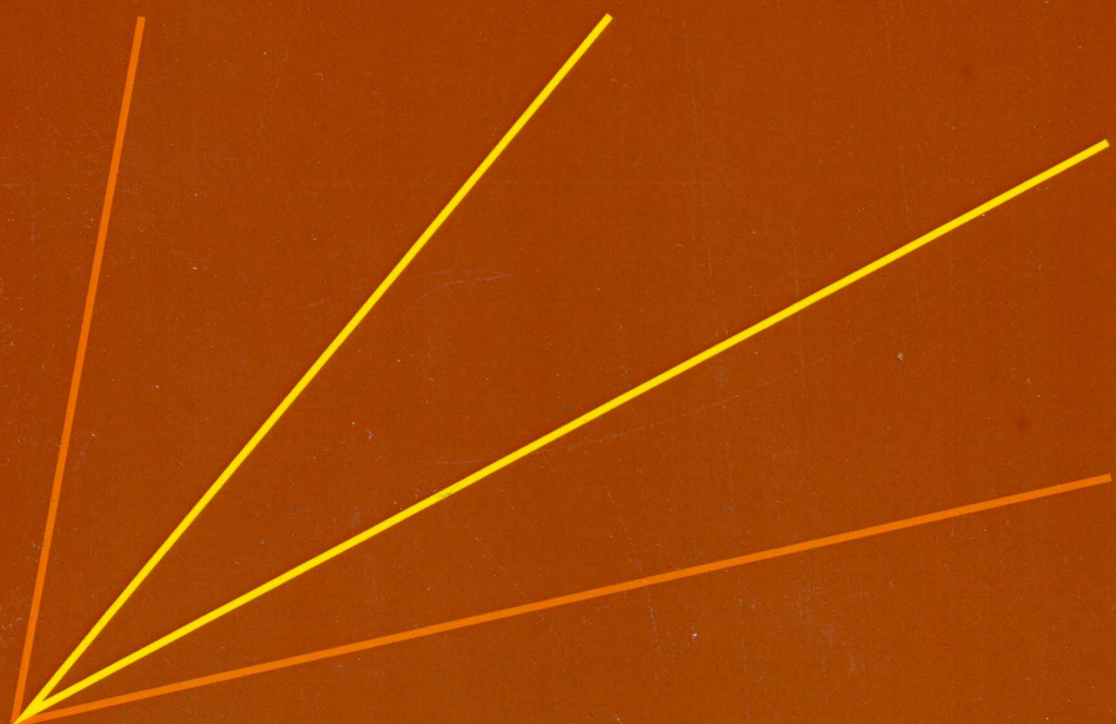
Jerzy Topp

Matematyka
Funkcje jednej zmiennej



Wydawnictwo PWSZ w Elblągu

Jerzy Topp

Matematyka
Funkcje jednej zmiennej

Elbląg 2012

RECENZENT
dr hab. Grażyna Kwiecińska, prof. AP

REDAKCJA, KOREKTA I PROJEKT OKŁADKI
Wydawnictwo Techniczno-Naukowe JAS
e-mail: jagoda.szczerkowska@gmail.com
Olga Strzelec
Jerzy Paczyński

Wydano za zgodą Rektora PWSZ w Elblągu

ISBN 978-83-62336-16-6

Wydawnictwo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Elblągu
82-300 Elbląg, ul. Wojska Polskiego 1, tel. 0-55 629 05 55

Spis treści

PRZEDMOWA

Z przyjemnością udostępniam studentom kolejną część zbioru notatek do wykładów i ćwiczeń z matematyki, jakie prowadzę dla studentów informatyki, budownictwa i mechaniki w Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Elblągu oraz w Uniwersytecie Gdańskim (i jakie prowadziłem też w Politechnice Gdańskiej). Tu przedstawiam elementy rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej. Inne części notatek przedstawiłem w podręcznikach „Wstęp do matematyki" i „Algebra liniowa".

Książka ta jest połączeniem klasycznego podręcznika ze zbiorem zadań. Przedstawiam w niej podstawowe definicje i twierdzenia, dużą liczbę przykładów i rysunków ilustrujących pojęcia i teorię oraz bardzo obszerne zestawy zadań do prowadzenia ćwiczeń w uczelniach oraz do samodzielnego rozwiązania. Ufam, że ta duża liczba przykładów i rysunków ułatwi zrozumienie przedstawianych treści, a dzięki załączonym zadaniom student odkryje dalsze zależności pomiędzy poznawanymi pojęciami i uzyska spodziewaną biegłość rachunkową. W celu kontroli poprawności rozwiązywania zadań, na końcu podręcznika przedstawiłem odpowiedzi do zadań.

Podręcznik ten przeznaczony jest dla studentów poprzednio wspomnianych kierunków studiów, ale ufam, że będzie on przydatny również dla wielu innych. Zakładam, że studenci, których będę uczył w oparciu o ten podręcznik, w stopniu zadawalającym znać będą podstawy matematyki w zakresie liceum – znać będą podstawowe własności działań na liczbach oraz własności podstawowych funkcji elementarnych. Zakładam też, że studenci aktywnie i uczciwie będą chcieli poznawać elementy matematyki na poziomie wymaganym w szkole wyższej. Tym podręcznikiem chcę im to ułatwić. Chcę też dostarczyć studentom prostych narzędzi matematycznych i przygotować ich do zrozumienia kolejnych przedmiotów ścisłych, informatycznych oraz technicznych znajdujących się w programach ich studiów. Osiągnięcie wspomnianych celów będzie wspólnym sukcesem autora i studentów. Dla takich studentów i celów napisałem ten podręcznik.

Wszelkie uwagi o tym podręczniku i informacje o zauważonych usterkach można kierować na adres `j.topp@inf.ug.edu.pl`. Pełna informacja o poprawionych fragmentach dostępna będzie pod adresem `inf.ug.edu.pl/~jtopp`. Tam też znajdą się wskazówki do trudniejszych ćwiczeń.

Pragnę wyrazić swoje podziękowanie pani profesor Grażynie Kwiecińskiej za jej uwagi i poprawki, które pozwoliły ulepszyć przedkładany tekst.

Na koniec mam przyjemność napisać, że praca nad tym podręcznikiem nie byłaby możliwa bez wsparcia mojej rodziny, której tę książkę poświęcam.

Jerzy Topp

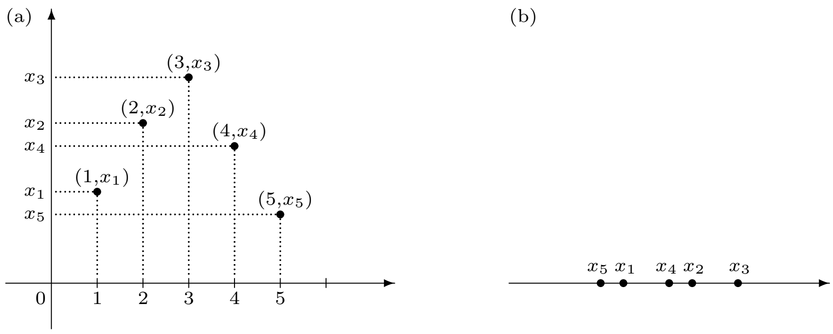
Rozdział 1

CIĄGI LICZBOWE

1.1. Ciągi i ich pierwsze własności

Definicja 1.1.1. Funkcję
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \tag{1.1}$$
która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $f(n) = x_n$, nazywamy *nieskończonym ciągiem rzeczywistym* lub po prostu *ciągiem.* Wartość tej funkcji dla liczby n, czyli liczbę x_n, nazywamy n*-tym wyrazem* (a czasami — *wyrazem ogólnym*) ciągu (1.1). Ciąg (1.1) może być określony przez podanie reguły tworzenia jego wyrazów lub przez wyliczenie
$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n,\ \ldots$$
początkowych jego wyrazów. (W tym ostatnim przypadku wyrażamy nadzieję, że czytając początkowe wyrazy ciągu, dobrze zrozumie się regułę tworzenia wszystkich wyrazów ciągu.) Na oznaczenie ciągu (1.1) używamy symbolu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub częściej (x_n). W wielu przypadkach będziemy używać sformułowania „ciąg x_n”, mając na myśli ciąg o wyrazie ogólnym x_n.

Na rys. 1.1 przedstawiliśmy dwie możliwe geometryczne ilustracje ciągu (x_n). W pierwszym przypadku każdej liczbie naturalnej n odpowiada punkt (n, x_n) na płaszczyźnie. W drugim przypadku liczbie naturalnej n odpowiada punkt x_n na osi liczbowej.



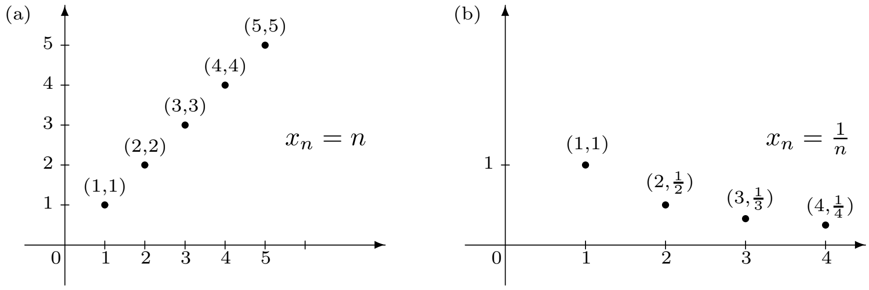
Rysunek 1.1. Ciąg (x_n) na płaszczyźnie (a) i na osi liczbowej (b)

Przykład 1.1.1. Pierwszymi wyrazami ciągu $(x_n) = \left(\frac{3n}{n+1}\right)$ są liczby $\frac{3\cdot1}{1+1}, \frac{3\cdot2}{2+1}, \frac{3\cdot3}{3+1}, \frac{3\cdot4}{4+1}, \ldots$, czyli liczby $\frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}, \frac{15}{6}, \ldots$

Przykład 1.1.2. Ciąg $\frac{3}{7}, \frac{5}{10}, \frac{7}{13}, \frac{9}{16}, \frac{11}{19}, \ldots$ jest ciągiem, w którym n-ty wyraz określony jest wzorem $x_n = \frac{2n+1}{3n+4}$ dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 1.1.3. Ciąg liczb naturalnych $1, 2, 3, 4, \ldots$ jest ciągiem, w którym $x_n = n$ dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 1.1.4. Ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ jest ciągiem odwrotności kolejnych liczb naturalnych i oczywiście $x_n = \frac{1}{n}$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.



Rysunek 1.2. Ciąg $x_n = n$ (a) i ciąg $x_n = \frac{1}{n}$ (b)

Przykład 1.1.5. Jeśli a i r są liczbami rzeczywistymi, to ciąg $a, a+r, a+2r, a+3r, \ldots$, czyli ciąg, którego n-ty wyraz dany jest wzorem

$$x_n = a + (n-1)r$$

dla $n \in \mathbb{N}$, nazywa się *ciągiem arytmetycznym.*

Przykład 1.1.6. Jeśli a i q są liczbami rzeczywistymi, to ciąg $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$ nazywa się *ciągiem geometrycznym*[1]. Jest to ciąg, w którym każdy n-ty wyraz określony jest wzorem

$$x_n = a \cdot q^{n-1}.$$

Przykład 1.1.7. Ciąg, w którym, począwszy od pewnego miejsca, poszczególne wyrazy wyrażają się poprzez wyrazy wcześniejsze, nazywa sie *ciągiem rekurencyjnym.* Przykładowo, ciąg (x_n), w którym

$$x_1 = x_2 = 1 \quad \text{i} \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3,$$

jest ciągiem rekurencyjnym (inne przykłady ciągów rekurencyjnych przedstawiono w przykładzie 1.7.1 i ćwiczeniu 1.7.1). W tym ciągu każdy wyraz, począwszy od trzeciego, jest sumą swoich dwóch bezpośrednich poprzedników. Łatwo można zauważyć, że początkowymi wyrazami tego ciągu są liczby

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

Ten konkretny ciąg, obecnie nazywany ciągiem Fibonacciego, pochodzi z książki *Liber abaci* autorstwa tegoż matematyka. Uważa się, że właśnie w tej książce pierwszy raz w Europie zastosowano dziesiętny zapis liczb.

Ćwiczenie 1.1.1. Wyznaczyć wskazane wyrazy i wskazane różnice wyrazów ciągu (x_n):

1. x_{2008} i x_{2009}, gdy $x_n = 1 + (-1)^n$;
2. x_{2008} i $x_{2009} - x_{2008}$, gdy $x_n = 1 + 2 + \ldots + n$;
3. x_2, x_3 i $x_{2n} - x_{2n-1}$, gdy $x_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}$;
4. x_2, x_3 i x_4, gdy $x_1 = 1$ i $x_n = 2x_{n-1} + 1$ dla $n \geqslant 2$.

Definicja 1.1.2. Niech (x_n) i (y_n) będą dwoma ciągami. Wtedy ciąg $(x_n + y_n)$, w którym każdy n-ty wyraz jest sumą n-tych wyrazów ciągów (x_n) i (y_n), nazywamy *sumą ciągów* (x_n) i (y_n). Podobnie definiuje się ciągi $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ i $(\frac{x_n}{y_n})$ (gdy $y_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$) nazywane *różnicą, iloczynem* i *ilorazem ciągów* (x_n) i (y_n).

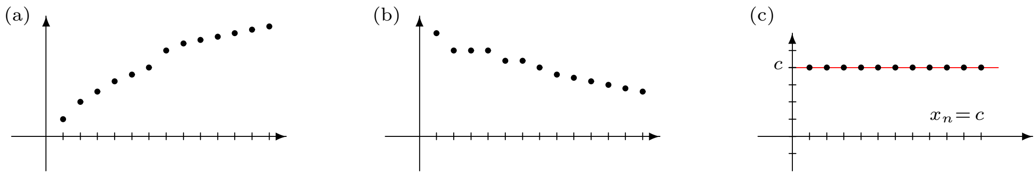
[1] Pierwsze pisemne wzmianki o liczbach tworzących ciąg geometryczny pochodzą z tzw. papirusu Rhinda (nazywanego też papirusem Ahmesa lub papirusem Ahmosa). Papirus ten powstał około 1650 r. p.n.e. (i jest kopią matematycznego tekstu spisanego około 2000 r. p.n.e.). Mówi się w nim o siedmiu domach, w których jest po siedem kotów. Każdy z tych kotów zjada po siedem myszy, każda mysz zjada po siedem kłosów zboża, a z każdego kłosa wyrasta siedem miar ziarna. Podobny tekst można znaleźć w opublikowanej w 1202 r. książce *Liber abaci* Fibonacciego: „7 starszych kobiet pojechało do Rzymu; każda z nich miała 7 mułów, z których każdy niósł 7 worków; każdy worek zawierał 7 pakunków; każdy pakunek zawierał 7 noży, z których każdy zapakowany był w 7 pochewek".

Przykład 1.1.8. Ciąg $\left(n+\frac{\sqrt{n^2+1}}{\operatorname{tg} n}\right)$ jest sumą ciągów (n) i $\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\operatorname{tg} n}\right)$, a ciąg $\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\operatorname{tg} n}\right)$ jest ilorazem ciągów $(\sqrt{n^2+1})$ i $(\operatorname{tg} n)$.

Definicja 1.1.3. O ciągu (x_n) mówimy, że jest on

1. *rosnący*, jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} > x_n$;
2. *malejący*, jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} < x_n$;
3. *niemalejący*, jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} \geqslant x_n$;
4. *nierosnący*, jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} \leqslant x_n$;
5. *stały*, jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_{n+1} = x_n$.

Z powyższej definicji wynika, że ciąg (x_n) jest rosnący (malejący, niemalejący, nierosnący, stały) wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{n+1} - x_n > 0$ ($x_{n+1} - x_n < 0$, $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$, $x_{n+1} - x_n = 0$) dla każdej liczby naturalnej n. Warto także zauważyć, że jeśli wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są dodatnie, to ciąg (x_n) jest rosnący (malejący, niemalejący, nierosnący, stały) wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ($\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$) dla każdej liczby naturalnej n. O ciągu (x_n) mówimy, że jest on *rosnący od pewnego miejsca*, gdy $x_{n+1} > x_n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$, gdzie n_0 jest pewną liczbą naturalną. Podobnie definiuje się pojęcie ciągu malejącego (niemalejącego, nierosnącego lub stałego) od pewnego miejsca.



Rysunek 1.3. Ciąg rosnący (a), nierosnący (b) i stały (c)

Definicja 1.1.4. Mówimy, że ciąg (x_n) jest *monotoniczny*, gdy jest on niemalejący lub nierosnący. Mówimy też, że ciąg (x_n) jest *ściśle monotoniczny*, gdy jest on rosnący lub malejący. Powiemy też, że ciąg jest *monotoniczny od pewnego miejsca*, gdy jest on niemalejący lub nierosnący od pewnego miejsca. Podobnie definiuje się pojęcie ciągu ściśle monotonicznego od pewnego miejsca.

Przykład 1.1.9. Pokażemy, że ciąg (x_n), w którym $x_n = \frac{2n}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest rosnący (rys. 1.4 (a)). W tym celu wystarczy zauważyć, że różnica $x_{n+1} - x_n$ jest dodatnia dla każdego n naturalnego. Istotnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

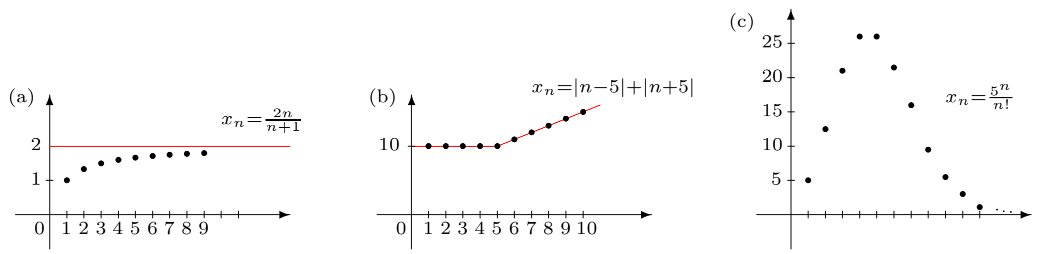
Przykład 1.1.10. Weźmy teraz pod uwagę ciąg, w którym $x_n = |n-5| + |n+5|$ dla $n \in \mathbb{N}$. Bez problemu można zauważyć, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_5 = 10$ i $x_n = 2n$ dla $n \geqslant 5$. Teraz zauważmy, że $x_{n+1} - x_n = 0$ dla $n = 1, 2, 3$ i 4 oraz $x_{n+1} - x_n = 2(n+1) - 2n = 2 > 0$ dla $n \geqslant 5$. Z tego wynika, że ciąg $x_n = |n-5| + |n+5|$ jest niemalejący (i rosnący od pewnego miejsca) (rys. 1.4 (b)).

Przykład 1.1.11. Ciąg $x_n = \frac{5^n}{n!}$ nie jest monotoniczny, bo różnica $x_{n+1} - x_n = \frac{5^n(4-n)}{(n+1)!}$ zmienia znak w zależności od n. Dokładniej mamy $x_{n+1} - x_n > 0$ dla $n = 1, 2, 3$, a jednocześnie $x_{n+1} - x_n = 0$ dla $n = 4$ oraz $x_{n+1} - x_n < 0$ dla $n \geqslant 5$. Z tego także wynika, że rozważany ciąg jest malejący od pewnego miejsca (rys. 1.4 (c)).

Przykład 1.1.12. Ciąg $x_n = (n+3)!/4^n$ jest rosnący, bo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+4)!}{4^{n+1}}}{\frac{(n+3)!}{4^n}} = \frac{n+4}{4} > 1$$

dla każdej liczby naturalnej n.



Rysunek 1.4. Ciąg rosnący (a), niemalejący (b) i niemonotoniczny (c)

Ćwiczenie 1.1.2. Określając znak różnicy $x_{n+1}-x_n$ lub wartość ułamka $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, zbadać monotoniczność ciągu (x_n), w którym:

1. $x_n = \dfrac{n}{3n+1}$;
2. $x_n = \dfrac{10^n}{(2n)!}$;
3. $x_n = n-2^n$;
4. $x_n = n^2-n$;
5. $x_n = n!$;
6. $x_n = \dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$;
7. $x_n = \dfrac{n}{3^n}$;
8. $x_n = 1-(1/3)^n$;
9. $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$;
10. $x_n = \sqrt{n^2+1}$;
11. $x_n = \dfrac{10^n}{2^{n^2}}$;
12. $x_n = \sqrt{n^2+1}-n$;
13. $x_n = \dfrac{1}{n+\ln n}$;
14. $x_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$.
15. $x_n = 1-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$.

Ćwiczenie 1.1.3. Dany jest ciąg (x_n), w którym x_1 jest dodatnią liczbą rzeczywistą, a $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{x_1^2}{x_n}\right)$ dla każdej liczby naturalnej n. Indukcyjnie wykazać, że ciąg (x_n) jest stały.

Definicja 1.1.5. Mówimy, że ciąg (x_n) jest *ograniczony z dołu*, gdy

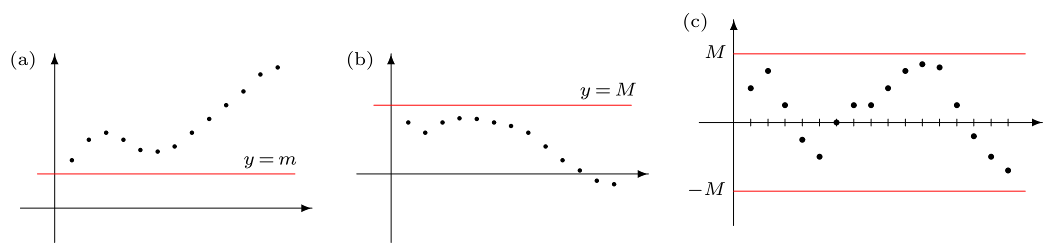
$$\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \geqslant m. \tag{1.2}$$

Podobnie mówimy, że ciąg (x_n) jest *ograniczony z góry*, gdy

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \leqslant M. \tag{1.3}$$

Mówimy także, że ciąg (x_n) jest *ograniczony*, gdy jest on jednocześnie ograniczony z dołu i z góry. Z powyższego jest oczywiste, że ciąg (x_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |x_n| \leqslant M. \tag{1.4}$$



Rysunek 1.5. Ciąg ograniczony z dołu (a), z góry (b), ograniczony (c)

Przykład 1.1.13. Ciąg $x_n = 1/n$ jest ograniczony, bo $|x_n| = |1/n| \leqslant 1$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 1.1.14. Ciąg $x_n = \sin(n+1)$ jest ograniczony, bo $|x_n| = |\sin(n+1)| \leqslant 1$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 1.1.15. Ciąg $x_n = (2n+3)/n$ jest ograniczony, bo dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$|x_n| = \left|\frac{2n+3}{n}\right| = \frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \leqslant 5.$$

Przykład 1.1.16. Ciąg $x_n = \frac{5^n}{n!}$ jest ograniczony, bo – jak to wynika z jego monotoniczności omówionej w przykładzie 1.1.11 – mamy $|x_n| = x_n \leqslant x_4 = x_5 = \frac{5^4}{4!}$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 1.1.17. Ciąg $x_n = (-1)^n n$ nie jest ograniczony, bo dla każdej liczby $M \in \mathbb{R}$ i każdej liczby naturalnej n, jeśli $n > M$, to mamy $|x_n| = |(-1)^n n| = n > M$.

Ćwiczenie 1.1.4. Zbadać ograniczoność ciągu (x_n), gdy:

1. $x_n = \dfrac{5n}{1+n}$;
2. $x_n = \dfrac{1+n^2}{1+n^3}$;
3. $x_n = \dfrac{3^n}{3^n+3}$;
4. $x_n = 100 - \sqrt{n}$;
5. $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n^2}$;
6. $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$;
7. $x_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^4+4}}{n+1}$;
8. $x_n = n3^{-n/2}$.

Definicja 1.1.6. Jeśli (x_n) jest ciągiem, a (k_n) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (x_{k_n}), czyli ciąg $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$, nazywamy *podciągiem ciągu* (x_n).

Przykład 1.1.18. Ciąg $2, 4, 6, 8, \ldots$ kolejnych parzystych liczb naturalnych jest podciągiem ciągu wszystkich liczb naturalnych $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Przykład 1.1.19. Ciąg $(4n+1)$ jest podciągiem ciągu $(2n-1)$ kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, a ciąg $(2n-1)$ jest oczywiście podciągiem ciągu (n) wszystkich liczb naturalnych.

Przykład 1.1.20. Jeśli $x_n = |n-5| + |n+5|$ dla $n \in \mathbb{N}$, to – wobec naszych obserwacji z przykładu 1.1.10 – ciąg $x_{n+5} = 2n+10$ jest rosnącym podciągiem ciągu $x_n = |n-5| + |n+5|$.

Przykład 1.1.21. Z analogicznych obserwacji z przykładu 1.1.11 wynika, że podciąg $x_{n+4} = 5^{n+4}/(n+4)!$ jest malejącym podciągiem ciągu $x_n = 5^n/n!$.

Przykład 1.1.22. Weźmy teraz pod uwagę ciąg $x_n = (-1)^n$. Jego podciąg $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ jest stałym podciągiem ciągu x_n. Podobnie $x_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$ jest stałym podciągiem ciągu x_n. Natomiast w podciągu $x_{n^n} = (-1)^{n^n}$ na przemian występują liczby -1 oraz 1 i nie jest on monotonicznym podciągiem ciągu x_n.

1.2. Granica ciągu

Definicja 1.2.1. Mówimy, że liczba rzeczywista x jest *granicą* (dokładniej, *granicą właściwą*) ciągu (x_n), piszemy $x_n \to x$ przy $n \to \infty$ lub

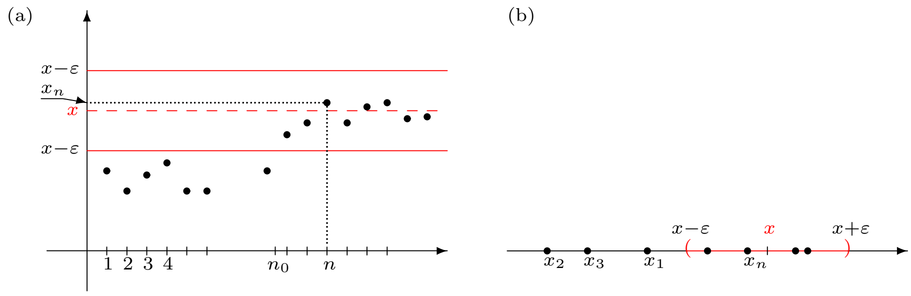
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba n_0 taka, że każdy wyraz ciągu o indeksie większym od n_0 różni się od x o mniej niż o ε.

Symbol lim jest skrótem łacińskiego słowa *limes* oznaczającego granicę. Zapis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ czytamy „limes x_n po n zmierzającym do nieskończoności równa się x" lub „x_n dąży do x przy n dążącym do nieskończoności" albo „x_n zmierza do x, gdy n zmierza do nieskończoności". Liczba n_0 występująca w powyższej definicji zależy od liczby ε i od samego ciągu. Z powyższej definicji jest oczywiste, że mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in\mathbb{R}} \forall_{n>n_0} |x_n - x| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in\mathbb{R}} \forall_{n>n_0} -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in\mathbb{R}} \forall_{n>n_0} x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Zatem można powiedzieć, że liczba x jest granicą ciągu (x_n), jeżeli wyrazy tego ciągu o dostatecznie dużych numerach różnią się dowolnie mało od liczby x. Równoważnie, liczba x jest granicą ciągu (x_n), jeżeli w dowolnie małym otoczeniu liczby x znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, tj. wszystkie poza być może skończoną ich liczbą (rys. 1.6).



Rysunek 1.6. Granica właściwa x ciągu (x_n) na płaszczyźnie (a) i na osi (b)

Definicja 1.2.2. Ciąg mający granicę (będącą liczbą rzeczywistą) nazywa się *ciągiem zbieżnym*. Każdy inny ciąg nazywamy *ciągiem rozbieżnym*.

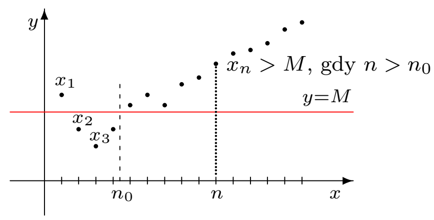
Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi, które mają granicę niewłaściwą.

Definicja 1.2.3. Mówimy, że ciąg (x_n) ma *granicę niewłaściwą plus nieskończoność* (lub mówimy, że ciąg (x_n) jest *rozbieżny do plus nieskończoności*), piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ lub $x_n \to \infty$, jeżeli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}} \exists_{n_0\in\mathbb{R}} \forall_{n>n_0}\ x_n > M. \tag{1.6}$$

Analogicznie mówimy, że ciąg (x_n) ma *granicę niewłaściwą minus nieskończoność* (lub mówimy, że ciąg (x_n) jest *rozbieżny do minus nieskończoności*), piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ lub $x_n \to -\infty$, gdy

$$\forall_{M\in\mathbb{R}} \exists_{n_0\in\mathbb{R}} \forall_{n>n_0}\ x_n < M. \tag{1.7}$$

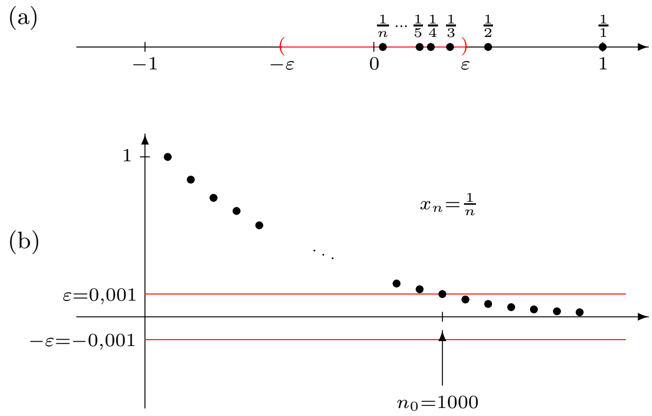


Rysunek 1.7. Ciąg (x_n) rozbieżny do ∞

Przykład 1.2.1. Zauważmy, że jeśli $x_n = \frac{1}{n}$, to $x_n \to 0$ przy $n \to \infty$, bo dla każdej liczby dodatniej ε mamy

$$|x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

gdy n jest liczbą naturalną taką, że $n > \frac{1}{\varepsilon} = n_0$. To dowodzi, że istotnie mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Prześledźmy to jeszcze raz na konkretnych liczbach ε. Przykładowo, jeśli $\varepsilon = 0{,}4$, to mamy $n_0 = 1/\varepsilon = 2{,}5$. W tym przypadku, jeśli n jest liczbą naturalna i $n > n_0 = 2{,}5$, to $|x_n - x| = |1/n - 0| = 1/n < 0{,}4 = \varepsilon$ (rys. 1.8 (a)). Natomiast dla $\varepsilon = 0{,}001$ mamy $n_0 = 1/\varepsilon = 1000$. Tym razem, jeśli n jest liczbą naturalna i $n > n_0 = 1000$, to $|x_n - x| = |1/n - 0| = 1/n < 0{,}001 = \varepsilon$ (rys. 1.8 (b)).



Rysunek 1.8. Równość $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ na osi (a) i płaszczyźnie (b)

Przykład 1.2.2. Podobnie jak wyżej uzasadnia się, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0.$

Tak jest istotnie, bo dla każdej liczby dodatniej ε mamy

$$|x_n-x|=\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon,$$

gdy $n>\sqrt{1/\varepsilon}=n_0$.

Przykład 1.2.3. Odnotujmy, że jeśli ciąg (x_n) jest stały, powiedzmy $x_n=x$, to

$$\lim_{n\to\infty} x = x.$$

Stwierdzenie to jest konsekwencją faktu, że dla każdej liczby $\varepsilon>0$ i każdej liczby naturalnej n mamy $|x_n-x|=|x-x|=0<\varepsilon$.

Przykład 1.2.4. Uzasadnimy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-1}=\dfrac{1}{2}.$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Zauważmy, że występująca w definicji granicy nierówność $|x_n-x|<\varepsilon$ przybiera w tym przypadku postać

$$|x_n-x|=\left|\frac{n+1}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2(2n-1)}<\varepsilon.$$

Ta nierówność jest równoważna nierówności $n>\frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Zatem jeśli przyjmiemy $n_0=\frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon}$, to dla każdej liczby $n>n_0$ mamy $\left|\frac{n+1}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. To dowodzi, że liczba $\frac{1}{2}$ jest granicą ciągu $x_n=\frac{n+1}{2n-1}$, czyli mamy $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}$.

Przykład 1.2.5. Udowodnimy, że jeśli $x_n=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, to $\lim_{n\to\infty}x_n=1$.

Zauważmy, że

$$|x_n-x|=\left|\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})}=\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

jeśli $n>n_0=\frac{1}{2\varepsilon}$. Stąd wynika, że $x_n\to 1$ przy $n\to\infty$.

Przykład 1.2.6. Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=+\infty$, bo dla każdej liczby $M\in\mathbb{R}$ i każdej liczby naturalnej $n>\frac{M+1}{2}$ mamy $x_n=2n-1>2\cdot\frac{M+1}{2}-1=M$.

$\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) - x + C$; 33. $\cos x - (10/3)\operatorname{arctg}((\cos x)/3) + C$; 34. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; 35. $(1/5)\operatorname{tg}^5 x + C$; 36. $2\operatorname{arctg}\sqrt{(1-x)/x} - 2\sqrt{(1-x)/x} + C$; 37. $x\ln(x+x^2) - 2x + \ln(1+x) + C$; 38. $(x^2/2)((\ln x)^2 - \ln x) + x^2/4 + C$; 39. $\ln|\ln x + \sqrt{4+\ln^2 x}| + C$; 40. $15\ln(4+\cos x) + (1/2)\cos^2 x - 4\cos x + C$; 41. $-\operatorname{ctg} x - x + C$; 42. $(1/3)\operatorname{tg}^3 x + (1/5)\operatorname{tg}^5 x + C$; 43. $\ln|\operatorname{tg} x| - 1(2\sin^2 x) + C$; 44. $(1/5)\ln|(2\operatorname{tg}(x/2)+1)/(\operatorname{tg}(x/2)-2)| + C$; 45. $(1/2)(\operatorname{tg} x + 1/\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)) + C$; 46. $(2x-3)/2 + 2\sqrt{2x-3} + \ln(2x-2) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2x-3} + C$; 47. $(2\sin x - \sin^2 x - 1)e^{\sin x} + C$; 48. $\sqrt{x^2-9}/(9x) + C$. **5.8.2.** 1. $(x^2/2)\ln(4+x^4) - x^2 + 2\operatorname{arctg}(x^2/2) + C$; 2. $-\sqrt{5+x-x^2} + (1/2)\arcsin((2x-1)/\sqrt{21}) + C$; 3. $(x^2/2)\arccos(1/x) - \sqrt{x^2-1}/2 + C$; 4. $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$; 5. $(9/8)\arcsin((2x-1)/3) + (2x-1)\sqrt{2+x-x^2}/4$; 6. $3(x\ln x - x) + C$.

Rozdział 6

6.1.1. 1. $33/2$; 2. $32/3$; 3. 21; 4. $2/3$; 5. $1/4$; 6. $635/2$. **6.2.1.** 1. 24; 2. $\pi/4$; 3. a^2; 4. 26; 5. 14; 6. 40; 7. $\pi^2/2$; 8. $2-\pi^2/2$; 9. $2\pi+4$. **6.3.2.** 1. 0; 2. 7; 3. -64; 4. 17; 5. -73; 6. 4. **6.3.3.** 1. $\pi/4$; 2. $9\pi/2$; 3. 0; 4. $\pi/2+8$. **6.4.1.** 1. $\sin x^2$; 2. 0; 3. $2x\int_0^x \sin t^2\,dt + x^2\sin x^2$; 4. $-\sin a^2$; 5. $2x\sqrt{1+x^4}$; 6. $3x^2/\sqrt{1+x^{12}} - 2x/\sqrt{1+x^8}$; 7. $-\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$; 8. 0; 9. $-\sin(x/2)\cos(x/3)$; 10. $(72x^4+53x^2-2)/((16x^2+1)(9x^2+1))$; 11. $2\sqrt{1+x^6}/x$; 12. $\sqrt{1+\sin^4 x}\cos x$. **6.4.2.** 1. $\pi/4$, 1, $-1/2$; 2. $-\pi$, $-\pi$, $(\pi^3+2\pi)/4$; 3. 0, $2/e$, $4/e$; 4. 0, 1, 0; 5. 0, 0, 0. **6.4.3.** $f(x)$ jest wypukła w przedziale $(-\infty;-1/2)$ i wklęsła w przedziale $(-1/2;\infty)$. Punkt $(-1/2; f(-1/2))$ jest punktem przegięcia funkcji $f(x)$. **6.4.4.** 1. $3e^9$; 2. 1; 3. $\pi^2/4$; 4. 0; 5. 1; 6. $1/3$; 7. 3; 8. $1/(x+\sqrt{x^2+1})$; 9. 1. **6.4.5.** 1. 52; 2. $(162\sqrt{3}-4\sqrt{2})/15$; 3. $28-4e$; 4. $((e+1)^6-64)/6$; 5. $21/8$; 6. $2/3$; 7. $\pi/4+1$; 8. $(\ln 3-1)/2$; 9. $(\ln(2-\sqrt{3})+\sqrt{3})/4$; 10. $2/3$; 11. 2; 12. $e^2/4$; 13. $4\sqrt{2}/3$; 14. $\ln 3-1$; 15. $(12\sqrt{3}-\pi-12)/6$; 16. $-7/2$; 17. 3; 18. π; 19. -2; 20. $16/35$; 21. $2\sqrt{2}-2$; 22. 8; 23. π; 24. $(2\sqrt{2}-1)/3$; 25.$1/3$; 26. $\pi/2$; 27. $\pi/2$; 28. $\pi/3$; 29. $\ln(e+1)$; 30. $(\pi-2)/2$; 31. e^2-3/e^2+2; 32. $(1/2)\sin(\pi/16)$; 33. $8/15$; 34. $\pi^2/4$; 35. $2\ln(\sqrt{5}-2)+\sqrt{5}-1$; 36. $1/\pi$; 37. $20e^6/9$; 38. $e-2$; 39. $\pi/4-\pi^2/32-(1/2)\ln 2$. **6.4.6.** 1. π; 2. π; 3. 2; 4. 3. **6.4.7.** 1. $fc = 1 = f(-1/2) = f(1/2)$; 2. $fc = 1 = f(1) = f(3)$; 3. $fc = 4/3 = f(2/\sqrt{3})$; 4. $fc = 8/3 = f((6-2\sqrt{3})/3) = f((6+2\sqrt{3})/3)$; 5. $fc = 4 = f((1+\sqrt{7})/3)$; 6. $fc = 30/13 = f(27000/2197)$; 7. $fc = 0 = f(\pi/2) = f(3\pi/2)$; 8. $fc = 3 = f(0)$; 9. $fc = 0 = f(\pi/2)$; 10. $fc = 0 = f(\pi)$. **6.4.9.** $\pi^2/4$. **6.4.10.** $\pi/4$ i $\pi/4$. **6.4.12.** 1. 5; 2. 5; 3. 2; 4. $3/2$; 5. 5; 6. 10. **6.4.13.** 1. $2/3$; 2. 1; 3. $1/4$; 4. 0; 5. $1/8$; 6. $2/\pi$; 7. $\sin 1$; 8. $15/4$; 9. $2\sqrt{2}-2$. **6.4.14.** 1. $(4\sqrt{2}-16)/3$; 2. $2\sqrt{3}-2/3+4/\pi$; 3. $3/(\ln 2)-(4/\pi)\ln 2-2$; 4. $22/3$. **6.4.15.** $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$, $I_4 = 3\pi/16$ i $I_5 = 8/15$.

Rozdział 7

7.1.1. 1. $9/2$; 2. $1/6$; 3. $4/15$; 4. $15/8-2\ln 2$; 5. 12; 6. $5/12$; 7. $2\ln 3-2$; 8. $2\pi^2-\pi^3/3$; 9. $1/6$; 10. 2; 11. 2; 12. $2\sqrt{2}-2$; 13. $8/\pi-1$; 14. $4/\pi-1$; 15. $4/\pi-1/2$; 16. $\pi/2$; 17. 1; 18. $\pi/4-\ln 2$; 19. $3/4-(2\ln 2)/\pi$; 20. $4/3$; 21. $128/15$. **7.1.2.** $e/2-1$. **7.1.3.** $e^2/2-e-1/2$. **7.1.4.** $2/3$. **7.1.5.** $(\pi+3\sqrt{3}-3)/24$. **7.1.6.** $a = 3/2$. **7.1.7.** 1. $256/15$; 2. $72\sqrt{3}/5$; 3. $8\sqrt{2}/15$; 4. $3-e$; 5. $\pi/8$; 6. $3\pi/4$; 7. 5; 8. $1/6$; 9. $22/5$; 10. $4/3$; 11. $9\pi/2$; 12. 3π; 13. $\pi/8$; 14. $\pi/32$; 15. $2\pi+80/\pi$. **7.1.8.** 1. π^2; 2. $4\pi^3/3$; 3. $(e^{4\pi}+e^{2\pi})4$; 4. 1; 5. $(2\pi+3\sqrt{3})/24$; 6. $3\pi/4$. **7.1.9.** 1. π; 2. 4; 3. 4π; 4. $\pi/2$; 5. $9\pi/4$; 6. $27\pi/2$; 7. $9\pi/2$; 8. $9\pi/2$. **7.1.10.** 1. $2\pi/3-\sqrt{3}/2$; 2. $4\pi/3-\sqrt{3}$; 3. $5\pi/4-2$; 4. $5\pi/24-\sqrt{3}/4$; 5. $3\pi/4$; 6. $\pi/2-1$; 7. $1-\sqrt{2}/2$; 8. $11\pi-12\sqrt{2}$; 9. $5\pi/4-2$; 10. $5\pi/4$. **7.1.11.** 1. $\pi/3+\sqrt{3}/2$; 2. $2\pi/3+\sqrt{3}$; 3. $\pi/4$; 4. $\pi/4+2$; 5. $\pi/4$; 6. π; 7. $4\pi/3+2\sqrt{3}$; 8. $\pi/3+2-\sqrt{3}$. **7.1.12.** 1. $2\pi+3\sqrt{3}/2$ i $\pi-3\sqrt{3}/2$; 2. $2\pi+3\sqrt{3}/2$ i $\pi-3\sqrt{3}/2$. **7.1.13.** $(16\sqrt{2}-20)/3$. **7.2.1.** 1. e^2+1; 2. $e^3-e^{-8}+11$; 3. $2\sqrt{2}$; 4. $8\sqrt{2}-4$; 5. $4\sqrt{2}-2$; 6. e^3-e^{-3}; 7. $3/2$; 8. $\sqrt{2}(e^\pi-1)$; 9. $\sqrt{2}(e^\pi-1)$; 10. $\sqrt{2}-\sqrt{10}/3+\ln(3+\sqrt{10})-\ln(1+\sqrt{2})$; 11. $4-2\sqrt{2}$; 12. $2\ln 2$; 13. $8((\pi^2+1)^3-1)/3$; 14. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$; 15. $\sqrt{2}(1-e^{-\pi/2})$; 16. $(37\sqrt{37}-1)/27$; 17. $2\sqrt{5}\ln(2+\sqrt{5})$; 18. $\operatorname{tgh}(1/2)$; 19. $(\ln(\sqrt{37}+6)+6\sqrt{37})/12$; 20. $779/240$; 21. 1; 22. $\sqrt{2}\pi$; 23. $\pi^2/2$; 24. 12; 25. $\ln 2$; 26. $3\sqrt{2}/4$. **7.2.2.** 1. $52/3$; 2. 12; 3. $50/3$; 4. $31/6$; 5. $53/6$; 6. $32/3$; 7. 6; 8. $(13\sqrt{13}-8)/27$; 9. $(e^2+1)/4$; 10. $(24-\ln 2)/8$; 11. $2\ln 3-1$; 12. $\ln(1+\sqrt{2})-\ln\sqrt{3}$; 13. $\ln(e^2+e^{-2})$; 14. $595/144$; 15. $17/6$; 16. $2055/64$; 17. 1; 18. $26\sqrt{3}/3$. **7.2.3.** 1. 4; 2. $2\pi a$; 3. $4a$; 4. $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$; 5. $(\sqrt{(\pi^2+2)^3}-2\sqrt{2})/3$; 6. $a(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}))$. **7.3.1.** $1/5$. **7.3.2.** $1/30$. **7.3.3.** $1/110$. **7.3.4.** $(e^4-e^2)/2$. **7.4.1.** 1. 6π; 2. $20\pi/3$; 3. π; 4. $\pi^2/2$; 5. $\pi(e-2)$; 6. $\pi^3/4-2\pi$; 7. $\pi\ln(3/2)$; 8. 156; 9. 6π; 10. $256\pi/35$; 11. 12π; 12. $32\pi a^3/105$; 13. $\pi/4$; 14. $5\pi^2$; 15. $\pi^2/4+\pi/2$; 16. $3\pi\ln 25$. **7.4.2.** 1. 198π; 2. $2\pi/3$; 3. $\pi\ln 10$; 4. 2π; 5. $2\pi(1-\sqrt{3}/2)$; 6. $\pi(e^2+1)/2$; 7. $\pi^2/4$; 8. $32\pi/35$. **7.4.3.** 1. $125\pi/3$ i $125\pi/3$; 2. $\pi(e^2+4e-3)/2$ i π; 3. $8\pi/9$ i $2\pi/3$; 4. $25\pi/2$ i $25\pi/3$; 5. $5\pi/28$ i $5\pi/28$; 6. $16\pi/15$ i $\pi/2$. **7.4.4.** 1. 162π; 2. $64\pi/15$; 3. $\pi/6$; 4. $1296\pi/5$; 5. $16\pi/15$; 6. $29\pi/30$; 7. $(2\pi^4-3\pi^2)/12$; 8. 8π. **7.5.1.** 1. $98\pi/3$; 2. 8π; 3. $61\pi/1728$; 4. $8\pi(2\sqrt{2}-1)/3$; 5. $\pi(2\sqrt{2}-\ln(3-2\sqrt{2}))$; 6. $\sqrt{3}\pi/2+\pi\ln(\sqrt{3}+2)/4$; 7. $\pi(\sqrt{2}-\sqrt{5}/4+\ln 2-\ln(\sqrt{10}+\sqrt{2}-1-\sqrt{5}))$; 8. $\pi(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln(e+\sqrt{1+e^2})-\ln(1+\sqrt{2}))$; 9. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln 2-\ln(\sqrt{10}+\sqrt{2}-1-\sqrt{5}))$; 10. $32\pi a^2/5$; 11. $263\pi/256$; 12. $32\sqrt{5}\pi$; 13. $8\sqrt{5}\pi$; 14. $32\sqrt{2}\pi$; 15. $(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})\pi/6$; 16. $\pi(1+(1/2)\sinh 2)$; 17. $348(1+\sqrt{2})\pi/5$; 18. $\pi(3\sqrt{10}-\sqrt{2}-\ln(3+\sqrt{10})+\ln(1+\sqrt{2}))/\sqrt{2}$ 19. $2\sqrt{2}\pi(e^\pi-2)/5$; 20. $64\pi/3$.

7.6.1. $180(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})\approx 532,42$ m^2. **7.6.2.** $4\pi^2 rR$. **7.6.3.** 19.8 m. **7.6.4.** $4\pi(r^3-(r^2-d^2)^{3/2})/3$.

Rozdział 8

8.1.1. 1. $1/18$; 2. $1/50$; 3. 2; 4. $\pi/12$; 5. $\pi/9$; 6. $2/e$; 7. $1/6$; 8. 0; 9. 1; 10. $e^2/4$; 11. $1/2$; 12. $1/4$; 13. $\pi/4$; 14. $1-\ln 2$; 15. $(\ln 2)/2$; 16. rozbieżna; 17. $e-1$; 18. $\pi/2$; 19. $1/8$; 20. $(\ln 2)/2+\pi/4$; 21. $\pi/4$; 22. $1/2$; 23. $(2\ln 2)/3$; 24. π; 25. 1; 26. $\pi/4$; 27. $\ln 2$; 28. $\operatorname{arctg} 2+\ln 5-\pi/2$. **8.2.1.** 1. 4; 2. $\pi/4$; 3. $32/3$; 4. $\pi/2$; 5. rozbieżna; 6. rozbieżna; 7. -6; 8. 8; 9. rozbieżna; 10. rozbieżna; 11. 1; 12. 2; 13. $\pi/2$; 14. $(8/3)\ln 2-8/9$; 15. π; 16. rozbieżna; 17. rozbieżna; 18. rozbieżna; 19. $-2/e$; 20. $\ln(2+\sqrt{3})$. **8.3.2.** 1. $2\pi/(3\sqrt{3})$; 2. $2\pi/(3\sqrt{3})$; 3. rozbieżna; 4. zbieżna; 5. zbieżna; 6. 2π; 7. zbieżna, 8. rozbieżna; 9. zbieżna; 10. rozbieżna; 11. zbieżna; 12. zbieżna; 13. rozbieżna; 14. zbieżna; 15. rozbieżna; 16. zbieżna; 17. zbieżna; 18. zbieżna; 19. zbieżna; 20. $\pi/4+1/2$. **8.4.1.** 1. π; 2. $\pi/2$; 3. $8\pi(2+\ln^2 8-2\ln 8)/27$; 4. $\ln(16)$. **8.4.2.** $16\pi/3$. **8.4.3.** 1. 2π; 2. π; 3. π; 4. $\pi^2/4$. **8.4.4.** π i ∞.

Rozdział 9

9.1.1. 1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x|<1$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4x}/3^{n+11}$, $|x|<\sqrt[4]{3}$; 3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 5x^n/6^{n+1}$, $|x|<6$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/7^{n+1}$, $|x|<\sqrt{7}$; 5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 8x^{2n}/9^{n+1}$, $|x|<3$; 6. $-1-\sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$, $|x|<1$. **9.1.2.** 1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $x\in(0;2)$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n/2^{2n+1}$, $x\in(-3;5)$; 3. $5/14-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4^n(x-1)^n/7^{n+1}$, $x\in(-3/4;11/4)$; 4. $1+(x-1)/2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n/2^n$, $x\in(-1;3)$. **9.1.3.** 1. $\sum_{n=0}^{\infty}((-1/2)^{n+1}-2)x^n$, $|x|<1$; 2. $-2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $|x|<1$; 3. $\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n/3^{n+1}-2/5^{n+1})x^n$, $|x|<1$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}-\sum_{n=0}^{\infty} x^n/2^{n+1}$, $|x|<1$. **9.1.4.** 1. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)(x+2)^n/3^{n+1}$, $-7/2<x<-1/2$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty}(2\cdot 3^n/5^{n+1}-1/3^{n+1})(x+2)^n$, $-11/3<x<-1/3$; 3. $-5/3+2(x+2)/9-(5/12)\sum_{n=2}^{\infty} 2^n(x+2)^n/3^n$, $-7/2<x<-1/2$. **9.1.5.** 1. $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^n$, $|x|<1/3$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}x^{n+2}$, $|x|<3$; 3. $\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$, $|x|<3$; 4. $\ln 9+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}}$, $|x|\leqslant 3$; 5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}$, $|x|\leqslant 3$; 6. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)}x^{2n+1}$, $|x|\leqslant 1/3$; 7. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, $|x|<3$; 8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$; 9. $1/3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2\cdot 3^{n+1}}x^n$, $|x|<3/4$. **9.1.7.** 1. $1/(1+3x)$; 2. $x/(1-x)^2$; 3. $3/4$; 4. $(5-4x)/(1-x)^2$; 5. 12; 6. $2/(1-x^2)^2$; 7. $(\pi^3+\pi^2)/(\pi-1)^3$; 8. $2/(1+x)^3$; 9. $2/(1-x)^4$; 10. $-56/27$; 11. $\ln 2$; 12. $(-1/x)\ln(1-x)$; 13. $(1/x^2)\ln(1+x^2)$; 14. $(-1/x)(1+\ln(1-x))$; 15. $-1/(2x)-1/x^2-(1/x^3)\ln(1-x)$. **9.2.1.** 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; 2. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$; 3. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 5. $\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$; 6. $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$; 7. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$; 8. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$; 9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$; 10. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$; 11. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$; 12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{e^{n+1}(n+1)}$. **9.2.2.** 1. $e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(x-1)^n$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$; 3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x-5)^n$; 5. $1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^{n+1}}$; 6. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$; 7. $\ln 12+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{6^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{(x-6)^{n+1}}{n+1}$; 8. $\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}$. **9.2.3.** 1. $1+x/2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n$; 2. $1-x^2/2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$; 3. $x-x^2/2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^{n+1}$; 4. $x/2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{3n+1}n!}x^{2n+1}$; 5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+2}{2}x^n$; 6. $x+2x^2/3+8x^3/9+112x^4/81+\ldots$; 7. $1-x/3-x^2/9-5x^3/81-10x^4/243-\ldots$; 8. $x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n+2}$. **9.2.4.** 1. $\sin\pi=0$; 2. $\cos e\approx -0,911734$; 3. $\cos(\pi/3)=1/2$; 4. $e^{-x^2/3}$; 5. $\sin(\pi/2)=1$; 6. $e^{-\ln 2}=1/2$. **9.3.1.** 1. $2^{10}\cdot 10!$, $2^{10}\cdot 10!/3^{11}$; 2. 0, $(2n)!/n!$; 3. 0, $2^4\cdot 12!/4!$; 4. $15!/5!$, 8; 5. 41, 0; 6. $105/16$, $\binom{1/4}{48}50!$; 7. 0, -1/2. **9.3.2.** 1. 1,2214; 2. 3,3201; 3. 0,9962; 4. $-0,1054$; 5. 0,4226; 6. 1,5431; 7. 0,3681; 8. 0,0524; 9. 0,7314; 10. 0,1542; 11. 0,9962; 12. 0,1651. **9.3.3.** 1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/((2n+1)(2n+1)!)$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}/((4n+1)(2n)!)$; 3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}x^{2n+1}/(2n+1)$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}/((2n+1)(4n+1))$. **9.3.4.** 1. 0,099998; 2. 0,00001; 3. 0,000008; 4. 0,124758; 5. 0,000331; 6. 0,000025; 7. 0,005; 8. 0,099888; 9. 0,097605. **9.3.5.** 1. $1/2$; 2. -1; 3. $-1/3$; 4. $1/2$; 5. $1/3$; 6. 2; 7. -2; 8. $-1/5!$; 9. $3/25$; 10. 1; 11. 1; 12. ∞. **9.4.1.** $x+x^2+x^3/3$, $\ln 2+x/2+x^2/8$, $e(1-x^2/2)$. **9.4.2.** 1,016. 9.4.3. 0,501. 9.4.4. $-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$. **9.4.5.** $-3+40(x-1)^2+120(x-1)^3+210(x-1)^4+252(x-1)^5+210(x-1)^6+120(x-1)^7+45(x-1)^8+10(x-1)^9+(x-1)^{10}$.

Indeks

PWSZ
w ELBLĄGU

ISBN 978-83-62336-16-6