Optimus Locus: Sede Hogwarts en el Valle

Fernán Danilo Román T.[1], Diego Fernando Rosero G.[2], Juan Guillermo Quevedo S.[3]
Ingeniería de sistemas, Universidad del Valle
Buga, Colombia

***Abstract*—In this paper, we study a specific variation of routing problem, where we find the optimal position like the shortest between several cities to consider, for a seat of the Hogwarts school of magic and witchcraft, in the Valle del Cauca, the cities to consider are inside a perfect square of N km by N km that represents the Valle del Cauca, we use the Manhattan distance like objective function to solve in the simplex method to obtain the optimal coordinates in (x, y). Also we implement the solution for this problem in Java with the lp_solve library for linear programing, analyzing the data obtained.**

***Keywords*—Simplex, Routing, Problems, Optimization, Optimal, Manhattan, Distance, Linear, Programing, implementation**

I. Introducción

En este documento se estudia una variación del problema de enrutamiento, donde se ubica una sede para el Colegio Hogwarts de Magia y Hechicería, en el Valle del Cauca, el cual está representado como un cuadrado perfecto de N km por N km, la sede se ubicará de tal manera que sea el punto más cercano (optimo) entre las coordenadas de las ciudades a considerar dentro del cuadrado, para esto se usa la fórmula de distancia manhattan como función objetivo en el método Simplex, con lo cual se obtienen las coordenadas cartesianas de dicho punto, en el cuadrado de N km por N km, también se implementa una solución en Java con una interfaz gráfica que represente el cuadrado y las ciudades desarrollando el problema con ayuda de la librería lp_solve para programación lineal, analizando los datos obtenidos y representándolos en tablas, graficas e indicadores estadísticos.

II. Modelo del problema

Sea el Valle del Cauca un cuadrado N km por N km, m el número de ciudades dentro del cuadrado, (X_i, Y_i) las coordenadas cartesianas de las ciudades en el primer cuadrante, (W, Z) las coordenadas cartesianas óptimas para la ubicación del Colegio Hogwarts.
Aplicando la fórmula de distancia Manhattan tenemos la función objetivo:

$$\sum_{i=1}^{m} |W - X_i| + |Z - Y_i|$$

Pero los valores absolutos la hacen no lineal por lo que se redefine la función objetivo sin alterarla.

Se crean dos nuevas variables para redefinir la función objetivo P_i y J_i donde ambas representan el contenido de los valores absolutos con la diferencia de que al eliminar dichos valores absolutos extraemos las restricciones de nuestro modelo, así:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} P_i + J_i$$

S. a

$$\begin{aligned} P_i &\geq -(W - X_i) \\ P_i &\geq \quad W - X_i \\ J_i &\geq -(Z - Y_i) \\ J_i &\geq \quad Z - Y_i \end{aligned}$$

Reacomodando términos el modelo final es el siguiente

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} P_i + J_i$$

S. a

$$\begin{gathered} P_i + W \geq X_i \\ -P_i + W \leq X_i \\ J_i + Z \geq Y_i \\ -J_i + Z \leq Y_i \\ W \geq 0,\ Z \geq 0,\ P_i \geq 0,\ J_i \geq 0 \end{gathered}$$

Cabe resaltar que como las coordenadas del cuadrado están en el primer cuadrante por lo tanto: $Y_i \geq 0,\ X_i \geq 0$

III. Ejemplo de aplicación del problema

Se detallan a continuación un ejemplo aplicando el modelo definido anteriormente.

m=2	X	Y
Tuluá	3	3
Buga	2	1

Cuadro 1: Entradas de ejemplo

$$\min z = \sum_{i=1}^{2} P_i + J_i$$

$$= P_1 + J_1 + P_2 + J_2$$

S. a

$$\begin{aligned} P_1 + W &\geq 3 & P_2 + W &\geq 2 \\ -P_1 + W &\leq 3 & -P_2 + W &\leq 2 \\ J_1 + Z &\geq 3 & J_2 + Z &\geq 1 \\ -J_1 + Z &\leq 3 & -J_2 + Z &\leq 1 \end{aligned}$$

$$W \geq 0,\ Z \geq 0,\ P_i \geq 0,\ J_i \geq 0$$

[1] fernan.roman@correounivale.edu.co
[2] juan.guillermo.quevedo@correounivalle.edu.co
[3] diegoferose@hotmail.com

En forma estándar para resolver por simplex se tiene:

$$z - P_1 - J_1 - P_2 - J_2 - MR_1 - MR_3 - MR_5 - MR_7 = 0$$
$$P_1 + W + R_1 - S_1 = 3$$
$$-P_1 + W - S_2 = 3$$
$$P_2 + W + R_3 - S_3 = 2$$
$$-P_2 + W - S_4 = 2$$
$$J_1 + Z + R_5 - S_5 = 3$$
$$-J_1 + Z - S_6 = 3$$
$$J_2 + Z + R_7 - S_7 = 1$$
$$-J_2 + Z - S_8 = 1$$

$$W \geq 0,\ Z \geq 0,\ P_1 \geq 0,\ J_1 \geq 0,\ P_2 \geq 0,\ J_2 \geq 0$$

Planteando la tabla simplex manualmente se obtendría una matriz de al menos 18 columnas, por lo que para efectos prácticos, se mostrara la matriz que provee el lp_solve IDE para este problema.

	P1	J1	P2	J2	W	Z	RHS
min	1	1	1	1	0	0	0
R1	1	0	0	0	1	0	3
R2	-1	0	0	0	1	0	3
R3	0	1	0	0	0	1	3
R4	0	-1	0	0	0	1	3
R5	0	0	1	0	1	0	2
R6	0	0	-1	0	1	0	2
R7	0	0	0	1	0	1	1
R8	0	0	0	-1	0	1	1

Imagen 1: Matriz generada en lp_solve IDE

Al resolver la anterior matriz se obtiene las coordenadas de la sede de Hogwarts con: **W = 2, Z = 1**, $P_1 = 1$, $J_1 = 2$, $P_2 = 0$, y $J_2 = 0$.
Representando el resultado gráficamente se tiene:

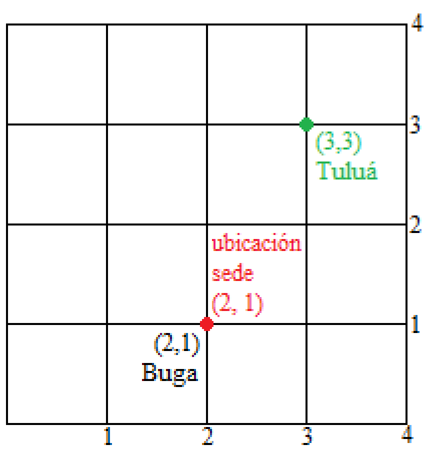

Imagen 2: Ubicación sede Hogwarts

IV. Explicación de la implementación

Para la implementación de este problema se escogió, el lenguaje de programación Java y la librería lp_solve, el cuadro de N km por N km que representa el valle del cauca se representa con una matriz de botones y las entradas se hacen por medio de un archivo de texto plano con el siguiente formato:

```
10
5
Palmira 2 3
Cali 3 2
Buga 8 6
Tulua 3 9
RioFrio 1 2
```

Imagen 3: Formato archivo de texto plano

Donde la primera línea es el tamaño de los lados del cuadrado, la segunda línea es el número de ciudades, y de la tercera línea en adelante el nombre de la ciudad y sus coordenadas en (x, y). El archivo de texto plano es cargado y leído por la clase tablero donde se crea la parte gráfica, los atributos de los botones son creados en la clase Boton y la clase modelo recibe la matriz de la clase tablero con los datos de las ubicaciones de las ciudades, generando la función objetivo, las restricciones y finalmente usando la librería de lp_solve para minimizar la función objetivo.

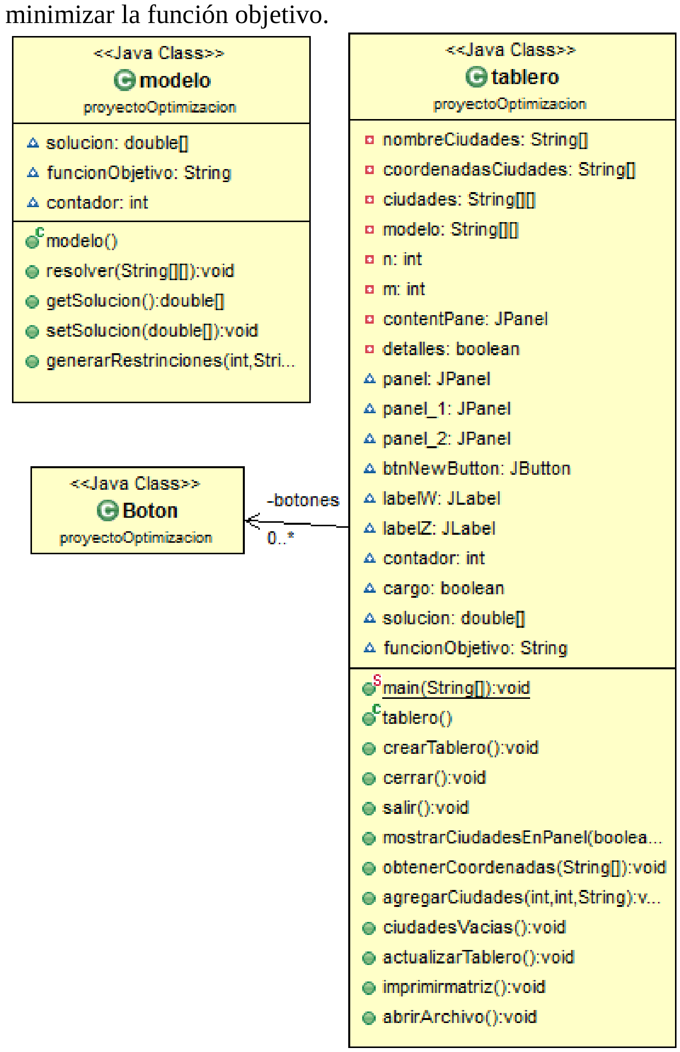

Imagen 4: Diagrama de clases de la implementación

La representación de la locación para el colegio en el programa es un botón con la imagen de Hogwarts, en la parte derecha de la interfaz a un lado del cuadrado se presentan el botón solución, las coordenadas dadas y las coordenadas W, Z de la solución.

V. Descripción de pruebas

A continuación se detallan diversas pruebas y sus descripciones. Estas pruebas se realizaron en tempranas etapas de desarrollo en el software, por lo que la solución se representó coloreada de gris.

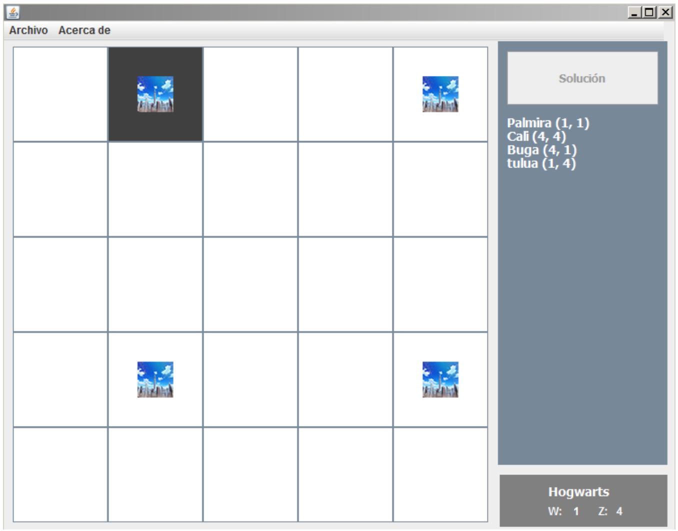

Imagen 5: Prueba 1

Los datos de entrada para la prueba 1 fueron:
5
4
Palmira 1 1
Cali 4 4
Buga 4 1
Tuluá 1 4
Solución: W=1 y **Z=4**

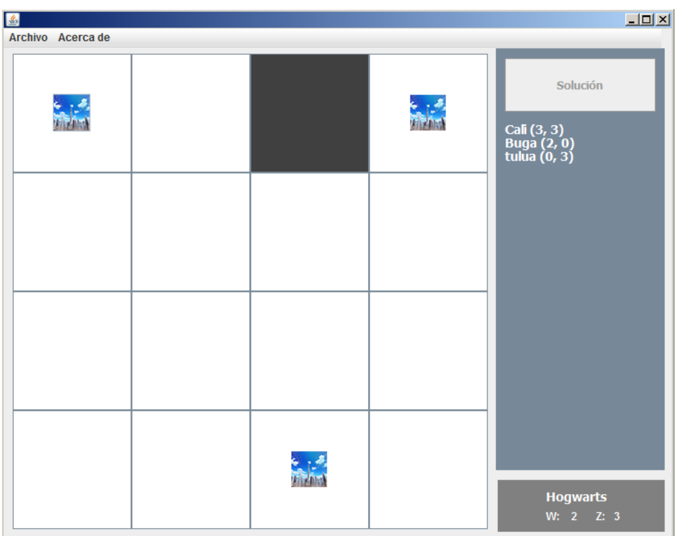

Imagen 6: Prueba 2

Los datos de entrada para la prueba 2 fueron:
4
3
Cali 3 3
Buga 2 0
Tuluá 0 3
Solución: W=2 y **Z=3**

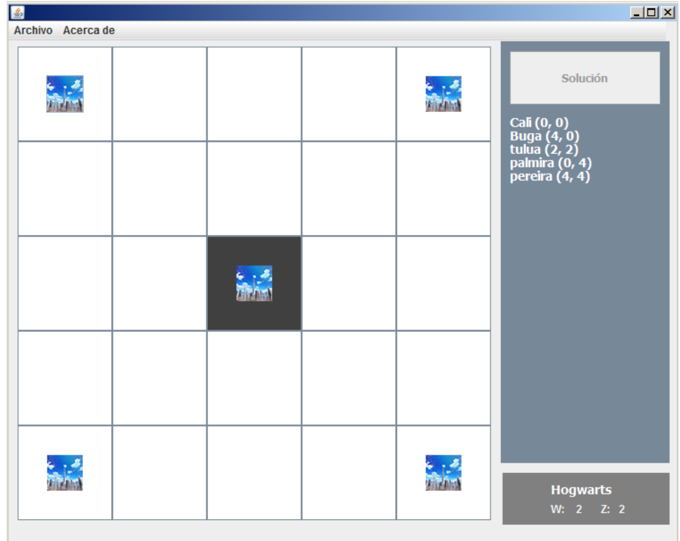

Imagen 7: Prueba 3

Los datos de entrada para la prueba 3 fueron:
5
5
Cali 0 0
Buga 4 0
Tuluá 2 2
Palmira 0 4
Pereira 4 4

Solución: W=2 y **Z=2**

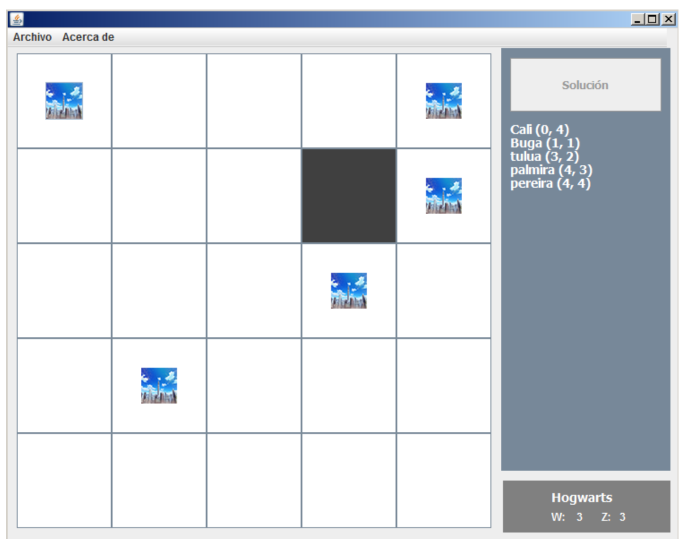

Imagen 8: Prueba 4

Los datos de entrada para la prueba 4 fueron:
5
5
Cali 0 4
Buga 1 1
Tuluá 3 2
Palmira 4 3
Pereira 4 4
Solución: W=3 y **Z=3**

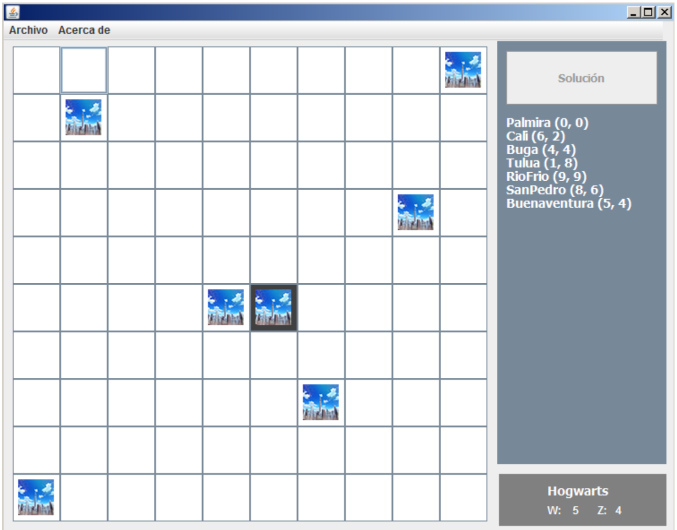

Imagen 8: Prueba 5

Los datos de entrada para la prueba 5 fueron:
10
7
Palmira 0 0
Cali 6 2
Buga 4 4
Tuluá 1 8
RioFrio 9 9
SanPedro 8 6
Buenaventura 5 4
Solución: W=5 y **Z=4**

VI. Análisis de pruebas

A continuación se presentara el análisis de las pruebas variando 3 veces el orden de los datos de entrada para cada una, las barras del grafico representan las coordenadas de las ciudades y la coordenada para Hogwarts, azul y naranja, x, y respectivamente.

Prueba 1

Orden1		
Palmira	1	1
Cali	4	4
Buga	4	1
tulua	1	4
resultado	**1**	**4**

Orden2		
Cali	4	4
Palmira	1	1
tulua	1	4
Buga	4	1
resultado	**4**	**1**

Orden3		
tulua	1	4
Buga	4	1
Cali	4	4
Palmira	1	1
resultado	**1**	**1**

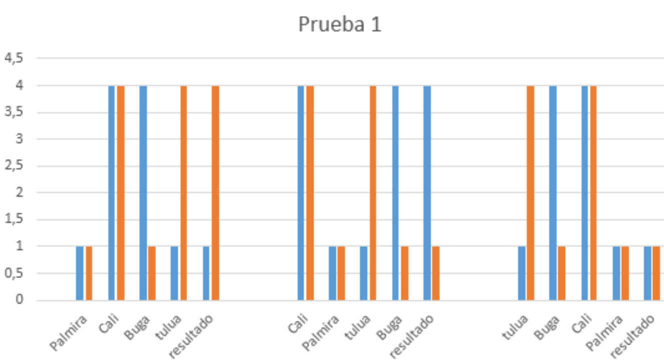

Imagen 9: Análisis de prueba 1

En la imagen 9 se ve que el resultado varía dependiendo del orden de entrada de los datos. Siendo a su vez cada variación un resultado óptimo.

Prueba 2

Orden1		
Cali	3	3
Buga	2	0
Tuluá	3	3
resultado	**2**	**3**

Orden2		
Buga	2	0
Cali	3	3
Tuluá	0	3
resultado	**2**	**3**

Orden3		
Tuluá	0	3
Cali	3	3
Buga	2	0
resultado	**2**	**3**

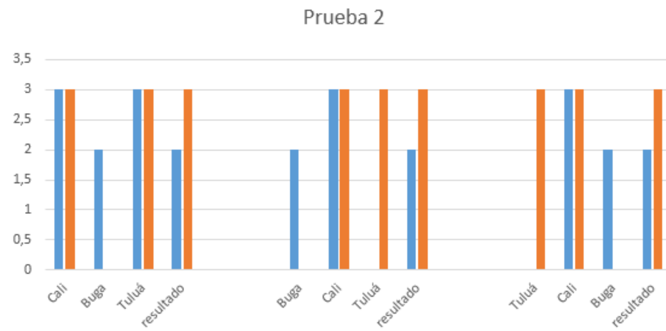

Imagen 10: Análisis de prueba 2

En la imagen 10, se puede apreciar que para la prueba 2 el resultado obtenido siempre fue el mismo, esto se debe a que para este problema el punto 2, 3 es el óptimo en cuanto a la suma mínima de distancias, sin importar que sus restricciones se vean alteradas.

Prueba 3

Orden1		
Cali	0	0
Buga	4	0
Tuluá	2	2
palmira	0	4
pereira	4	4
resultado	**2**	**2**

Orden2		
pereira	4	4
Tuluá	2	2
Buga	4	0
palmira	0	4
Cali	0	0
resultado	**2**	**2**

Orden3		
Tuluá	2	2
pereira	4	4
Buga	4	0
Cali	0	0
palmira	0	4
resultado	**2**	**2**

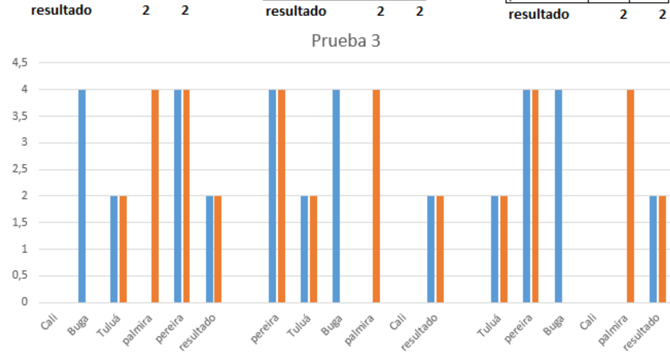

Imagen 11: Análisis de prueba 3

Al igual que en la anterior prueba en la imagen 11 se puede ver que los resultados no variaron, ya que la suma mínima de distancias es 2, 2.

Prueba 4

Orden1		
Cali	0	4
Buga	1	1
Tuluá	3	2
palmira	4	3
pereira	4	4
resultado	**3**	**3**

Orden2		
Tuluá	3	2
Buga	1	1
palmira	4	3
Cali	0	4
pereira	4	4
resultado	**3**	**3**

Orden3		
Buga	1	1
Cali	0	4
pereira	4	4
Tuluá	3	2
palmira	4	3
resultado	**3**	**3**

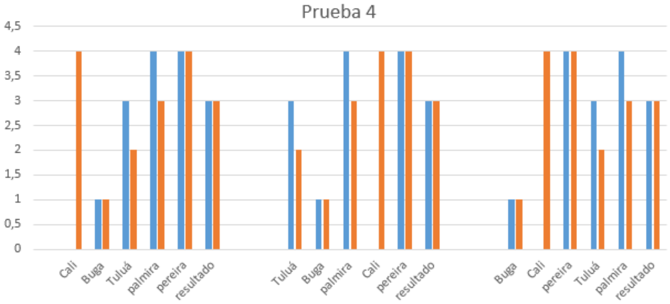

Imagen 12: Análisis de prueba 4

En la imagen 12, se aprecia que el resultado de coordenadas para la locación de Hogwarts no cambia al alterar el orden de sus ciudades.

Prueba 5

Orden1		
palmira	0	0
Cali	6	2
Buga	4	4
Tuluá	1	8
RioFrio	9	9
SanPedro	8	6
Buenaventura	5	4
resultado	**5**	**4**

Orden2		
Buenaventura	5	4
SanPedro	8	6
RioFrio	9	9
Tuluá	1	8
Buga	4	4
Cali	6	2
palmira	0	0
resultado	**5**	**4**

Orden3		
Buenaventura	5	4
Buga	4	4
Cali	6	2
palmira	0	0
RioFrio	9	9
SanPedro	8	6
Tuluá	1	8
resultado	**5**	**4**

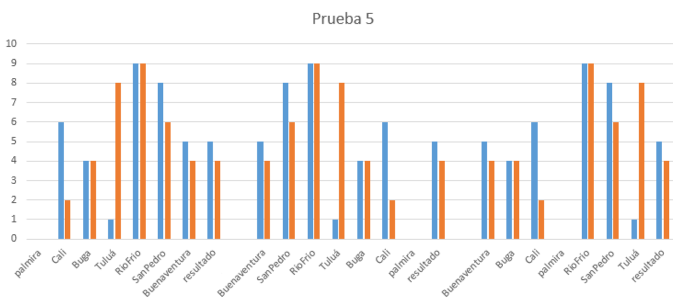

Imagen 13: Análisis de prueba 5

En la imagen 13, se observa en la gráfica que para la prueba 5 el resultado fue el mismo para las tres variaciones, lo que sugiere que la suma mínima de distancias en este problema está en 5, 4 siendo la única óptima.

VII. Conclusiones

En este documento se presentó un modelo a partir de la fórmula de distancia manhattan para hallar la locación optima entre varias ciudades, los resultados mostraron que al optimizar la función objetivo y obtener los valores para las coordenadas de la locación de la sede de Hogwarts, se tiene una posición que es solución factible, pero no necesariamente la óptima si lo que se quiere es que la sede del colegio quede lo más cerca posible a todas las ciudades, por otra parte, es solución óptima si se parte de que el objetivo es que la suma total de las distancias sea la mínima. Por ejemplo en la imagen 7 de la prueba 3 cumple con ambas perspectivas, es solución óptima tal que la suma total de las distancias es la mínima y a su vez queda lo más cerca posible de cada una de las ciudades.

Por otro lado se observó que al hacer diversas pruebas que en algunos casos, la respuesta en (W, Z) puede variar dependiendo de si las ciudades están a la misma distancia una de la otra, y del orden de las ciudades en la entrada del programa, más precisamente depende del orden de las restricciones que se generan, pero aun así el resultado continua siendo el óptimo en cuanto a la suma mínima de distancias.
Finalmente partiendo de lo anterior, se puede concluir que también puede haber más de una solución óptima, para los problemas en que la distancia entre las ciudades es la misma.

Referencias

[1] Salvador Peña García, "*El problema del viajante. Métodos de resolución y un enfoque hacia la teoría de la computación*." 2015, [En línea] Disponible en: http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE001031.pdf

[2] Catherine Lewis, "*Linear Programming: Theory and Applications*" 2008, [En línea] Disponible en: https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/lewis.pdf

[3] Hamdy A. Taha, "*Investigación de operaciones, Novena edición"* PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012.

[4] Christof Ferreira Torres y Rolando Trujillo Rasua, "*The Fréchet/Manhattan Distance and the Trajectory Anonymisation Problem"*, 2016 [En línea] Disponible en: https://goo.gl/cH69JA

[5] Math.stackexchange.com, "*Minimized sum of the distances with street distance"*, 2017 [En Linea] Disponible en:https://math.stackexchange.com/questions/692675/minimized-sum-of-the-distances-with-street-distance

[6] H. A. Eiselt C.-L Sandblom, "*Linear Programing and its Applications"*, 2017 [En Linea] Disponible en: https://goo.gl/C1fSXm

[7] lp_solver "*Mixed integer linear programming (milp) solver*." [En linea] Disponible en: http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/