zbioru B istnieje punkt należący do zbioru A.)

Relacja R jest zwrotna, bo dla każdego $a \in A$, każdego $b \in B$ i każdego $\varepsilon > 0$, jeśli przyjmiemy $a' = b$ i $b' = a$, to $|a - b'| = 0 < \varepsilon$ i $|a' - b| = 0 < \varepsilon$.

Relacja R jest symetryczna, bo jeśli $(A, B) \in R$, to dla każdego $a \in A$, każdego $b \in B$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $a' \in A$ i $b' \in B$ takie, że $|a - b'| < \varepsilon$ i $|a' - b| < \varepsilon$. Wtedy też dla każdego $b \in B$, każdego $a \in A$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $b' \in B$ i $a' \in A$ takie, że $|a' - b| < \varepsilon$ i $|a - b'| < \varepsilon$, więc $(B, A) \in R$.

Relacja R nie jest antysymetryczna, bo jeśli np. $A = \langle 0; 1)$ i $B = (0; 1\rangle$, to oczywiście mamy $(A, B) \in R$ (bo, jak widać, dla dowolnego $a \in \langle 0; 1)$, dowolnego $b \in (0; 1\rangle$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy $a' \in \langle 0; 1)$ i $b' \in (0; 1\rangle$ taki, że $|a' - b| < \varepsilon$ i $|a - b'| < \varepsilon$). Stąd i z wyżej wykazanej symetryczności relacji R wynika, że $(B, A) \in R$. Ponieważ $A \neq B$, więc relacja R nie jest antysymetryczna. Stąd natychmiast wynika, że relacja R nie jest częściowym porządkiem.

Uzasadnimy, że relacja R jest przechodnia. Weźmy pod uwagę zbiory $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ takie, że $(A, B) \in R$ i $(B, C) \in R$. Weźmy dowolne $a \in A$, $c \in C$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ $(A, B) \in R$ i $a \in A$, więc istnieje $b' \in B$ takie, że $|a - b'| < \varepsilon/2$. Podobnie, $(B, C) \in R$ i $b' \in B$, więc istnieje $b'' \in C$ takie, że $|b' - b''| < \varepsilon/2$. Stąd natychmiast wynika, że $|a - b''| = |(a - b') + (b' - b'')| \leqslant |a - b'| + |b' - b''| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Podobnie pokazuje się, że istnieje $c'' \in A$ takie, że $|c - c''| < \varepsilon$. Z tego wynika, że $(A, C) \in R$, co oznacza, że relacja R jest przechodnia.

25. Niech R będzie relacją równoważności R w zbiorze X. Pokażemy, że relacja R jest częściowym porządkiem w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy każda klasa abstrakcji relacji R jest jednoelementowa, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $|[\,x\,]_R| = 1$ dla każdego $x \in X$.

Na początek załóżmy, że relacja R jest relacją równoważności i częściowym porządkiem w zbiorze X. Weźmy pod uwagę dowolny element x ze zbioru X oraz dowolny element y ze zbioru $[\,x\,]_R$. Dla dowodu równości $|[\,x\,]_R| = 1$ wystarczy wykazać, że $y = x$. Z założenia $y \in [\,x\,]_R$ wynika, że $(x, y) \in R$. Z tego wynika, że $(y, x) \in R$ (bo relacja R jako równoważność jest symetryczna). Teraz z przynależności $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$ oraz z faktu, że relacja R jest antysymetryczna (jako relacji częściowego porządku) wynika, że $y = x$. To kończy dowód pierwszej implikacji.

Załóżmy teraz, że R jest relacją równoważności i każda klasa abstrakcji relacji R jest jednoelementowa, czyli zakładamy, że $|[\,x\,]_R| = 1$ dla każdego $x \in X$. Chcemy udowodnić, że R jest częściowym porządkiem. W tym celu wystarczy wykazać, że relacja R jest antysymetryczna. Zatem załóżmy, że $(x, y), (y, x) \in X^2$ i $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$. Wystarczy teraz wykazać, że $y = x$. Z faktu, że R jest równoważnością i z przynależności $(x, y) \in R$ wynika, że $y \in [\,x\,]_R$. Z tego oraz z faktu, że $|[\,x\,]_R| = 1$ wynika, że x jest jedynym elementem klasy $[\,x\,]_R$. Zatem musi być $y = x$ i to kończy dowód drugiej implikacji.

26. Załóżmy, że relacja R jest zwrotna i przechodnia w zbiorze X. Wtedy, jak to już wykazaliśmy, relacja R^{-1} jest zwrotna (ćw. 4d) i przechodnia (ćw. 4h). Wykazaliśmy też, że część wspólna relacji zwrotnych jest relacją zwrotną (ćw. 4b), a część wspólna relacji przechodnich jest relacją przechodnią (ćw. 4f). Stąd

wynika, że relacja $R \cap R^{-1}$ jest zwrotna i przechodnia. Teraz zaobserwujmy, że relacja $R \cap R^{-1}$ jest symetryczna. Istotnie, jeśli $(x, y) \in R \cap R^{-1}$, to $(x, y) \in R$ i $(x, y) \in R^{-1}$, więc wobec definicji relacji odwrotnej $(y, x) \in R^{-1}$ oraz $(y, x) \in R$ i dlatego też $(y, x) \in R \cap R^{-1}$. Zatem uzasadniliśmy, że jeśli relacja R jest zwrotna i przechodnia, to relacja $R \cap R^{-1}$ jest zwrotna, przechodnia i symetryczna. Z tego wynika, że relacja $R \cap R^{-1}$ jest relacją równoważności w zbiorze X.

27. a) Niech R_1 i R_2 będą relacjami równoważności w zbiorze X. Wtedy każda z nich jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Zatem, jak już to pokazaliśmy w ćw. 4, relacja $R_1 \cap R_2$ jest zwrotna (cw. 4b), symetryczna (ćw. 4j) i przechodnia (ćw. 4f). Zatem $R_1 \cap R_2$ jest relacją równoważności w zbiorze X.

b) Z definicji klasy abstrakcji wynika, że klasa abstrakcji dowolnego elementu $x \in X$ względem relacji $R_1 \cap R_2$ jest częścią wspólną klas abstrakcji elementu x względem relacji R_1 i R_2, czyli mamy

$$\begin{aligned}
[x]_{R_1 \cap R_2} &= \{y \in X : (x, y) \in R_1 \cap R_2\} \\
&= \{y \in X : (x, y) \in R_1 \wedge (x, y) \in R_2\} \\
&= \{y \in X : (x, y) \in R_1\} \cap \{y \in X : (x, y) \in R_2\} \\
&= [x]_{R_1} \cap [x]_{R_2}.
\end{aligned}$$

28. Niech R będzie relacją w zbiorze X. Przez $z(R)$, $s(R)$ i $p(R)$ oznaczamy relacje takie, że $z(R) = R \cup \{(x, x) : x \in X\}$, $s(R) = R \cup R^{-1}$ i $p(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, gdzie R^n jest n-krotnym złożeniem relacji R z sobą samą.

a) Relacja $z(R) = R \cup \{(x, x) : x \in X\}$ jest zwrotna, bo wprost z definicji $(x, x) \in z(R)$ dla każdego $x \in X$. Udowodnimy teraz, że relacja $s(R)$ jest symetryczna. Jeśli $(x, y) \in s(R) = R \cup R^{-1}$, to $(x, y) \in R$ lub $(x, y) \in R^{-1}$. Dlatego $(y, x) \in R^{-1}$ lub $(y, x) \in R$, więc $(y, x) \in R^{-1} \cup R = s(R)$ i to dowodzi, że relacja $s(R)$ jest symetryczna. Dla dowodu przechodniości relacji $p(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ załóżmy, że $(x, y) \in p(R)$ i $(y, z) \in p(R)$. Udowodnimy, że $(x, z) \in p(R)$. Z założeń $(x, y) \in p(R)$ i $(y, z) \in p(R)$ wynika, że $(x, y) \in R^n$ i $(y, z) \in R^m$ dla pewnych liczb naturalnych n i m. Stąd natychmiast wynika, że $(x, z) \in R^{n+m} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = p(R)$.

b) Przede wszystkim zauważmy, że $R \subseteq R \cup \{(x, x) : x \in X\} = z(R) \subseteq z(R) \cup z(R)^{-1} = s(z(R)) \subseteq s(z(R)) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} s(z(R))^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} s(z(R))^n = p(s(z(R)))$, co dowodzi, że relacja $p(s(z(R)))$ zawiera relację R. Teraz uzasadnimy, że relacja $p(s(z(R)))$ jest relacją równoważności.

Z wyżej przedstawionego ciągu inkluzji wynika, że zbiór $\{(x, x) : x \in X\}$ jest podzbiorem zbioru $p(s(z(R)))$ i dlatego $p(s(z(R)))$ jest relacją zwrotną.

W części a) wykazaliśmy, że relacja $s(z(R))$ jest symetryczna. Wprawdzie złożenie relacji symetrycznych nie musi być relacją symetryczną (zob. ćw. 4k), ale potęga relacji symetrycznej, czyli złożenie symetrycznej relacji samej z sobą, pozostaje – jak to zaraz pokażemy – relacją symetryczną. *Indukcyjnie udowodnimy, że jeśli R jest relacją symetryczną, to R^k jest relacją symetryczną dla każdej dodatniej liczby naturalnej k. Jest to oczywiste dla $k = 1$. Niech teraz $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną i załóżmy, że R^k jest relacją symetryczną. Udowodnimy, że $R^{k+1} = R^k \circ R = R \circ R^k$ jest relacją symetryczną. Weźmy parę $(x, y) \in R^{k+1} = R^k \circ R$. Niech $t \in X$ będzie takie, że $(x, t) \in R$ i $(t, y) \in R^k$. Z tego i z symetryczności relacji R i R^k wynika, że $(t, x) \in R$ i $(y, t) \in R^k$. Stąd wynika, że $(y, x) \in R \circ R^k = R^{k+1}$. To dowodzi, że R^{k+1} jest relacją symetryczną. Zatem R^k jest relacją symetryczną dla każdej dodatniej liczby naturalnej k.* Z symetryczności relacji $s(z(R))$ i z powyższego wynika, że $(s(z(R)))^k$ jest relacją symetryczną dla każdej dodatniej liczby naturalnej k. Teraz zauważmy, że suma $\bigcup_{n=1}^{\infty}(s(z(R)))^k = p(s(z(R)))$ jest relacją symetryczna. Istotnie, jeśli $(x, y) \in p(s(z(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(s(z(R)))^k$, to $(x, y) \in (s(z(R)))^k$ dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k i dlatego $(y, x) \in (s(z(R)))^k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(s(z(R)))^k = p(s(z(R)))$ i to dowodzi, że $p(s(z(R)))$ jest relacją symetryczna.

Pozostaje nam wykazać, że relacja $p(s(z(R)))$ jest przechodnia. Zauważmy, że jeśli $(x,y),(y,z) \in p(s(z(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(s(z(R)))^k$, to $(x,y) \in (s(z(R)))^k$ i $(y,z) \in (s(z(R)))^l$ dla pewnych dodatnich liczb naturalnych k i l. Wtedy $(x,z) \in (s(z(R)))^l \circ (s(z(R)))^k = (s(z(R)))^{l+k} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(s(z(R)))^k = p(s(z(R)))$ i to dowodzi, że $p(s(z(R)))$ jest relacją przechodnią. W ten sposób też udowodniliśmy, że $p(s(z(R)))$ jest relacją równoważności.

c) Pozostaje nam wykazać, że $p(s(z(R)))$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację R. W tym celu weźmy pod uwagę dowolną relacją równoważności R' na zbiorze X i zawierająca relację R, czyli taką, że $R' \supseteq R$. Wystarczy teraz wykazać, że $R' \supseteq p(s(z(R)))$. Na początek ponieważ $R \subseteq R'$ i relacja równoważności R' jest zwrotna, więc $z(R) = R \cup \{(x,x)\colon x \in X\} \subseteq R' \cup \{(x,x)\colon x \in X\} = R'$. Teraz z inkluzji $z(R) \subseteq R'$ wynika, że $s(z(R)) \subseteq s(R')$ i dlatego $s(z(R)) \subseteq R'$, bo relacja R' jest symetryczna (i dlatego mamy $s(R') = R'$). Z tego ostatniego wynika, że $(s(z(R)))^k \subseteq (R')^k$, więc także $(s(z(R)))^k \subseteq R'k$, bo relacja równoważności R' jest przechodnia i dlatego $(R')^k = R'$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej k. Stąd w końcu wynika, że $p(s(z(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(s(z(R)))^k \subseteq R'$. To kończy dowód faktu, że $p(s(z(R)))$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację R.

29. W zbiorze $\mathbb{N}$ najmniejszą relację przechodnią zawierającą relację $R = \{(m, m+1)\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ jest relacja $p(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Łatwo indukcyjnie pokazuje się, że $R^n = \{(m, m+n)\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Dlatego $p(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(m, m+n)\colon\ m \in \mathbb{N}\} = \{(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon m < k\}$.

30. Nasze uzasadnienie jest bezpośrednią adaptacją tego co napisaliśmy w przykładzie 5.6.5. Zatem, tak jak tam, niech M będzie zbiorem wszystkich elementów maksymalnych (względem relacji $\leqslant_p$) zbioru K i niech (x_0, y_0) będzie dowolnym elementem zbioru M. Przede wszystkim zauważmy, że nie może być $x_0 < 0$ lub $y_0 < 0$, bo inaczej dla pary $(|x_0|, |y_0|)$, która także jest elementem zbioru K, byłoby $(x_0, y_0) \leqslant_p (|x_0|, |y_0|)$ i $(x_0, y_0) \neq (|x_0|, |y_0|)$, co przeczyłoby maksymalności elementu (x_0, y_0). Stąd wynika, że musi być $x_0 \geqslant 0$ i $y_0 \geqslant 0$. Dalej zauważmy, że musi być $x_0 + y_0 = 1$, bo gdyby było $x_0 + y_0 < 1$, to dla pary $(1 - y_0, y_0)$ należącej do K byłoby $(x_0, y_0) \leqslant_p (1 - y_0^2, y_0)$ i $(x_0, y_0) \neq (1 - y_0^2, y_0)$, co znowu przeczyłoby maksymalności elementu (x_0, y_0). W ten sposób udowodniliśmy, że zbiór M jest podzbiorem zbioru $S = \{(x,y)\colon\ x + y = 1,\ x \geqslant 0 \text{ i } y \geqslant 0\}$. Pozostaje nam udowodnić, że także S jest podzbiorem zbioru M. W tym celu weźmy pod uwagę dowolny element $(x_0, y_0) \in S$, czyli taki, że

$$x_0 + y_0 = 1, \quad x_0 \geqslant 0 \ \text{ i } \ y_0 \geqslant 0, \tag{8.10}$$

oraz dowolny element $(x,y) \in K$ taki, że $(x_0, y_0) \leqslant_p (x,y)$, czyli taki, że

$$x + y \leqslant 1, \quad x_0 \leqslant x \ \text{ i } \ y_0 \leqslant y. \tag{8.11}$$

Wystarczy teraz zauważyć, że mamy $(x,y) = (x_0, y_0)$. To zaś jest oczywiste, bo wobec (8.10) i (8.11) kolejno mamy $1 = x_0 + y_0 \leqslant x + y \leqslant 1$ i z tego wynika, że $x = x_0$ i $y = y_0$ oraz oczekiwana równość $(x,y) = (x_0, y_0)$. To kończy dowód części (1). Dowód części (2) jest bardzo podobny do dowodu części (1).

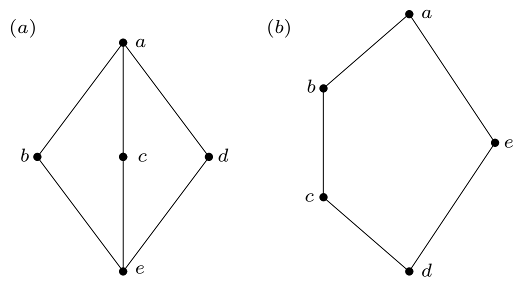
31. Niech B będzie niepustym podzbiorem zbioru częściowo uporządkowanego $(A, \leqslant)$. Jeśli a jest ograniczeniem górnym zbioru B i $a \in B$, to $b \leqslant a$ dla każdego $b \in B$, więc a jest największym elementem zbioru B. Dalej tak jak w dowodzie twierdzenia 5.6.2 pokazuje się, że a jest elementem maksymalnym i kresem górnym zbioru B. Podobnie dowodzi się pozostałych części stwierdzenia.

32. Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Załóżmy, że istnieją kresy górne $\sup A$, $\sup B$ i $\sup\{\sup A, \sup B\}$, gdzie $A, B \subseteq X$. Niech

$K = \sup\{\sup A, \sup B\}$. Wtedy $K \geqslant \sup A \geqslant a$ i $K \geqslant \sup B \geqslant b$ dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$. Zatem K jest górnym ograniczeniem zbioru $A \cup B$ i dlatego $K \geqslant \sup(A \cup B)$. Niech teraz G będzie ograniczeniem górnym zbioru $A \cup B$. Wtedy G jest ograniczeniem górnym zbioru A, więc $\sup A \leqslant G$. Podobnie, $\sup B \leqslant G$. Stąd $\sup(A \cup B) \leqslant K = \sup\{\sup A, \sup B\} \leqslant G$ i w szczególności dla $G = \sup(A \cup B)$ mamy $\sup(A \cup B) \leqslant K = \sup\{\sup A, \sup B\} \leqslant \sup(A \cup B)$. To kończy dowód równości $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$. Dowód drugiej części jest analogiczny.

33. Częściowy porządek na zbiorze $A = \{a, b, c, d, e\}$, którego diagram Hassego przedstawiono na rys. 9.9 (b) (oraz na rys. 5.19 (b)), jest kratą, bo wystarczy zauważyć, że $\sup\{x, y\}$ i $\inf\{x, y\}$ istnieją dla każdych dwóch różnych elementów $x, y \in A$: jeśli x i y są porównywalne, to $\sup\{x, y\}$ ($\inf\{x, y\}$) jest większym (mniejszym) z elementów x i y, a jeśli x i y są nieporównywalne, to $\sup\{x, y\} = a$ i $\inf\{x, y\} = d$. Nie jest to krata dystrybutywna, bo mamy $c \vee (e \wedge b) \neq (c \vee e) \wedge (c \vee b)$, bo jak widać

$$c \vee (e \wedge b) = c \vee d = c \quad \text{i} \quad (c \vee e) \wedge (c \vee b) = a \wedge b = b.$$



Rysunek 8.10. Diagramy Hassego krat

34. Niech x, y i z będą elementami kraty X. Ponieważ $y \leqslant \sup\{y, z\} = y \vee z$, więc wobec twierdzenia 5.7.1 (2) mamy $x \wedge y \leqslant x \wedge (y \vee z)$. Podobnie mamy $x \wedge z \leqslant x \wedge (y \vee z)$. Z tego wynika, że $x \wedge (y \vee z)$ jest górnym ograniczeniem zbioru $\{x \wedge y, x \wedge z\}$ i dlatego $\sup\{x \wedge y, x \wedge z\} \leqslant x \wedge (y \vee z)$, co oznacza, że $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z)$.

35. Zakładamy, że krata $(X, \leqslant)$ jest dystrybutywna, czyli zakładamy, że dla każdych trzech elementów x, y i z zbioru X spełniony jest warunek

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \tag{8.12}$$

Udowodnimy teraz, że jeśli $(X, \leqslant)$ jest kratą dystrybutywna, to dla każdych trzech elementów x, y i z zbioru X spełniona jest równość

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Zauważmy, że istotnie mamy

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \quad \text{(wobec (8.12))} \\
&= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \quad \text{(wobec tw. 5.7.1 (6))} \\
&= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \quad \text{(wobec (8.12))} \\
&= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \quad \text{(wobec tw. 5.7.1 (4))} \\
&= x \vee (y \wedge z) \quad \text{(wobec tw. 5.7.1 (6))}.
\end{aligned}$$

36. Niech $(A, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy relacja $\leqslant$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Wtedy też, jak to już pokazaliśmy, relacja odwrotna $\leqslant^{-1}$ jest zwrotna (zob. ćw. 4d), antysymetryczna (zob. ćw. 4p) i przechodnia (zob. ćw. 4h). Stąd wynika, że $(A, \leqslant^{-1})$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

37. Niech $(A, \leqslant)$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. a) Wtedy $(A, \leqslant)$ jest liniowym uporządkowaniem. Zatem relacja $\leqslant$ jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i dla każdych elementów $x, y \in A$ jest $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$. Wtedy też relacja $\leqslant^{-1}$ jest zwrotna (zob. ćw. 4d), antysymetryczna (zob. ćw. 4p), przechodnia (zob. ćw. 4h) i z definicji relacji odwrotnej mamy $y \leqslant^{-1} x$ lub $x \leqslant^{-1} y$, gdy odpowiednio jest $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$. Stąd wynika, że $(A, \leqslant^{-1})$ jest liniowym porządkiem.

b) Wykażemy najpierw, że jeśli zbiór A jest skończony i para (A, R) jest porządkiem liniowym, to (A, R) jest dobrym porządkiem. Przedstawimy dowód indukcyjny ze względu na ilość elementów w zbiorze A. (Inny dowód tego faktu przedstawiliśmy w trzeciej części przykładu 5.8.2.) Stwierdzenie to jest oczywiste, gdy A ma tylko jeden element. Załóżmy teraz, że n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy też, że każdy n-elementowy liniowy porządek jest dobrym porządkiem. Weźmy teraz pod uwagę liniowy porządek (A, R), w którym A ma $n + 1$ elementów. Wybierzmy dowolny element a ze zbioru A. Wobec założenia indukcyjnego n-elementowy porządek (A', R'), gdzie $A' = A - \{a\}$ i $R' = R_{|A-\{a\}}$, jest dobrym porządkiem. Weźmy teraz pod uwagę niepusty podzbiór X zbioru A. Chcemy uzasadnić, że w zbiorze X istnieje najmniejszy element. Jeśli $X \cap A' = \emptyset$, to $X = \{a\}$ i a jest najmniejszym elementem zbioru X. Jeśli $X \cap A' \neq \emptyset$, to w zbiorze $X \cap A'$ (który jest niepustym podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego) istnieje najmniejszy element x_0. Jeśli $a \notin X$, to x_0 jest najmniejszym elementem zbioru X. Jeśli $a \in X$, to mniejszy z elementów x_0 i a jest najmniejszym elementem zbioru X.

W części a) wykazaliśmy, że para $(A, \leqslant^{-1})$ jest liniowym porządkiem. Zatem, jeśli zbiór A jest skończony, to wobec wyżej wykazanej własności, para $(A, \leqslant^{-1})$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

Załóżmy teraz, że para $(A, \leqslant^{-1})$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Uzasadnimy, że zbiór A jest skończony. Przypuśćmy, że jest inaczej, czyli przypuśćmy, że zbiór A jest nieskończony. Rozróżniamy dwa przypadki: w $(A, \leqslant)$ istnieje właściwy nieskończony odcinek początkowy, każdy właściwy odcinek początkowy w $(A, \leqslant)$ jest skończony.

Pierwszy przypadek. Jeśli w dobrym porządku $(A, \leqslant)$ istnieje właściwy nieskończony odcinek początkowy, to w $(A, \leqslant)$ istnieje element graniczny a, czyli element różny od najmniejszego elementu zbioru A i który nie jest bezpośrednim następnikiem żadnego elementu zbioru A. (Tak jest istotnie, bo jeśli a jest najmniejszym spośród elementów x zbioru A, dla których odcinek początkowy $E(x)$ jest nieskończony, to a jest elementem granicznym w $(A, \leqslant)$. Inaczej istniałby bezpośredni poprzednik a' elementu A i byłoby $E(a) = E(a') \cup \{a'\}$, zbiór $E(a')$ byłby nieskończony i byłoby $a' < a$, co byłoby sprzeczne z wyborem a.) Wtedy zbiór $E(a)$ jest niepusty i nie ma w nim elementu największego w dobrym porządku $(A, \leqslant)$, ale wtedy zbiór $E(a)$ jest niepusty i nie ma w nim elementu najmniejszego w $(A, \leqslant^{-1})$, więc $(A, \leqslant^{-1})$ nie jest dobrym porządkiem.

Drugi przypadek. Załóżmy teraz, że w dobrym porządku $(A, \leqslant)$ każdy właściwy odcinek początkowy jest skończony. Wówczas w $(A, \leqslant)$ nie ma elementu największego. (Istotnie, jeśliby a było elementem największym w $(A, \leqslant)$, to byłoby $A = E(a) \cup \{a\}$ i mielibyśmy sprzeczność, bo $E(a)$ jest skończony, a zbiór A jest nieskończony.) Wtedy w $(A, \leqslant^{-1})$ nie ma elementu najmniejszego, co znowu przeczy założeniu, że $(A, \leqslant^{-1})$ jest dobrym porządkiem.

38. Niech $(A, \leqslant)$ będzie skończonym częściowym porządkiem. Indukcyjnie ze względu na ilość elementów w zbiorze A udowodnimy, że w zbiorze A istnieje liniowy porządek $\preccurlyeq$ taki, że $\leqslant \subseteq \preccurlyeq$, czyli udowodnimy, że każdy częściowy porządek w skończonym zbiorze można rozszerzyć do porządku liniowego.

Stwierdzenie to jest oczywiste dla zbioru jednoelementowego. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że każdy częściowy porządek w zbiorze n-elementowym można rozszerzyć do porządku liniowego. Niech teraz $\leqslant$ będzie częściowym porządkiem w zbiorze A mającym $n+1$ elementów. Wobec twierdzenia 5.6.3 w zbiorze A istnieje element minimalny. Niech nim będzie a. Wtedy dla częściowego porządku $\leqslant_B$, gdzie B jest n-elementowym zbiorem $A - \{a\}$, wobec założenia indukcyjnego istnieje liniowy porządek $\preccurlyeq_B$ w zbiorze B taki, że $\leqslant_B \subseteq \preccurlyeq_B$. Łatwo teraz zauważyć, że relacja $(\{a\} \times Y) \cup \preccurlyeq_B$ jest liniowym porządkiem w zbiorze A i $\leqslant \subseteq (\{a\} \times Y) \cup \preccurlyeq_B$.

39. 1. Tak; 2. Nie; 3. Tak; 4. Tak; 5. Nie; 6. Tak; 7. Nie; 8. Tak; 9. Tak; 10. Nie; 11. Nie; 12. Tak; 13. Tak; 14. Nie; 15. Nie.

8.6. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Moce zbiorów

1. a) Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$, gdzie $f(n) = n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

b) Zbiory $X = \{2\} \cup \{1/n\colon n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\}$ i $Y = \{1/n\colon n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\}$ są równoliczne i funkcja $f\colon X \to Y$, gdzie $f(2) = 1/2$ i $f(1/n) = 1/(n+1)$ dla $n \geqslant 2$, jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów X i Y. Ponieważ zbiory $((0;1) \cup \{2\}) - X$ i $(0;1) - Y$ są identyczne, więc funkcja $g\colon ((0;1) \cup \{2\}) - X \to (0;1) - Y$, gdzie $g(x) = x$ dla $x \in (0;1) \cup \{2\}) - X$, jest bijekcją ustalającą ich równoliczność. Teraz funkcja $h\colon (0;1) \cup \{2\} \to (0;1)$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy} \quad x \in X, \\ g(x), & \text{gdy} \quad x \in (0;1) \cup \{2\}) - X, \end{cases}$$

jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $(0;1) \cup \{2\}$ i $(0;1)$.

c) Wskazując bijekcję pomiędzy zbiorem $(0;1) \cup \mathbb{N}$ i zbiorem $(0;1)$, na początek „dziurawimy” odcinek $(0;1)$ usuwając z niego liczby $1/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$. Powstały zbiór ma $\aleph_0$ „dziurek”, które zapełnimy liczbami naturalnymi (tu wygodniej jest przyjąć, że $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$) i elementami zbioru $\{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ (czyli „materiałem” usuniętym z odcinka $(0;1)$ w trakcie jego dziurawienia). Ten proces dziurawienia odcinka $(0;1)$ i zaklejania powstałych dziurek umożliwia wskazanie bijekcji pomiędzy rozważanymi zbiorami. Efektem „dziurawienia” jest zbiór $(0;1) - \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ identyczny (więc i równoliczny) ze zbiorem $((0;1) \cup \mathbb{N}) - \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$. Funkcją ustalającą ich równoliczność jest funkcja tożsamościowa $f(x) = x$ dla $x \in (0;1) - \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$. Efektowi „zaklejania dziurek” odpowiada funkcja $g\colon \mathbb{N} \cup \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\} \to \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & \text{gdy} \quad x = n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2n+1}, & \text{gdy} \quad x = \frac{1}{n}, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2. \end{cases}$$

Teraz, ponieważ zbiór $(0;1) \cup \mathbb{N}$ jest sumą rozłącznych zbiorów $((0;1) \cup \mathbb{N}) - (\mathbb{N} \cup \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\})$ i $\mathbb{N} \cup \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$, a zbiór $(0;1)$ jest sumą rozłącznych zbiorów $(0;1) - \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ i $\{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$, więc funkcja $h\colon (0;1) \cup \mathbb{N} \to (0;1)$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \in (0;1) - \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}, \\ g(x), & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{N} \cup \{1/n\colon n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}, \end{cases}$$

jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $(0;1) \cup \mathbb{N}$ i $(0;1)$.

d) Przedstawimy bijekcję $F\colon (0;1) \to (0;1) \cup (3;4)$. W tym celu odcinek $(0;1)$ w postaci sumy trzech rozłącznych zbiorów $\{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$, $(0;1/2\rangle - \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ i $(1/2;1)$. Z drugiej strony odcinek $(0;1)$ (ale ten, który jest częścią zbioru $(0;1) \cup (3;4)$) przedstawiamy w postaci sumy rozłącznych zbiorów $\{2/3, 2/4, 2/5, \ldots\}$ i $(0;1) - \{2/3, 2/4, 2/5, \ldots\}$. Teraz łatwo zauważyć, że funkcja $f\colon \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \to \{2/3, 2/4, 2/5, \ldots\}$, gdzie $f(1/n) = 2/(n+1)$, jest bijekcją. Równie łatwo zauważa się, że funkcja $g\colon (0;1/2\rangle - \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \to (0;1) - \{2/3, 2/4, 2/5, \ldots\}$, gdzie $g(x) = 2x$, jest bijekcją. Także funkcja $h\colon (1/2;1) \to (3;4)$, gdzie $h(x) = 2x + 2$, jest bijekcją. Stad już wynika, że funkcja $F\colon (0;1) \to (0;1) \cup (3;4)$, gdzie

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \in \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \\ g(x), & \text{gdy } x \in (0;1/2\rangle - \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \\ h(x), & \text{gdy } x \in (1/2;1), \end{cases}$$

jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $(0;1)$ i $(0;1) \cup (3;4)$.

e) Funkcja $f\colon \mathbb{R} - \mathbb{N} \to \mathbb{R} - \mathbb{N}$, gdzie $f(x) = x$, jest bijekcją. Także funkcja $g\colon \{2,3,4,\ldots\} \to \{3,4,5,\ldots\}$, gdzie $g(x) = x+1$, jest bijekcją. Z tego i z faktu, że zbiór $\mathbb{R} - \{1\}$ jest sumą rozłącznych zbiorów $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ i $\{2,3,4,\ldots\}$, a zbiór $\mathbb{R} - \{1,2\}$ jest sumą rozłącznych zbiorów $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ i $\{3,4,5,\ldots\}$ wynika, że funkcja $h\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1,2\}$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \\ x+1, & \text{gdy } x \in \{2,3,4,\ldots\}, \end{cases}$$

jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $\mathbb{R} - \{1\}$ i $\mathbb{R} - \{1,2\}$.

f) Weźmy pod uwagę podzbiór $A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ zbioru $\langle -1;1\rangle$ oraz podzbiór $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ zbioru $\langle -1;1\rangle - \{0\}$. Widać, że zbiory A i B są równoliczne, a przykładem funkcji ustalającej ich równoliczność jest funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(0) = \frac{1}{2}$ i $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, gdy $\frac{1}{n} \in A - \{0\}$. Zbiory $\langle -1;1\rangle - A$ i $(\langle -1;1\rangle - \{0\}) - B$ są identyczne, a funkcja $g\colon \langle -1;1\rangle - A \to (\langle -1;1\rangle - \{0\}) - B$, gdzie $g(x) = x$ dla $x \in \langle -1;1\rangle - A$, ustala równoliczność zbiorów $\langle -1;1\rangle - A$ i $(\langle -1;1\rangle - \{0\}) - B$. Z powyższego i z faktu, że zbiór $\langle -1;1\rangle$ jest sumą rozłącznych zbiorów $\langle -1;1\rangle - A$ i A, a zbiór $\langle -1;1\rangle - \{0\}$ jest sumą rozłącznych zbiorów $(\langle -1;1\rangle - \{0\}) - B$ i B wynika, że funkcja $h\colon \langle -1;1\rangle \to \langle -1;1\rangle - \{0\}$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \in A \\ x, & \text{gdy } x \in \langle -1;1\rangle - A, \end{cases}$$

jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $\langle -1;1\rangle$ i $\langle -1;1\rangle - \{0\}$.

g) Łatwo zauważyć, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{gdy } x \in \mathbb{N} \\ x, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}, \end{cases}$$

ustala równoliczność zbiorów $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} - \{0\}$.

h) Zbiór $\mathbb{R}$ jest sumą rozłącznych zbiorów $(-\infty;0)$, $\mathbb{N}$ i $\langle 0;\infty) - \mathbb{N}$. Teraz można zauważyć, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \langle -1;1\rangle$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{gdy } x \in (-\infty;0) \\ x+1, & \text{gdy } x \in \langle 0;\infty) - \mathbb{N}, \\ x+2, & \text{gdy } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ustala równoliczność zbiorów $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} - \langle -1;1\rangle$.

i) Jeśli $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$ i $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 2\}$, to funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(x,y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y)$ dla $(x,y) \in A$, ustala równoliczność zbiorów A i B.

j) Jeśli $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2+y^2 = 1\}$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ (x-1)^2+y^2 = 3\}$, to funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(x, y) = (\sqrt{3}x + 1, \sqrt{3}y)$ dla $(x, y) \in A$, ustala równoliczność zbiorów A i B.

k) Jeśli $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + (y + 1)^2 \leqslant 4\}$, to funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(x, y) = (2x, 2y - 1)$ dla $(x, y) \in A$, ustala równoliczność zbiorów A i B.

l) Weźmy pod uwagę podzbiór $A' = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ zbioru $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ i podzbiór $B' = \{P_1, P_2, \ldots\}$ zbioru $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, gdzie $P_0 = (0, 0)$ i $P_n = (\frac{1}{n+1}, 0)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ponieważ zbiory A' i B' są równoliczne, a zbiory $A - A'$ i $B - B'$ są identyczne, więc funkcja $f\colon A \to B$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} P_{n+1}, & \text{gdy } x = P_n \in A' \\ x, & \text{gdy } x \in A - A', \end{cases}$$

ustala równoliczność zbiorów A i B.

m) Weźmy pod uwagę zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 < 1\}$. Niech $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1/n^2\}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Teraz funkcja $f\colon A \to B$, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{gdy } (x, y) \in A - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \left(\frac{n}{n+1}x, \frac{n}{n+1}y\right), & \text{gdy } (x, y) \in A_n \text{ i } n \in \mathbb{N}_+, \end{cases}$$

ustala równoliczność zbiorów A i B.

n) Jeśli $A = \langle 0; 2\pi)$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, to funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ dla $\varphi \in A$, ustala równoliczność zbiorów A i B.

o) Jeśli $A = \langle 0; 1)$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, to funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(\varphi) = (\cos(2\pi\varphi), \sin(2\pi\varphi))$ dla $\varphi \in A$, ustala równoliczność zbiorów A i B.

2. a) Łatwo widać, że funkcja $f(x) = -3x + 9$ ustala równoliczność przedziałów $\langle 1; 2)$ i $(3; 6\rangle$. Różnowartościowość funkcji f jest oczywista. To że jest to surjekcja wynika z następujących równoważności:

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -6 < -3x \leqslant -3 \\ &\Leftrightarrow \quad 3 < -3x + 9 \leqslant 6. \end{aligned}$$

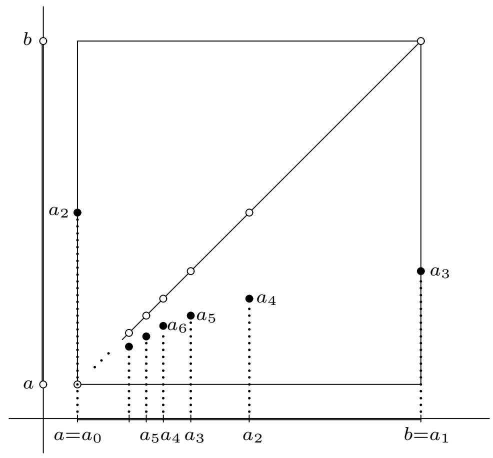
b) Weźmy pod uwagę ciąg (a_n), w którym $a_0 = a$ i $a_n = a + \frac{b-a}{n}$ dla $n \geqslant 1$, oraz zbiory $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ i $B = \{a_2, a_3, \ldots\}$. Jest oczywiste, że funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(a_n) = a_{n+2}$ dla $a_n \in A$, ustala równoliczność zbiorów A i B. Z równości $\langle a; b\rangle - A = (a; b) - B$ wynika też, że funkcja $g\colon \langle a; b\rangle - A \to (a; b) - B$, gdzie $g(x) = x$ dla $x \in \langle a; b\rangle - A$, ustala równoliczność zbiorów $\langle a; b\rangle - A$ i $(a; b) - B$.

Z tego i z faktu, że $\langle a; b\rangle = (\langle a; b\rangle - A) \cup A$ i $(a; b) = ((a; b) - B) \cup B$, $(\langle a; b\rangle - A) \cap A = \emptyset$ i $((a; b) - B) \cap B = \emptyset$ wynika równoliczność zbiorów $\langle a; b\rangle$ i $(a; b)$. Formalnie, tak jak w dowodzie twierdzenia 6.1.2 (2), pokazuje się, że funkcja $h\colon \langle a; b\rangle \to (a; b)$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & \langle a; b\rangle - A, \end{cases}$$

ustala równoliczność zbiorów $\langle a; b\rangle$ i $(a; b)$ (zob. rys. 9.10).

3. Tu rozważamy tylko kwadraty, okręgi i koła różne od zbiorów jednoelementowych. a) Weźmy pod uwagę kwadrat $\mathcal{K}$ (leżący na płaszczyźnie Oxy), którego wierzchołkami są punkty A, B, C i D. Ponieważ $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^2$, więc $|\mathcal{K}| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$. Z drugiej strony do kwadratu $\mathcal{K}$ należy odcinek łączący punkty A i B, czyli zbiór punktów postaci $P = A + t\,AB$ dla każdego $t \in \langle 0; 1\rangle$. Zbiór ten jest równoliczny



Rysunek 8.11. Funkcja h ustalająca równoliczność zbiorów $\langle a; b\rangle$ i $(a; b)$

z odcinkiem $\langle 0;1\rangle$ i dlatego mamy $\mathfrak{c} = |\langle 0;1\rangle| = |\{A + t\,AB\colon t \in \langle 0;1\rangle\}| \leqslant |\mathcal{K}| \leqslant \mathfrak{c}$. Stąd wynika, że $|\mathcal{K}| = \mathfrak{c}$. To także dowodzi, że każde dwa kwadraty są równoliczne i mocy $\mathfrak{c}$.

b) Weźmy pod uwagę okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie (x_0, y_0) i o promieniu r. Ponieważ $\mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\} = \{(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\colon \varphi \in \langle 0; 2\pi)\}$, więc widać, że funkcja $f\colon \langle 0;2\pi) \to \mathcal{O}$, gdzie $f(\varphi) = (x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)$, jest funkcją ustalającą równoliczność zbiorów $\langle 0;2\pi)$ i $\mathcal{O}$. Z tego i z faktu, że zbiór $\langle 0;2\pi)$ jest mocy $\mathfrak{c}$ wynika, że także okrąg $\mathcal{O}$ jest mocy $\mathfrak{c}$. Stąd także wynika, że każde dwa okręgi są równoliczne i mocy $\mathfrak{c}$mocy $\mathfrak{c}$.

c) Weźmy pod uwagę koło $\mathcal{K}$ o środku w punkcie (x_0, y_0) i o promieniu r. Ponieważ $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2\} = \{(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi)\colon \rho \in \langle 0; r\rangle,\ \varphi \in \langle 0;2\pi)\}$, więc funkcja $f\colon \langle 0;r\rangle \times \langle 0;2\pi) \to \mathcal{K}$, gdzie $f(\rho,\varphi) = (x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)$, jest funkcją ustalającą równoliczność zbiorów $\langle 0;r\rangle \times \langle 0;2\pi)$ i $\mathcal{K}$. Z tego i z faktu, że zbiór $\langle 0;r\rangle \times \langle 0;2\pi)$ jest mocy $\mathfrak{c}$ wynika, że także koło $\mathcal{K}$ jest mocy $\mathfrak{c}$. Stąd także wynika, że każde dwa koła są równoliczne i mocy $\mathfrak{c}$.

d) Wobec powyższego każdy okrąg i każde koło jest mocy $\mathfrak{c}$. Stąd wynika, że dowolny okrąg jest równoliczny z dowolnym kołem.

4. Niech A będzie nieskończony zbiorem i $x \notin A$. Weźmy pod uwagę nieskończony różnowartościowy ciąg $a_1, a_2, \ldots$ elementów zbioru A. Ciąg ten wyznacza nieskończone zbiory $B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ i $C - \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, gdzie $a_0 = x$. Jest oczywiste, że zbiory C i B są równoliczne. Dodatkowo, z równości $(A \cup \{x\}) - C = A - B$ wynika równoliczność zbiorów $(A \cup \{x\}) - C$ i $A - B$. Stąd i z rozłączności zbiorów $(A \cup \{x\}) - C$ i C oraz zbiorów $A - B$ i B oraz z twierdzenia 6.1.2 (2) wnioskujemy o równoliczności zbiorów $((A \cup \{x\}) - C) \cup C$ i $(A - B) \cup B$, czyli o równoliczności zbiorów $A \cup \{x\}$ i A, bo $A \cup \{x\} = ((A \cup \{x\}) - C) \cup C$ i $A = (A - B) \cup B$.

5. Równoliczność zbiorów $A - B$ i A jest oczywista, gdy $B = \emptyset$. Zatem załóżmy, że B jest niepustym skończonym podzbiorem nieskończonego zbioru A. Możemy przyjąć, że $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Z nieskończoności A i z inkluzji $B \subseteq A$ wynika, że istnieje nieskończony różnowartościowy ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ elementów zbioru A, w którym $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$. Weźmy pod uwagę zbiór $C = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ i jego podzbiór $C - B$. Zbiory te są równoliczne i funkcją ustalającą ich równoliczność jest funkcja $f\colon C \to C - B$ taka, że $f(a_n) = a_{n+k}$. Wtedy też wobec

twierdzenia 6.1.2 (2) funkcja $g\colon A \to A - B$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in A - C, \\ f(x), & x \in C, \end{cases}$$

jest funkcją ustalającą równoliczność zbiorów A i $A - B$.

6. Jeśli $A = \emptyset$, to $A \cup B = B$ i $A \cup B$ jest przeliczalny. Zatem załóżmy, że $A \neq \emptyset$ i $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ dla pewnej liczby naturalnej k. Niech $f\colon A \to \{1, \ldots, k\}$ będzie bijekcją (ustalającą równoliczność zbiorów A i $\{1, \ldots, k\}$). Z przeliczalności zbioru B wynika istnienie bijekcji $g\colon B \to \mathbb{N}$. Teraz z rozłączności zbiorów A i B wynika, że bijekcją jest funkcja $h\colon A \cup B \to \mathbb{N}$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x) + k, & x \in B. \end{cases}$$

Stąd wynika, że zbiór $A \cup B$ jest przeliczalny. (Można też przedstawić inny dowód przeliczalności zbioru $A \cup B$ w oparciu o poprzednie ćwiczenie.)

7. a) Ponieważ $(0;1) \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ i $|(0;1)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, więc mamy $\mathfrak{c} = |(0;1)| \leqslant |\mathbb{R} - \mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ i dlatego wobec twierdzenia Cantora-Bernsteina (tw. 6.2.4) mamy $|\mathbb{R} - \mathbb{N}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

b) Wskazując bijekcję ustalającą równoliczność zbiorów $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, zbiór $\mathbb{R}$ przedstawiamy w postaci sumy trzech rozłącznych zbiorów $\mathbb{N}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ oraz $\mathbb{R} - (\mathbb{N} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, gdzie $A_n = \{n + \frac{1}{k}\colon k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2\}$. Weźmy teraz pod uwagę funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \mathbb{N}$, gdzie $f(n) = n + \frac{1}{2}$, gdy $n \in \mathbb{N}$, $f(n + \frac{1}{k}) = n + \frac{1}{k+1}$, gdy $n + \frac{1}{k} \in A_n$ (dla pewnego $n \in \mathbb{N}$), $f(x) = x$, gdy $x \in \mathbb{R} - (\mathbb{N} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Bez większych kłopotów można teraz zauważyć, że funkcja f jest bijekcję ustalającą równoliczność zbiorów $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} - \mathbb{N}$.

8. Załóżmy, że B jest nieprzeliczalnym podzbiorem zbioru A. Z inkluzji $B \subseteq A$ wynika, że $|B| \leqslant |A|$. Twierdzimy, że zbiór A jest nieprzeliczalny. Przypuśćmy, że jest inaczej. Wtedy, wobec definicji 6.2.1, zbiór A jest co najwyżej przeliczalny i dlatego $|A| \leqslant \aleph_0$. Wtedy też wobec nierówności $|B| \leqslant |A|$ mamy $|B| \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$ i zbiór B jest co najwyżej przeliczalny, co przeczy jego nieprzeliczalności.

9. Interesuje nas funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{x-1/2}{x(x-1)}$ (jej szkic przedstawiliśmy na rys. 9.11. Chcemy pokazać, że ta funkcja obcięta do przedziału $(0;1)$ ustala równoliczność zbiorów $(0;1)$ i $\mathbb{R}$. Ponieważ

$$f'(x) = -\frac{(x-1/2)^2 + 1/4}{x^2(x-1)^2} < 0,$$

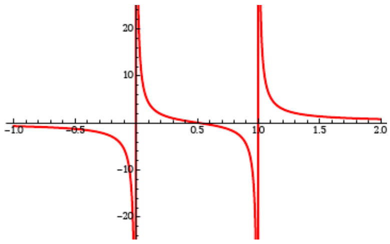
więc funkcja f jest malejąca (więc i różnowartościowa) w przedziale $(0;1)$. Dalej, ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1/2}{x(x-1)} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1/2}{x(x-1)} = \infty,$$

więc wobec ciągłości funkcji f wnioskujemy, że odwzorowuje ona zbiór $(0;1)$ na cały zbiór $\mathbb{R}$. Łącznie z powyższego wynika, że funkcja f ustala równoliczność zbiorów $(0;1)$ i $\mathbb{R}$.

10. a) Jeśli $A \sim \mathbb{N}$ i $B \sim \mathbb{N}$, to wobec twierdzenia 6.1.2 jest $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a ponieważ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, więc $A \times B \sim \mathbb{N}$.

b) Z założenia W jest zbiorem wielomianów o współczynnikach całkowitych i stopnia co najwyżej jeden. Zatem $W = \{a_0 + a_1 x\colon a_0, a_1 \in \mathbb{Z}\}$. Ponieważ istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna pomiędzy wielomianami



Rysunek 8.12. Szkic wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1/2}{x(x-1)}$

$a_0 + a_1x \in W$ i parami $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z}^2$, więc mamy $W = \{a_0 + a_1x \colon a_0, a_1 \in \mathbb{Z}\} \sim \{(a_0, a_1) \colon a_0, a_1 \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

11. Jeśli $f \colon A \to B$, to $f \colon A \to f(A)$ jest surjekcją i wobec twierdzenia 6.2.1 mamy $|f(A)| \leqslant |A|$. Zatem, jeśli A jest skończony, to $|f(A)| \leqslant |A| < \aleph_0$ i dlatego zbiór $f(A)$ jest skończony. Jeśli A jest przeliczalny, to $|f(A)| \leqslant |A| = \aleph_0$ i teraz z nierówności $|f(A)| \leqslant \aleph_0$ wynika, że zbiór $f(A)$ jest co najwyżej przeliczalny.

12. a) Jest oczywiste, że $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \colon x + y = 8\} = \{(x, 8 - x) \colon x \in \mathbb{Q}\}$. Ponieważ funkcja $f \colon \mathbb{Q} \to A$, gdzie $f(x) = (x, 8 - x)$ dla $x \in \mathbb{Q}$, jest bijekcją, więc zbiory $\mathbb{Q}$ i A są równoliczne. Zatem $|A| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

b) Znowu widać, że $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\} = \{(x, x^2) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Tym razem funkcja $f \colon \mathbb{R} \to A$, gdzie $f(x) = (x, x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$, jest bijekcją. Zatem zbiory $\mathbb{R}$ i A są równoliczne i $|A| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

c) Zbiór $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = 1\}$ jest sumą zbiorów $A_1 = \{(1, y) \colon y \in \mathbb{R}\}$ i $A_2 = \{(-1, y) \colon y \in \mathbb{R}\}$. Każdy ze zbiorów A_1 i A_2 jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$. Zatem także ich suma $A_1 \cup A_2$ jest zbiorem równolicznym ze zbiorem $\mathbb{R}$ (zob. ćwiczenie 6.6.39) i dlatego $|A| = |A_1 \cup A_2| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

d) Ponieważ zbiór $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy < 1\}$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^2$, więc $|A| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$. Z drugiej strony zbiór $A_0 = \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$, który jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$, jest podzbiorem zbioru A. Stąd $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |A_0| \leqslant |A| \leqslant \mathfrak{c}$ i dlatego $|A| = \mathfrak{c}$.

e) Zbiór $A = \{x \in \mathbb{Q} \colon 0 < x < 1\}$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{Q}$, więc $|A| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Z drugiej strony przeliczalny zbiór $\{\frac{1}{n+2} \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest podzbiorem zbioru A. Dlatego $\aleph_0 = |\{\frac{1}{n+2} \colon n \in \mathbb{N}\}| \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$, więc $|A| = \aleph_0$.

f) Rozważając moc zbioru $A = \{x \in \mathbb{R} \colon \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x^n \in \mathbb{Q}\}$, warto rozróżniać dwa przypadki w zależności od umowy, czy $0 \in \mathbb{N}$, czy też $0 \notin \mathbb{N}$.

Pierwszy przypadek: $0 \in \mathbb{N}$. W tym przypadku z faktu, że $x^0 = 1$ dla $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, wnioskujemy o inkluzjach $\mathbb{R} - \{0\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Z nich widać, że $|A| = \mathfrak{c}$.

Drugi przypadek: $0 \notin \mathbb{N}$. Dla liczby $q \in \mathbb{Q}$ i liczby $n \in \mathbb{N}_+$ przez A_q^n oznaczamy zbiór $\{x \in \mathbb{R} \colon x^n = q\}$, czyli zbiór rzeczywistych pierwiastków n-tego stopnia z liczby q (lub, równoważnie, zbiór rzeczywistych pierwiastków wielomianu $x^n - q$). Ponieważ istnieje co najwyżej n pierwiastków n-tego stopnia z każdej liczby $q \in \mathbb{Q}$, więc $|A_q^n| \leqslant n$. Zbiór $A_q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_q^n$ jest zbiorem wszystkich rzeczywistych pierwiastków z liczby q. Jest on co najwyżej przeliczalny, bo jest przeliczalną sumą zbiorów skończonych. Warto też zaobserwować, że zbiór A_q może być przeliczalny dla niektórych liczb $q \in \mathbb{Q}$. Przykładowo, zbiór A_2 jest przeliczalny, bo z jednej strony jest on co najwyżej przeliczalny, a z drugiej strony należące do niego liczby $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2}, \ldots$ tworzą nieskończony zbiór. Zbiór A_q może też być skończony. Przykładowo, zbiór A_1 składa się tylko z liczb 1 i -1. Ponieważ $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$, więc zbiór A jest przeliczalny, bo jest on przeliczalną sumą zbiorów co najwyżej przeliczalnych A_q i co najmniej jeden ze zbiorów A_q jest przeliczalny.

g) Zbiór $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sqrt{1-x^2}\}$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^2$, więc $|A| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$. Z drugiej strony $A = \{(x, \sqrt{1-x^2}) \colon x \in \langle -1; 1\rangle\}$ i funkcja $f \colon \langle 0; 1\rangle \to A$, gdzie $f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ dla $x \in \langle 0; 1\rangle$, jest różnowartościowa i dlatego $\mathfrak{c} = |\langle 0; 1\rangle| \leqslant |A|$. Stąd już widać, że $|A| = \mathfrak{c}$.

h) Zbiór $A = \{m/n \colon m, n \in \mathbb{Z},\ m < 100,\ 10 < n < 110\}$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{Q}$. Stąd $|A| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Z drugiej strony przeliczalny zbiór $\{-m/11 \colon m \in \mathbb{N}\}$ jest podzbiorem zbioru A. Z tego już łatwo wynika, że $|A| = \aleph_0$.

13. a) Mamy $0{,}345999\ldots = 0,\, 345 + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots = 0,\, 345 + \frac{9/10^4}{1-1/10} = 0,\, 345 + \frac{1}{10^3}0,\, 346$ i dlatego różnicą liczb $0{,}345999\ldots$ i $0{,}346$ jest zero.

b) Niech teraz $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ i $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ będą rozwinięciami w nieskończone ułamki dziesiętne jednej i tej samej liczby x z przedziału $(0; 1)$. Załóżmy, że rozwinięcia te nie są identyczne i niech n_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $a_n \neq b_n$, powiedzmy $a_{n_0} < b_{n_0}$. Zatem mamy równość

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{a_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \ldots = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{b_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \ldots,$$

z której, po uwzględnieniu równości $a_i = b_i$ dla $i = 1, \ldots, n_0 - 1$, otrzymujemy

$$\frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{a_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \frac{a_{n_0+2}}{10^{n_0+2}} + \ldots = \frac{b_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{b_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \frac{b_{n_0+2}}{10^{n_0+2}} + \ldots$$

i dalej, po przemnożeniu przez 10^{n_0} obu stron ostatniej równości,

$$a_{n_0} + \frac{a_{n_0+1}}{10} + \frac{a_{n_0+2}}{10^2} + \ldots = b_{n_0} + \frac{b_{n_0+1}}{10} + \frac{b_{n_0+2}}{10^2} + \ldots.$$

Teraz wobec nierówności $a_{n_0} < b_{n_0}$ mamy

$$\begin{array}{rcl} a_{n_0} & < & b_{n_0} \\ & \leqslant & b_{n_0} + \frac{b_{n_0+1}}{10} + \frac{b_{n_0+2}}{10^2} + \ldots \\ & = & a_{n_0} + \frac{a_{n_0+1}}{10} + \frac{a_{n_0+2}}{10^2} + \ldots \\ & \leqslant & a_{n_0} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots \\ & = & a_{n_0} + 1. \end{array} \tag{8.13}$$

Zatem $a_{n_0} < b_{n_0} \leqslant a_{n_0} + 1$. Z tych nierówności i z faktu, że a_{n_0} i b_{n_0} są liczbami naturalnymi, wynika, że $b_{n_0} = a_{n_0} + 1$. Z tego i z (8.13) wynika, że mamy równości

$$\begin{array}{rcl} b_{n_0} & = & b_{n_0} + \frac{b_{n_0+1}}{10} + \frac{b_{n_0+2}}{10^2} + \ldots \\ & = & a_{n_0} + \frac{a_{n_0+1}}{10} + \frac{a_{n_0+2}}{10^2} + \ldots \\ & = & a_{n_0} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots \\ & = & a_{n_0} + 1, \end{array} \tag{8.14}$$

z których wnioskujemy, że wtedy też musi być $b_n = 0$ oraz $a_n = 9$ dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$.

14. Dowód, jaki przedstawiamy, jest podobny do dowodu twierdzeń 6.3.1 i 6.3.2. Zatem niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $(0; 1)$, które można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego typu $0{,}a_1a_2a_3\ldots$, gdzie każde $a_i \in \{3,\, 4\}$. Weźmy pod uwagę liczbę $l_n = 0{,}a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\ldots$ ze zbioru A, w której $a_n^{(n)} = 4$ i $a_k^{(n)} = 3$, gdy $k \neq n$. Przykładowo mamy $l_1 = 0{,}4333\ldots$, $l_2 = 0{,}3433\ldots$ i $l_3 = 0{,}3343\ldots$. Liczby $l_1, l_2, l_3, \ldots$ tworzą nieskończony ciąg różnych elementów zbioru A. Zatem zbiór A jest nieskończony. Twierdzimy, że zbiór A jest nieprzeliczalny. Dla dowodu weźmy pod uwagę jakąkolwiek funkcję $f \colon \mathbb{N}_+ \to A$. Uzasadnimy, że funkcja ta nie jest surjekcją. W ten sposób uzasadnimy, że funkcja f (ani żadna inna funkcja) nie może ustalać równoliczności zbiorów $\mathbb{N}_+$ i A. Z tego już będzie wynikało, że zbiór A jest nieprzeliczalny.

Elementy zbioru $f(\mathbb{N}_+)$ są elementami zbioru A i dlatego każde $f(n)$ można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego,

$$f(n) = 0{,}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots,$$

w którym cyfry $a_{ni} \in \{3,\ 4\}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}_+$. Weźmy teraz pod uwagę liczbę

$$l = 0{,}b_1b_2b_3\ldots,$$

w której dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ mamy

$$b_n = \begin{cases} 4, & \text{gdy } a_{nn} \neq 3, \\ 3, & \text{gdy } a_{nn} = 4. \end{cases} \tag{8.15}$$

Liczba b jest elementem zbioru A, ale jest ona różna od każdej liczby $f(n)$, bo dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ mamy $b \neq f(n)$, gdyż liczby b i $f(n)$ na pewno różnią się na n-tym miejscu po przecinku, $b_n \neq a_{nn}$. Stąd wynika, że liczba b jest elementem zbioru $A - f(\mathbb{N}_+)$ i to dowodzi, że funkcja f nie jest surjekcją.

15. Dowód, jaki przedstawiamy, jest podobny do dowodu twierdzeń 6.3.1 i 6.3.2. Zatem niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $(0; 1)$, które można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego typu $0{,}a_1a_2a_3\ldots$, gdzie każde $a_i \in \{0,\ 1\}$. Weźmy pod uwagę liczbę $l_n = 0{,}a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\ldots$ ze zbioru A, w której $a_n^{(n)} = 0$ i $a_k^{(n)} = 1$, gdy $k \neq n$. Przykładowo mamy $l_1 = 0{,}0111\ldots$, $l_2 = 0{,}1011\ldots$ i $l_3 = 0{,}1101\ldots$. Liczby $l_1, l_2, l_3, \ldots$ tworzą nieskończony ciąg różnych elementów zbioru A. Zatem zbiór A jest nieskończony. Twierdzimy, że zbiór A jest nieprzeliczalny. Dla dowodu weźmy pod uwagę jakąkolwiek funkcję $f\colon \mathbb{N}_+ \to A$. Uzasadnimy, że funkcja ta nie jest surjekcją. W ten sposób uzasadnimy, że funkcja f (ani żadna inna funkcja) nie może ustalać równoliczności zbiorów $\mathbb{N}_+$ i A. Z tego już będzie wynikało, że zbiór A jest nieprzeliczalny.

Elementy zbioru $f(\mathbb{N}_+)$ są elementami zbioru A i dlatego każde $f(n)$ można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego,

$$f(n) = 0{,}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots,$$

w którym cyfry $a_{ni} \in \{0,\ 1\}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}_+$. Weźmy teraz pod uwagę liczbę

$$l = 0{,}b_1b_2b_3\ldots,$$

w której dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ mamy

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a_{nn} = 0, \\ 0, & \text{gdy } a_{nn} = 1. \end{cases} \tag{8.16}$$

Liczba b jest elementem zbioru A, ale jest ona różna od każdej liczby $f(n)$, bo dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ mamy $b \neq f(n)$, gdyż liczby b i $f(n)$ na pewno różnią się na n-tym miejscu po przecinku, $b_n \neq a_{nn}$. Stąd wynika, że liczba b jest elementem zbioru $A - f(\mathbb{N}_+)$ i to dowodzi, że funkcja f nie jest surjekcją.

16. Uzasadnienie faktu, że zbiór punktów leżących na okręgu o dodatnim promieniu jest mocy continuum, jest identyczne z tym, które przedstawiliśmy w ćwiczeniu 3b.

17. W przykładzie 4.2.7 uzasadniliśmy, że jeśli X jest niepustym zbiorem, to funkcja $F\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$, gdzie $F(A) = \chi_A$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $A \in \mathcal{P}(X)$, jest bijekcją. Z tego wynika, że zbiory $\mathcal{P}(X)$ i $\{0,1\}^X$ są równoliczne. Ponieważ zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest nieprzeliczalny (co wynika z twierdzenia

6.3.2), więc także zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest nieprzeliczalny, co oznacza, że zbiór wszystkich podzbiorów zbioru N jest nieprzeliczalny. (W twierdzeniu 6.4.1 pokazaliśmy nawet, że zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest mocy continuum.)

18. Jeżeli zbiór $\mathcal{P}(A)$ jest skończony, to jest on także co najwyżej przeliczalny. Załóżmy teraz, że zbiór $\mathcal{P}(A)$ jest co najwyżej przeliczalny i przypuśćmy, że nie jest on skończony. Wtedy zbiór $\mathcal{P}(A)$ jest przeliczalny i sam zbiór A też musi być przeliczalny. Zatem $A \sim \mathbb{N}$ i wtedy też wobec twierdzenia 6.1.2 jest $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ponieważ zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest nieprzeliczalny (zob. ćwiczenie 17 lub twierdzenie 6.4.1), więc także zbiór $\mathcal{P}(A)$ jest nieprzeliczalny. Otrzymana sprzeczność kończy uzasadnianie.

19. Uzasadnienie tego, że każdy nadzbiór zbioru nieprzeliczalnego jest nieprzeliczalny jest identyczne z tym, które przedstawiliśmy w ćwiczeniu 8.

20. Niech X będzie niepustym i skończonym zbiorem. Zatem wobec definicji 6.2.1 istnieje liczba $n \in \mathbb{N}_+$ taka, że X jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dla dowodu jedyności liczby n przypuśćmy, że istnieje liczba $m \in \mathbb{N}_+$ taka, że X jest też równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, \ldots, m\}$. Wystarczy teraz wykazać, że $n = m$. Ponieważ $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ i $X \sim \{1, 2, \ldots, m\}$, więc wobec twierdzenia 6.1.1 mamy równoliczność $\{1, 2, \ldots, n\} \sim \{1, 2, \ldots, m\}$. To oznacza, że istnieje bijekcja (więc i iniekcja) $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Stąd i z twierdzenia 6.2.1 wynika, że mamy $n = |\{1, 2, \ldots, n\}| \leqslant |\{1, 2, \ldots, m\}| = m$. Funkcja $f^{-1}\colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ też bijekcją (i iniekcją), więc znowu wobec twierdzenia 6.2.1 mamy $m = |\{1, 2, \ldots, m\}| \leqslant |\{1, 2, \ldots, n\}| = n$. Z tego wynika równość $n = m$.

21. Załóżmy, że zbiór A jest skończony i równoliczny ze zbiorem $\{1, \ldots, n, n{+}1\}$, gdzie $n \geqslant 1$. Niech $f\colon A \to \{1, \ldots, n, n{+}1\}$ będzie bijekcją (ustalającą równoliczność zbiorów A i $\{1, \ldots, n, n+1\}$) i niech a będzie dowolnym elementem zbioru A. Chcemy wykazać, że zbiór $A - \{a\}$ jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, \ldots, n\}$. Możemy założyć, że $f(a) = n + 1$. (Gdyby było $f(a) \neq n + 1$, to moglibyśmy wybrać permutację h zbioru $\{1, \ldots, n, n + 1\}$ taką, że $h(f(a)) = n + 1$ i wtedy bijekcję f moglibyśmy zastąpić bijekcją $h \circ f$, dla której już byłoby $(h \circ f)(a) = h(f(a)) = n{+}1$.) Z faktu, że f jest bijekcją taką, że $f(a) = n{+}1$, wynika, że że funkcja $\overline{f}\colon A{-}\{a\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A{-}\{a\}$, jest bijekcją. To dowodzi, że zbiory $A - \{a\}$ i $\{1, 2, \ldots, n\}$ są równoliczne.

22. Niech B będzie podzbiorem skończonego zbioru A (zob. definicje 6.2.1 i 6.2.2). Chcemy wykazać, że zbiór B jest skończony. Jest to oczywiste, gdy $B = \emptyset$. Zatem załóżmy, że B jest niepustym podzbiorem zbioru A i $|A| = n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Z równości $|A| = n$ wynika, że istnieje bijekcja $f\colon A \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Weźmy teraz pod uwagę funkcję $g\colon B \to A$, gdzie $g(x) = x$ dla $x \in B$. Funkcja g jest iniekcją i dlatego także funkcja $f \circ g\colon B \to \{1, 2, \ldots, n\}$ jest iniekcją. Stąd i z twierdzenia 6.2.1 wynika, że $|B| \leqslant |\{1, 2, \ldots, n\}| = n$, co już implikuje skończoność zbioru B. (Powyższą własność można też udowodnić indukcyjnie ze względu na moc zbioru A, korzystając z własności wykazanej w ćwiczeniu 21.)

23. Uzasadnimy tylko część a). Z niej i z definicji 6.2.1 oraz z twierdzenia 6.2.5 wynikają już pozostałe cztery części.

Załóżmy, że zbiór A jest skończony. Jeśli $A = \emptyset$, to $|A| = 0 < |\mathbb{N} = \aleph_0$. Zatem załóżmy, że $A \neq \emptyset$. Wtedy istnieje liczba $n \in \mathbb{N}_+$, taka że $A \sim \{1, \ldots, n\}$. Wystarczy teraz wykazać, że $|\{1, \ldots, n\}| < |\mathbb{N}|$. Przede wszystkim z faktu, że $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ wynika, że $|\{1, \ldots, n\}| \leqslant |\mathbb{N}|$. Teraz (wobec twierdzenia 6.2.1) wystarczy wykazać, że nie istnieje iniekcja $f\colon \mathbb{N} \to \{1,\ldots,n\}$. Przedstawimy indukcyjny dowód tego stwierdzenia.

Stwierdzenie to jest oczywiste, gdy $n = 1$, bo zbiór $\mathbb{N}$ ma więcej niż jeden element. Założmy teraz, że nie istnieje iniekcja $f\colon \mathbb{N} \to \{1,\ldots,n\}$. Uzasadnimy, że nie istnieje iniekcja $\overline{f}\colon \mathbb{N} \to \{1,\ldots,n,n+1\}$. Przypuśćmy, że jest inaczej, czyli przypuśćmy, że pewna funkcja $\overline{f}\colon \mathbb{N} \to \{1,\ldots,n,n+1\}$ jest iniekcją. Gdyby było $n+1 \notin \overline{f}(\mathbb{N})$, to iniekcja $\overline{f}$ definiowałaby iniekcję odwzorowującą zbiór $\mathbb{N}$ w zbiór $\{1,\ldots,n\}$, co byłoby sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Zatem musi być $n+1 \in \overline{f}(\mathbb{N})$. Z tego i z faktu, że $\overline{f}$ jest iniekcją wynika, że istnieje dokładnie jedna liczba naturalna n_0, taka że $f(n_0) = n+1$. Teraz zauważmy, że funkcja $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{n_0\}$, gdzie

$$g(n) = \begin{cases} n, & \text{gdy } n < n_0, \\ n+1, & \text{gdy } n \geqslant n_0, \end{cases}$$

jest bijekcją. Wtedy też funkcja $\overline{f} \circ g\colon \mathbb{N} \to \{1,\ldots,n\}$ jest iniekcją, co przeczy założeniu indukcyjnemu. To kończy dowód indukcyjny.

Załóżmy teraz, że $|A| < \aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Z nierówności $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}| > |A|$ wynika, że nie istnieje iniekcja $f\colon \mathbb{N}_0 \to A$. Chcemy udowodnić, że zbiór A jest skończony, czyli chcemy wykazać, że $A = \emptyset$ albo $A \sim \{1,\ldots,n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$. Przypuśćmy, że jest inaczej, czyli przypuśćmy, że $A \neq \emptyset$ i $A \not\sim \{1,\ldots,n\}$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$. Indukcyjnie skonstruujemy iniekcję $\overline{f}\colon \mathbb{N}_+ \to A$. Jej istnienie będzie przeczyło wcześniejszej obserwacji. Weźmy dowolne $a_1 \in A$ i przyjmijmy, że $\overline{f}(1) = a_1$. Niech teraz n będzie dodatnią liczbą naturalną i przypuśćmy, że już wybraliśmy różne elementy $\overline{f}(1) = a_1, \ldots, \overline{f}(n) = a_n$ ze zbioru A. Ponieważ $\{\overline{f}(1),\ldots,\overline{f}(n)\} = \{a_1,\ldots,a_n\} \sim \{1,\ldots,n\} \not\sim A$, więc $A - \{a_1,\ldots,a_n\} \neq \emptyset$ i dlatego możemy wybrać $a_{n+1} \in A - \{a_1,\ldots,a_n\}$ i przyjąć, że $\overline{f}(n+1) = a_{n+1}$. Tak skonstruowana funkcja $\overline{f}$ jest żądaną iniekcją.

24. Dla dowodu, że zbiór A jest nieskończony, wobec ćwiczenia 23, wystarczy wskazać iniekcję odwzorowującą zbiór $\mathbb{N}$ w zbiór A. Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$), gdzie $f(n) = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest iniekcją. Stąd wynika, że każdy ze zbiorów $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}$ jest nieskończony. Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, gdzie $f(n) = (n,1)$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest iniekcją i dlatego też zbiór $\mathbb{N}^2$ jest nieskończony.

25. Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Indukcyjnie ze względu na moc zbioru B udowodnimy, że: (1) jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $|A \cup B| = |A| + |B|$; (2) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$; (3) $|A^B| = |A|^{|B|}$.

(1) Jeśli $B = \emptyset$, to $A \cup B = A$ i $|A \cup B| = |A| = |A| + 0 = |A| + |\emptyset| = |A| + |B|$. Załóżmy teraz, że n jest pewną liczbą naturalną, B' jest zbiorem, takim że $|B'| = n$ i załóżmy, że $|A \cup B'| = |A| + |B'|$ dla każdego skończonego zbioru A rozłącznego ze zbiorem B'.

Niech teraz B będzie zbiorem mocy $n+1$ i niech A będzie skończonym zbiorem rozłącznym ze zbiorem B. Wykażemy, że $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Niech b będzie dowolnym elementem zbioru B. Wtedy $|B - \{b\}| = n$, zbiór $B - \{b\}$ jest rozłączny ze zbiorem $A \cup \{b\}$ i wobec założenia indukcyjnego mamy $|(A \cup \{b\}) \cup (B - \{b\})| = |A \cup \{b\}| + |B - \{b\}|$. Teraz $|A \cup B| = |(A \cup \{b\}) \cup (B - \{b\})| = |A \cup \{b\}| + |B - \{b\}| = (|A| + |\{b\}|) + n = (|A| + 1) + n = |A| + (n+1) = |A| + |B|$.

(2) Jeśli $B = \emptyset$, to $|B| = 0$ i $A \times B = A \times \emptyset = \emptyset$ i $|A \times B| = |\emptyset| = 0 = |A| \cdot 0 = |A| \cdot |B|$. Załóżmy teraz, że n jest pewną liczbą naturalną, B' jest zbiorem, takim że $|B'| = n$ i załóżmy, że $|A \times B'| = |A| \cdot |B'|$ dla każdego skończonego zbioru A.

Niech teraz B będzie zbiorem mocy $n+1$ i niech A będzie skończonym zbiorem. Wykażemy, że $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Niech b będzie dowolnym elementem zbioru B. Wtedy $|B - \{b\}| = n$, $A \times B = A \times ((B - \{b\}) \cup \{b\}) = (A \times (B - \{b\})) \cup (A \times \{b\})$, zbiory $A \times (B - \{b\})$ i $A \times \{b\}$

są rozłączne, $|A \times (B - \{b\})| = |A| \cdot |B - \{b\}| = |A| \cdot n$ (z założenia indukcyjnego) i $|A \times \{b\}| = |A|$ (bo zbiory $A \times \{b\}$ i A są równoliczne). Zatem mamy

$$\begin{aligned} |A \times B| &= |(A \times (B - \{b\})) \cup (A \times \{b\})| \\ &= |A \times (B - \{b\})| + |A \times \{b\}| \text{ (wobec (1))} \\ &= |A| \cdot n + |A| \\ &= |A|(n+1) \\ &= |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

(3) Jeśli $B = \emptyset$, to $|B| = 0$ i $|A^B| = |A^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1 = |A|^0 = |A|^{|B|}$. Załóżmy teraz, że n jest pewną liczbą naturalną, B' jest zbiorem, takim że $|B'| = n$ i załóżmy, że $|A^{B'}| = |A|^{|B'|}$ dla każdego skończonego zbioru A.

Niech teraz B będzie zbiorem mocy $n+1$ i niech A będzie skończonym zbiorem. Wykażemy, że $|A^B| = |A|^{|B|}$.

Niech b będzie dowolnym elementem zbioru B. Wtedy $|B - \{b\}| = n$ i teraz mamy

$$\begin{aligned} |A^B| &= |A^{(B-\{b\})\cup\{b\}}| \\ &= |A^{B-\{b\}} \times A^{\{b\}}| \text{ (wobec tw. 6.1.2)} \\ &= |A^{B-\{b\}}| \cdot |A^{\{b\}}| \text{ (wobec własności (2))} \\ &= |A|^{|B-\{b\}|} \cdot |A^{\{b\}}| \text{ (z założenia indukcyjnego)} \\ &= |A|^n \cdot |A| \text{ (bo } A^{\{b\}} \text{ jest równoliczny z } A) \\ &= |A|^{n+1} \\ &= |A|^{|B|}. \end{aligned}$$

26. Jeśli $f \in \left(C^B\right)^A$, to $f\colon A \to C^B$ i $f_a = f(a)$ jest funkcją odwzorowującą zbiór B w zbiór C, czyli mamy $f_a\colon B \to C$ dla każdego $a \in A$. Weźmy teraz pod uwagę funkcję $F\colon \left(C^B\right)^A \to C^{B\times A}$, która każdej funkcji $f \in \left(C^B\right)^A$ przyporządkowuje funkcję $F(f)\colon B \times A \to C$ taką, że

$$F(f)(b,a) = f_a(b) \quad \text{dla każdej pary} \quad (b,a) \in B \times A.$$

Można wykazać, że F jest bijekcją i w ten sposób zakończyć dowód równoliczności zbiorów $\left(C^B\right)^A$ i $C^{B\times A}$.

27. Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną przeliczalnie wielu różnych zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Wtedy ich suma $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym (jako suma przeliczalnie wielu zbiorów co najwyżej przeliczalnych), więc $|A| \leqslant \aleph_0$. Dla dowodu równości $|A| = \aleph_0$ wystarczy wykazać, że zbiór A jest nieskończony. Gdyby zbiór A był skończony, to także zbiór wszystkich jego podzbiorów $\mathcal{P}(A)$ byłby skończony, ale wtedy w rodzinie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie byłoby nieskończenie wielu różnych zbiorów. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zbiór A jest nieskończony i dlatego też mamy $|A| = \aleph_0$.

28. a) Dla zbioru $\mathbb{N}^2$ mamy równości $\mathbb{N}^2 = \{(m,n)\colon m,n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(m,n)\colon m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{n\})$ i każdy składnik ostatniej sumy jest przeliczalny (bo $\mathbb{N} \times \{n\} \sim \mathbb{N}$ dla $n \in \mathbb{N}$), więc $\mathbb{N}^2$ jest przeliczalny jako suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych.

b) Podobnie jak wyżej mamy $\mathbb{Z}^2 = \{(m,n)\colon m,n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(m,n)\colon m \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \times \{n\})$ i każdy składnik ostatniej sumy jest przeliczalny (bo $\mathbb{Z} \times \{n\} \sim \mathbb{N}$ dla $n \in \mathbb{Z}$), więc $\mathbb{Z}^2$ jest przeliczalny jako suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych.

c) Tym razem mamy $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(m,n)\colon m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(m,n)\colon m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbb{N} \times \{n\})$ i każdy składnik ostatniej sumy jest przeliczalny (bo $\mathbb{N} \times \{n\} \sim \mathbb{N}$ dla $n \in \mathbb{N}$), więc $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ jest przeliczalny jako suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych.

d) Niech $\mathbb{Z}_n[x]$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów stopnia n i o współczynnikach całkowitych. Wtedy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[x]$ jest zbiorem wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych. Teraz zauważmy, że każdemu wielomianowi $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ze zbioru $\mathbb{Z}_n[x]$ odpowiada ciąg $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. To przyporządkowanie jest iniekcją, więc $|\mathbb{Z}_n[x]| \leqslant |\mathbb{Z}^{n+1}| = \aleph_0$. Z tego i z faktu, że zbiór $\mathbb{Z}_n[x]$ jest nieskończony wynika, że $|\mathbb{Z}_n[x]| = \aleph_0$. Z tego wynika, że zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[x]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przeliczalny jako suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych.

29. Niech A będzie niepustym zbiorem skończonym. Wtedy $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n)\colon a_1, \ldots, a_n \in A\}$ jest zbiorem wszystkich n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru A, a suma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} A^n$ jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów o wyrazach ze zbioru A. Ponieważ zbiór A jest skończony, więc także zbiór A^n jest skończony (dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$) i dlatego zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} A^n$ jest przeliczalny (jako suma przeliczalnie wielu różnych zbiorów co najwyżej przeliczalnych).

30. Załóżmy, że A i B są zbiorami przeliczalnymi i niech $f\colon \mathbb{N} \to A$ oraz $g\colon \mathbb{N} \to B$ będą bijekcjami.

1) Ponieważ $A \sim \mathbb{N}$, $B \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, wiec $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, co oznacza, że zbiór że $A \times B$ jest przeliczalny.

2) Jeśli funkcje $f\colon \mathbb{N} \to A$ oraz $g\colon \mathbb{N} \to B$ są bijekcjami, to także funkcje $f^{-1}\colon A \to \mathbb{N}$ oraz $g^{-1}\colon B \to \mathbb{N}$ są bijekcjami. Wtedy też funkcja $(f^{-1}, g^{-1})\colon A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gdzie $(f^{-1}, g^{-1})(a, b) = (f^{-1}(a), g^{-1}(b))$ dla $(a, b) \in A \times B$, jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $A\times B$ i $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Jeśli teraz $h\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bijekcją (np. taką jak w ćwiczeniu 34 lub w ćwiczeniu 35), to funkcja $F\colon A \times B \to \mathbb{N}$, gdzie $F(a, b) = (h \circ (f^{-1}, g^{-1}))(a, b) = h((f^{-1}(a), g^{-1}(b)))$, jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $A \times B$ i $\mathbb{N}$.

31. Niech X będzie zbiorem mającym co najmniej dwa elementy. Wykazać, że zbiór X jest równoliczny z iloczynem kartezjańskim $X \times X$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest nieskończony. (Dowód tego faktu jest dość trudny i w pewnym stopniu jest on podobny do dowodu twierdzenia 6.2.5). Najlepszy dowód tego twierdzenia przedstawiono na stronie 92 w książce „Teoria mnogości" A. Błaszczyka i S. Turka. Zainteresowanych odsyłam do tego źródła.

32. Niech (a_n) będzie różnowartościowym ciągiem liczb z przedziału $\langle a; b\rangle$ i to takim, że $a_0 = a$ i $a_1 = b$. Niech $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ i $B = \{a_2, a_3, \ldots\}$. 1) Funkcja $f\colon A \to B$, gdzie $f(a_n) = a_{n+2}$ dla $a_n \in A$, jest bijekcją. 2) Widać, że mamy $\langle a; b\rangle - A = \langle a; b\rangle - \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = (\langle a; b\rangle - \{a_0, a_1\}) - \{a_2, a_3, \ldots\} = ((a; b) - \{a_0, a_1\}) - \{a_2, a_3, \ldots\} = (a; b) - B$. 3) Funkcja $h\colon \langle a; b\rangle \to (a; b)$, gdzie

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \in A \\ x, & \text{gdy } x \in \langle a; b\rangle - A, \end{cases}$$

jest bijekcją ustalającą równoliczność przedziałów $\langle a; b\rangle$ i $(a; b)$.

33. Uzasadnimy, że funkcją ustalającą równoliczność zbiorów $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ jest funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ taka, że $f(n) = (-1)^n\lfloor(n+1)/2\rfloor$. Przede wszystkim warto zauważyć, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i n jest liczbą parzystą, to $f(n) = (-1)^n\lfloor(n+1)/2\rfloor = \lfloor n/2+1/2\rfloor = n/2$. Jeśli natomiast $n \in \mathbb{N}$ i n jest liczbą nieparzystą, to $f(n) = (-1)^n\lfloor(n + 1)/2\rfloor = -(n + 1)/2$. Stąd wynika, że $f(2\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ i $f(2\mathbb{N} + 1) \subseteq -\mathbb{N}$.

Uzasadnimy teraz, że funkcja f jest iniekcją. Weźmy pod uwagę liczby $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że $m \neq n$. Uzasadnimy, że $f(m) \neq f(n)$. Rozróżniamy dwa przypadki: liczby m i n są parzyste (nieparzyste). Jeśli liczby m i n są parzyste, to $f(m) = m/2 \neq n/2 = f(n)$. Jeśli natomiast liczby m i n są nieparzyste, to $f(m) = -(m + 1)/2 \neq -(n + 1)/2 = f(n)$. To dowodzi, że funkcja f jest iniekcją.

Pozostaje nam wykazać, że f jest surjekcją. Jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i $n \geqslant 0$, to $2n \in \mathbb{N}$ i $f(2n) = (2n)/2 = n$. Jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i $n < 0$, to $-(2n+1) \in \mathbb{N}$ i $f(-(2n+1)) = -(-(2n+1)+1)/2 - (-2n)/2 = n$. Stąd wynika, że f jest surjekcją. Zatem f jest funkcją ustalającą równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

34. Weźmy pod uwagę funkcję $h\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie $h(m,n) = 2^m(2n+1)-1$ dla $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Uzasadnimy, że funkcja h jest bijekcją. Łatwo można zauważyć, $h(m,n) = 2^m(2n+1)-1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m,n) = (0,0)$. Niech teraz k będzie dowolną dodatnią liczbą naturalną. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że istnieją liczby naturalne $n_1, n_2, \ldots$ takie, że

$$k+1 = 2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot 5^{n_3}\cdot\cdots .$$

Zatem istnieje dokładnie jedna liczba naturalna m taka, że $2^m = 2^{n_1}$ i dokładnie jedna liczba naturalna n taka, że $2n+1 = 3^{n_2}\cdot 5^{n_3}\cdot\cdots$. Dla jednoznacznie wyznaczonej pary (m,n) mamy $k = (k+1)-1 = 2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot 5^{n_3}\cdot\cdots - 1 = 2^m(2n+1)-1 = h(m,n)$. To dowodzi, że funkcja h ustala równoliczność zbiorów $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$.

35.Niech (T_n) będzie ciągiem liczb trójkątnych, czyli ciągiem określonym rekurencyjnie i to takim że $T_0 = 0$ i $T_n = T_{n-1}+n$ dla $n \geqslant 1$. Bez problemu można zauważyć, że jest to rosnący ciąg liczb naturalnych i $T_n = 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech teraz $g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją taką, że

$$g(m,n) = (m+n)(m+n+1)/2 + m = T_{m+n} + m.$$

Udowodnimy, że funkcja g jednocześnie jest iniekcją i surjekcją i w ten sposób udowodnimy, że funkcja g ustala równoliczność zbiorów $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$.

Najpierw wykażemy, że g jest iniekcją. Niech $(m,n), (m',n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ i załóżmy, że $(m,n) \neq (m',n')$. Zauważmy teraz, że jeśli jest $m+n = m'+n'$, to z nierówności $(m,n) \neq (m',n')$ wynika, że musi być $m \neq m'$ (bo inaczej byłoby też $n = n'$ i to przeczyłoby założeniu $(m,n) \neq (m',n')$). W tym przypadku mamy

$$g(m,n) = T_{m+n} + m = T_{m'+n'} + m \neq T_{m'+n'} + m' = g(m',n').$$

Załóżmy teraz, że mamy $m+n \neq m'+n'$. Możemy przyjąć, że $m+n < m'+n'$. Wtedy $m+n+1 \leqslant m'+n'$ i kolejno mamy

$$\begin{array}{rcl} g(m,n) & = & T_{m+n} + m \\ & \leqslant & T_{m+n} + m + n \\ & < & T_{m+n} + m + n + 1 \\ & = & T_{m+n+1} \\ & \leqslant & T_{m'+n'} \\ & \leqslant & T_{m'+n'} + m' \\ & = & g(m',n'). \end{array}$$

Chcemy teraz udowodnić, że g jest surjekcją. Weźmy dowolną liczbę $k \in \mathbb{N}$. Wskażemy parę $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ taką, że $g(m,n) = k$. Z faktu, że (T_n) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych wynika, że istnieje jednoznacznie wyznaczona liczba naturalna s taka, że

$$T_s \leqslant k < T_{s+1}.$$

Weźmy teraz pod uwagę liczbę naturalną $m = k - T_s$ i liczbę całkowitą $n = s - m$. Z nierówności $k < T_{s+1} = T_s + s + 1$ wynika, że mamy $m = k - T_s < (T_s + s + 1) - T_s = s + 1$. Zatem $m \leqslant s$ i dlatego $n = s - m \geqslant 0$, co oznacza, że liczba całkowita n jest liczbą naturalną. Dla tak wybranych liczb naturalnych m i n mamy teraz $m + n = s$ oraz

$$g(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m = \frac{s(s+1)}{2} + m = T_s + (k - T_s) = k.$$

36. a) Niech $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in T}$ będzie zbiorem parami rozłącznych przedziałów otwartych na prostej. Z każdego przedziału A_t wybieramy jedną liczbę wymierną q_t dla każdego $t \in T$. Definiujemy teraz funkcję $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$, gdzie $f(A_t) = q_t$ dla każdego $A_t \in \mathcal{A}$. Niech A_t i A_s będą różnymi elementami zbioru $\mathcal{A}$. Wobec założenia mamy $A_t \cap A_s = \emptyset$, więc $f(A_t) \neq f(A_s)$, bo $f(A_t) = q_t \in A_t$ i $f(A_s) = q_s \in A_s$. Z tego wynika, że funkcja $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$ jest iniekcją i dlatego wobec twierdzenia 6.2.1 mamy $|\mathcal{A}| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

b) Niech $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in T}$ będzie zbiorem otwartych przedziałów na prostej, mających wymierne końce. Możemy założyć, że $A_t = (a_t; b_t)$, gdzie $a_t, b_t \in \mathbb{Q}$ i $a_t < b_t$. Łatwo można zauważyć, że funkcja $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{Q}^2$, gdzie $f(A_t) = (a_t, b_t)$, jest iniekcją. Stąd i z twierdzenia 6.2.1 wynika, że $|\mathcal{A}| \leqslant |\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$.

c) Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Niech $\mathcal{S}_\mathbb{N}$ będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. Ponieważ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_\mathbb{N}$, więc wystarczy wykazać, że zbiór $\mathcal{S}_\mathbb{N}$ jest przeliczalny.

Z faktu, że zbiór $\mathbb{N}$ jest przeliczalny wynika, że zbiór $\mathbb{N}^k$ jest przeliczalny dla każdej liczby $k \in \mathbb{N}_+$. Z tego dalej wynika, że zbiór $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbb{N}^k$ jest przeliczalny (jako suma przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych). Zbiór $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbb{N}^k$ jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów liczb naturalnych. Weźmy teraz pod uwagę funkcję $f\colon \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbb{N}^k \to \mathcal{S}_\mathbb{N}$, gdzie $f((n_1,\ldots,n_k)) = \{n_1,\ldots,n_k\}$ dla każdego $(n_1,\ldots,n_k) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbb{N}^k$. (Jest to funkcja, która każdemu skończonemu ciągowi liczb naturalnych przyporządkowuje zbiór tworzących go liczb. Przykładowo mamy $f(1,3,5,5,1) = \{1,3,5\}$.) Łatwo można zauważyć, że funkcja f jest surjekcją. Stąd i z twierdzenia 6.2.1 wynika, że $|\mathcal{S}_\mathbb{N}| \leqslant |\bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbb{N}^k| = \aleph_0$.

37. a) Ponieważ $(0;1) \subseteq (-1;100\rangle \cup \{2009\} \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathfrak{c} = |(0;1)| \leqslant |(-1;100\rangle \cup \{2009\}| \leqslant |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, więc $|(-1;100\rangle \cup \{2009\}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

b) Ponieważ $(0;1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n^2;n^2+1) \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathfrak{c} = |(0;1)| \leqslant |\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n^2;n^2+1)| \leqslant |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, więc $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n^2;n^2+1)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

c) Ponieważ $(-1;1) \sim \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\colon x \in (-1;1)\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon |x|+|y| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\mathfrak{c} = |(-1;1)| \leqslant |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon |x|+|y| < 1\}| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$, więc $|A| = |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon |x|+|y| < 1\}| = \mathfrak{c}$. Analogicznie, $\langle -1;1\rangle \sim \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\colon x \in \langle -1;1\rangle\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\mathfrak{c} = |\langle -1;1\rangle| = |\{(x,0) \in \mathbb{R}^2\colon x \in \langle -1;1\rangle\}| \leqslant |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$, więc $|B| = |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}| = \mathfrak{c}$. Stąd wynika, że $A \sim B \sim \mathbb{R}$.

d) Tym razem $(-\infty;0) \sim \{(x,x)\colon x \in (-\infty;0)\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x+y < 1,\ xy > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\mathfrak{c} = |(-\infty;0)| = |\{(x,x)\colon x \in (-\infty;0)\}| \leqslant |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x+y < 1,\ xy > 0\}| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$. Zatem $|A| = |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x+y < 1,\ xy > 0\}| = \mathfrak{c}$. Podobnie $\langle -1;1\rangle \sim \{(x,0)\colon x \in \langle -1;1\rangle\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\mathfrak{c} = |\langle -1;1\rangle| = |\{(x,0)\colon x \in \langle -1;1\rangle\}| \leqslant |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$, więc $|B| = |\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}| \leqslant |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$. Stąd wynika, że $A \sim B \sim \mathbb{R}$.

38. Niech A i B będą zbiorami co najwyżej przeliczalnymi. Jeśli $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$, to jest oczywiste, że każdy ze zbiorów $A\cap B$, $A\cup B$, $A-B$ i $A\times B$ jest co najwyżej przeliczalny. Zatem załóżmy, że $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$. Wtedy istnieją surjekcje $f\colon \mathbb{N} \to A$ i $g\colon \mathbb{N} \to B$. Teraz łatwo sprawdza się, że funkcja $h\colon \mathbb{N} \to A\cup B$, gdzie

$$h(n) = \begin{cases} f(n/2), & \text{gdy } n \in \mathbb{N} \text{ jest liczbą parzystą,} \\ g((n-1)/2), & \text{gdy } n \in \mathbb{N} \text{ jest liczbą nieparzystą,} \end{cases}$$

jest surjekcją, więc mamy $|A\cup B| \leqslant |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Zatem zbiór $A\cup B$ jest co najwyżej przeliczalny. Ponieważ $A\cap B \subseteq A$ i $A-B \subseteq A$, więc $|A\cap B| \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$ i $|A-B| \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$. Dlatego każdy ze zbiorów $A\cap B$ i $A-B$ jest co najwyżej przeliczalny. Z naszych założeń i z równości $A\times B = \bigcup_{a\in A}(\{a\}\times B)$ wynika, że zbiór $A\times B$ jest co najwyżej przeliczalny, bo jest on co najwyżej przeliczalną sumą zbiorów co najwyżej przeliczalnych (zob. twierdzenie 6.3.5).

39. Na początek warto zaobserwować, że jeśli każdy ze zbiorów A i B ma co najmniej dwa elementy, to $|A \cup B| \leqslant |A \times B|$. Niech a i b będą różnymi elementami zbioru A, a c i d różnymi elementami zbioru B. Dla wygody możemy też założyć, że zbiory A i B są rozłączne. Z faktu, że funkcja $f\colon A \cup B \to A \times B$, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} (x, c), & \text{gdy } x \in A, \\ (a, x), & \text{gdy } x \in B - \{c\}, \\ (b, d), & \text{gdy } x = c, \end{cases}$$

jest iniekcją, wynika, że $|A \cup B| \leqslant |A \times B|$.

Załóżmy teraz, że A i B są zbiorami mocy continuum. Ponieważ $A \subseteq A \cup B$ i $|A \cup B| \leqslant |A \times B|$, więc $\mathfrak{c} = |A| \leqslant |A \cup B| \leqslant |A \times B| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ i stąd wynika, że $|A \cup B| = |A \times B| = \mathfrak{c}$. To oznacza, że $A \cup B$ i $A \times B$ są zbiorami mocy continuum.

40. Niech A i B będą zbiorami przeliczalnymi. Wtedy istnieją bijekcje $f\colon \mathbb{N} \to A$ i $g\colon \mathbb{N} \to B$. Teraz łatwo sprawdza się, że funkcja $h\colon \mathbb{N} \to A \cup B$, gdzie

$$h(n) = \begin{cases} f(n/2), & \text{gdy } n \in \mathbb{N} \text{ jest liczbą parzystą}, \\ g((n-1)/2), & \text{gdy } n \in \mathbb{N} \text{ jest liczbą nieparzystą}, \end{cases}$$

jest surjekcją, więc mamy $|A \cup B| \leqslant |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Z drugiej strony $A \subseteq A \cup B$, więc $\aleph_0 = |A| \leqslant |A \cup B|$. Z tych nierówności wynika, że $|A \cup B| = \aleph_0$ i to oznacza, że zbiór $A \cup B$ jest przeliczalny.

41. Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną zbiorów przeliczalnych. Możemy założyć, że $A_n = \{a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przede wszystkim z inkluzji $A_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wynika, że $\aleph_0 = |A_0| \leqslant |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n|$. Z drugiej strony funkcja $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, gdzie $f(m, n) = a_{mn}$ jest surjekcją. Natomiast – jak to już pokazaliśmy w ćwiczeniu 35 – funkcja $g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie $g(m, n) = (m + n)(m + n + 1)/2 + m$, jest bijekcją. Zatem także funkcja $g^{-1}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest bijekcją. Stąd już wynika, że funkcja $f \circ g^{-1}\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest surjekcją i dlatego mamy $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \geqslant |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n|$. Dlatego $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n| = \aleph_0$ i to implikuje przeliczalność zbioru $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

42. Niech $\mathcal{C}_n$ będzie zbiorem wszystkich n-elementowych ciągów całkowitoliczbowych. Wtedy $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \mathcal{C}_n$ jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów całkowitoliczbowych. Ponieważ $\mathcal{C}_n = \{(c_1, \ldots, c_n)\colon c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^n$, więc jest on przeliczalny jako iloczyn kartezjański skończonej liczby zbiorów przeliczalnych (zob. wniosek 6.3.4). Stąd i z równości $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \mathcal{C}_n$ wynika, że zbiór $\mathcal{C}$ jest przeliczalny jako suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych (zob. twierdzenie 6.3.5).

43. Z równoliczności zbiorów $\langle 0; 1\rangle$ i $\mathbb{R}$ oraz zbiorów $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}$ wynika równoliczność zbiorów $\langle 0; 1\rangle$ i $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$. Z tego ostatniego wynika istnienie bijekcji (więc i surjekcji) $f\colon \langle 0; 1\rangle \to \langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$.

44. Na początek zauważmy, że o zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny. Niech $\mathbb{Q}_n[x]$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów stopnia n o współczynnikach wymiernych. Każdemu wielomianowi $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}_n[x]$ (gdzie $a_n \neq 0$) odpowiada jednoznacznie wyznaczony ciąg $(a_n, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{Q}^{n+1}$. Z tego już wynika, że $|\mathbb{Q}_n[x]| \leqslant |\mathbb{Q}^{n+1}| = \aleph_0$. Dalej, ponieważ zbiór $\mathbb{Q}[x]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest sumą zbiorów $\mathbb{Q}_n[x]$, $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[x]$, więc mamy $|\mathbb{Q}[x]| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[x]| \leqslant \aleph_0$, bo jest to suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych.

Niech teraz A będzie zbiorem wszystkich liczb algebraicznych. Zatem $A = \{x_0 \in \mathbb{R}\colon W(x_0) = 0$ dla pewnego $W(x) \in \mathbb{Q}[x]\} = \bigcup_{W(x)\in\mathbb{Q}[x]}\{x_0 \in \mathbb{R}\colon W(x_0) = 0\}$, co oznacza, że zbiór A jest przeliczalną sumą (bo zbiór $\mathbb{Q}[x]$ jest przeliczalny) zbiorów skończonych (bo zbiór $\{x_0 \in \mathbb{R}\colon W(x_0) = 0\}$, czyli zbiór pierwiastków wielomianu $W(x)$, jest skończony dla każdego $W(x) \in \mathbb{Q}[x]$). Stąd wynika, że zbiór A jest co najwyżej przeliczalny. Z drugiej strony zbiór A jest mocy co najmniej $\aleph_0$, bo już każda liczba naturalna n jest liczbą algebraiczną (bo jest ona już pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x - n$). Z tego wynika, że $|A| = \aleph_0$. Ponieważ $\mathbb{R} - A$ jest zbiorem liczb przestępnych i A jest zbiorem przeliczalnym, więc $\mathbb{R} - A$ jest zbiorem mocy continuum. (Liczb przestępnych jest continuum, a my znamy tylko kilka z nich. Przykładowo, liczby π i e są liczbami przestępnymi.)

45. 1. Tak; 2. Tak; 3. Tak; 4. Tak; 5. Nie; 6. Nie; 7. Tak; 8. Nie; 9. Nie; 10. Tak; 11. Nie; 12. Tak; 13. Tak; 14. Nie; 15. Nie.

8.7. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Algebra Boole'a

1. Niech $\mathcal{A}$ będzie ciałem podzbiorów zbioru X (zob. definicję 2.8.1). Zatem rodzina $\mathcal{A}$ ma następujące trzy własności: (1) $X \in \mathcal{A}$; (2) $A' \in \mathcal{A}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$; (3) $A \cup B \in \mathcal{A}$ dla każdych zbiorów A, $B \in \mathcal{A}$. Zauważmy najpierw, że $\emptyset \in \mathcal{A}$, bo $X \in \mathcal{A}$ wobec (1), a wtedy też $X' \in \mathcal{A}$ wobec (2), $\emptyset = X' \in \mathcal{A}$. Dalej zauważmy, że zbiór $\mathcal{A}$ jest też zamknięty ze względu na przekrój zbiorów. Istotnie, jeśli A, $B \in \mathcal{A}$, to A', $B' \in \mathcal{A}$ (wobec (2)), więc $A' \cup B' \in \mathcal{A}$ (wobec (3)) i teraz $(A' \cup B')' \in \mathcal{A}$ (wobec (2)). Stąd już wynika, że $A \cap B \in \mathcal{A}$, bo $A \cap B = (A' \cup B')'$. Teraz już – tak jak w przykładzie 7.1.1 – uzasadnia się, że system $(\mathcal{A}, \cup, \cap, ', \emptyset, X)$ jest algebrą Boole'a.

2. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. System $(\mathcal{S}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathbb{N})$ nie jest algebrą Boole'a, bo nie jest on zamknięty ze względu na dopełnienie (bo dopełnienie zbioru skończonego jest zbiorem nieskończonym i nie należy do zbioru $\mathcal{S}$).

3. Nasze obserwacje zaczynamy od prostych własności operatorów max i min. Niech a, b i c będą trzema liczbami rzeczywistymi. Rozważając wszystkie możliwe nierówności pomiędzy elementami a, b i c, można uzasadnić, że mamy następujące równości:

$$\max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}, \tag{8.17}$$

$$\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}, \tag{8.18}$$

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} \tag{8.19}$$

$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}. \tag{8.20}$$

Niech teraz n będzie dodatnią liczbą naturalną i niech D_n będzie zbiorem wszystkich naturalnych dzielników liczby n. W zbiorze D_n definiujemy działania $+$, $*$ i $'$, przyjmując, że dla $x, y \in D_n$ mamy

$$x + y = \mathrm{NWW}(x, y), \quad x * y = \mathrm{NWD}(x, y) \quad \text{i} \quad x' = n/x.$$

Udowodnimy, że system $(D_n, +, *, ', 1, n)$ jest algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest bezkwadratowa, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n nie jest podzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Z tego będzie wynikało, że system $(D_6, +, *, ', 1, 6)$ jest algebrą Boole'a, a system $(D_8, +, *, ', 1, 8)$ nie jest algebrą Boole'a.

Niech $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych ustawionych w rosnącym porządku. Niech $x, y, z \in D_n$. Możemy założyć, że $n =$

$\prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{n_i}$, gdzie $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ jest ciągiem liczb naturalnych, w którym prawie wszystkie liczby n_i są równe zeru. Podobnie przyjmujemy, że $x = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{x_i}$, $y = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{y_i}$ i $z = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{z_i}$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ i $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ są ciągami liczb naturalnych, w którym prawie wszystkie wyrazy są równe zeru i spełnione są nierówności $0 \leqslant x_i \leqslant n_i$, $0 \leqslant y_i \leqslant n_i$ i $0 \leqslant z_i \leqslant n_i$ dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}_+$. Wtedy

$$x + y = \mathrm{NWW}(x, y) = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{x_i,y_i\}},$$

$$x * y = \mathrm{NWD}(x, y) = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\min\{x_i,y_i\}}$$

i

$$x' = n/x = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{n_i-x_i}.$$

Teraz zauważmy, że działanie $+$ jest przemienne, bo $x+y = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{x_i,y_i\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{y_i,x_i\}} = y + x$. Analogicznie uzasadnia się przemienność działania $*$. Wobec (8.17) mamy

$$x + (y + z) = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{x_i,\max\{y_i,z_i\}\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{\max\{x_i,y_i\},z_i\}} = (x + y) + z.$$

To dowodzi, że działanie $+$ jest łączne. Podobnie, ale korzystając z (8.18), dowodzi się łączności działania $*$. Działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $+$, bo wobec (8.19) mamy

$$x(y + z) = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\min\{x_i,\max\{y_i,z_i\}\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{\min\{x_i,y_i\},\min\{x_i,z_i\}\}} = xy + xz.$$

Analogicznie, ale korzystając z (8.20), dowodzi się rozdzielności działania $+$ względem działania $*$. Liczba 1 jest elementem neutralnym działania $+$, bo $1 = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^0$ i dlatego $x + 1 = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{x_i,0\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{x_i} = x$. Liczba n jest elementem neutralnym działania $*$, bo $n = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{n_i}$ i dlatego mamy $x*n = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\min\{x_i,n_i\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{x_i} = x$. Jeśli liczba naturalna $n = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{n_i}$ jest taka, że $n_i \leqslant 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}_+$, to dla każdej liczby $x = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{x_i}$ ze zbioru D_n jest $0 \leqslant x_i \leqslant n_1 \leqslant 1$, więc $\max\{x_i, n_i - x_i\} = n_i$ i $\min\{x_i, n_i - x_i\} = 0$ dla $i \in \mathbb{N}_+$. Zatem $x + x' = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\max\{x_i,n_i-x_i\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{n_i} = n$ i $x * x' = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{\min\{x_i,n_i-x_i\}} = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^0 = 1$. Jeśli natomiast $n = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{n_i}$ jest liczbą naturalną taka, że $n_{i_0} \leqslant 2$ dla pewnego $i_0 \in \mathbb{N}_+$, to dla liczby $x = \prod_{p_i\in\mathcal{P}} p_i^{x_i}$ ze zbioru D_n, ale takiej, że $x_{i_0} = 1$ jest $\max\{x_{i_0}, n_{i_0} - x_{i_0}\} = n_{i_0}$ i $\min\{x_{i_0}, n_{i_0} - x_{i_0}\} = 0$, więc także $x + x' \neq n$ i $x * x' \neq 1$. Stąd wynika, że system $(D_n, +, *, ', 1, n)$ jest algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest bezkwadratowa. Z tego w szczególności wynika, że system $(D_6, +, *, ', 1, 6)$ jest algebrą Boole'a, a system $(D_8, +, *, ', 1, 8)$ nie jest algebrą Boole'a.

4. a) Zauważmy, że mamy następujące implikacje:

$$\begin{aligned}
x + y = x + z \text{ i } x' + y = x' + z \quad &\Rightarrow \quad (x + y)(x' + y) = (x + z)(x' + z)\\
&\Rightarrow \quad xx' + xy + yx' + yy = xx' + xz + zx' + zz\\
&\Rightarrow \quad 0 + (x + x')y + y = 0 + (x + x')z + z\\
&\Rightarrow \quad 0 + 1\,y + y = 0 + 1\,z + z\\
&\Rightarrow \quad y + y = z + z\\
&\Rightarrow \quad y = z.
\end{aligned}$$

b) Załóżmy, że $x + y = 0$. Ponieważ $x + x' =$ 1x+x', więc tym razem mamy równości:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot 1 \\ &= (x+y)(x+x') \\ &= xx + xx' + xy + x'y \\ &= (x+xy) + (xx' + x'y) \\ &= x(1+y) + x'(x+y) \\ &= x\,1 + x'\,0 \\ &= x + 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

Podobnie wykazuje się, że $y = 0$.

c) Jeśli $x = 0$, to $xy' + x'y = 0\,y' + 0'\,y0 + 1\,y = 0 + y = y$. Załóżmy teraz, że $xy' + x'y = y$ dla każdego y. Wtedy dla $y = 0$ mamy $x0' + x'0 = 0$, więc $x = x\,1 + 0 = x\,0' + x'\,0 = 0$.

5. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Załóżmy, że $x + y = y$. Wtedy $xy = x(x + y) = xx + xy = x + xy = x(1 + y) = x\,1 = x$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Załóżmy, że $xy = x$. Wtedy $x' + y = (xy)' + y = (x' + y') + y = x' + (y' + y) = x' + 1 = 1$.

c) $\Rightarrow$ *d)* Załóżmy, że $x' + y = 1$. Wtedy $xy' = xy'\,1 = xy'(x' + y) = (xx')y' + (xy')y = 0y' + x(y'y) = 0 + x\,0 = 0$.

d) $\Rightarrow$ *a)* Załóżmy, że $xy' = 0$. Wtedy mamy $(xy')' = 0'$, czyli $x' + y = 1$. Mnożąc obie strony ostatniej równości przez y' otrzymujemy równość $x'y' + yy' = y'$, czyli równość $x'y' = y'$ (bo $yy' = 0$), która jest równoważna $x + y = y$.

6. a) Załóżmy, że x, y i z są elementami algebry Boole'a i $x \leqslant z$ oraz $y \leqslant z$. Wtedy wobec definicji 7.2.1 mamy $x + z = z$ i $y + z = z$. Zatem $(x + y) + z = x + (y + z) = x + z = z$ i dlatego $x + y \leqslant z$ wobec definicji 7.2.1.

b) Jeśli $x \leqslant y$,to $x + y = y$ (wobec definicji 7.2.1) i teraz wobec twierdzenia 7.1.1 mamy $xy' = x(x + y)' = x(x'y') = (xx')y' = 0\,y' = 0$. Z drugiej strony, jeśli $xy' = 0$, to $x + y = (x + y)\,1 = (x + y)(y + y') = xy + xy' + yy + yy' = xy + 0 + y + 0 = xy + y = (x + 1)y = 1\,y = y$ i dlatego wobec definicji 7.2.1 mamy $x \leqslant y$.

7. a) $x_1 + x_1x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1\,1 = x_1$.

b) Ponieważ $x_1x_2 + 1 = 1$ i $x_1' + x_1 = 1$, więc mamy $x_1x_2 + 1 = x_1' + x_1$.

c) $x_1'x_2' = (x_1 + x_2)' \neq x_1 + x_2$.

d) $x_1 + x_1(x_2 + 1) = x_1 + x_1\,1 = x_1 + x_1 = x_1$.

e) $x_1(x_2x_3)' = x_1(x_2' + x_3') = x_1x_2' + x_1x_3'$.

f) $x_1'(x_2x_3 + x_1x_2x_3) = x_1'x_2x_3(1 + x_1) = x_1'x_2x_3\,1 = x_1'x_2x_3 \neq x_2x_3$.

g) $(x_1 + x_2)(x_3' + x_4)'x_2'x_3 = (x_1 + x_2)(x_3x_4')x_2'x_3 = (x_1 + x_2)x_2'x_3x_4' = x_1x_2'x_3x_4' + x_2x_2'x_3x_4' = x_1x_2'x_3x_4' + 0 = x_1x_2'x_3x_4' \neq 0$.

h) $(x_1 + x_2)x_1 = x_1x_1 + x_1x_2 = x_1 + x_1x_2 \neq x_1 + x_1x_2 + x_2$.

8. $f(x, y, z) = \overline{xyz} + x\overline{yz} + xy\overline{z}$.

9. a) $f(x, y) = xy + x\overline{y}$.

b) $f(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z}$.

c) $f(x, y, z) = x\overline{yz}$.

d) $f(x, y, z, t) = x\overline{y}zt + x\overline{y}z\overline{t} + x\overline{y}zt + x\overline{yz}t$.

10. a) $f(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz$.

b) $f(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz = xy + xz + yz$.

c) $f(x, y, z) = x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xy}z + \overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{xz} + \overline{yz}$.

11. $f_4^5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5$.

12. $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1x_2x_3x_4\overline{x_5}+x_1x_2x_3\overline{x_4}x_5+x_1x_2\overline{x_3}x_4x_5+x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5+\overline{x_1}x_2x_3x_4x_5$.

13. a) $f(x,y,z) = \overline{(x+\overline{(y+z)})} = \overline{x}yz+\overline{x}y\overline{z}+\overline{x}\overline{y}z$.
 b) $f(x,y,z) = \overline{(\overline{x}+\overline{y})}+(z+\overline{(x+y)}) = xyz+xy\overline{z}+x\overline{y}z+\overline{x}yz+\overline{x}\overline{y}z+\overline{x}\overline{y}\overline{z}$.
 c) $f(x,y,z) = x = xyz+xy\overline{z}+x\overline{y}z+x\overline{y}\overline{z}$.

14. a) **Twierdzenie dualne do twierdzenia 7.3.2** *Niech* $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ *będzie funkcją boole'owską taką, że* $f(\mathbb{Z}_2^n) \neq \{1\}$*. Niech* $A_1,\ldots,A_k$ *będą wszystkimi tymi elementami algebry* $\mathbb{Z}_2^n$*, dla których* $f(A_i)=0$*. Jeśli przyjmiemy, że* $A_i = (a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ *i jeśli* $M_i = y_{i1}+y_{i2}+\ldots+y_{in}$ *jest makstermem takim, że*

$$y_{ij} = \begin{cases} x_j, & \textit{gdy}\ \ a_{ij}=0,\\ \overline{x}_j, & \textit{gdy}\ \ a_{ij}=1,\end{cases}$$

to wtedy

$$f(x_1,\ldots,x_n) = M_1\cdot M_2\cdot\ldots\cdot M_k. \tag{8.21}$$

Dowód. Niech $\overline{f}\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ będzie funkcją boole'owską taką, że $\overline{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$ dla każdego $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_2^n$. Wtedy $\overline{f}$ jest niezerową funkcją boole'owską i $A_1,\ldots,A_k$ są wszystkimi tymi elementami algebry $\mathbb{Z}_2^n$, dla których $\overline{f}(A_i)=1$. Zatem jeśli $A_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ i jeśli $m_i = z_{i1}\cdot z_{i2}\cdot\ldots\cdot z_{in}$ jest mintermem takim, że

$$z_{ij} = \begin{cases} x_j, & \text{gdy}\ \ a_{ij}=1,\\ \overline{x}_j, & \text{gdy}\ \ a_{ij}=0,\end{cases}$$

to wobec twierdzenia 7.3.2 mamy

$$\overline{f}(x_1,\ldots,x_n) = m_1+m_2+\ldots+m_k.$$

Stąd i z równości $\overline{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$ (czyli z równości $f(\mathbf{x}) = \overline{\overline{f}(\mathbf{x})}$) wynika, że

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \overline{m_1+m_2+\ldots+m_k} = M_1\cdot M_2\cdot\ldots\cdot M_k,$$

gdzie

$$M_i = \overline{m_i} = \overline{z_{i1}\cdot z_{i2}\cdot\ldots\cdot z_{in}} = \overline{z_{i1}}+\overline{z_{i2}}+\ldots+\overline{z_{in}} = y_{i1}+y_{i2}+\ldots+y_{in}$$

jest makstermem i $y_{ij} = \overline{z_{ij}} = \overline{x_j}$, gdy $a_{ij}=1$, oraz $y_{ij} = \overline{z_{ij}} = \overline{\overline{x_j}} = x_j$, gdy $a_{ij}=0$.

 b) $f(x,y) = x\overline{y}+\overline{x}y = (x+y)(\overline{x}+\overline{y})$.
 c) $f(x,y,z) = x+\overline{y}+\overline{z}$.

15. Na początek wykażemy, że jeśli $ba=ca$ i $ba'=ca'$, to $b=c$. (Warto to porównać z pierwszą częścią ćwiczenia 4.)

Z równości $ba=ca$ i $ba'=ca'$, po ich dodaniu stronami, otrzymujemy równość $ba+ba'=ca+ca'$. Teraz już widać, że $b=b\,1=b(a+a')=ba+ba'=ca+ca'=c(a+a')=c\,1=c$.

Teraz dla $a=x$, $b=x+(y+z)$ i $c=(x+y)+z$ mamy $ba=(x+(y+z))x = xx+(y+z)x = x+(y+z)x = (1+(y+z))x = 1\,x = x$ i $ca = ((x+y)+z)x = (x+y)x+xx = (x+y)x+x = ((x+y)+1)x = 1\,x = x$ oraz $ba' = (x+(y+z))x' = xx'+(y+z)x' = 0+(y+z)x' = yx'+zx'$ i $ca' = ((x+y)+z)x' = (x+y)x'+zx' = (xx'+yx')+zx' = (0+yx')+zx' = yx'+zx'$. Z tego widać, że mamy równości $ba=ca$ i $ba'=ca'$. Zaś z tych równości oraz z wyżej udowodnionej własności o równości $b = c$, czyli o łączności dodawania w algebrze Boole'a, czyli o równości $x + (y + z) = b = c = (x + y) + z$.

W podobny sposób (ale korzystając z pierwszej części poprzednio wspomnianego ćwiczenia 4) wnioskujemy o łączności mnożenia w algebrze Boole'a. Łączność mnożenia można też otrzymać korzystając z poprzednio uzasadnionej łączności dodawania i z praw de Morgana, bo mamy $x(yz) = (x' + (y' + z'))' = ((x' + y') + z')' = (xy)z$.

16. Niech $(B, +, *, ^-, 0, 1)$ będzie algebrą Boole'a i niech C będzie podzbiorem zbioru B. Załóżmy najpierw, że $(C, +, *, ^-, 0, 1)$ jest algebrą Boole'a. Wtedy $1 \in C$. Niech x i y będą dowolnymi elementami zbioru C. Wtedy też $x, \overline{y} \in C$ i dlatego $x\overline{y} \in C$ (bo $*$ jest działaniem w zbiorze C).

Teraz załóżmy, że $1 \in C$ i $x\overline{y} \in C$ dla każdych $x, y \in C$. Udowodnimy, że $(C, +, *, ^-, 0, 1)$ jest algebrą Boole'a. Najpierw zauważmy, że 0 należy do C. Tak istotnie jest, bo $1 \in C$ i dla $x = y = 1$ mamy $0 = 1\,\overline{1} \in C$. Dalej zauważmy, że zbiór C jest zamknięty ze względu na działanie $^-$. Tak jest, bo dla $x = 1$ i dowolnego $y \in C$ mamy $\overline{y} = 1\overline{y} \in C$. Jeśli $x, y \in C$, to także $x, \overline{y} \in C$ i dlatego $xy = x\,\overline{(\overline{y})} \in C$. To oznacza, że zbiór C jest zamknięty ze względu na działanie $*$. Jeśli $x, y \in C$, to kolejno $\overline{x}, \overline{y} \in C$, $\overline{x}\,\overline{y} \in C$, $\overline{\overline{x}\,\overline{y}} \in C$, więc także $x + y = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{yx}\,\overline{y}} \in C$. W ten sposób udowodniliśmy, że zbiór C jest zamknięty ze względu na działanie $+$. Pozostaje nam wykazać, że dla działań $+$, $*$ i $^-$ spełnione są warunki $(1) - -(8)$ definicji algebry Boole'a w zbiorze C (zob. definicję 7.1.1). To zaś jest oczywiste, bo spełnione są one w zbiorze B. Przykładowo zauważmy, że jeśli $x, y \in C$, to $x + y, y + x \in C$ i chcemy uzasadnić, że $x + y$ i $y + x$ są równe. Ponieważ $x + y, y + x \in C$ i $C \subseteq B$ oraz $x + y = y + x$ w B, więc także $x + y = y + x$ w C. Analogicznie uzasadnia się, że spełnione są pozostałe warunki definicji 7.1.1. Z tego wynika, że $(C, +, *, ^-, 0, 1)$ jest algebrą Boole'a.

17. Niech $\varphi\colon B_1 \to B_2$ będzie izomorfizmem algebr Boole'a B_1 i B_2 (zob. definicję 7.2.3). Wtedy dla dowolnych elementów x i y algebry B_1 mamy równoważności

$$\begin{aligned} \varphi(x) \leqslant \varphi(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(y) \quad \text{(def. porządku } \leqslant) \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(x + y) = \varphi(y) \quad \text{(def. izomorfizmu } \varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad x + y = y \quad (\varphi \text{ jest bijekcją}) \\ &\Leftrightarrow \quad x \leqslant y \quad \text{(def. porządku } \leqslant) \end{aligned}$$

i to kończy dowód omawianej własności.

18. Niech x i y będą elementami algebry Boole'a i niech a będzie atomem tej algebry. a) Załóżmy, że $a \leqslant x$. Wtedy $ax = a$ i dlatego też $a(x + y) = ax + ay = a + ay = a(1 + y) = a$. Stąd wynika, że $a \leqslant x + y$.

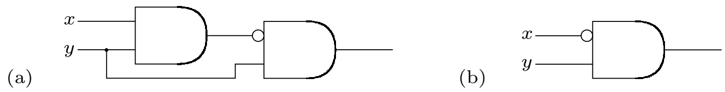
Załóżmy teraz, że $a \leqslant x + y$. Wtedy $a = a(x + y) = ax + ay$. Dalej, z faktu, że a jest atomem, wynika, że $ax = a$ albo $ax = 0$ i $ay = a$ albo $ay = 0$. Zaobserwujmy teraz, że nie może być $ax = 0$ i $ay = 0$ jednocześnie, bo inaczej byłoby $a = ax + ay = 0 + 0 = 0$, co byłoby sprzeczne z założeniem, że a jest atomem (def. 7.2.2). Stąd wynika, że $ax = a$ lub $ay = a$, wiec $a \leqslant x$ lub $a \leqslant y$.

b) Jeśli $a \leqslant x$ i $a \leqslant y$, to $ax = a$ i $ay = a$. Wtedy $axy = aaxy = ax\,ay = aa = a$ i dlatego $a \leqslant xy$.

Z drugiej strony jeśli $a \leqslant xy$, to, wobec oczywistych nierówności $xy \leqslant x$ i $xy \leqslant y$ i wobec przechodniości relacji $\leqslant$, mamy $a \leqslant x$ i $a \leqslant y$.

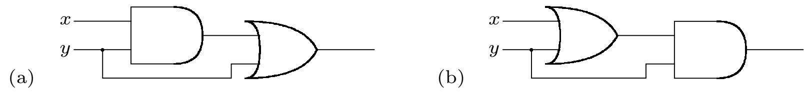
c) Teraz zauważmy, że $a \leqslant 1 = x + \overline{x}$, więc wobec (a) mamy $a \leqslant x$ lub $a \leqslant \overline{x}$. Jednakże nie może być $a \leqslant x$ i $a \leqslant \overline{x}$ jednocześnie, bo inaczej wobec (b) byłoby $a \leqslant x\overline{x} = 0$, co byłoby sprzeczne z założeniem, że a jest atomem. Stąd wynika, że albo $a \leqslant x$, albo $a \leqslant \overline{x}$ dla każdego x.

19. Niech f i g będą funkcjami boole'owskimi odpowiadającymi układom logicznym z niżej przedstawionych rysunków 9.12 (a) i 9.12 (b). Wtedy $f(x, y) = \overline{(xy)}y = (\overline{x} + \overline{y})y = \overline{x}y + \overline{y}y = \overline{x}y + 0 = \overline{x}y$ i $g(x, y) = \overline{x}y$, więc $f(x, y) = g(x, y)$.



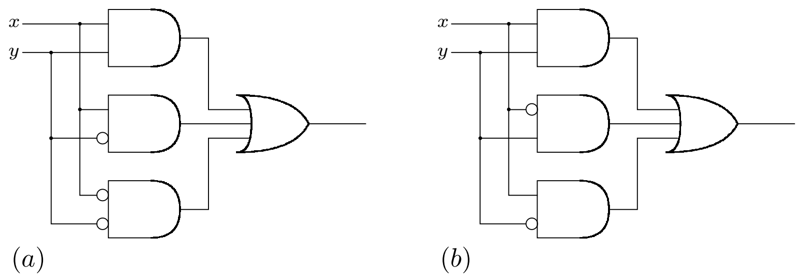
Rysunek 8.13. Ilustracja do zadania 7.5.18

20. Niech f i g będą funkcjami boole'owskimi odpowiadającymi układom logicznym z niżej przedstawionych rysunków 9.13 (a) i 9.13 (b). Wtedy $f(x, y) = xy + y = (x+1)y = 1\,y = y$ i $g(x, y) = (x+y)y = xy+yy = xy+y = (x+1)y = 1\,y = y$, więc $f(x, y) = g(x, y)$.



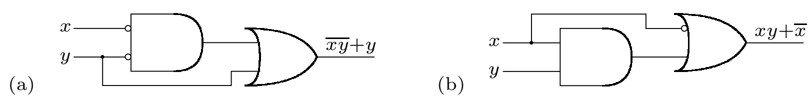
Rysunek 8.14. Ilustracja do zadania 7.5.19

21. Niech f i g będą funkcjami boole'owskimi odpowiadającymi układom logicznym z niżej przedstawionych rysunków 9.14 (a) i 9.14 (b). Wtedy $f(x, y) = xy + x\overline{y} + \overline{xy} = xy + \overline{y}$ i $g(x, y) = xy + \overline{x}y + x\overline{y} = y + x\overline{y} = x + \overline{x}y = x + y$.



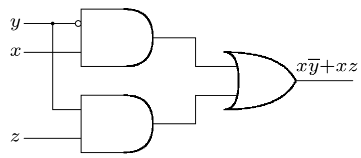
Rysunek 8.15. Ilustracja do zadania 7.5.20

22. Ponieważ $f(x, y) = xy + \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} + y = xy + \overline{x}$, więc funkcji f odpowiadają dwubramkowe układy logiczne przedstawione na rysunku 9.15 (a) oraz (b).

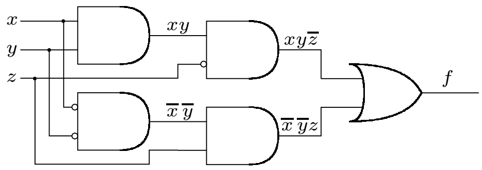


Rysunek 8.16. Ilustracja do zadania 7.5.22

23. Mamy $f(x, y, z) = xyz + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} = xyz + x\overline{y} = xz + x\overline{yz} = x\overline{y} + xz$ i tej ostatniej postaci funkcji f odpowiada przedstawiony na rys. 9.16 układ logiczny mający trzy bramki.
24. Funkcja boole'owską f taką, że $f(x, y, z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ i $y \neq z$ jest funkcja $f(x, y, z) = xy\overline{z} + \overline{xy}z$. Odpowiadają jej układy logiczne przedstawione na rys. 9.17.

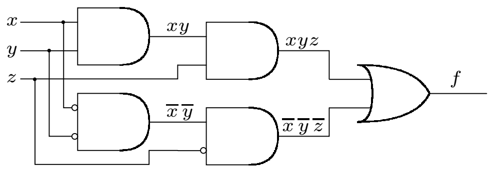


Rysunek 8.17. Ilustracja do zadania 7.5.23



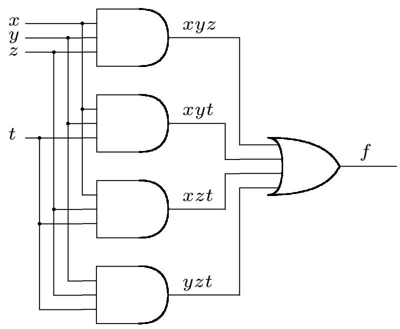
Rysunek 8.18. Układ logiczny odpowiadający funkcji $f(x, y, z) = xy\overline{z} + \overline{xy}z$ (zad. 7.5.24)

25. Funkcją boole'owską f taką, że $f(x, y, z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie dwie spośród wielkości x, y i z są równe jest funkcja $f(x, y, z) = xyz + \overline{xyz}$. Odpowiadają jej układy logiczne przedstawione na rys. 9.18.



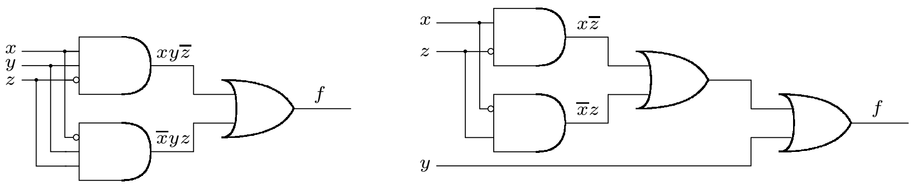
Rysunek 8.19. Układ logiczny odpowiadający funkcji $f(x, y, z) = xyz + \overline{xyz}$ (zad. 7.5.25)

26. Przedstawiony na rys. 9.19 układ logiczny odpowiada układowi do głosowania o czterech wejściach, w którym na wyjściu pojawia się jedynka, gdy na co najmniej trzech wejściach pojawia się jedynka. Układ ten odpowiada też funkcji boole'owskiej f, gdzie $f(x, y, z, t) = xyz + xyt + xzt + yzt$.



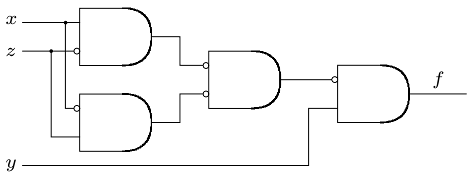
Rysunek 8.20. Układ logiczny dla funkcji $f(x, y, z, t) = xyz + xyt + xzt + yzt$ z zad. 7.5.26

27. a) Łatwo można zauważyć, że $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z)$. Obu tym postaciom odpowiadają przedstawione na rys. 9.20 układy logiczne utworzone z bramek AND, OR i NOT.



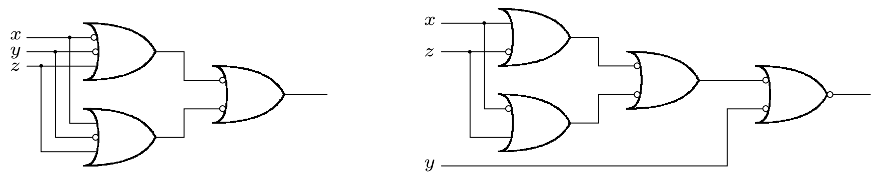
Rysunek 8.21. Układy logiczne odpowiadające obu postaciom funkcji $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z)$ (zad. 7.5.27 a)

b) Mamy $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z) = y\overline{(\overline{x\overline{z}} \cdot \overline{\overline{x}z})}$ i tej ostatniej postaci funkcji f (wyrażonej za pomocą iloczynu i dopełnienia) odpowiada przedstawiony na rys. 9.21 układ logiczny utworzony z bramek AND i NOT.



Rysunek 8.22. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y\overline{(\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z})}$ (zad. 7.5.27 b)

c) Chcąc przedstawić za pomocą bramek OR i NOT układ logiczny odpowiadający funkcji boole'owskiej f, warto funkcję f zapisać za pomocą sumy i dopełnienia. Tu przykładowo mamy $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = \overline{\overline{\overline{x} + \overline{y} + z} + \overline{x + \overline{y} + \overline{z}}}$ oraz $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z) = \overline{\overline{y} + \overline{(x\overline{z} + \overline{x}z)}} = \overline{\overline{y} + \overline{\overline{\overline{x} + z} + \overline{x + \overline{z}}}}$. Tym postaciom funkcji f (wyrażonym za pomocą sumy i dopełnienia) odpowiadają przedstawione na rys. 9.22 układy logiczne utworzone z bramek OR i NOT.

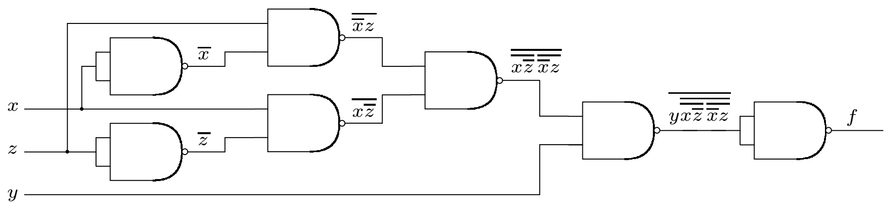


Rysunek 8.23. Układy logiczne dla funkcji $f(x,y,z,t) = xy\overline{z} + \overline{x}yz$ (zad. 7.5.27 c)

d) Chcąc przedstawić za pomocą bramek NAND układ logiczny odpowiadający funkcji boole'owskiej f, warto funkcję f zapisać za pomocą iloczynu i dopełnienia. Dla rozważanej funkcji kolejno mamy

$$f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z) = y\overline{\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z}} = \overline{\overline{y\overline{\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z}}}}.$$

Tej ostatniej postaci funkcji f odpowiada przedstawiony na rys. 9.23 układ logiczny utworzony z bramek NAND.

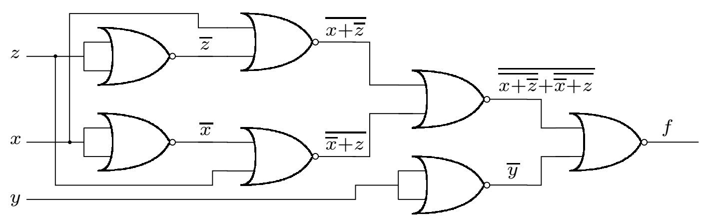


Rysunek 8.24. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z) = xy\overline{z}+\overline{x}yz = \overline{\overline{y\,\overline{\overline{x\overline{z}}\;\overline{\overline{x}z}}}}$ (zad. 7.5.27 d)

e) Chcąc przedstawić za pomocą bramek NOR układ logiczny odpowiadający funkcji boole'owskiej f, warto funkcję f zapisać za pomocą sumy i dopełnienia. Dla rozważanej funkcji kolejno mamy

$$f(x,y,z) = xy\overline{z}+\overline{x}yz = y(x\overline{z}+\overline{x}z) = y(\overline{\overline{x}+z}+\overline{x+\overline{x}}) = \overline{\overline{y}+\overline{\overline{\overline{x}+z}+\overline{x+\overline{z}}}}.$$

Tej ostatniej postaci funkcji f odpowiada przedstawiony na rys. 9.24 układ logiczny utworzony z bramek NOR.



Rysunek 8.25. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z) = \overline{\overline{y}+\overline{\overline{\overline{x}+z}+\overline{x+\overline{z}}}}$ (zad. 7.5.27 e)

28. 1. Nie; 2. Nie; 3. Tak; 4. Tak; 5. Tak.

Rozdział 9

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA UDOSTĘPNIANE STUDENTOM

9.1. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Logika

1. a) prawda; b) prawda; c) prawda; d) prawda; e) prawda; f) fałsz.

2. a)

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	q	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

b)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge (\sim p \wedge q)$	$\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1

c)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

d)

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$\vee$	$r \Rightarrow q$	$\sim p \wedge r$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0

3. a) nie; b) nie; c) tak; d) nie; e) nie; f) nie.
4. a) i b) są kontrtautologiami; c) i d) nie są kontrtautologiami.
5. Fakt, że każda z formuł a) – r) jest tautologią potwierdzamy matrycą wartości.

a) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$
0	1	0	1
1	0	0	1

b) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$

p	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow p$	$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
0	1	0	1
1	0	1	1

c) $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow p$

p	q	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$	$\Rightarrow p$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

e) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1

f) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

g) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

h) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

i) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

j) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

k) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

l) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

m) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)]$

p	q	r	s	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$	$p \vee q$	$r \vee s$	$(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

n) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)]$

p	q	r	s	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

o) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

p) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

q) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)]$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

r) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)]$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)$	$\Rightarrow$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

7. Rozważana formuła nie jest tautologią.
9. Logiczną równoważność schematów można badać metodą zero-jedynkową lub korzystając z odpowiednich równoważności. Schematy a), b), c) i f) są równoważne. W przypadku d) i g) rozważane schematy nie są równoważne.

e)
$$\begin{aligned}[(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow q &\Leftrightarrow [q] \Rightarrow q\\ &\Leftrightarrow 1\\ &\Leftrightarrow q \vee \sim q\end{aligned}$$

10. a) Odwrotna: Jeśli $10+20=30$, to $1+2=3$. Przeciwna: Jeśli $1+2 \neq 3$, to $10+20 \neq 30$. Przeciwstawna: Jeśli $10+20 \neq 30$, to $1+2 \neq 3$. b) Odwrotna: Jeśli $a=1$ lub $a=-1$, to $a^2=1$. Przeciwna: Jeśli $a^2 \neq 1$, to $a \neq 1$ i $a \neq -1$. Przeciwstawna: Jeśli $a \neq 1$ i $a \neq -1$, to $a^2 \neq 1$. c) Odwrotna: Jeśli $a^2 < b^2$, to $a < b$. Przeciwna: Jeśli $a \geqslant b$, to $a^2 \geqslant b^2$. Przeciwstawna: Jeśli $a^2 \geqslant b^2$, to $a \geqslant b$. d) Odwrotna: Jeśli jutro jest poniedziałek, to dzisiaj jest niedziela. Przeciwna: Jeśli dzisiaj nie jest niedziela, to jutro nie jest poniedziałek. Odwrotna: Jeśli jutro nie jest poniedziałek, to dzisiaj nie jest niedziela.

11. $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge \sim p)$.

12. $\sim (\sim (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge r \wedge \sim p)$

13. $\sim (\sim p \vee q) \vee q \vee \sim p$

14. $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim (\sim p \Rightarrow \sim q)$

15.
$$\begin{aligned}p \Rightarrow q &\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)\\ p \Leftrightarrow q &\Leftrightarrow \{[((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)] \downarrow [((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)]\}\\ &\quad \downarrow \{[((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)] \downarrow [((q \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow p)]\}\\ p \Rightarrow (\sim q \vee r) &\Leftrightarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [((q \downarrow q) \downarrow r) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow r)]\}\\ &\quad \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [((q \downarrow q) \downarrow r) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow r)]\}\end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned}(p \wedge r) \Rightarrow \sim q &\Leftrightarrow \{[((p|r)|(p|r))|((p|r)|(p|r))]|[((p|r)|(p|r))|((p|r)|(p|r))]\}\\ &\quad |((q|q)|(q|q))\\ p \Rightarrow (\sim q \vee r) &\Leftrightarrow ((p|p)|(p|p))|\{[((q|q)|(q|q))|(r|r)]|[((q|q)|(q|q))|(r|r)]\}\end{aligned}$$

17. a) $\sim p \vee q$; b) $p \vee q$; c) $\sim p$; d) p; e) 1 (np. $p \vee \sim p$); f) $\sim r \vee s$.

18. a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$; b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$; c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

19. a) $(\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$; b) $(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r)$; c) $(\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

20. a) spełnialny; b) niespełnialny; c) niespełnialny.

22. Łatwe uzasadnienie pozostawiamy czytelnikowi.

23. Każda z tych formuł jest regułą wnioskowania.

26. Rozważane zdanie jest zdaniem prawdziwym.

27. Zdania są równoważne.

27. Zdanie p jest prawdziwe, a zdania q i r są jednocześnie prawdziwe, albo jednocześnie fałszywe.

28. Wolno tylko wywnioskować, że *Student jest pracowity.*

29. Schemat $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \models (p \Rightarrow q \wedge r)$ jest regułą wnioskowania. Zatem, czy rozważana przez nas implikacja $p \Rightarrow q \wedge r$ o kupowaniu motorynki i samochodu jest prawdziwa? Gdzie jest powód wątpliwości? Zaproponuj takie zmiany w rozważanych zdaniach q i r, aby prawdziwość implikacji $p \Rightarrow q \wedge r$ nie wzbudzała wątpliwości.

30. Konkluzja wypowiedzi Orygenesa jest poprawna.

30+1. Wypowiedź Arystoteles *Logika jest potrzebna, bo jeśli nie jest potrzebna, to i tak jest potrzebna dla poprawnego uzasadnienia, że nie jest potrzebna* możemy zapisać w postaci: *Jeśli logika nie jest potrzebna, to i tak jest potrzebna* (*dla poprawnego uzasadnienia, że nie jest potrzebna*). *Zatem logika jest potrzebna.* Teraz widać, że to rozumowanie oparte jest o regułę wnioskowania Claviusa $\frac{\sim p \Rightarrow p}{p}$ (zob. 1.61) i jest poprawne.
30+2. Konkluzja żaków jest poprawna (ale dyskusyjna).
30+3. Zdanie jest fałszywe.
30+4. Niech p, q s i r oznaczają odpowiednio zdania:
p – *księgi zawierają to samo co jest w Koranie* (wtedy $\sim p$ jest zdaniem *księgi nie zgadzają się z treścią Koranu*)
q – *księgi są niepotrzebne,*
s – *spalić księgi,*
r – *księgi są szkodliwe.*
Wtedy rozumowanie przypisywane Kalifowi Omarowi jest zgodne ze schematem

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s),\ (\sim p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s),\ q \vee r}{s}.$$

A ponieważ schemat ten jest regułą wnioskowania (łatwo to sprawdzić), więc konkluzja o spaleniu biblioteki była logiczną konsekwencją poczynionych założeń.
36. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi. Chcemy wykazać, że jeśli średnia arytmetyczna liczb a i b jest większa od 1, to co najmniej jedna z liczb a i b jest większa od 1, czyli chcemy wykazać prawdziwość implikacji

$$\frac{a+b}{2} > 1 \Rightarrow (a > 1 \quad \text{lub} \quad b > 1).$$

W tym celu wystarczy wykazać prawdziwość jej kontrapozycji, czyli wykazać prawdziwość implikacji

$$\sim (a > 1 \quad \text{lub} \quad b > 1) \Rightarrow \sim \left(\frac{a+b}{2} > 1\right).$$

Zauważmy, że istotnie mamy

$$\begin{aligned}\sim(a>1 \text{ lub } b>1) &\Leftrightarrow (\sim(a>1)\wedge\sim(b>1))\\ &\Leftrightarrow a\leqslant 1\wedge b\leqslant 1\\ &\Leftrightarrow a+b\leqslant 2\\ &\Leftrightarrow \tfrac{a+b}{2}\leqslant 1\\ &\Leftrightarrow \sim\left(\tfrac{a+b}{2}>1\right).\end{aligned}$$

37. Dowód niewymierności liczby $\sqrt{3}$ jest podobny do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$ (zob. przykład 1.7.6).

39. Łatwo wykazuje się, że schemat $(p\wedge q)\Rightarrow(\sim p\Rightarrow\sim q)$ jest tautologią. Stąd wynika, że zdanie *Jeśli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i jest podzielna przez 5, to z faktu, że n nie jest podzielna przez 3 wynika, że n nie jest podzielna przez 5* jest prawdziwe. Nasze wątpliwości co do prawdziwości tego zdania wynikają z obserwacji, że istnieją liczby naturalne podzielne przez 5, a które nie są podzielne przez 5 (i odwrotnie). Problem obserwowanych tu niejednoznaczności jest konsekwencją tak zwanej intensjonalności spójników logicznych języka potocznego. Intensjonalność ta wyraża się tym, że w języku potocznym wartość logiczna zdania złożonego zależy nie tylko od wartości zdań składowych i łączącego je składnika, ale także od treści łączonych zdań.

40. 1. Tak; 2. Tak; 3. Tak; 4. Tak; 5. Tak; 6. Nie; 7. Tak; 8. Tak; 9. Tak; 10. Tak; 11. Tak; 12. Tak; 13. Tak; 14. Tak; 15. Nie; 16. Tak; 17. Tak; 18. Nie; 19. Tak.

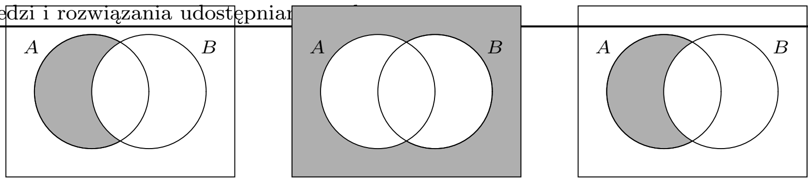
9.2. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Zbiory

1. a) Elementami zbioru A są -1, 0, 1, 2 i 3, jego podzbiorami są zbiory $\emptyset$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{-1,0\}$, $\{-1,1\}$, $\{-1,2\}$, $\{-1,3\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{-1,0,1\}$, $\{-1,0,2\}$, $\{-1,0,3\}$, $\{-1,1,2\}$, $\{-1,1,3\}$, $\{-1,2,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{-1,0,1,2\}$, $\{-1,0,1,3\}$, $\{-1,0,2,3\}$, $\{-1,1,2,3\}$, $\{0,1,2,3\}$, $\{-1,0,1,2,3\}$; b) Elementami zbioru A są 1, $\{1\}$, 2 i $\{2\}$, a jego podzbiorami są $\emptyset$, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$, $\{2\}$, $\{\{2\}\}$, $\{1,\{1\}\}$, $\{1,2\}$, $\{1,\{2\}\}$, $\{\{1\},2\}$, $\{\{1\},\{2\}\}$, $\{2,\{2\}\}$, $\{1,\{1\},2\}$, $\{1,\{1\},\{2\}\}$, $\{1,2,\{2\}\}$, $\{\{1\},2,\{2\}\}$, $\{1,\{1\},2,\{2\}\}$; c) Elementami zbiór A są $\emptyset$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, a podzbiorami $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\}$ i $\{\emptyset,\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\}$; d) Zbiór A składa się z czterech elementów i są nimi $\emptyset$, 1, $\{2\}$ i $\{3,\{4\}\}$. Natomiast jego podzbiorami są $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{1\}$, $\{\{2\}\}$, $\{\{3,\{4\}\}\}$, $\{\emptyset,1\}$, $\{\emptyset,\{2\}\}$, $\{\emptyset,\{3,\{4\}\}\}$, $\{1,\{2\}\}$, $\{1,\{3,\{4\}\}\}$, $\{\{2\},\{3,\{4\}\}\}$, $\{\emptyset,1,\{2\}\}$, $\{\emptyset,1,\{3,\{4\}\}\}$, $\{\emptyset,\{2\},\{3,\{4\}\}\}$, $\{1,\{2\},\{3,\{4\}\}\}$ i $\{\emptyset,1,\{2\},\{3,\{4\}\}\}$.

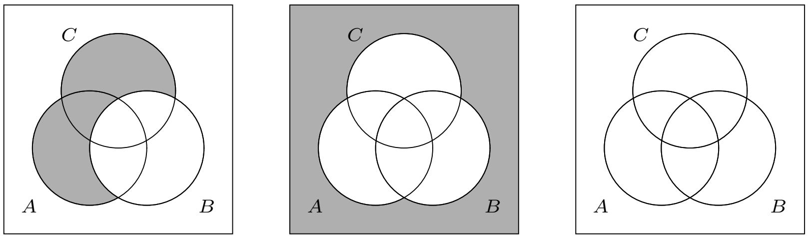
2. a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,10\}$; b) $A-B=\{7,10\}$; c) $B-C=\{1,3,5\}$; d) $A\cap C=\{4\}$; e) $A'=\{2,3,5,6,8,9\}$; f) $X'=\emptyset$; g) $C\cap\emptyset=\emptyset$; h) $B\cup\emptyset=B=\{1,2,3,4,5\}$; i) $B'\cup(C-A)'=\{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; j) $B\cup X=X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; k) $A\cap(B\cup C)=\{1,4\}$; l) $(A\cup B)-C=\{1,3,5,7,10\}$; m) $(A\cap B)'\cup C=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; n) $(A\cup B)-(B\cap C)=\{1,3,5,7,10\}$; o) $A\vartriangle B=\{2,3,5,7,10\}$; p) $A\vartriangle A=\emptyset$; q) $A\vartriangle A'=X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; r) $X\vartriangle B=B'=\{6,7,8,9,10\}$; s) $\emptyset\vartriangle A=A=\{1,4,7,10\}$.

3.

4. a) $\langle 1;7)$; b) $(3;5\rangle$; c) $\langle 1;3\rangle$; d) $\langle 2;5\rangle$; e) $\emptyset$; f) $(5;\infty)$; g) $(3;5\rangle$; h) $\emptyset$; i) $\langle 1;3\rangle\cup(5;7)$; j) $(-\infty;1)\cup\langle 2;5\rangle$.



a) $A\cap B'=A-B$ b) $A'-B$ c) $(A\cup B)-B$



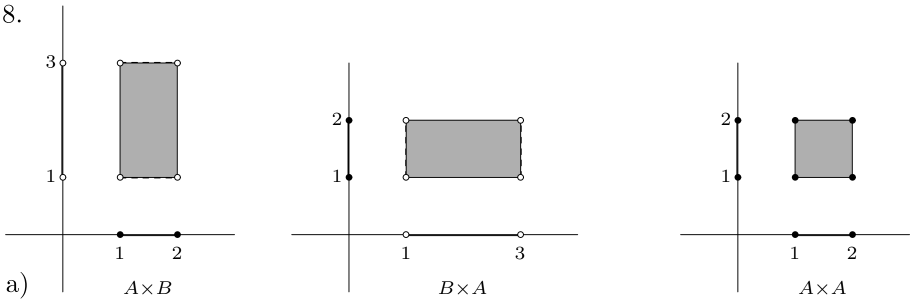
d) $B'\cap(A\cup C)$ e) $(A'-B)\cap(A\cup C')$ f) $((A\cap B)-(C-A'))\cap C$

5. a) $A\subseteq B$; b) $B\subseteq A$; c) $A=B=X$; d) $A=X$; e) $B'\subseteq A$; f) $A\subseteq B'$; g) $A\cup B=X$; h) $A=X$; i) $A\subseteq B$; j) $A\subseteq B$; k) $A\cap B=\emptyset$; l) $A=\emptyset$.

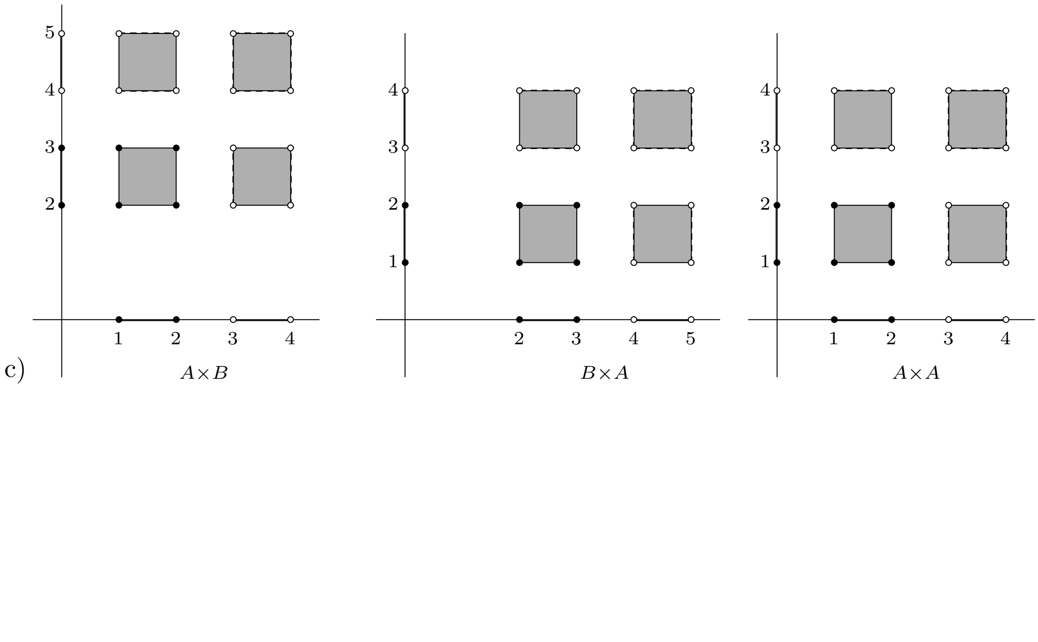
6. a) $\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$; b) $\{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b)\}$; c) $\{(1,a,x),(1,a,y),(1,b,x),(1,b,y),(2,a,x),(2,a,y),(2,b,x),(2,b,y),(3,a,x),(3,a,y),(3,b,x),(3,b,y)\}$; d) $\{(1,1,x),(1,1,y),(1,2,x),(1,2,y),(1,3,x),(1,3,y),(2,1,x),(2,1,y),(2,2,x),(2,2,y),(2,3,x),(2,3,y),(3,1,x),(3,1,y),(3,2,x),(3,2,y),(3,3,x),(3,3,y)\}$.

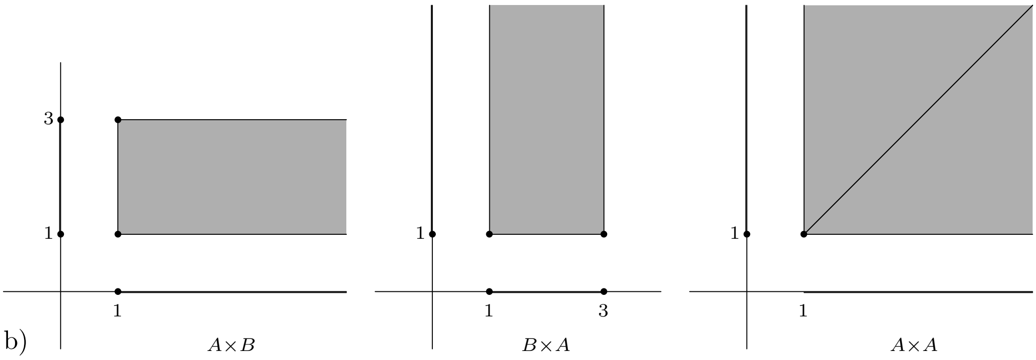
7. a) $\emptyset$; b) $\{(1,5),(1,\{6,\{7\}\}),(\{2,\{3,\{4\}\}\},5),(\{2,\{3,\{4\}\}\},\{6,\{7\}\})\}$; c) $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$; d) $\{(\{0,1\},\{0,1\},\{0,1\})\}$.

8.



Nie umiem pozbyć się tej przekątnej z ostatniego rysunku. Jak to można osiągnąć w LATEX-u?



b) 

9. a) $A \cup B$; b) X; c) $A \cap (B \cup C)$; d) X.

11. a) Tak; b) Tak; c) Tak; d) Nie; e) Nie; f) Nie; g) Tak; h) Tak.

12. a) Jest $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, ale zbiory $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(A \cup B)$ nie muszą być równe. b) Zbiory $\mathcal{P}(A - B)$ i $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ nie są równe. W ogólnym przypadku żaden ze zbiorów $\mathcal{P}(A - B)$ i $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ nie zawiera się w drugim. c) W ogólnym przypadku zbiory $\mathcal{P}(A \vartriangle B)$ i $\mathcal{P}(A) \vartriangle \mathcal{P}(B)$ są nieporównywalne. d) Zbiory te nigdy nie są równe.

15. a) Twierdzeniem algebry zbiorów. b) Związek nie jest twierdzeniem algebry zbiorów. c) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów. d) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów, bo $A \subseteq A \cup (A \cap B) \subseteq A \cup A = A$. e) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów. f) Związek nie jest twierdzeniem algebry zbiorów. g) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów. h) Równość jest twierdzeniem algebry zbiorów. i) Równość $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$ nie jest twierdzeniem algebry zbiorów. j) Równość $A - (B - C) = (A - B) - C$ nie jest twierdzeniem algebry zbiorów.

19. a) $\forall_x\, [\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]$;
b) $\exists_x\, [\varphi(x) \wedge \psi(x)]$;
c) $\forall_x\, [\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)]$;
d) $\forall_x\, [\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)]$.

20. Przez $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{P}$ oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich liczb pierwszych. Wtedy rozważane zdania można zapisać następująco: a) $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geqslant 0$; b) $\exists_{n \in \mathbb{N}} (3|n \wedge 4|n)$; c) $\sim (\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\, n \leqslant n_0)$ lub równoważnie $\forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\, n > n_0$; d) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{p \in \mathbb{P}}\, p|2n$; e) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{p,q \in \mathbb{P}}\, 2n = p + q$.

21. a) Zdanie jest prawdziwe. b) Zdanie jest prawdziwe. c) Zdanie jest prawdziwe.

22. a) Zdanie jest prawdziwe. b) Zdanie jest fałszywe. c) Zdanie jest prawdziwe. d) Zdanie jest fałszywe. e) Zdanie jest prawdziwe. f) Zdanie jest prawdziwe. g) Zdanie jest fałszywe. h) Zdanie jest prawdziwe.

23. a) Zdanie jest fałszywe. b) Zdanie jest prawdziwe. c) Zdanie jest prawdziwe. d) Zdanie jest fałszywe. e) Zdanie jest prawdziwe. f) Zdanie jest fałszywe.

24. a) Stwierdzenie jest prawdziwe. b) Stwierdzenie jest fałszywe. c) i d) Stwierdzenia są prawdziwe. e) Stwierdzenie jest fałszywe. f) Stwierdzenie jest fałszywe.

25. a) Zdanie jest prawdziwe. b) Zdanie jest fałszywe. c) Zdanie jest prawdziwe. d) Ponieważ zdanie $\exists_x \forall_y\ \varphi(x,y)$ jest fałszywe (zob. b)), więc także i zdanie $\forall_x \forall_y\ \varphi(x,y)$ jest zdaniem fałszywym.

28. a) $\sim (\forall_{x\in X}\, [\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]) \quad \Leftrightarrow \quad \exists_{x\in X}\, [\varphi(x) \wedge \sim \psi(x)]$

b) $\sim \big(\forall_{x\in\mathbb{R}}\, [(x<1 \text{ lub } x>2) \Rightarrow x^2-3x+2>0]\big)$
$\Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{R}}\, [(x<1 \text{ lub } x>2) \wedge (x^2-3x+2 \leqslant 0)].$

32. $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = \{(0,0)\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x\neq 0\}$.

33. a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 0;\infty)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = (-\infty;0)$.
b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1;2)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 0;1)$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = (-\infty;0)\cup\langle 1;\infty)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = (-\infty;-1\rangle \cup \langle 2;\infty)$.
c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 0;\infty)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = (-\infty;0)$.

34. a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{(0,0)\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y>0\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} = A_0 = \{(0,0)\}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y\leqslant 0\} - \{(0,0)\}$.
b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{(0,0)\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y>0\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \colon y\geqslant x^2\}$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y<x^2\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y\leqslant 0\} - \{(0,0)\}$.

35. $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{\sin t\} = \{\sin t \colon t\in\mathbb{R}\} = \langle -1;1\rangle$.

46. 1. Nie; 2. Nie; 3. Nie; 4. Nie; 5. Tak; 6. Tak; 7. Nie; 8. Nie; 9. Nie; 10. Tak; 11. Nie; 12. Nie; 13. Nie; 14. Nie; 15. Nie; 16. Nie; 17. Nie; 18. Nie; 19. Nie; 20. Tak; 21. Nie; 22. Tak; 23. Nie; 24. Tak; 25. Nie; 26. Tak.

47. 1. Tak; 2. Tak; 3. Nie; 4. Tak; 5. Nie; 6. Tak; 7. Nie; 8. Nie; 9. Tak; 10. Nie; 11. Nie; 12. Nie; 13. Nie; 14. Tak; 15. Tak.

9.3. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Indukcja

1.
2.
3. Nowe
4. Nowe
5. Nowe
6. Nowe
7. Nowe
3. $l_n = n(n-3)/2$.

4. $S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1 = n^2$.

5. Zbiór S jest pusty.

7. $\sum_{k=1}^n k(k+2)\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$, $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 2n^4-n^2$.

8. $\sum_{k=1}^n k(k+1)^2 = \frac{n(n+1)(3n^3+11n+10)}{12}$.
10. a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$; b) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1+(-1))^n = 0^n = 0$; c) $\sum_{k=0}^n 2^k\binom{n}{k} = (1+2)^n = 3^n$; d) $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

19. a) $x_n = (3 + (-1)^{n+1})/2$; b) $x_n = (n+1)2^n$.

23. Do budowy ściętej piramidy potrzeba $\sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$ pomarańczy. Liczba ta nie jest mniejsza od 100 dla $n = 4$.

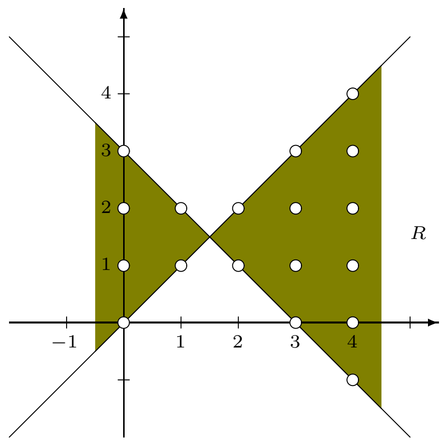
34. 1. Nie; 2. Tak; 3. Tak; 4. Tak; 5. Tak.

35. 1. Tak; 2. Tak; 3. Nie; 4. Tak; 5. Tak; 6. Nie; 7. Nie; 8. Nie; 9. Tak; 10. Tak; 11. Tak; 12. Nie.

9.4. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Funkcje

1. a) Tak; b) Tak; c) Tak; d) Nie. W tej ostatniej części błędnie wpisałem $(1,4)$ zamiast $(4,1)$.

2. a) Zbiór R (który przedstawiliśmy na rys. 9.1) nie jest funkcją.



Rysunek 9.1. Ilustracja zbioru $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon (x-y)(x+y-3) \geqslant 0\}$

b) Zbiór R jest funkcją i temu zbiorowi odpowiada odwzorowanie $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = n+1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

c) Zbiór nie jest funkcją.

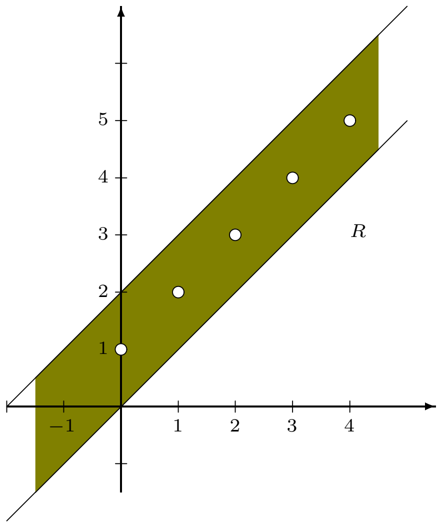
d) Tym razem $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \colon |x| = |y|\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \colon |x| = y\} = \{(m,|m|) \colon m \in \mathbb{Z}\}$ (zob. rys. 9.3) jest funkcją. Zbiorowi temu odpowiada odwzorowanie $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(n) = |n|$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

3. $f = \{(0,0),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ i funkcja f jest różnowartościowa i na.

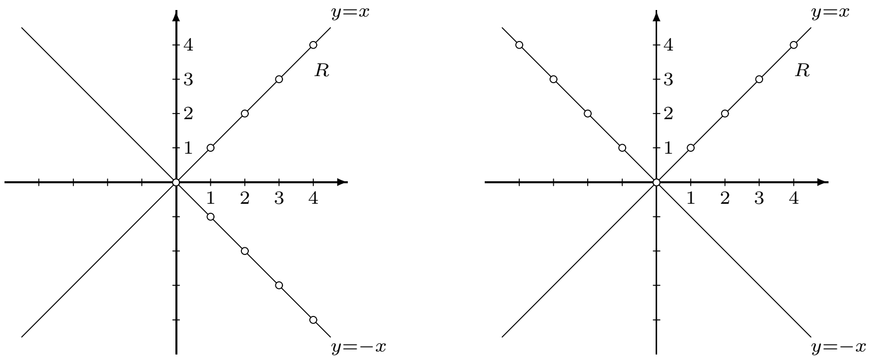
4. Jeśli zbiory A i B są niepuste, to zbiór $A \times B$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór B jest jednoelementowy.

6. Dla funkcji $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = |x+2| - 3$, i dla zbioru $A = \langle -5; 1\rangle$ mamy:

$f(A) = f(\langle -5;1\rangle) = \langle -3;0\rangle$,
$f^{-1}(A) = f^{-1}(\langle -5;1\rangle) = \langle -6;2\rangle$,
$f(f(A)) = f(f(\langle -5;1\rangle)) = f(\langle -3;0\rangle) = \langle -3;-1\rangle$,
$f(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(\langle -5;1\rangle)) = f(\langle -6;2\rangle) = \langle -3;1\rangle$,
$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\langle -5;1\rangle)) = f^{-1}(\langle -3;0\rangle) = \langle -5;1\rangle$,



Rysunek 9.2. Ilustracja zbioru $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon\ (x - y)(x + y - 3) < 0\}$



Rysunek 9.3. Ilustracje zbiorów $\{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\colon\ |x| = |y|\}$ i $\{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\colon\ |x| = |y|\}$

$f^{-1}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(f^{-1}(\langle -5; 1\rangle)) = f^{-1}(\langle -6; 2\rangle) = \langle -7; 3\rangle$.

7. Dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = x^2$, oraz dla zbiorów $A = \langle -2; 2)$ i $B = (0; 4\rangle$ mamy:
$f(A) \cup f(B) = f(\langle -2; 2)) \cup f((0; 4\rangle) = \langle 0; 4\rangle \cup (0; 16\rangle = \langle 0; 16\rangle$,
$f(A \cup B) = f(\langle -2; 2) \cup (0; 4\rangle) = f(\langle -2; 4\rangle) = \langle 0; 16\rangle$,
$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(\langle -2; 2)) \cup f^{-1}((0; 4\rangle) = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\langle -2; 0) \cup (0; 2\rangle) = \langle -2; 2\rangle$,
$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(\langle -2; 2) \cup (0; 4\rangle) = f^{-1}(\langle -2; 4\rangle) = \langle -2; 2\rangle$,
$f(A) \cap f(B) = f(\langle -2; 2)) \cap f((0; 4\rangle) = \langle 0; 4\rangle \cap (0; 16\rangle = (0; 4\rangle$,
$f(A \cap B) = f(\langle -2; 2) \cap (0; 4\rangle) = f((0; 2)) = (0; 4)$,
$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(\langle -2; 2)) \cap f^{-1}((0; 4\rangle) = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cap (\langle -2; 0) \cup (0; 2\rangle) = (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$,
$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\langle -2; 2) \cap (0; 4\rangle) = f^{-1}((0; 2)) = (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$.

8. a) $f(\{1, 102, 303\}) = \{0, 103, 302\}$, $f^{-1}(\{1, 101, 2008\}) = \{0, 100, 2009\}$;
b) $f(\{1, 102, 303\}) = \{1, 100\}$, $f^{-1}(\{1, 101, 2008\}) = \{1\}$;
c) $f(\{1, 102, 303\}) = \{15, 112, 313\}$, $f^{-1}(\{1, 101, 2008\}) = \{91, 1998\}$;
d) $f(\{1, 102, 303\}) = \{0, 51, 151\}$, $f^{-1}(\{1, 101, 2008\}) = \{2, 3, 202, 203, 4016, 4017\}$.

9. a) $f(n) = 2n$; b) $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$; c) $f(n) = 1$; d) $f(n) = n$.

11. a) Funkcja f nie jest różnowartościowa ani nie jest na. b) Funkcja f jest różnowartościowa, ale nie jest ona na.

14. a) Funkcja f nie jest różnowartościowa, $f(\mathbb{R}) = \langle -18; \infty)$. b) Funkcja f nie jest różnowartościowa i nie jest surjekcją. c) Funkcja f jest różnowartościowa i nie jest surjekcją.

15. a) Funkcja f jest różnowartościowa i $f(\mathbb{R}) = f((-\infty;0)\cup\langle 0;\infty)) = (-\infty;0)\cup \langle 0;\infty) = \mathbb{R}$. b) Funkcja f jest różnowartościowa i $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. c) Funkcja f jest różnowartościowa i $f(\mathbb{R}) = (1;\infty)$.
16. a) Funkcja f nie jest różnowartościowa i $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1\}$. b) Funkcja f nie jest różnowartościowa i $f(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. c) Funkcja $f\colon 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ i $f(2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}) \subseteq 4\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z}$. d) Funkcja $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ i $f(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

17. a) Funkcjami odwzorowującymi zbiór $X = \{1,2\}$ w zbiór $Y = \{3,4,5\}$ są funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_9$ określone następującymi tabelami:
$\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_1 & 3 & 3 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_2 & 4 & 4 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_3 & 5 & 5 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_4 & 3 & 4 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_5 & 4 & 3 \end{array}$,
$\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_6 & 3 & 5 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_7 & 5 & 3 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_8 & 4 & 5 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline f_9 & 5 & 4 \end{array}$.

b) Funkcje $f_4, \ldots, f_9$ są wszystkimi różnowartościowymi funkcjami odwzorowującymi zbiór X w zbiór Y.

c) Z faktu, że $|Y| = 3 > 2 = |X|$ wynika, że nie istnieje funkcja różnowartościowa odwzorowująca zbiór Y w zbiór X.

18. $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$, $\{1,2\}^\emptyset = \{\emptyset\}$ i $\emptyset^{\{1,2\}} = \{\emptyset\}$. (W każdym z tych przypadków funkcja pusta, czyli zbiór pusty, jest jedynym podzbiorem odpowiedniego iloczynu kartezjańskiego.)

19. $f(\{0,e,\pi\}) = \{1,3,4\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{x\in\mathbb{R}\colon f(x) = 0\} = \{x\in\mathbb{R}\colon \lfloor x\rfloor + 1 = 0\} = \{x\in\mathbb{R}\colon \lfloor x\rfloor = -1\} = \langle -1;0)$ i $f^{-1}(\{\mathbb{N}\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(\{k\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}\colon f(x) = k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}\colon \lfloor x\rfloor + 1 = k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}\colon \lfloor x\rfloor = k-1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\langle k-1;k) = \langle -1;\infty)$.

20. a) $f(\mathbb{R}) = \langle 0;1)$, b) $f(\mathbb{R}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\langle 2k; 2k+1)$, c) $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$, d) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$, zob. rys. 9.4 i 9.5.

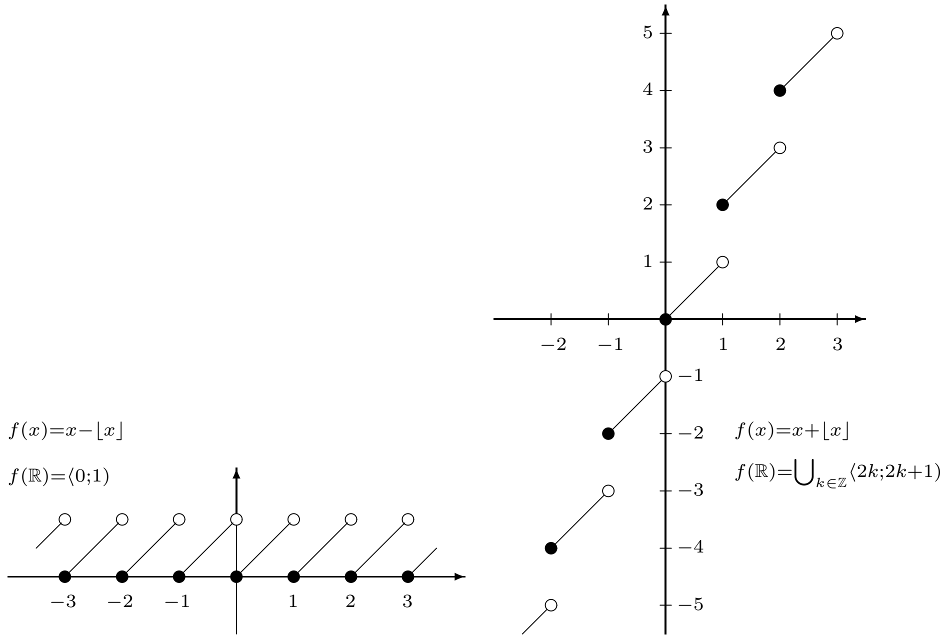
21. $f^{-1} = \{(1,4),(2,1),(3,3),(4,2),(5,5)\}$.

22. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$; b) $f^{-1}(x) = 2^x + 4$; c) $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$.

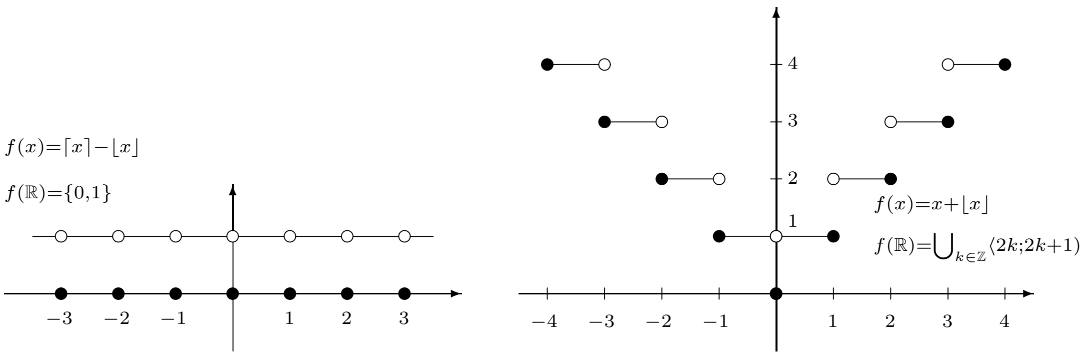
23. a) $g\circ f$ nie istnieje, bo $f(A) = B \subsetneq D_g = A$, $f\circ g = \{(1,1),(2,1),(3,8),(4,9),(5,1)\}$, $f\circ f$ nie istnieje, bo $f(A) = B \subsetneq D_f = A$, $g\circ g = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,1),(5,2)\}$; b) $f^{-1} = \{(1,2),(2,5),(3,4),(8,1),(9,3)\}$, g^{-1} nie istnieje, bo funkcja g nie jest różnowartościowa.

24. a) $g^{-1}\circ f\circ g = \{(1,3),(2,1),(3,2),(4,4)\}$;
b) $f\circ g^{-1}\circ g = f = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,1)\}$;
c) $g\circ f\circ g^{-1} = \{(1,2),(2,4),(3,3),(4,1)\}$;
d) $g\circ g^{-1}\circ f = f = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,1)\}$;
e) $f^{-1}\circ g^{-1}\circ f\circ g = \{(1,1),(2,4),(3,2),(4,3)\}$.

25. Jeśli f, g, $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są funkcjami takimi, że $f(x) = x-1$, $g(x) = \frac{-1}{x^2+2}$ oraz



Rysunek 9.4. Wykresy funkcji $f(x) = x - \lfloor x\rfloor$ i $f(x) = x + \lfloor x\rfloor$



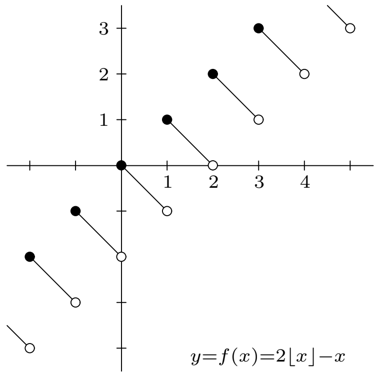
Rysunek 9.5. Wykresy funkcji $f(x) = \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor$ i $f(x) = \lceil |x|\rceil$

$h(x) = 4$, to $f^{-1}(x) = x+1$ i mamy: a) $(g\circ f)(x)g(f(x)) = g(x-1) = \frac{-1}{(x-1)^2+2}$; b) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-1}{x^2+2}\right) = \frac{-1}{x^2+2} - 1 = -(x^2+3)/(x^2+2)$; c) $(h\circ g\circ f)(x) = h((g\circ f)(x)) = 4$; d) $(g\circ h\circ f)(x) = g(h(f(x))) = g(4) = \frac{-1}{18}$; e) $(g\circ f^{-1}\circ f)(x) = g(x) = \frac{-1}{x^2+2}$; f) $(f^{-1}\circ g\circ f)(x) = f^{-1}((g\circ f)(x)) = f^{-1}\left(\frac{-1}{(x-1)^2+2}\right) = \frac{-1}{(x-1)^2+2} + 1 = ((x-1)^2+1)/((x-1)^2+2)$.

26. b) $f^{-1}(2006) = -1003$ i $f^{-1}(2007) = 1003$.

27. Dla $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ mamy $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-2}\right) = \dfrac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{x}{x-2} - 1} = x$.
Podobnie, dla $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ mamy $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \dfrac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-2} = x$.
Z tego wynika, że funkcje f i g są wzajemnie odwrotne.

28. a) Wykres funkcji $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gdzie $f(x) = 2\lfloor x\rfloor - x = \lfloor x\rfloor - (x - \lfloor x\rfloor)$ dla $x \in \mathbb{R}$ przedstawiliśmy na poniższym rysunku.



d) $f^{-1}(x) = 2\lceil x\rceil - x$.

29. $f(\mathbb{R}) = (-1;1)$ i $f^{-1}(y) = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{1-y^2}}$ dla $y \in (-1;1)$.

30. a)

$$\begin{array}{rcl} f(101) & = & 101-3=98, \\ f(100) & = & 100-3=97, \\ f(99) & = & f(f(99+5))=f(f(104))=f(101)=98, \\ f(98) & = & f(f(98+5))=f(f(103))=f(100)=97, \\ f(97) & = & f(f(97+5))=f(f(102))=f(99)=98, \\ f(96) & = & f(f(96+5))=f(f(101))=f(98)=97. \end{array} \tag{9.1}$$

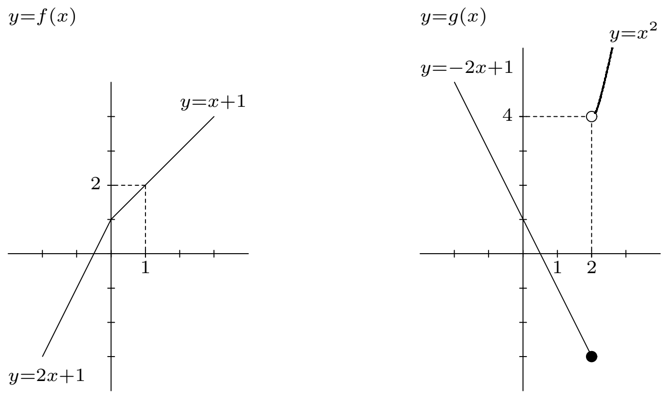
b) $f(n) = 97 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ dla każdej liczby całkowitej $n \leqslant 100$. c) $f(\mathbb{Z}) = \{97, 98, 99, \ldots\}$.

32. a) Wyznaczając funkcję $f \circ g$, bierzemy pod uwagę te przedziały, w których funkcja g (z uwagi na definicję funkcji f) ma wartości ujemne oraz te w których ma ona wartości nieujemne (zob. poniższy rys.). Rozróżniamy trzy przypadki:

$$\begin{array}{rcl} x \in (-\infty; \frac{1}{2}\rangle & \Rightarrow & g(x) = -2x+1 \geqslant 0 \\ & \Rightarrow & f(g(x)) = f(-2x+1) = (-2x+1)+1 = -2x+2, \\ x \in (\frac{1}{2}; 2\rangle & \Rightarrow & g(x) = -2x+1 < 0 \\ & \Rightarrow & f(g(x)) = f(-2x+1) = 2(-2x+1)+1 = -4x+3, \\ x \in (2;\infty) & \Rightarrow & g(x) = x^2 \geqslant 0 \\ & \Rightarrow & f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1. \end{array}$$

Podobnie postępujemy wyznaczając złożenie $g \circ f$. Tym razem też rozważamy trzy przypadki:

$$\begin{array}{rcl} x \in (-\infty; 0\rangle & \Rightarrow & f(x) = 2x+1 \leqslant 2 \\ & \Rightarrow & g(f(x)) = g(2x+1) = -2(2x+1)+1 = -4x-1, \\ x \in (0; 1\rangle & \Rightarrow & f(x) = x+1 \leqslant 2 \\ & \Rightarrow & g(f(x)) = g(x+1) = -2(x+1)+1 = -2x-1, \\ x \in (1;\infty) & \Rightarrow & f(x) = x+1 > 2 \\ & \Rightarrow & g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2. \end{array}$$



b) $(f \circ g)(x, y) = 3x^2$. c) $(f \circ g)(x, y) = (x^2 - 1, x^2 + 2y)$.

33. a) $f^{-1}(x, y) = ((3x+y)/5, (2x-y)/5)$; b) $f^{-1}(x, y) = ((-5x+2y+3)/3, (4x-y-6)/3)$.

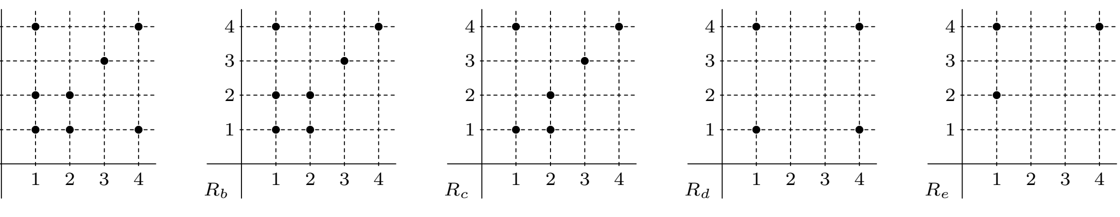
35. Jeśli równość $h \circ f = h$ jest prawdziwa dla każdej funkcji $h\colon X \to X$, to w szczególności dla funkcji $h = 1_X$ jest $f = 1_X \circ f = 1_X$. Zatem funkcja f musi być funkcją tożsamościową na zbiorze X.

37. a) Ponieważ przeciwdziedzina $\mathbb{R}$ funkcji f nie jest równa dziedzinie $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcji g, więc nie jest spełniony warunek definicji 4.5.1 i dlatego powinniśmy powiedzieć, że złożenie $g \circ f$ nie istnieje. b) Ponieważ $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, więc $g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2+1}$ istnieje dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. c) Niech $f\colon X \to Y$ i $g\colon \overline{Y} \to Z$ będą funkcjami takimi, że $f(X) \subseteq D_g = Y$. Wtedy $f(x) \in D_g$ i dlatego istnieje $g(f(x))$ dla każdego $x \in X$. Zatem, jeśli $f(X) \subseteq D_g = Y$, to możemy przyjąć, że $g \circ f\colon X \to Z$ jest funkcją taką, że $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dla każdego $x \in X$.

40. 1. Tak; 2. Tak; 3. Nie; 4. Tak; 5. Nie; 6. Nie.

9.5. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Relacje

1. Każda relacja w zbiorze X jest podzbiorem zbioru $X \times X$. Ponieważ zbiór $X \times X$ ma 100 elementów, więc ma on 2^{100} różnych podzbiorów. Zatem w zbiorze X mamy 2^{100} różnych relacji dwuargumentowych.
2. Ilustracje przykładowych relacji do poszczególnych części zadania przedstawiono na rys. 9.6.



Rysunek 9.6. Ilustracje relacji R_a, R_b, R_c, R_d i R_e

a) $R_a = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$,
R_a jest zwrotna, bo $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R_a$,
R_a jest symetryczna, bo jednocześnie $(1,2), (2,1) \in R_a$ i $(1,4), (4,1) \in R_a$,

R_a nie jest przechodnia, bo np. $(2,1),(1,4) \in R_a$, ale $(2,4) \notin R_a$.

b) $R_b = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,
R_b jest zwrotna, bo $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R_b$,
R_b nie jest symetryczna, bo jednocześnie $(1,4) \in R_b$ i $(4,1) \notin R_b$,
R_b nie jest przechodnia, bo np. $(2,1),(1,4) \in R_b$, ale $(2,4) \notin R_b$.

c) $R_c = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,
R_c jest zwrotna, bo $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R_c$,
R_c jest antysymetryczna, bo spośród par (x,y) i (y,x), gdzie $x \neq y$, co najwyżej jedna z nich należy do zbioru R_c,
R_c nie jest przechodnia, bo np. $(2,1),(1,4) \in R_b$, ale $(2,4) \notin R_b$.

d) $R_d = \{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}$,
R_d jest symetryczna, bo jednocześnie $(1,4),(4,1) \in R_d$,
R_d jest przechodnia, bo spełniony jest warunek „ jeśli $(x,y),(y,z) \in R_d$, to $(x,z) \in R_d$: $(1,1),(1,4) \in R_d$ i $(1,4) \in R_d$, $(1,4),(4,1) \in R_d$ i $(1,1) \in R_d$, $(1,4),(4,4) \in R_d$ i $(1,4) \in R_d$, $(4,1),(1,1) \in R_d$ i $(4,1) \in R_d$, $(4,1),(1,4) \in R_d$ i $(4,4) \in R_d$ i $(4,4),(4,1) \in R_d$ i $(4,1) \in R_d$,
R_d nie jest antysymetryczna, bo $(1,4),(4,1) \in R_d$ i $1 \neq 4$,
R_d nie jest zwrotna, bo np. $(2,2) \notin R_d$.
e) $R_e = \{(1,2),(1,4),(4,4)\}$,
R_e jest przechodnia, bo $(1,4),(4,4) \in R_e$ i $(1,4) \in R_e$,
R_e nie jest zwrotna, bo np. $(1,1) \notin R_e$,
R_e nie jest symetryczna, bo np. $(1,2) \in R_e$, ale $(2,1) \notin R_e$.

3. a) S nie jest zwrotna, bo np. $(2,2) \notin S$,
S nie jest przechodnia, bo $(2,1),(1,2) \in S$, ale $(2,2) \notin S$,
S nie jest symetryczna, bo np. $(3,4) \in S$ i $(4,3) \notin S$,
S nie jest antysymetryczna, bo $(1,2),(2,1) \in S$ i $1 \neq 2$.

b) S nie jest zwrotna, bo np. $(2,2) \notin S$,
S nie jest przechodnia, bo np. $(2,4),(4,16) \in S$, ale $(2,16) \notin S$,
S nie jest symetryczna, bo np. $(2,4) \in S$ i $(4,2) \notin S$,
S jest antysymetryczna, bo jeśli $(x,y) \in S$ i $(y,x) \in S$, to $y = x^2$ i $x = y^2$ i dlatego $x = y = 0$ lub $x = y = 1$.

c) S jest zwrotna, bo $x = x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S jest przechodnia, bo jeśli $x = y$ i $y = z$, to $x = z$,
S jest symetryczna, bo jeśli $x = y$, to $y = x$,
S jest antysymetryczna, bo jeśli $x = y$ i $y = x$, to $x = y$.

d) S jest zwrotna, bo $5|x - x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S jest przechodnia, bo jeśli $5|x-y$ i $5|y-z$, to łatwo pokazuje się, że $5|x-z$,
S jest symetryczna, bo jeśli $5|x-y$, to także $5|y-x$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $5|6-1$ i $5|1-6$, ale $6 \neq 1$.

e) S jest zwrotna, bo $2|x+x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{Z}$,
S jest przechodnia, bo jeśli $2|x+y$ i $2|y+z$, to łatwo pokazuje się, że $2|x+z$,
S jest symetryczna, bo jeśli $2|x+y$, to także $2|y+x$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $2|3+1$ i $2|1+3$, ale $3 \neq 1$.

f) S jest zwrotna, bo $xx \geqslant 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{Z}$,
S nie jest przechodnia, bo np. $1 \cdot 0 \geqslant 0$ i $0 \cdot (-1) \geqslant 0$, ale $1 \cdot (-1) \ngeqslant 0$,
S jest symetryczna, bo jeśli $xy \geqslant 0$, to także $yx \geqslant 0$,

S nie jest antysymetryczna, bo np. $2 \cdot 3 \geqslant 0$ i $3 \cdot 2 \geqslant 0$, ale $3 \neq 2$.

g) S jest zwrotna, bo $x - x \leqslant 2$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S nie jest przechodnia, bo np. $5 - 3 \leqslant 2$ i $3 - 1 \leqslant 2$, ale $5 - 1 \nleqslant 2$,
S nie jest symetryczna, bo np. $5 - 8 \leqslant 2$, ale $8 - 5 \nleqslant 2$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $3 - 2 \leqslant 2$ i $2 - 3 \leqslant 2$, ale $3 \neq 2$.

h) S jest zwrotna, bo $x - x = y - y$ dla każdej pary $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,
S jest przechodnia, bo jeśli dla par $(x, y), (z, t), (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ jest $((x, y), (z, t)) \in S$ i $((z, t), (u, v)) \in S$, to $x - z = y - t$ i $z - u = t - v$, to $x - u = y - v$, czyli $((x, y), (u, v)) \in S$,
S jest symetryczna, bo jeśli dla par $(x, y), (z, t) \in \mathbb{Z}^2$ jest $x - z = y - t$, to także $y - t = x - z$, co oznacza, że z przynależności $((x, y), (z, t)) \in S$ wynika przynależność $((z, t), (x, y)) \in S$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $((5, 3), (4, 2)) \in S$ (bo $5 - 4 = 3 - 2$) i $((4, 2), (5, 3)) \in S$ (bo $4 - 5 = 2 - 3$), ale $(5, 3) \neq (4, 2)$.

i) S nie jest zwrotna (jest antyzwrotna), bo $x = x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$,
S nie jest przechodnia, bo np. $1 \neq 2$ i $2 \neq 1$, ale nie jest prawdą, że $1 \neq 1$,
S jest symetryczna, bo jeśli $x \neq y$, to $y \neq x$,
S nie jest antysymetryczna, bo np. $1 \neq 2$ i $2 \neq 1$ i nie jest prawdą, że $1 = 2$.

j) S jest zwrotna, bo $x + y \leqslant x + y$ dla każdej pary $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
S jest przechodnia, bo jeśli dla par $(x, y), (z, t), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ jest $((x, y), (z, t)) \in S$ i $((z, t), (u, v)) \in S$, to $x + y \leqslant z + t$ i $z + t \leqslant u + v$, to $x + y \leqslant u + v$, więc $((x, y), (u, v)) \in S$,
S nie jest symetryczna, bo np. $((2, 1), (5, 7) \in S$ (bo $2 + 1 \leqslant 5 + 7$), ale $((5, 7), (2, 1)) \notin S$ (bo $5 + 7 \nleqslant 2 + 1$),
S nie jest antysymetryczna, bo np. $((2, 1), (7, -4)) \in S$ (bo $2 + 1 \leqslant 7 + (-4)$) i $((7, -4), (2, 1)) \in S$ (bo $7 + (-4) \leqslant 2 + 1$), ale $(2, 1) \neq (7, -4)$.

k) S jest zwrotna, bo $X \subseteq X$ dla każdego zbioru $X \in \mathcal{P}(B)$,
S jest przechodnia, bo jeśli $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$, to $X \subseteq Z$ dla $X, Y, Z \in \mathcal{P}(B)$,
S nie jest symetryczna, bo np. $\emptyset \subseteq B$, ale $B \nsubseteq \emptyset$,
S jest antysymetryczna, bo jeśli $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, to $X = Y$ dla $X, Y \in \mathcal{P}(B)$.

l) S nie jest zwrotna, bo nie jest możliwe, że $X \subsetneq X$ dla $X \in \mathcal{P}(B)$,
S jest przechodnia, bo jeśli $X \subsetneq Y$ i $Y \subsetneq Z$, to $X \subsetneq Z$ dla $X, Y, Z \in \mathcal{P}(B)$,
S nie jest symetryczna, bo np. $\emptyset \subsetneq B$, ale nie jest prawdą, że $B \subsetneq \emptyset$,
S jest antysymetryczna, bo nie istnieją zbiory $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ takie, że $X \subsetneq Y$ i $Y \subsetneq X$.

m) S nie jest zwrotna, bo jeśli $X \in \mathcal{P}(B)$ i $X \neq \emptyset$, to nie jest prawdą, że $X \cap X = \emptyset$,
S nie jest przechodnia, bo jeśli $x, y \in B$ i $x \neq y$, to dla zbiorów $X = \{x\} = Z$ i $Y = \{y\}$ mamy $X \cap Y = \emptyset$ i $Y \cap Z = \emptyset$, ale $X \cap Z \neq \emptyset$,
S jest symetryczna, bo jeśli $X \cap Y = \emptyset$, to $Y \cap X = \emptyset$,
S nie jest antysymetryczna, bo jeśli $x, y \in B$ i $x \neq y$, to dla zbiorów $X = \{x\}$ i $Y = \{y\}$ mamy $X \cap Y = \emptyset$ i $Y \cap X = \emptyset$, ale $X \neq Y$.

4. a) i b) Niech R i S będą relacjami zwrotnymi w zbiorze X. Wtedy $(x, x) \in R$ i $(x, x) \in S$ dla każdego $x \in X$. Zatem $(x, x) \in R \cup S$ i $(x, x) \in R \cap S$ dla każdego $x \in X$. To oznacza, że każda z relacji $R \cup S$ i $R \cap S$ jest zwrotne na zbiorze X.
c) Jeśli R i S są relacjami zwrotnymi w zbiorze X, to $(x, x) = (x_1, x_2) \in S$

oraz $(x, x) = (x_2, x_3) \in R$ dla każdego $x \in X$. Wtedy też $(x, x) = (x_1, x_3) \in R \circ S$ i to dowodzi, że $R \circ S$ jest relacją zwrotną w zbiorze X.

d) Jeśli R jest relacją zwrotną w zbiorze X, to $(x, x) = (x_1, x_2) \in R$ dla każdego $x \in X$. Wtedy też $(x, x) = (x_2, x_1) \in R^{-1}$ i to dowodzi, że R^{-1} jest relacją zwrotną w zbiorze X.

e) Relacje $R = \{(1, 2)\}$ i $S = \{(2, 1)\}$ są przechodnie, ale ich suma $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ nie jest przechodnia, bo $(1, 2), (2, 1) \in R \cup S$ i $(1, 1) \notin R \cup S$. To pokazuje, że suma relacji przechodnich nie musi być relacją przechodnią.

f) Pokażemy, że jeśli relacje R i S są przechodnie, to także relacja $R \cap S$ jest przechodnia. Załóżmy, że $(x, y), (y, z) \in R \cap S$. Wtedy $(x, y), (y, z) \in R$ i teraz z przechodniości relacji R wynika, że $(x, z) \in R$. Podobnie Wtedy $(x, y), (y, z) \in S$ i teraz z przechodniości relacji S wynika, że $(x, z) \in S$. Zatem $(x, z) \in R \cap S$ i relacja $R \cap S$ jest przechodnia.

g) Relacje $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ i $S = \{(2, 3), (4, 5)\}$ są przechodnie. Natomiast ich złożenie $R \circ S = \{(1, 3), (3, 5)\}$ nie jest relacją przechodnią, bo $(1, 3), (3, 5) \in R \circ S$, ale $(1, 5) \notin R \circ S$. To pokazuje, że złożenie relacji przechodnich nie musi być relacją przechodnią.

h) Uzasadnimy, że jeśli relacja R jest przechodnia, to także relacja odwrotna R^{-1} jest przechodnia. Załóżmy, że $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$. Wtedy wobec definicji relacji odwrotnej $(y, x), (z, y) \in R$. Stąd i z przechodniości relacji R wnioskujemy, że $(z, x) \in R$ i wtedy też $(x, y) \in R^{-1}$. To dowodzi, że relacja R^{-1} jest przechodnia.

i) Jeśli R i S są symetryczne, to także relacja $R \cup S$ jest symetryczna. Istotnie, jeśli $(x, y) \in R \cup S$, to $(x, y) \in R$ lub $(x, y) \in S$. Wtedy wobec symetryczności relacji R i S mamy $(y, x) \in R$ lub $(y, x) \in S$, więc także $(y, x) \in R \cup S$ i to dowodzi symetryczności relacji $R \cup S$.

j) Udowodnimy teraz, że jeśli relacje R i S są symetryczne, to relacja $R \cap S$ też jest symetryczna. W tym celu załóżmy, że $(x, y) \in R \cap S$. Wtedy $(x, y) \in R$ i $(x, y) \in S$. Stąd i z symetryczności relacji R i S wynika, że $(y, x) \in R$ i $(y, x) \in S$, więc także $(y, x) \in R \cap S$. To dowodzi symetryczności relacji $R \cap S$.

k) Z symetryczności relacji R i S nie wynika symetryczność relacji $R \circ S$. Przykładowo relacje $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ i $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ są symetryczne, ale ich złożenie $R \circ S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ nie jest relacją symetryczną.

l) Uzasadnimy, że jeśli relacja R jest symetryczna, to także relacja R^{-1} jest symetryczna. Załóżmy, że $(x, y) \in R^{-1}$. Wtedy wobec definicji relacji odwrotnej mamy $(y, x) \in R$. Teraz $(x, y) \in R$ z symetryczności relacji R. I dlatego wobec definicji relacji odwrotnej mamy $(y, x) \in R^{-1}$. To dowodzi, że relacja R^{-1} jest symetryczna.

m) Pokażemy, że jeśli relacje R i S są antysymetryczne, to relacja $R \cup S$ nie musi być antysymetryczna. Widać, że relacje $R = \{(1, 2)\}$ i $S = \{(2, 1)\}$ są antysymetryczne, ale ich suma $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ nie jest antysymetryczna, bo $(1, 2), (2, 1) \in R \cup S$ i $1 \neq 2$.

n) Uzasadnimy, że jeśli relacje R i S są antysymetryczne, to także relacja $R \cap S$ jest antysymetryczna. W tym celu załóżmy, że $(x, y), (y, x) \in R \cap S$. Wtedy $(x, y), (y, x) \in R$ (i $(x, y), (y, x) \in S$) i $x = y$, bo R jest antysymetryczna. To dowodzi, że relacja $R \cap S$ jest antysymetryczna.

o) Jeśli relacje R i S są antysymetryczne, to relacja $R \circ S$ nie musi być antysymetryczna. Przykładowo, relacje $S = \{(1, 1), (2, 1)\}$ i $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$ w zbiorze $\{1, 2\}$ są antysymetryczne, ale ich złożenie $R \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ nie jest relacją antysymetryczną.

p) Uzasadnimy, że jeśli relacja R jest antysymetryczna, to także relacja R^{-1} jest antysymetryczna. W tym celu załóżmy, że $(x, y), (y, x) \in R^{-1}$. Uzasadnimy, że $x = y$. Z założenia $(x, y), (y, x) \in R^{-1}$ wynika, że $(y, x), (x, y) \in R$ i stąd wnioskujemy, że $y = x$, bo R jest antysymetryczna.

5. a) Relacja R nie jest zwrotna, bo $(2,2) \notin R$, więc nie jest ona relacją równoważności. b) Relacja R nie jest symetryczna, bo $(2,3) \in R$ i $(3,2) \notin R$, więc nie jest ona relacją równoważności.

6. a) Niech $w(x)$ oznacza wzrost osoby $x \in L$. Ponieważ $w(x) = w(x)$ dla każdego $x \in L$, więc relacja R_1 jest zwrotna. Jeśli $x, y \in L$, to z równości $w(x) = w(y)$ wnioskujemy o równości $w(y) = w(x)$ i o symetryczności relacji R_1. Jeśli $x, y, z \in L$, to z równości $w(x) = w(y)$ i $w(y) = w(z)$ wnioskujemy o równości $w(x) = w(z)$ i to dowodzi przechodniości relacji R_1. Z tego wynika, że relacja R_1 jest relacją równoważności w zbiorze L.

b) Niech $n(x)$ oznacza nazwisko osoby $x \in L$. Ponieważ $n(x) = n(x)$ dla każdego $x \in L$, więc relacja R_2 jest zwrotna. Jeśli $x, y \in L$, to z równości $n(x) = n(y)$ wnioskujemy o równości $n(y) = n(x)$ i o symetryczności relacji R_2. Jeśli $x, y, z \in L$, to z równości $n(x) = n(y)$ i $n(y) = n(z)$ wnioskujemy o równości $n(x) = n(z)$ i to dowodzi przechodniości relacji R_2. To dowodzi, że relacja R_2 jest relacją równoważności w zbiorze L.

c) Niech $r(x)$ oznacza zbiór rodziców osoby $x \in L$. Przyjmujemy, że $r(x)$ jest dwuelementowym podzbiorem zbioru L. (Myślimy tu o tradycyjnie pojmowanych rodzicach biologicznych, nie uwzględniamy najnowszych osiągnięć nauki, nie myślimy o Bogu, ani o Adamie lub Ewie. Pewnie powinniśmy też założyć, że $x \notin r(x)$, czyli powinniśmy wykluczyć klonowanie i samorództwo, a zapewne powinniśmy też wykluczyć pare innych rzeczy związanych z relacjami między pokoleniami, uwzględnić prawo, etykę itd.) Ponieważ $r(x) = r(x)$ i $r(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in L$, więc $r(x) \cap r(x) \neq \emptyset$ i relacja R_3 jest zwrotna. Jeśli $x, y \in L$, to z nierówności $r(x) \cap r(y) \neq \emptyset$ wnioskujemy o nierówności $r(y) \cap r(x) \neq \emptyset$ i o symetryczności relacji R_3. Jeśli $x, y, z \in L$, to z nierówności $r(x) \cap r(y) \neq \emptyset$ i $r(y) \cap r(z) \neq \emptyset$ nie wynika nierówność $r(x) \cap r(z) \neq \emptyset$. Przykładowo, może być tak, że $r(x) = \{A, B\}$, $r(y) = \{B, C\}$, $r(z) = \{C, D\}$, gdzie A, B, C, D są różnymi elementami elementami zbioru L. W takim przypadku jest $r(x) \cap r(y) = \{B\} \neq \emptyset$ i $r(y) \cap r(z) = \{C\} \neq \emptyset$, ale $r(x) \cap r(z) = \emptyset$. Zatem relacja R_3 nie jest relacją równoważności w zbiorze L.

7. b) $[1]_\sim = \mathbb{Q} - \{0\}$. c) Dla dowodu równości $\left[\sqrt{3}\right]_\sim = \left[\sqrt{12}\right]_\sim$ wystarczy wykazać, że $\left[\sqrt{3}\right]_\sim \cap \left[\sqrt{12}\right]_\sim \neq \emptyset$.
8. b) $[0]_R = \mathbb{Q}$ oraz $[\pi]_R = \mathbb{Q} + \pi \subsetneq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
9. b) Z definicji klas abstrakcji mamy $[0]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5 | 2x + 3 \cdot 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5 | 2x\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5 | x\} = 5\mathbb{Z}$ i $[1]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 5 | 2x + 3 \cdot 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 2x + 3 = 5k \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z} + 1$. Podobnie pokazuje się, że $[2]_\sim = 5\mathbb{Z} + 2$, $[3]_\sim = 5\mathbb{Z} + 3$ i $[4]_\sim = 5\mathbb{Z} + 4$.

c) Ponieważ zbiory $[0]_\sim, [1]_\sim, \ldots, [4]_\sim$ tworzą rozbicie zbioru $\mathbb{Z}$, wiec mamy $\mathbb{Z}/{\sim} = \{[0]_\sim, [1]_\sim, \ldots, [4]_\sim\} = \{5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z} + 1, 5\mathbb{Z} + 2, 5\mathbb{Z} + 3, 5\mathbb{Z} + 4\}$.

10. b) Z definicji klas abstrakcji mamy $[0]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7 | 3x + 4 \cdot 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7 | 3x\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7 | x\} = 7\mathbb{Z}$ i podobnie $[1]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7 | 3x + 4 \cdot 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 7 | 3x + 4\} = 7\mathbb{Z} + 1$.

11. b) Z definicji klas abstrakcji mamy $[0]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x^2 - 0^2\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x^2\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x\} = 3\mathbb{Z}$, $[1]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x^2 - 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | (x-1)(x+1)\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x - 1 \text{ lub } 3 | x + 1\} = (3\mathbb{Z} + 1) \cup (3\mathbb{Z} + 2) = 3\mathbb{Z} + \{1, 2\} = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$ i $[2]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \sim 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x^2 - 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \colon 3 | x^2 - 1\} = 3\mathbb{Z} + \{1, 2\} = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$.

c) Z faktu, że klasy $[0]_\sim = 3\mathbb{Z}$ i $[1]_\sim = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$ tworzą rozbicie zbioru $\mathbb{Z}$ wynika, że $\mathbb{Z}/{\sim}\ \{[0]_\sim, [0]_\sim\} = \{3\mathbb{Z}, \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}\}$.

12. b) Teraz zauważmy, że jeśli $A \in \mathcal{P}(X)$, to wobec definicji klasy abstrakcji mamy

$$[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon (A, B) \in R\} = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon A \cup Y = B \cup Y\}$$

i warto rozróżniać dwa przypadki: $A \subseteq Y$, $A - Y \neq \emptyset$. Jeśli $A \subseteq Y$, to $A \cup Y = Y$ i stąd

$$[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon Y = B \cup Y\} = \mathcal{P}(Y).$$

Jeśli natomiast $A - Y \neq \emptyset$, to $A \cup Y = (A - Y) \cup Y$ i tym razem

$$[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(X) \colon (A - Y) \cup Y = B \cup Y\} = (A - Y) \cup \mathcal{P}(Y).$$

W szczególności widać teraz, że mamy

$$\begin{aligned} [\{1, 3\}]_R &= (\{1, 3\} - \{3, 4\}) \cup \mathcal{P}(Y) \\ &= \{1\} \cup \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\} \\ &= \{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}\}. \end{aligned}$$

c) Z tego co przedstawiliśmy w b) wynika, że mamy

$$\mathcal{P}(X)/R = \{C \cup \mathcal{P}(Y) \colon C \in \mathcal{P}(X - Y)\} = \{C \cup \mathcal{P}(Y) \colon C \in \mathcal{P}(\{1, 2, 5\})\}.$$

Zatem zbiór $\mathcal{P}(X)/R$ ma dokładnie tyle elementów co zbiór $\mathcal{P}(\{1, 2, 5\})$, czyli 8.

13. Niech $\sim$ będzie relacją w zbiorze $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, gdzie $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej.

a) Łatwo pokazuje się, że $\sim = \{(1, 1), (1, 4), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 9), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 2), (8, 8), (9, 1), (9, 4), (9, 9)\}$.

b) $[1]_\sim = \{1, 4, 9\} = [4]_\sim = [9]_\sim$, $[2]_\sim = \{2, 8\} = [8]_\sim$, $[3]_\sim = \{3\}$, $[5]_\sim = \{5\}$, $[6]_\sim = \{6\}$, $[7]_\sim = \{7\}$.

c) Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze A, bo zbiory $\{1, 4, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$ tworzą rozbicie zbioru A. Równoważnie, korzystając z a) można wykazać, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

d) $A/\!\sim = \{\{1, 4, 9\}, \{2, 8\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\}$.

14. Niech $\sim$ będzie relacją w zbiorze $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$ taką, że $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a/b = 2^m$ dla pewnej liczby całkowitej m.

a) Łatwo pokazuje się, że $\sim = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 6), (7, 7)\}$.

b) $[1]_\sim = \{1, 2, 4\} = [2]_\sim = [4]_\sim$, $[3]_\sim = \{3, 6\} = [6]_\sim$, $[5]_\sim = \{5\}$ i $[7]_\sim = \{7\}$.

c) Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze A, bo zbiory $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{5\}$, $\{7\}$ tworzą rozbicie zbioru A. Równoważnie, korzystając z a) można wykazać, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

d) $A/\!\sim = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 6\}, \{5\}, \{7\}\}$.

15. Niech funkcja $f \colon X \to Y$ będzie surjekcją. Należy udowodnić, że dla rodziny $\mathcal{S} = \{f^{-1}(\{y\}) \colon\ y \in Y\}$ spełnione są warunki definicji 5.4.1.

1. Z faktu, że f jest surjekcją wynika, że $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ dla każdego $y \in Y$. Zatem $\mathcal{S}$ jest rodziną niepustych podzbiorów zbioru X.

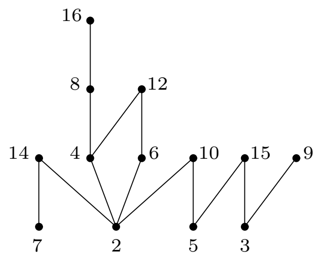
17. Zobacz początek nieskończonej tablicy, której narożnik przedstawiliśmy na rys. 9.7. Sposób wypełniania tablicy określa funkcję $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie $f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ dla każdych liczb $m, n \in \mathbb{N}$. Tak określona funkcja f jest bijekcją i więcej na ten temat mówimy w następnym rozdziale (zob. ćwiczenia 34 i 35 oraz tw. 6.3.3 w rozdziale 6).

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\cdots$
$\cdots$						
10	$\cdots$					
6	11	$\cdots$				
3	7	12	$\cdots$			
1	4	8	13	$\cdots$		
0	2	5	9	14	$\cdots$	

Rysunek 9.7. Podział zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele nieskończonych zbiorów X_i

18. a) $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}$. b) $\preccurlyeq$ nie jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}$. c) $\preccurlyeq$ nie jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}$. d) $\preccurlyeq$ nie jest ona częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{N}^2$. e) $\preccurlyeq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}^2$. f) $\preccurlyeq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}^2$.

19. Diagram Hassego częściowego porządku $(A, \leqslant)$, gdzie $A = \{2, 3, \ldots, 16\}$ i $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x|y$, przedstawiliśmy na rys. 9.8. Najdłuższym łańcuchem w $(A, \leqslant)$ jest $L = \{2, 4, 8, 16\}$. Zbiorem wszystkich elementów maksymalnych w $(A, \leqslant)$ jest $\{9, 10, 14, 15, 12, 16\}$. Zbiór $\{4, 6, 9, 10, 14, 15\}$ jest jednym z dziewięciu największych podzbiorów elementów nieporównywalnych w $(A, \leqslant)$.



Rysunek 9.8. Diagram Hassego częściowego porządku $(A, \leqslant)$ z ćw. 5.19

20. Niech X będzie niepustym zbiorem i niech R będzie relacją w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ taką, że $(A, B) \in R$, gdy $A \subseteq B$. Tak jak w Przykładzie 5.5.3 pokazuje się, że relacja R jest częściowym porządkiem.

21. Relacja R jest zwrotna, bo dla każdego ciągu $xyzt \in \{0,1\}^4$ jest $(xyzt, xyzt) \in R$, bo przykładowo podciąg xy pierwszego ciągu $xyzt$ jest też podciągiem drugiego ciągu $xyzt$. Relacja R jest symetryczna, bo jeśli $s_1, s_2 \in \{0,1\}^4$ i $(s_1, s_2) \in R$, to pewien podciąg xy ciągu s_1 jest też podciągiem ciągu s_2 i odwrotnie. Stad wynika, że $(s_2, s_1) \in R$. Relacja R nie jest antysymetryczna, bo np. $(0000, 0001) \in R$ i $(0001, 0000) \in R$, ale $0000 \neq 0001$. Relacja R nie jest też przechodnia, bo np. $(0001, 0100) \in R$ i $(0100, 1110) \in R$, ale $(0001, 1110) \notin R$. Z tego też wynika, że relacja R nie jest częściowym porządkiem w zbiorze $\{0,1\}^4$.

24. a) Relacja R jest zwrotna, symetryczna, nie jest antysymetryczna, nie jest przechodnia, nie jest częściowym porządkiem. b) Relacja R jest zwrotna, nie jest symetryczna, nie jest antysymetryczna, jest przechodnia, nie jest częściowym porządkiem. c) Relacja R jest zwrotna, jest symetryczna, nie jest antysymetryczna, nie jest częściowym porządkiem, jest przechodnia.

25. Niech R będzie relacją równoważności R w zbiorze X. Pokazać, że relacja R jest częściowym porządkiem w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy każda klasa abstrakcji relacji R jest jednoelementowa, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $|[\,x\,]_R| = 1$ dla każdego $x \in X$.

26. Załóżmy, że relacja R jest zwrotna i przechodnia w zbiorze X. Wtedy, jak to już wykazaliśmy, relacja R^{-1} jest zwrotna (ćw. 4d) i przechodnia (ćw. 4h). Wykazaliśmy też, że część wspólna relacji zwrotnych jest relacją zwrotną (ćw. 4b), a część wspólna relacji przechodnich jest relacją przechodnią (ćw. 4f). Stąd wynika, że relacja $R \cap R^{-1}$ jest zwrotna i przechodnia. Teraz zaobserwujmy, że relacja $R \cap R^{-1}$ jest symetryczna. Istotnie, jeśli $(x, y) \in R \cap R^{-1}$, to $(x, y) \in R$ i $(x, y) \in R^{-1}$, więc wobec definicji relacji odwrotnej $(y, x) \in R^{-1}$ oraz $(y, x) \in R$ i dlatego też $(y, x) \in R \cap R^{-1}$. Zatem uzasadniliśmy, że jeśli relacja R jest zwrotna i przechodnia, to relacja $R \cap R^{-1}$ jest zwrotna, przechodnia i symetryczna. Z tego wynika, że relacja $R \cap R^{-1}$ jest relacją równoważności w zbiorze X.

27. a) Niech R_1 i R_2 będą relacjami równoważności w zbiorze X. Wtedy każda z nich jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Zatem, jak już to pokazaliśmy w ćw. 4, relacja $R_1 \cap R_2$ jest zwrotna (cw. 4b), symetryczna (ćw. 4j) i przechodnia (ćw. 4f). Zatem $R_1 \cap R_2$ jest relacją równoważności w zbiorze X.

b) Z definicji klasy abstrakcji wynika, że klasa abstrakcji dowolnego elementu $x \in X$ względem relacji $R_1 \cap R_2$ jest częścią wspólną klas abstrakcji elementu x względem relacji R_1 i R_2, czyli mamy

$$
\begin{aligned}
[\,x\,]_{R_1 \cap R_2} &= \{y \in X \colon (x, y) \in R_1 \cap R_2\} \\
&= \{y \in X \colon (x, y) \in R_1 \wedge (x, y) \in R_2\} \\
&= \{y \in X \colon (x, y) \in R_1\} \cap \{y \in X \colon (x, y) \in R_2\} \\
&= [\,x\,]_{R_1} \cap [\,x\,]_{R_2}.
\end{aligned}
$$

29. W zbiorze $\mathbb{N}$ najmniejszą relację przechodnią zawierającą relację $R = \{(m, m+1) \colon\ m \in \mathbb{N}\}$ jest relacja $p(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Łatwo indukcyjnie pokazuje się, że $R^n = \{(m, m+n) \colon\ m \in \mathbb{N}\}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Dlatego $p(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(m, m+n) \colon\ m \in \mathbb{N}\} = \{(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m < k\}$.

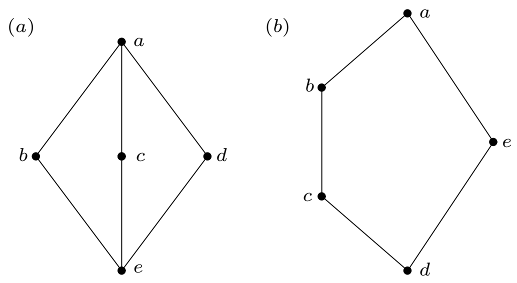
30. Uzasadnienie jest bezpośrednią adaptacją tego co napisaliśmy w przykładzie 5.6.5.

31. Niech B będzie niepustym podzbiorem zbioru częściowo uporządkowanego $(A, \leqslant)$. Jeśli a jest ograniczeniem górnym zbioru B i $a \in B$, to $b \leqslant a$ dla każdego $b \in B$, więc a jest największym elementem zbioru B. Dalej tak jak w dowodzie twierdzenia 5.6.2 pokazuje się, że a jest elementem maksymalnym i kresem górnym zbioru B. Podobnie dowodzi się pozostałych części stwierdzenia.

33. Częściowy porządek na zbiorze $A = \{a, b, c, d, e\}$, którego diagram Hassego przedstawiono na rys. 9.9 (b) (oraz na rys. 5.19 (b)), jest kratą, bo wystarczy zauważyć, że $\sup\{x, y\}$ i $\inf\{x, y\}$ istnieją dla każdych dwóch różnych elementów $x, y \in A$: jeśli x i y są porównywalne, to $\sup\{x, y\}$ ($\inf\{x, y\}$) jest większym (mniejszym) z elementów x i y, a jeśli x i y są nieporównywalne, to $\sup\{x, y\} = a$ i $\inf\{x, y\} = d$. Nie jest to krata dystrybutywna, bo mamy $c \vee (e \wedge b) \neq (c \vee e) \wedge (c \vee b)$, bo jak widać

$$c \vee (e \wedge b) = c \vee d = c \quad \text{i} \quad (c \vee e) \wedge (c \vee b) = a \wedge b = b.$$

36. Niech $(A, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy relacja $\leqslant$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Wtedy też, jak to już pokazaliśmy, relacja odwrotna $\leqslant^{-1}$ jest zwrotna (zob. ćw. 4d), antysymetryczna (zob. ćw. 4p)



Rysunek 9.9. Diagramy Hassego krat

i przechodnia (zob. ćw. 4h). Stąd wynika, że $(A, \leqslant^{-1})$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

38. Niech $(A, \leqslant)$ będzie skończonym częściowym porządkiem. Indukcyjnie ze względu na ilość elementów w zbiorze A udowodnimy, że w zbiorze A istnieje liniowy porządek $\preccurlyeq$ taki, że $\leqslant \subseteq \preccurlyeq$, czyli udowodnimy, że każdy częściowy porządek w skończonym zbiorze można rozszerzyć do porządku liniowego.

Stwierdzenie to jest oczywiste dla zbioru jednoelementowego. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną i załóżmy, że każdy częściowy porządek w zbiorze n-elementowym można rozszerzyć do porządku liniowego. Niech teraz $\leqslant$ będzie częściowym porządkiem w zbiorze A mającym $n+1$ elementów. Wobec twierdzenia 5.6.3 w zbiorze A istnieje element minimalny. Niech nim będzie a. Wtedy dla częściowego porządku $\leqslant_B$, gdzie B jest n-elementowym zbiorem $A - \{a\}$, wobec założenia indukcyjnego istnieje liniowy porządek $\preccurlyeq_B$ w zbiorze B taki, że $\leqslant_B \subseteq \preccurlyeq_B$. Łatwo teraz zauważyć, że relacja $(\{a\} \times Y) \cup \preccurlyeq_B$ jest liniowym porządkiem w zbiorze A i $\leqslant \subseteq (\{a\} \times Y) \cup \preccurlyeq_B$.

39. 1. Tak; 2. Nie; 3. Tak; 4. Tak; 5. Nie; 6. Tak; 7. Nie; 8. Tak; 9. Tak; 10. Nie; 11. Nie; 12. Tak; 13. Tak; 14. Nie; 15. Nie.

9.6. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Moce zbiorów

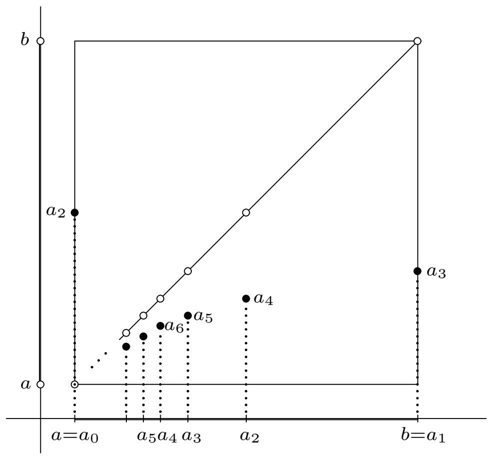
1. Studentom pozostawiam możliwość proponowania odpowiednich funkcji i dowodzenia, że te funkcje ustalają równoliczność rozważanych zbiorów.

2. Uwaga taka sama, jak wyżej, ale do części b) pozostawiam rysunek, którym ilustrowałem swój dowód.

3. Tu rozważamy tylko kwadraty, okręgi i koła różne od zbiorów jednoelementowych. Wobec twierdzenia Cantora-Bernsteina (tw. 6.2.4) wystarczy wykazać, że każdy kwadrat, okręg i koło jest mocy $\mathfrak{c}$.

9. Interesuje nas funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{x-1/2}{x(x-1)}$ (jej szkic przedstawiliśmy na rys. 9.11. Chcemy pokazać, że ta funkcja obcięta do przedziału $(0;1)$ ustala równoliczność zbiorów $(0;1)$ i $\mathbb{R}$. Ponieważ

$$f'(x) = -\frac{(x-1/2)^2 + 1/4}{x^2(x-1)^2} < 0,$$

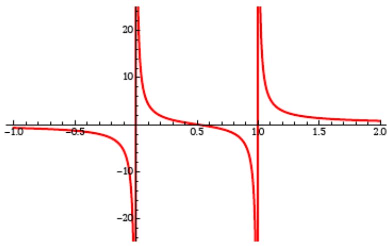


Rysunek 9.10. Funkcja h ustalająca równoliczność zbiorów $\langle a; b\rangle$ i $(a; b)$

więc funkcja f jest malejąca (więc i różnowartościowa) w przedziale $(0; 1)$. Dalej, ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1/2}{x(x-1)} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1/2}{x(x-1)} = \infty,$$

więc wobec ciągłości funkcji f wnioskujemy, że odwzorowuje ona zbiór $(0; 1)$ na cały zbiór $\mathbb{R}$. Łącznie z powyższego wynika, że funkcja f ustala równoliczność zbiorów $(0; 1)$ i $\mathbb{R}$.



Rysunek 9.11. Szkic wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1/2}{x(x-1)}$

12. a) $|A| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$; b) $|A| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$; c) $|A| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$; d) $|A| = \mathfrak{c}$; e) $|A| = \aleph_0$; f) $|A| = \mathfrak{c}$, gdy przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$ (i $|A| = \aleph_0$, gdy przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$); g) $|A| = \mathfrak{c}$; h) $|A| = \aleph_0$.

14. Dowód jest podobny do dowodu twierdzeń 6.3.1 i 6.3.2.

15. Znowu dowód jest podobny do dowodu twierdzeń 6.3.1 i 6.3.2.

16. Uzasadnienie faktu, że zbiór punktów leżących na okręgu o dodatnim promieniu jest mocy continuum, jest identyczne z tym, które przedstawiliśmy w ćwiczeniu 3b.

17. W przykładzie 4.2.7 uzasadniliśmy, że jeśli X jest niepustym zbiorem, to funkcja $F\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$, gdzie $F(A) = \chi_A$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $A \in \mathcal{P}(X)$, jest bijekcją. Z tego wynika, że zbiory $\mathcal{P}(X)$ i $\{0,1\}^X$ są równoliczne. Ponieważ zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest nieprzeliczalny (co wynika z twierdzenia

6.3.2), więc także zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest nieprzeliczalny, co oznacza, że zbiór wszystkich podzbiorów zbioru N jest nieprzeliczalny. (W twierdzeniu 6.4.1 pokazaliśmy nawet, że zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest mocy continuum.)

19. Uzasadnienie tego, że każdy nadzbiór zbioru nieprzeliczalnego jest nieprzeliczalny jest identyczne z tym, które przedstawiliśmy w ćwiczeniu 8.

23. Uzasadnić tylko część a). Z niej i z definicji 6.2.1 oraz z twierdzenia 6.2.5 wynikają już pozostałe cztery części.
24. Wobec ćwiczenia 23, wystarczy wskazać iniekcję odwzorowującą zbiór $\mathbb{N}$ w każdy z rozważanych zbiorów. A to już jest łatwe.

26. Jeśli $f \in \left(C^B\right)^A$, to $f\colon A \to C^B$ i $f_a = f(a)$ jest funkcją odwzorowującą zbiór B w zbiór C, czyli mamy $f_a\colon B \to C$ dla każdego $a \in A$. Weźmy teraz pod uwagę funkcję $F\colon \left(C^B\right)^A \to C^{B\times A}$, która każdej funkcji $f \in \left(C^B\right)^A$ przyporządkowuje funkcję $F(f)\colon B \times A \to C$ taką, że

$$F(f)(b, a) = f_a(b) \quad \text{dla każdej pary} \quad (b, a) \in B \times A.$$

Można wykazać, że F jest bijekcją i w ten sposób zakończyć dowód równoliczności zbiorów $\left(C^B\right)^A$ i $C^{B\times A}$.

27. Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną przeliczalnie wielu różnych zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Wtedy ich suma $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym (jako suma przeliczalnie wielu zbiorów co najwyżej przeliczalnych), więc $|A| \leqslant \aleph_0$. Dla dowodu równości $|A| = \aleph_0$ wystarczy wykazać, że zbiór A jest nieskończony. Gdyby zbiór A był skończony, to także zbiór wszystkich jego podzbiorów $\mathcal{P}(A)$ byłby skończony, ale wtedy w rodzinie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie byłoby nieskończenie wielu różnych zbiorów. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zbiór A jest nieskończony i dlatego też mamy $|A| = \aleph_0$.

30. Załóżmy, że A i B są zbiorami przeliczalnymi i niech $f\colon \mathbb{N} \to A$ oraz $g\colon \mathbb{N} \to B$ będą bijekcjami.

1) Ponieważ $A \sim \mathbb{N}$, $B \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, wiec $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, co oznacza, że zbiór że $A \times B$ jest przeliczalny.

2) Jeśli funkcje $f\colon \mathbb{N} \to A$ oraz $g\colon \mathbb{N} \to B$ są bijekcjami, to także funkcje $f^{-1}\colon A \to \mathbb{N}$ oraz $g^{-1}\colon B \to \mathbb{N}$ są bijekcjami. Wtedy też funkcja $(f^{-1}, g^{-1})\colon A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gdzie $(f^{-1}, g^{-1})(a, b) = (f^{-1}(a), g^{-1}(b))$ dla $(a, b) \in A \times B$, jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $A \times B$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Jeśli teraz $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bijekcją (np. taką jak w ćwiczeniu 34 lub w ćwiczeniu 35), to funkcja $F\colon A \times B \to \mathbb{N}$, gdzie $F(a, b) = (h \circ (f^{-1}, g^{-1}))(a, b) = h((f^{-1}(a), g^{-1}(b)))$, jest bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów $A \times B$ i $\mathbb{N}$.

31. Najlepszy dowód tego twierdzenia przedstawiono na stronie 92 w książce „Teoria mnogości” A. Błaszczyka i S. Turka. Zainteresowanych odsyłam do tego źródła.

43. Z równoliczności zbiorów $\langle 0; 1\rangle$ i $\mathbb{R}$ oraz zbiorów $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}$ wynika równoliczność zbiorów $\langle 0; 1\rangle$ i $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$. Z tego ostatniego wynika istnienie bijekcji (więc i surjekcji) $f\colon \langle 0; 1\rangle \to \langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$.

45. 1. Tak; 2. Tak; 3. Tak; 4. Tak; 5. Nie; 6. Nie; 7. Tak; 8. Nie; 9. Nie; 10. Tak; 11. Nie; 12. Tak; 13. Tak; 14. Nie; 15. Nie.

9.7. Odpowiedzi do zadań z rozdziału Algebra Boole'a

2. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. System $(\mathcal{S}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, \mathbb{N})$ nie jest algebrą Boole'a, bo nie jest on zamknięty ze względu na dopełnienie (bo dopełnienie zbioru skończonego jest zbiorem nieskończonym i nie należy do zbioru $\mathcal{S}$).

7. a) $x_1 + x_1x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1\,1 = x_1$.
b) Ponieważ $x_1x_2 + 1 = 1$ i $x_1' + x_1 = 1$, więc mamy $x_1x_2 + 1 = x_1' + x_1$.
c) $x_1'x_2' = (x_1 + x_2)' \neq x_1 + x_2$.
d) $x_1 + x_1(x_2 + 1) = x_1 + x_1\,1 = x_1 + x_1 = x_1$.
e) $x_1(x_2x_3)' = x_1(x_2' + x_3') = x_1x_2' + x_1x_3'$.
f) $x_1'(x_2x_3 + x_1x_2x_3) = x_1'x_2x_3(1 + x_1) = x_1'x_2x_3\,1 = x_1'x_2x_3 \neq x_2x_3$.
g) $(x_1 + x_2)(x_3' + x_4)'x_2'x_3 = (x_1 + x_2)(x_3x_4')x_2'x_3 = (x_1 + x_2)x_2'x_3x_4' = x_1x_2'x_3x_4' + x_2x_2'x_3x_4' = x_1x_2'x_3x_4' + 0 = x_1x_2'x_3x_4' \neq 0$.
h) $(x_1 + x_2)x_1 = x_1x_1 + x_1x_2 = x_1 + x_1x_2 \neq x_1 + x_1x_2 + x_2$.

8. $f(x, y, z) = \overline{xyz} + x\overline{yz} + xy\overline{z}$.

9. a) $f(x, y) = xy + x\overline{y}$.
b) $f(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z}$.
c) $f(x, y, z) = x\overline{yz}$.
d) $f(x, y, z, t) = x\overline{y}zt + x\overline{y}z\overline{t} + x\overline{y}zt + x\overline{yz}t$.

10. a) $f(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz$.
b) $f(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz = xy + xz + yz$.
c) $f(x, y, z) = x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xy}z + \overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{xz} + \overline{yz}$.

11. $f_4^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5$.

12. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3x_4\overline{x_5} + x_1x_2x_3\overline{x_4}x_5 + x_1x_2\overline{x_3}x_4x_5 + x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5 + \overline{x_1}x_2x_3x_4x_5$.

13. a) $f(x, y, z) = \overline{(x + \overline{(y + z)})} = \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xy}z$.
b) $f(x, y, z) = \overline{(\overline{x} + \overline{y})} + (z + \overline{(x + y)}) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz + \overline{xy}z + \overline{xyz}$.
c) $f(x, y, z) = x = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{yz}$.

14. a) **Twierdzenie dualne do twierdzenia 7.3.2** *Niech* $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ *będzie funkcją boole'owską taką, że* $f(\mathbb{Z}_2^n) \neq \{1\}$. *Niech* $A_1, \ldots, A_k$ *będą wszystkimi tymi elementami algebry* $\mathbb{Z}_2^n$, *dla których* $f(A_i) = 0$. *Jeśli przyjmiemy, że* $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ *i jeśli* $M_i = y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{in}$ *jest makstermem takim, że*

$$y_{ij} = \begin{cases} x_j, & \textit{gdy} \ \ a_{ij} = 0, \\ \overline{x}_j, & \textit{gdy} \ \ a_{ij} = 1, \end{cases}$$

to wtedy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_k. \tag{9.2}$$

Dowód. Niech $\overline{f}\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ będzie funkcją boole'owską taką, że $\overline{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$. Wtedy $\overline{f}$ jest niezerową funkcją boole'owską i $A_1, \ldots, A_k$ są wszystkimi tymi elementami algebry $\mathbb{Z}_2^n$, dla których $\overline{f}(A_i) = 1$. Zatem jeśli $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ i jeśli $m_i = z_{i1} \cdot z_{i2} \cdot \ldots \cdot z_{in}$ jest mintermem takim, że

$$z_{ij} = \begin{cases} x_j, & \text{gdy} \ \ a_{ij} = 1, \\ \overline{x}_j, & \text{gdy} \ \ a_{ij} = 0, \end{cases}$$

to wobec twierdzenia 7.3.2 mamy

$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k.$$

Stąd i z równości $\overline{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$ (czyli z równości $f(\mathbf{x}) = \overline{\overline{f}(\mathbf{x})}$) wynika, że

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_k,$$

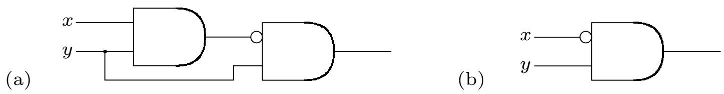
gdzie

$$M_i = \overline{m_i} = \overline{z_{i1} \cdot z_{i2} \cdot \ldots \cdot z_{in}} = \overline{z_{i1}} + \overline{z_{i2}} + \ldots + \overline{z_{in}} = y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{in}$$

jest makstermem i $y_{ij} = \overline{z_{ij}} = \overline{x_j}$, gdy $a_{ij} = 1$, oraz $y_{ij} = \overline{z_{ij}} = \overline{\overline{x_j}} = x_j$, gdy $a_{ij} = 0$.

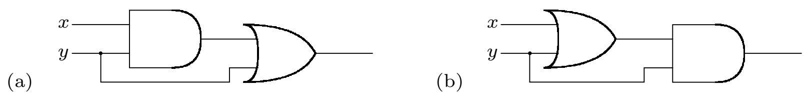
b) $f(x, y) = x\overline{y} + \overline{x}y = (x + y)(\overline{x} + \overline{y})$.
c) $f(x, y, z) = x + \overline{y} + \overline{z}$.

19. Niech f i g będą funkcjami boole'owskimi odpowiadającymi układom logicznym z niżej przedstawionych rysunków 9.12 (a) i 9.12 (b). Wtedy $f(x, y) = \overline{(xy)}y = (\overline{x} + \overline{y})y = \overline{x}y + \overline{y}y = \overline{x}y + 0 = \overline{x}y$ i $g(x, y) = \overline{x}y$, więc $f(x, y) = g(x, y)$.



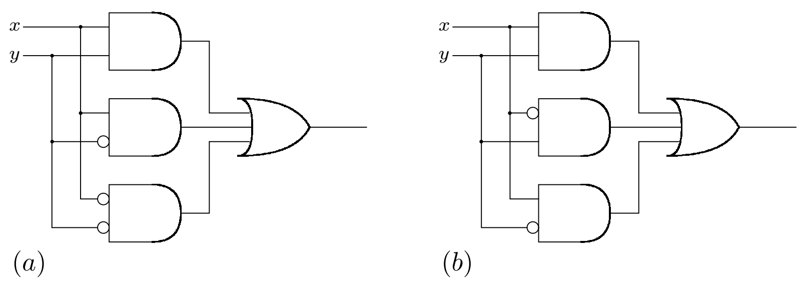
Rysunek 9.12. Ilustracja do zadania 7.5.18

20. Niech f i g będą funkcjami boole'owskimi odpowiadającymi układom logicznym z niżej przedstawionych rysunków 9.13 (a) i 9.13 (b). Wtedy $f(x, y) = xy + y = (x+1)y = 1\,y = y$ i $g(x, y) = (x+y)y = xy+yy = xy+y = (x+1)y = 1\,y = y$, więc $f(x, y) = g(x, y)$.



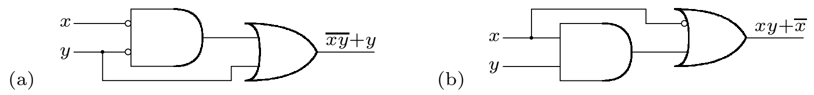
Rysunek 9.13. Ilustracja do zadania 7.5.19

21. Niech f i g będą funkcjami boole'owskimi odpowiadającymi układom logicznym z niżej przedstawionych rysunków 9.14 (a) i 9.14 (b). Wtedy $f(x, y) = xy + x\overline{y} + \overline{xy} = xy + \overline{y}$ i $g(x, y) = xy + \overline{x}y + x\overline{y} = y + x\overline{y} = x + \overline{x}y = x + y$.

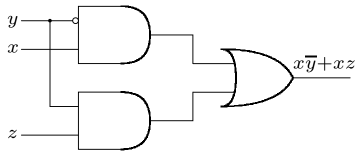


Rysunek 9.14. Ilustracja do zadania 7.5.20

22. Ponieważ $f(x, y) = xy + \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} + y = xy + \overline{x}$, więc funkcji f odpowiadają dwubramkowe układy logiczne przedstawione na rysunku 9.15 (a) oraz (b).

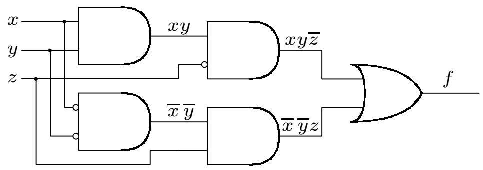


Rysunek 9.15. Ilustracja do zadania 7.5.22



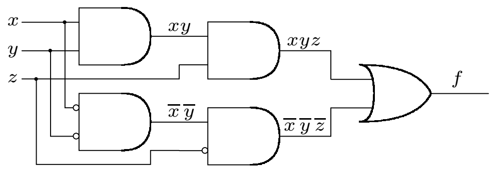
Rysunek 9.16. Ilustracja do zadania 7.5.23

23. Mamy $f(x, y, z) = xyz + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} = xyz + x\overline{y} = xz + x\overline{yz} = x\overline{y} + xz$ i tej ostatniej postaci funkcji f odpowiada przedstawiony na rys. 9.16 układ logiczny mający trzy bramki.
24. Funkcja boole'owską f taką, że $f(x, y, z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ i $y \neq z$ jest funkcja $f(x, y, z) = xy\overline{z} + \overline{xy}z$. Odpowiadają jej układy logiczne przedstawione na rys. 9.17.



Rysunek 9.17. Układ logiczny odpowiadający funkcji $f(x, y, z) = xy\overline{z} + \overline{xy}z$ (zad. 7.5.24)

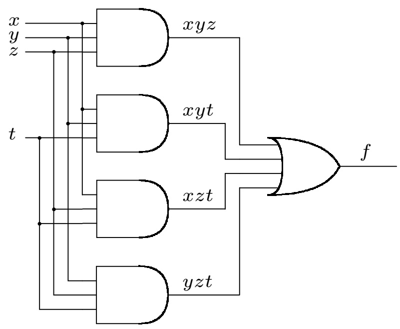
25. Funkcją boole'owską f taką, że $f(x, y, z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie dwie spośród wielkości x, y i z są równe jest funkcja $f(x, y, z) = xyz + \overline{xyz}$. Odpowiadają jej układy logiczne przedstawione na rys. 9.18.



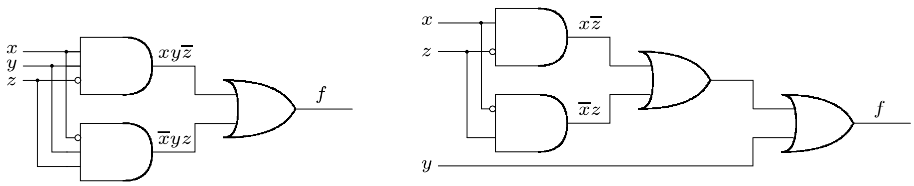
Rysunek 9.18. Układ logiczny odpowiadający funkcji $f(x, y, z) = xyz + \overline{xyz}$ (zad. 7.5.25)

26. Przedstawiony na rys. 9.19 układ logiczny odpowiada układowi do głosowania o czterech wejściach, w którym na wyjściu pojawia się jedynka, gdy na co najmniej trzech wejściach pojawia się jedynka. Układ ten odpowiada też funkcji boole'owskiej f, gdzie $f(x, y, z, t) = xyz + xyt + xzt + yzt$.

27. a) Łatwo można zauważyć, że $f(x, y, z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z)$. Obu tym postaciom odpowiadają przedstawione na rys. 9.20 układy logiczne utworzone z bramek AND, OR i NOT.

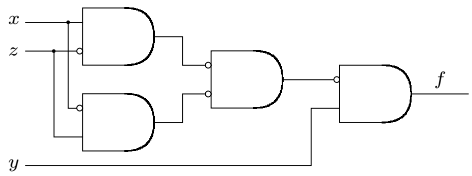


Rysunek 9.19. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z,t) = xyz + xyt + xzt + yzt$ z zad. 7.5.26



Rysunek 9.20. Układy logiczne odpowiadające obu postaciom funkcji $f(x,y,z) = xy\overline{z}+\overline{x}yz = y(x\overline{z}+\overline{x}z)$ (zad. 7.5.27 a)

b) Mamy $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z) = y\overline{(\overline{x\overline{z}} \cdot \overline{\overline{x}z})}$ i tej ostatniej postaci funkcji f (wyrażonej za pomocą iloczynu i dopełnienia) odpowiada przedstawiony na rys. 9.21 układ logiczny utworzony z bramek AND i NOT.



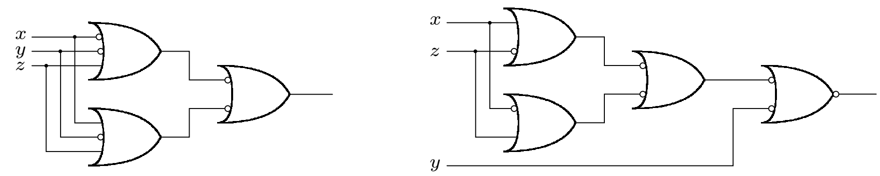
Rysunek 9.21. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y\overline{(\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z})}$ (zad. 7.5.27 b)

c) Chcąc przedstawić za pomocą bramek OR i NOT układ logiczny odpowiadający funkcji boole'owskiej f, warto funkcję f zapisać za pomocą sumy i dopełnienia. Tu przykładowo mamy $f(x,y,z) = xy\overline{z}+\overline{x}yz = \overline{\overline{x}+\overline{y}+z}+\overline{x+\overline{y}+\overline{z}}$ oraz $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z}+\overline{x}z) = \overline{\overline{y} + \overline{\overline{(x\overline{z}+\overline{x}z)}}} = \overline{\overline{y} + \overline{\overline{\overline{\overline{x}+z}+\overline{x+\overline{z}}}}}$. Tym postaciom funkcji f (wyrażonym za pomocą sumy i dopełnienia) odpowiadają przedstawione na rys. 9.22 układy logiczne utworzone z bramek OR i NOT.

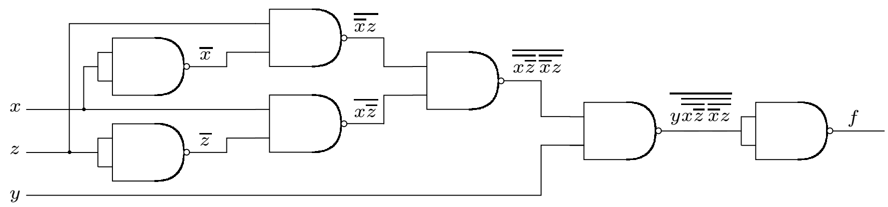
d) Chcąc przedstawić za pomocą bramek NAND układ logiczny odpowiadający funkcji boole'owskiej f, warto funkcję f zapisać za pomocą iloczynu i dopełnienia. Dla rozważanej funkcji kolejno mamy

$$f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z}+\overline{x}z) = y\overline{\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z}} = \overline{\overline{y\overline{\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z}}}}.$$

Tej ostatniej postaci funkcji f odpowiada przedstawiony na rys. 9.23 układ logiczny utworzony z bramek NAND.



Rysunek 9.22. Układy logiczne dla funkcji $f(x,y,z,t) = xy\overline{z} + \overline{x}yz$ (zad. 7.5.27 c)

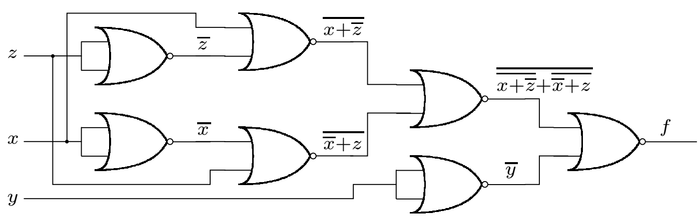


Rysunek 9.23. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z) = xy\overline{z}+\overline{x}yz = \overline{\overline{y\overline{\overline{x\overline{z}}\,\overline{\overline{x}z}}}}$ (zad. 7.5.27 d)

e) Chcąc przedstawić za pomocą bramek NOR układ logiczny odpowiadający funkcji boole'owskiej f, warto funkcję f zapisać za pomocą sumy i dopełnienia. Dla rozważanej funkcji kolejno mamy

$$f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}yz = y(x\overline{z} + \overline{x}z) = y(\overline{\overline{x}+z} + \overline{x+\overline{x}}) = \overline{\overline{y} + \overline{\overline{\overline{x}+z} + \overline{x+\overline{z}}}}.$$

Tej ostatniej postaci funkcji f odpowiada przedstawiony na rys. 9.24 układ logiczny utworzony z bramek NOR.



Rysunek 9.24. Układ logiczny dla funkcji $f(x,y,z) = \overline{\overline{y} + \overline{\overline{\overline{x}+z} + \overline{x+\overline{z}}}}$ (zad. 7.5.27 e)

28. 1. Nie; 2. Nie; 3. Tak; 4. Tak; 5. Tak.