# Wstęp do logiki i teorii mnogości. Zbiory 2

### Definicja (Dopełnienie zbioru)

- Niech $X$ będzie ustalonym zbiorem i niech $A$ będzie jego podzbiorem.

**Definicja (Dopełnienie zbioru)**

- Niech $X$ będzie ustalonym zbiorem i niech $A$ będzie jego podzbiorem.
- Wtedy zbiór $X - A$ nazywamy dopełnieniem zbioru $A$ do zbioru $X$ (lub *względem zbioru* $X$).

### Definicja (Dopełnienie zbioru)

- Niech $X$ będzie ustalonym zbiorem i niech $A$ będzie jego podzbiorem.
- Wtedy zbiór $X - A$ nazywamy dopełnieniem zbioru $A$ do zbioru $X$ (lub *względem zbioru* $X$).
- Jeśli z kontekstu jest jasne czym jest zbiór $X$, to zbiór $X - A$ krótko nazywamy *dopełnieniem zbioru* $A$ i oznaczamy przez $A'$, $\overline{A}$ lub $A^c$.

Naszkicować diagram Venna i na nim zacieniować zbiór:

1. $A \cap B'$;
2. $A' - B$;
3. $(A \cup B) - B$;
4. $B' \cap (A \cup C)$;
5. $(A' - B) \cap (A \cup C')$;
6. $((A \cap B) - (C - A)') \cap C$.

Dane są podzbiory $A = \langle 1; 5 \rangle$, $B = (3; 7)$ i $C = (-\infty; 2)$ przestrzeni $\mathbb{R}$. Wyznaczyć zbiory:

1. $A \cup B$;
2. $A \cap B$;
3. $A - B$;
4. $A - C$;
5. $B \cap C$;
6. $A' \cap C'$;
7. $A \cap (B - C)$;
8. $(C - A) \cap B$;
9. $A \triangle B$;
10. $A \triangle C$.

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

## Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

### Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (przemienność iloczynu)

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (przemienność iloczynu)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (łączność sumy)

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (przemienność iloczynu)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (łączność sumy)

(6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (łączność iloczynu)

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (przemienność iloczynu)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (łączność sumy)

(6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (łączność iloczynu)

(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (rozdzielność iloczynu względem sumy)

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (przemienność iloczynu)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (łączność sumy)

(6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (łączność iloczynu)

(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (rozdzielność iloczynu względem sumy)

(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (rozdzielność sumy względem iloczynu)

**Twierdzenie (Prawa algebry zbiorów)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

(1) $A \cup A = A$ (idempotentność sumy)

(2) $A \cap A = A$ (idempotentność iloczynu)

(3) $A \cup B = B \cup A$ (przemienność sumy)

(4) $A \cap B = B \cap A$ (przemienność iloczynu)

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (łączność sumy)

(6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (łączność iloczynu)

(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (rozdzielność iloczynu względem sumy)

(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (rozdzielność sumy względem iloczynu)

(9) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

**Twierdzenie (Monotoniczność działań na zbiorach)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ mamy następujące zależności:

(1) $A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq A$;

**Twierdzenie (Monotoniczność działań na zbiorach)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ mamy następujące zależności:

(1) $A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq A$;

(2) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

### Twierdzenie (Monotoniczność działań na zbiorach)

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ mamy następujące zależności:

(1) $A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq A$;

(2) $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

(3) $A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$;

### Twierdzenie (Monotoniczność działań na zbiorach)

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ mamy następujące zależności:

(1) $A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq A$;

(2) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

(3) $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$;

(4) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$;

**Twierdzenie (Monotoniczność działań na zbiorach)**

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ mamy następujące zależności:

(1) $A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq A$;

(2) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

(3) $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$;

(4) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$;

(5) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$;

### Twierdzenie (Monotoniczność działań na zbiorach)

Dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ mamy następujące zależności:

(1) $A \subseteq A \cup B$ i $A \cap B \subseteq A$;

(2) $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

(3) $A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$;

(4) $A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$;

(5) $A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$;

(6) $A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Rightarrow A - D \subseteq B - C$.

Podać warunki konieczne i dostateczne na to, aby dla podzbiorów $A$ i $B$ przestrzeni $X$ zachodziła każda z następujących zależności z osobna:

1. $A \cap B = A$;
2. $A \cup B = A$;
3. $A \cap B = X$;
4. $A \cup \emptyset = X$;
5. $A \cup B' = A$;
6. $A \cap B' = A$;
7. $A' \cap B' = \emptyset$;
8. $A' \cap X = \emptyset$;
9. $A \cup B \subseteq B$;
10. $A \subseteq A \cap B$;
11. $A \subseteq A - B$;
12. $A' \cap X = X$.

### Definicja

Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A$ i $B$ (produktem kartezjańskim lub po prostu produktem zbiorów $A$ i $B$) nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(a, b) \colon \; a \in A \wedge b \in B\}.$$

Analogicznie definiuje się iloczyn kartezjański $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdy $n$ jest liczbą naturalną i $n \geqslant 2$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \colon \; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

### Ćwiczenie

Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ i $C = \{x, y\}$. Wyznaczyć iloczyny kartezjańskie:

1. $A \times B$;
2. $C \times B$;
3. $A \times B \times C$;
4. $A \times A \times C$.

## Ćwiczenie

Wyznaczyć iloczyny kartezjańskie:

1. $\{0, \{1\}\} \times \emptyset$;
2. $\{1, \{2, \{3, \{4\}\}\}\} \times \{5, \{6, \{7\}\}\}$;
3. $\{0, 1\}^3$;
4. $\{\{0, 1\}\}^3$.

## Ćwiczenie

W płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zaznaczyć zbiory $A \times B$, $B \times A$ i $A \times A$, gdy:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 < x < 3\}$;
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leqslant x \leqslant 3\}$;
3. $A = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ lub } 3 < x < 4\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{R} \colon 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ lub } 4 < x < 5\}$.

## Ćwiczenie

Zbiory $A$, $B$ i $C$ są podzbiorami przestrzeni $X$. Zapisać w możliwie najprostszej postaci następujące zbiory:

1. $(A' \cap B')'$;
2. $((A' \cup B) \cap (A \cap B'))'$;
3. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A' \cup B')'$;
4. $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$.

## Ćwiczenie

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ prawdziwe są stwierdzenia:

1. $A \subseteq B \Rightarrow C - B \subseteq C - A$;
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup (B - A)$;
3. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$;
4. $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;
5. $A \triangle (A \triangle B) = B$;
6. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
7. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$;
8. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$;

## Ćwiczenie

Wykazać, że dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$ prawdziwe są stwierdzenia:

1. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
5. $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$;
6. $(A \cap C) - (B \cup D) = (A - B) \cap (C - D)$;
7. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
8. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

## Ćwiczenie

Sprawdzić, czy dla dowolnych podzbiorów $A$, $B$ i $C$ przestrzeni $X$ prawdziwa jest każda z następujących równości:

1. $A - B = A \cap B'$;
2. $(A \cap \emptyset) \cup B = B$;
3. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$;
4. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$;
5. $A \cap B = A' \cup B'$;
6. $A \cap (\emptyset \cup B) = A$;
7. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$;
8. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

## Ćwiczenie

Za pomocą przykładów wykazać, iż nie jest prawdą, że dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ mamy:

1. $A \cap (A \cap B) = B$;
2. $(A - B)' = (B - A)'$;
3. $(A \cap B)' \subseteq A$;
4. $(A \cup B \cup C) - (B \cup C) = A$;
5. $(A \cap B) \cup (B - A) = A$;
6. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup B$
7. $A \cap (B - C) = (A - C) - (B - C)$;
8. $(A - B) - C = (A - B) \cup (A \cap C)$;
9. $A - (B \cup C) = (A - B) \cup C$;
10. $(A \times B)' = A' \times B'$.

## Ćwiczenie

Wskazać (z uzasadnieniem) rodzaj zależności pomiędzy zbiorami $A$, $B$ i $C$, dla których z osobna mamy:

1. $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$;
2. $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$;
3. $(A - C) \cup B = A \cup B$;
4. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup B$.

## Ćwiczenie

Zbadać, która z następujących dziesięciu równości jest twierdzeniem algebry zbiorów:

1. $A - (A \cap B) = A - B$;
2. $(A \cup B) - B = A$;
3. $(A \cup B) - B = A - B$;
4. $A \cup (A \cap B) = A$;
5. $A \cup (A \cup B) = A \cup B$;
6. $A - B = B - A$;
7. $A - (A - B) = A \cap B$;
8. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
9. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$;
10. $A - (B - C) = (A - B) - C$.

## Ćwiczenie

Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Określić liczbę elementów zbioru:

1. $\mathcal{P}(A)$;
2. $A \times \mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A)) - A$;
3. $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A)) \cap A$.

## Ćwiczenie

Sprawdzić prawdziwość następujących równości dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$:

1. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
2. $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$;
3. $\mathcal{P}(A \bigtriangleup B) = \mathcal{P}(A) \bigtriangleup \mathcal{P}(B)$;
4. $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.