Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	1.02.2016	A

1. Sprawdzić, czy formuła zdaniowa $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ jest tautologią. 5

2. Formułę zdaniową $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ zapisać za pomocą funktora NAND (czyli za pomocą kreski Sheffera). Przedstawić poszczególne etapy dochodzenia do ostatecznej postaci. 5

3. Zbadać formalną poprawność następującego rozumowania: *Gdyby Jan był rycerzem, to byłby odważny. Lecz Jan nie jest rycerzem. Zatem Jan jest tchórzem.* 6

4. Czy dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwa jest równość $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$? Uzasadnić swoje stwierdzenie. Podać odpowiedni przykład. 6

5. Formalnie wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwa jest równość $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$. 6

6. Indukcyjnie wykazać, że liczba $x_n = 5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n}$ jest podzielna przez 41 dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. 6

7. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 66$ istnieją liczby naturalne x_n i y_n, takie że $n = 7 \cdot x_n + 12 \cdot y_n$. 6

8. Dana jest rodzina $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \{x \in \mathbb{R}\colon -n \leqslant x \leqslant n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Formalnie wykazać, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. 6

9. Dana jest funkcja $f\colon X \to Y$ i podzbiory A i B zbioru X. Wykazać, że $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Na przykładzie pokazać, że zbiory $f(A) \setminus f(B)$ i $f(A \setminus B)$ nie muszą być równe. 6

10. Dane są funkcje $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$. Wykazać, że jeśli f i g są różnowartościowe, to także funkcja $g \circ f\colon A \to C$ jest różnowartościowa. Czy z faktu, że funkcja $g \circ f\colon A \to C$ jest różnowartościowa wynika, że funkcje f i g są różnowartościowe? Podać odpowiedni przykład. 6

11. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leqslant)$ oraz podzbiory A i B zbioru X. Zapisać symbolicznie (korzystając z kwantyfikatorów) następujące zdania: (a) W X nie ma elementu minimalnego. (b) Żaden element B nie ogranicza z dołu zbioru A. (c) B jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych w X. 6

12. Podać definicję bijekcji. Podać przykład bijekcji f odwzorowującej zbiór $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ w zbiór $M = \{5, 10, 15, \ldots\}$. Wykazać, że podany przykład funkcji f faktycznie jest bijekcją. 6