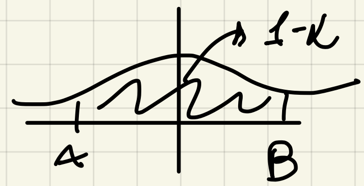
Objetivo: encontrar $I = [A, B]$ tal que $P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$.

En este caso decimos que tenemos un $100(1-\alpha)\%$ de probabilidad de que $\mu \in [A, B]$.

Si $\alpha = 0.1 \longrightarrow 1 - \alpha = 0.9 \longrightarrow$ Si $P(A \leq \mu \leq B) = 0.9$. Decimos que tenemos un 90% de confianza.

Obs: lo ideal es tener un intervalo de longitud chica con probabilidad alta.

$$P\left(A \leq \overset{N(0,1)}{\boxed{\dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}} \leq B\right) = 1 - \alpha$$ puedo despejar μ.



Intervalo de confianza para μ: primero vemos el caso en que conocemos σ^2.

Buscamos $I = [A, B]$ (A, B van a ser v.a pues van a depender de la muestra).

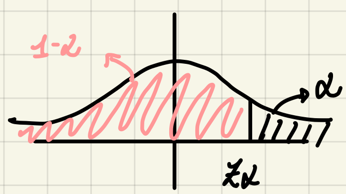
Quiero: $P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$.

Objetivo: dado α fijo encontrar $I = [A, B]$ tal que: $P(\mu \in I) = 1 - \alpha$.

Si $\alpha = 0.05 \longrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \longrightarrow I$ intervalo de 95% de confianza.

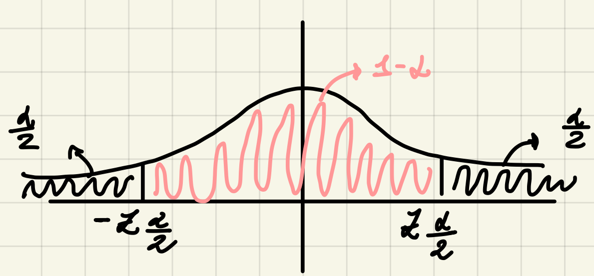
$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$ lo vamos a usar

Notación:



densidad de $Z \sim N(0,1)$

z_α se define así: $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ $\quad (z_\alpha > 0)$



Obs: $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \underbrace{\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\approx N(0,1)} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

Recordar: $\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ si X_i son v.a.i.i.d con $E(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=\sigma^2$.
Para n grande (lo ideal es $n \geq 30$)

$-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ despejo μ.

$-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X_n}-\mu \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-\overline{X_n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\overline{X_n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\overline{X_n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \overline{X_n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\boxed{P\left(\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha}$$

$I = \left[\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ es el intervalo de confianza para μ.

Ej: Datos. 1-2-2-3-3-4-4-4-4-5-6-6

Es una muestra aleatoria e independiente de una v.a con $\sigma^2 = 1/2$.

Encontrar un intervalo de $\boxed{95\%}$ de confianza para μ (esperanza). ($\mu = E(X_i)$)

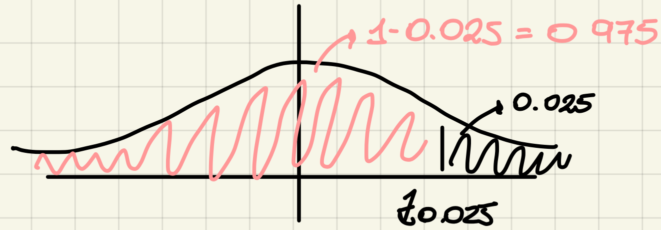
Busco $I \mid P(\mu \in I) = 0.95 \longrightarrow 1-\alpha = 0.95$

$\boxed{\alpha = 0.05} \longrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{2} = 0.025}$

$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \overline{X_n} = 3.\overline{6}$

$n = 12$.

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} \,/\, P(Z \geq z_{0.025}) = 0.025$



$P(Z \leq z_p) = p$

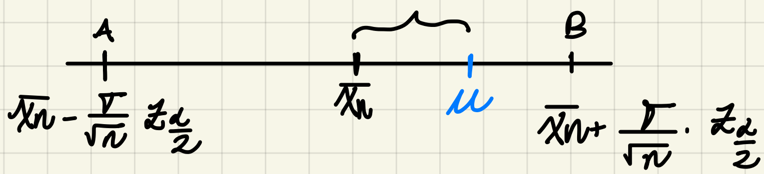
$P(Z \leq z_p) = 0.975$

$P(Z \leq 1.96) = 0.975 \longrightarrow$ luego, $\boxed{z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96}$

$I = \left[3,\overline{6} - \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} (1,96) \,,\; 3,\hat{6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1.96) \right] \longrightarrow$ Rta: $I = [3.2665,\ 4.0667]$

Error: de aproximar a μ por $\overline{X}_n$.

$I = [A, B]$ está centrado en $\overline{X}_n$.



$|\text{error}| = |\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\text{longitud}(I)}{2} = \frac{B-A}{2} = \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}}$

Despejar n para que el |error| sea menor a $\boxed{0.01}$ ε

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \leq 0.01 \longrightarrow \boxed{\frac{\sigma}{0.01} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}}$

ε

la confianza

Obs: $|\text{error}| \leq 0.01$ con un 95% de confianza !! (si $\alpha = 0.05$)

Límites de Confianza Unilaterales: $I = (-\infty, B]$ o $I = [A, +\infty)$

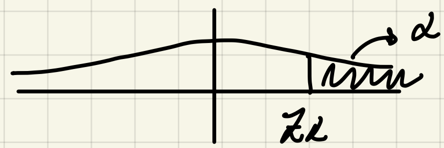
- quiero que μ no exceda a un valor B con $(1-\alpha)100\%$ de confianza.

O sea $P(\mu \in (-\infty; B]) = 1-\alpha$.

• quiero que μ no sea menor que A con $(1-\alpha)100\%$ de confianza. O sea $P(\mu \in [A, +\infty)) = 1-\alpha$.

<u>Estadístico</u>: $\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ (n grande)

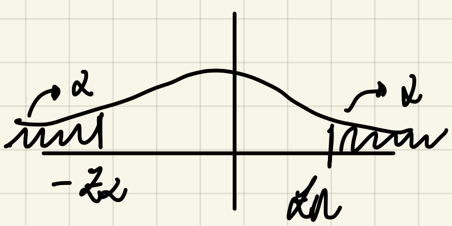
$P(Z \leq z_\alpha) = 1-\alpha$ si $Z \sim N(0,1)$



$$\underbrace{P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_\alpha \right) = 1-\alpha}_{\text{despejo } \mu:}$$

$\bar{X}_n - \mu \leq z_\alpha \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\bar{X}_n - z_\alpha \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \longrightarrow \boxed{P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; +\infty\right)\right) = 1-\alpha}$ $\quad I = [A; +\infty)$



$P(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$

$P(Z \geq -z_\alpha) = 1-\alpha$

$P\left(\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_\alpha \right) = 1-\alpha$ <u>tarea</u>: terminar.

<u>Caso σ^2 desconocida</u>:
- → muestra normal → T student.
- → muestra no normal → $\sigma^2 \approx S^2$ (n muy grande)