Clase tutorial - Cálculo de autovalores - Métodos Numéricos y optimización

Nicolás Seltzer y Melisa Vinograd

Mayo 2023

Disclaimer: Este material son notas de cursada, no es un material oficial de resolución de las guías. Puede tener errores y desprolijidades. En caso de encontrar alguno no duden en enviarnos un mensaje para notificarnos y pueda ser reparado.

Guía 3, parte 2

Ejercicio 2.1

Utilizar el método de Householder para llevar las siguientes matrices a una forma tridiagonal.

$$a. \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Acá $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Llamamos a_1 (lo que en clase era $\mathbf{x}$) a la primera columna de $A^{(1)}$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

.

La norma de a_1 es $||a_1||_2 = 16.1245$. Para construir H_1 nos construimos el vector v_1 de la siguiente manera:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{a_1} + \underbrace{\text{signo}(a_{11})||a_1||}_{\alpha_1}\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} + 16,12 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.1245 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

Construimos $H_1 = \mathbb{I} - \frac{v_1\, v_1^t}{v_1^t\, v_1}$:

$$H_1 = I - 2 \cdot \frac{v_1 \cdot v_1^T}{v_1^T \cdot v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{906.9884} \cdot \begin{bmatrix} 28.1245 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 28.1245 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.7442 & -0.6202 & -0.2481 \\ -0.6202 & 0.7795 & -0.0882 \\ -0.2481 & -0.0882 & 0.9647 \end{bmatrix}.$$

Ahora hacemos la multiplicación de A por la primera matriz de Householder H_1:

$$H_1 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} -0.7442 & -0.6202 & -0.2481 \\ -0.6202 & 0.7795 & -0.0882 \\ -0.2481 & -0.0882 & 0.9647 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.1245 & -11.1631 & -0.6202 \\ 0 & 0.4752 & -6.6428 \\ 0 & -8.0099 & 2.3429 \end{bmatrix}.$$

Conseguimos poner ceros debajo de la diagonal para la primera columna. Vamos por la segunda. Eliminamos la primera fila y primera columna y nos queda:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.4752 & -6.6428 \\ -8.0099 & 2.3429 \end{bmatrix}$$
$$a_2 = \begin{bmatrix} 0.4752 \\ -8.0099 \end{bmatrix}.$$

Procedemos a hallar H_2 con esta nueva matriz y este nuevo vector.

$$\|a_2\| = \sqrt{0.4752^2 + (-8.0099)^2} = \sqrt{\frac{837}{13}} = 8.024$$
$$v_2 = a_2 + \operatorname{signo}(a_{11}) \|a_2\| e_1 = \begin{bmatrix} 0.4752 \\ -8.0099 \end{bmatrix} + 8.024 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.4992 \\ -8.0099 \end{bmatrix}$$
$$H_2 = I - 2 \cdot \frac{v_2 \cdot v_2^T}{v_2^T \cdot v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{136.3953} \cdot \begin{bmatrix} 8.4992 \\ -8.0099 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.4992 & -8.0099 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0592 & 0.9982 \\ 0.9982 & 0.0592 \end{bmatrix}$$
$$H_2 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} -0.0592 & 0.9982 \\ 0.9982 & 0.0592 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4752 & -6.6428 \\ -8.0099 & 2.3429 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.024 & 2.7322 \\ 0 & -6.4923 \end{bmatrix}$$

Nuevamente eliminamos la primera fila y columna y repetimos para hallar H_3.

$$A_3 = [-6.4923]$$
$$a_3 = [-6.4923]$$

$$\|a_3\| = \sqrt{(-6.4923)^2} = \sqrt{\frac{3920}{93}} = 6.4923$$
$$v_3 = a_3 + \operatorname{signo}(a_{11}) \|a_3\| e_1 = [-6.4923] - 6.4923 \times [1 \ [\ ] = [-12.9847]$$
$$H_3 = I - 2 \cdot \frac{v_3 \cdot v_3^T}{v_3^T \cdot v_3} = [1] - \frac{2}{15680}/93 \cdot [-12.9847] \cdot [-12.9847] = [-1]$$

Recordemos que H_2 y H_3 son en realidad matrices de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ que deben ser completadas con la identidad para llegar a tener esa dimensión.

Como $H_3H_2H_1A = R$, tenemos $A = H_1H_2H_3R$ por la ortogonalidad de H_i. Finalmente $A = QR$ con $Q = H_1H_2H_3$

$$Q = H_1H_2H_3 = \begin{bmatrix} -0.7442 & -0.6202 & -0.2481 \\ -0.6202 & 0.7795 & -0.0882 \\ -0.2481 & -0.0882 & 0.9647 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0592 & 0.9982 \\ 0 & 0.9982 & 0.0592 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.7442 & -0.2109 & 0.6338 \\ -0.6202 & -0.1342 & -0.7729 \\ -0.2481 & 0.9682 & 0.0309 \end{bmatrix}$$

Comprobemos que la factorización funcionó haciendo $A = Q\,R$.

$$Q\,R = \begin{bmatrix} -0.7442 & -0.2109 & 0.6338 \\ -0.6202 & -0.1342 & -0.7729 \\ -0.2481 & 0.9682 & 0.0309 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -16.1245 & -11.1631 & -0.6202 \\ 0 & -8.024 & 2.7322 \\ 0 & 0 & 6.4923 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\text{y recuerdo que} A = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$