UdeSA - Fundamentos de Probabilidad y Estadística

Práctica 11 - Intervalos de confianza

1. Una máquina embotelladora llena botellas con cantidades que siguen una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, siendo $\sigma = 5$ mililitros. En una muestra de 16 botellas, el promedio $\bar{x} = 743$ mililitros fue encontrado.
   (a) Construya tres intervalos de confianza para μ, con 90% de confianza, 95% de confianza y 99% de confianza.
   (b) De los intervalos construidos en el item anterior, ¿Cuál tiene mayor longitud y cuál menor?
   (c) Dar una condición para que la siguiente afirmación sea cierta: Si I_α es un intervalo de confianza para μ del α% de confianza y I_β es un intervalo de confianza para μ del β% de confianza, entonces la longitud de I_α es mas grande que la de I_β.
   (d) ¿Qué tamaño de muestra necesitamos si queremos un intervalo de 99% de confianza para μ de a lo sumo 1 de longitud?

2. Tiene un conjunto de datos proveniente de la realización de una muestra aleatoria cuya distribución se desconoce. Su tamaño es 34, su promedio es 3.54, y se sabe que la desviación estándar de la muestra es 0.13.
   (a) Si construyo dos intervalos de confianza, de 95% y de 98% de confianza para la esperanza desconocida μ. ¿Qué intervalo va a tener mayor longitud? (Sin hacer las cuentas)
   (b) Ahora, construir los dos intervalos.

3. Necesito estimar el peso de una bolsa de cemento que venden en MATbolsas (el peso no viene estampado en las bolsas). Asumiendo que el peso de cada bolsa es la realización de una muestra aleatoria de una distribución normal con parámetros desconocidos.
   (a) Si sabemos que la desviación estándar es 0.75 Kg., y tomamos una muestra de 30 bolsas cuyo peso promedio es 13.5 Kg. Construya un intervalo de 95% de confianza para el peso esperado de una bolsa.
   (b) Si sabemos que la desviación estándar es 0.75 Kg., y tomamos una muestra de 30 bolsas cuyo peso promedio es 13.5 Kg. Construya un intervalo de 95% de confianza de la forma $(-\infty, b]$ para el peso esperado de una bolsa.
   (c) Si sabemos que la desviación estándar es 0.75 Kg., si voy a estimar el peso esperado usando el promedio de n bolsas, ¿Cómo tiene que ser el valor de n para que el error sea menor a 0.1 con probabilidad 95%?
   (d) Si desconocemos la desviación estándar y tomamos una muestra de 30 bolsas cuyo peso promedio es 13.5 Kg. y cuya desviación estándar muestral es 0.8 Kg., construir un intervalo de confianza del 95% para el peso esperado.
   (e) Si desconocemos la desviación estándar y tomamos una muestra de 30 bolsas cuyo peso promedio es 13.5 Kg. y cuya desviación estándar muestral es 0.8 Kg., construir un intervalo de confianza del 95% de la forma $(-\infty, b]$ para el peso esperado de una bolsa.

4. En un reporte encuentra un intervalo de confianza del 95% $I = (1.6; 7.8)$ para el parámetro μ de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. El intervalo está basado en 16 observaciones, obtenido de acuerdo al procedimiento que emplea la distribución t de Student.
   (a) ¿Cuál es el promedio del conjunto de datos?
   (b) Construya un intervalo de 99% de confianza para μ.

5. Una máquina produce piezas metálicas de forma cilíndrica. Se toma una muestra de las piezas y los diámetros son $1.01; 0.97; 1.03; 1.04; 0.99; 0.98; 0.99; 1.01; 1.03$ centímetros. Calcule un intervalo de confianza del 99% para la media del diámetro de las piezas que se manufacturan con esta máquina. Suponga una distribución aproximadamente normal.

6. Se registran las siguientes mediciones del tiempo de secado, en horas, de cierta marca de pintura vinílica:

3.4	2.5	4.8	2.9	3.6
2.8	3.3	5.6	3.7	2.8
4.4	4.0	5.2	3.0	4.8

Suponga que las mediciones representan una muestra aleatoria de una población normal $N(\mu, \sigma^2)$ y con base en ésto calcule

(a) un intervalo de confianza del 95% para el tiempo esperado de secado μ,

(b) un intervalo de confianza del 95% para la varianza σ^2

7. Ambientalistas tomaron 16 muestras de agua de la salida de una planta química y midieron la concentración de cierta sustancia cancerígena. Hallaron $\bar{x}_{16} = 2.24$ppm y $s_{16}^2 = 1.12$, y desean utilizar esos datos en un juicio contra la planta. Los datos son el resultado de una muestra aleatoria normal.

(a) Construya el intervalo de confianza unilateral de 97.5% que los ambientalistas desean usar para convencer al juez de su posición.

(b) La administración de la planta también utiliza un intervalo de confianza unilateral de 97.5% para convencer al juez de que las concentraciones no son excesivamente altas. Constrúyalo también.

8. Un intervalo de 95% de confianza del parámetro μ de una distribución Poisson(μ) resulta ser $I = (2; 3)$. Siendo X una variable aleatoria que sigue esta distribución, construya un intervalo de confianza del 95% para $P(X = 0) = e^{-\mu}$.

9. Un fabricante de reproductores de MP3 utiliza un conjunto de pruebas exhaustivas para evaluar el funcionamiento eléctrico de su producto. Todos los reproductores de MP3 deben pasar todas las pruebas antes de ser puestos a la venta. De una muestra aleatoria de 500 reproductores, 15 no pasan una o más de las pruebas. Calcule un intervalo de confianza del 90% para la proporción de los reproductores de MP3 de la población que pasan todas las pruebas.

10. Se realizan 100 experimentos idénticos e independientes de un ensayo Bernoulli que tiene una probabilidad de éxito desconocida la cual la queremos estimar, de estos 100 experimentos 70 concluyeron exitosamente.

(a) Construya un intervalo de 90% de confianza y otro del 95% de confianza para la probabilidad de éxito de este experimento.

(b) ¿Cuál de los dos intervalos tiene mayor longitud? Sin hacer cuentas.

(c) Si estimamos la probabilidad de éxito por el promedio de éxitos, ¿cuántos de estos experimentos tengo que realizar para tener un error menor a 0.05 con un 90% de confianza?

Para hacer en Python:

(a) Hacer una función que tenga como input el tamaño n de muestras independientes de $N(100, 5)$, genere las n muestras independientes.

(b) Realizar una función que tenga de input la muestra de tamaño n de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, su varianza conocida y el nivel de confianza c y devuelva intervalos de confianza del c% para la media de cada muestra.

(c) Repita el punto anterior pero usando la varianza estimada s^2.

(d) Generar una muestra de tamaño $n = 100$ independientes de una $N(100, 5)$. Con los datos obtenidos, usar las funciones de los items anterior para construir dos intervalos del 95% y del 98% de confianza para la media de la muestra suponiendo que sabemos que la varianza es 5 y suponiendo varianza desconocida. En ambos casos notar cuál intervalo tiene mayor longitud y responder a que se debe esto.