Name: Matr.-Nr.:

Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zur Klausur am 5.3.2012

Lösungsvorschlag:

a) Eine Menge M ist unendlich, wenn es eine injektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt.

wahr

b) Wenn eine Relation nicht symmetrisch ist, ist sie antisymmetrisch.

falsch

c) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
R ist transitiv $\Rightarrow R \circ R \subseteq R$.

wahr

d) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
$R \circ R \subseteq R \Rightarrow R$ ist transitiv.

wahr

e) Das leere Wort ϵ ist eine surjektive Abbildung: $\{\} \rightarrow \{\}$.

wahr

f) Seien L_1 und L_2 formale Sprachen. $L_1^* = L_2^* \Rightarrow L_1 = L_2$.

falsch

g) $\sqrt{n} \in O(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

falsch

h) $\sqrt{n} \in \Theta(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

falsch

i) $\sqrt{n} \in \Omega(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr

j) Gegeben seien zwei reguläre Ausdrücke $R_1 = \varnothing$`* | 0(0|1)* | (0|1)*00(0|1)*` und $R_2 =$ `((0*1)*01*)*`
Es gilt: $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$.

falsch

k) Die Funktion $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ gibt als Funktionswert die größte Primzahl p zurück, für die gilt: $\exists k \in \mathbb{N}_+ : n = k \cdot p$
Es gilt $f(n) \in O(\sqrt{n})$.

falsch

l) Die aussagenlogische Formel $(A \Rightarrow \neg B) \vee ((B \wedge \neg C) \wedge (C \vee D)) \vee A$ ist äquivalent zu $A \vee \neg A$

wahr

Lösungsvorschlag:

a)

f(x,y)	**y=0**	**y=1**	**y=2**	**y=3**	**y=4**
x=0	0	1	2	3	4
x=1	1	0	3	2	5
x=2	2	3	0	1	6
x=3	3	2	1	0	7
x=4	4	5	6	7	0

b) **Induktionsanfang:** Für $n = 0 : f(0, 0) = 0$,
für $n = 1 : f(0, 1) = f(1, 0) = 1 \neq 0\surd$.

Induktionsvoraussetzung:

Für alle $x + y \leq n$ und beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: für $x \neq y$ ist $f(x, y) \neq 0$ und für $x = y$ ist $f(x, y) = 0$.

Induktionsschritt: Sei $\hat{x} + y = n + 1$: Ist $\hat{x} > y$, so ist nach IV und Definition der Funktion $f(\hat{x}, y) \neq f(y, y) = 0$.
Ist $\hat{x} < y$, so ist nach IV und Definition der Funktion $f(\hat{x}, y) \neq f(y, y) = 0$.

Ist nun $\hat{x} = y$, so ist $f(\hat{x}, y) = \min\{z \mid \forall x' < \hat{x} : z \neq f(x', y) \text{ und } \forall y' < y : z \neq f(\hat{x}, y')\}$.

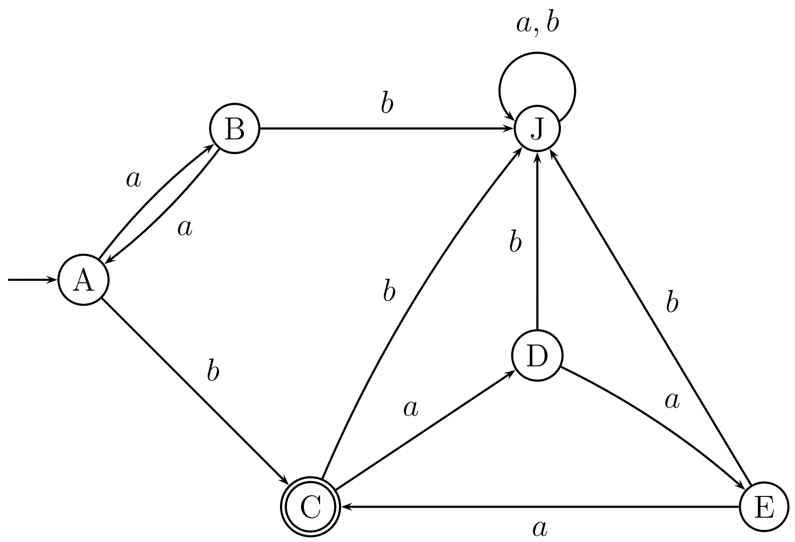
Nach IV sind alle Elemente, die betrachtet werden ungleich Null, woraus folgt, dass für $\hat{x} = y$ gilt: $f(\hat{x}, y) = 0$.

Da nach Aufgabenbeschreibung gilt: $\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : f(x, y) = f(y, x)$, gilt die Aussage für alle x, y.

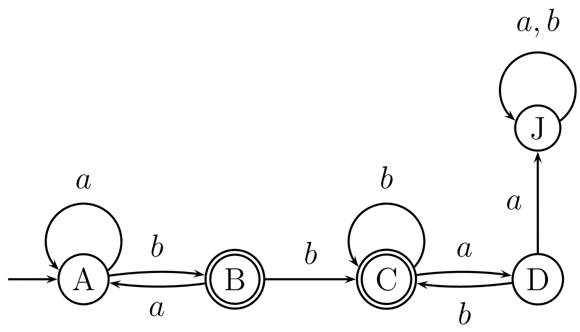
Name: Matr.-Nr.:

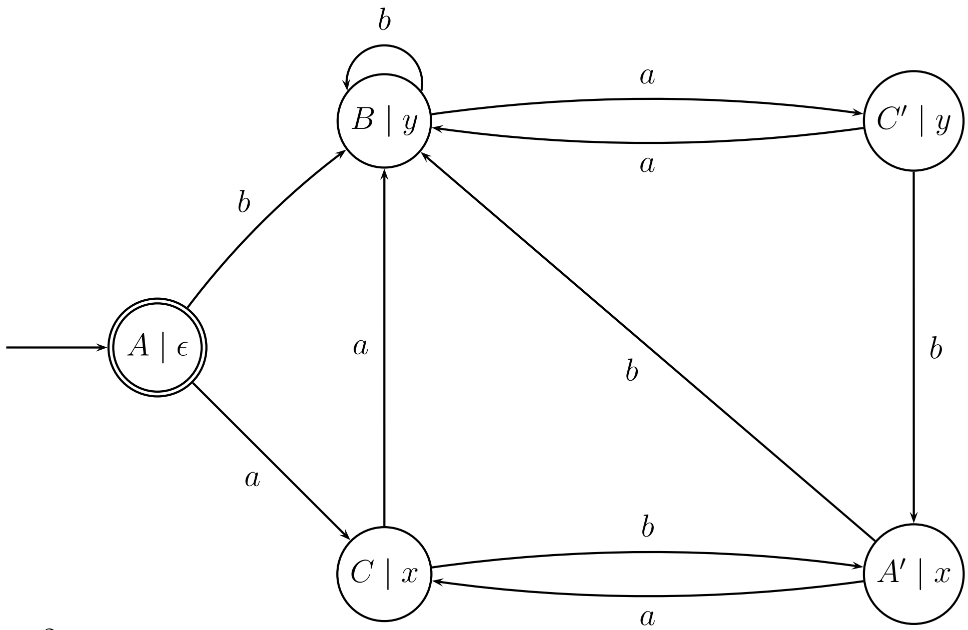
Lösungsvorschlag:

1. a)



b)





2.

Lösungsvorschlag:

a) $G = (\{S, X, Y, A, B\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}\}, S, P\}$ mit
$P = \{S \to Y\texttt{d} \mid \texttt{ab}B\texttt{d},$
$X \to \texttt{c}X \mid \epsilon,$
$Y \to Y\texttt{d} \mid \texttt{ab}A\texttt{c},$
$A \to \texttt{ab}A\texttt{c} \mid \epsilon,$
$B \to \texttt{ab}B\texttt{d} \mid \texttt{c}X\}.$

b)
- ababccd
- ababcdd
- abccccd
- abcdddd

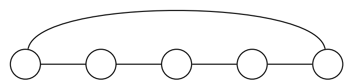
Aufgabe 2 (3+1+1=5 Punkte)

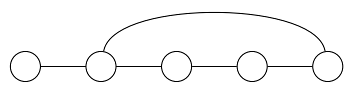
In dieser Aufgabe geht es um ungerichtete Graphen ohne Schlingen.

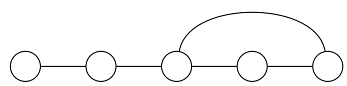
1. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 5 Knoten und genau 5 Kanten, die einen Weg besitzen, in dem alle Knoten vorkommen.

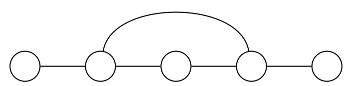
   Suchen Sie sich einen Ihrer Graphen aus und geben Sie für ihn die Wegematrix an.

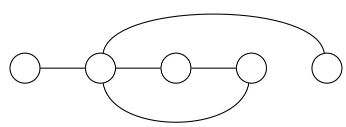
   Lösungsvorschlag:

   G_1 : 

   G_2 : 

   G_3 : 

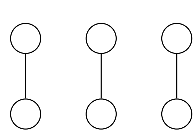
   G_4 : 

   G_5 : 

   $$\text{Wegematrix } W : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 6 Knoten, die alle Grad 1 haben.

   Lösungsvorschlag:

3. Wieviele ungerichtete schlingenfreie Graphen mit Knotenmenge $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es, bei denen alle Knoten Grad 1 haben?

   Lösung: 15

Erklärung: (in der Klausur nicht erforderlich) Da jeder Knoten Grad 1 besitzt, führt zu jedem Knoten genau eine Kante. Bei der gegebenen festen Knotenmenge stehen für die Kante von Knoten 0 aus 5 Möglichkeiten zur Auswahl. Für die Kante vom kleinsten dann noch nicht verbundenen Knoten verbleiben 3 Möglichkeiten und für die letzte Kante bleibt nur eine Möglichkeit übrig.

Insgesamt gibt es also $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ solcher Graphen.

Achtung: Bei den ersten beiden Teilaufgaben gibt es bei Angabe mehrerer isomorpher Graphen Punktabzug. (Aber man kann auf keine Teilaufgabe weniger als 0 Punkte bekommen.)

Aufgabe 4 (4+1+2=7 Punkte)

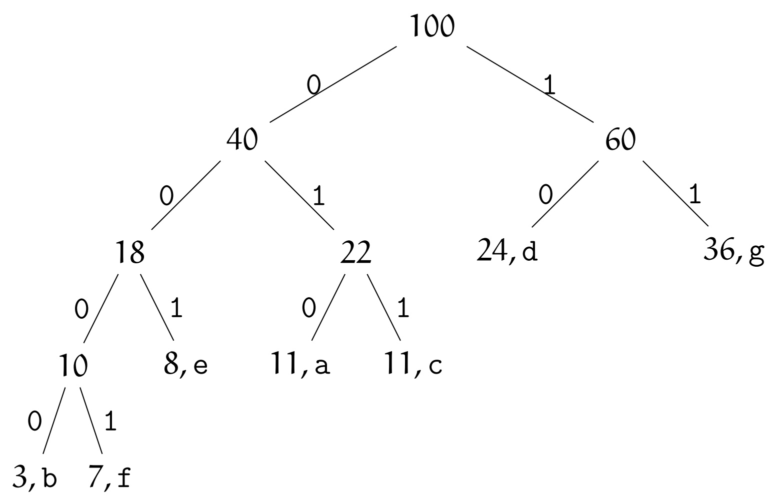
In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

1. Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	3	11	24	8	7	36

   (a) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

   Lösungsvorschlag:



   (b) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes bad an.

   Lösung:

$$h(\mathtt{bad}) = 0000\ 010\ 10$$

2. Für $k \geq 1$ sei ein Alphabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ mit $k + 1$ Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol a_i mit Häufigkeit 2^i vorkommt für $0 \leq i \leq k$.

   Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole a_i an.

   Lösungsvorschlag:

$$h(a_i) = \begin{cases} 0^k & \text{falls } i = 0 \\ 0^{k-i}1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 7 (2,5+2,5+1+2 = 8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3
a	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, -1)$	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_4, \mathtt{b}, 1)$
b	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_1, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, -1)$	$(z_3, \mathtt{b}, -1)$
$\square$	-	$(z_3, \square, -1)$	-	-

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen anfangs auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$.

a) Geben Sie für die Eingaben `aab, aba, baa` jeweils die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

Lösung:

z_0			
a	a	b	$\square$

			z_1
a	a	a	$\square$

			z_4
a	a	b	$\square$

z_0			
a	b	a	$\square$

		z_1	
a	a	a	$\square$

	z_2		
a	a	b	$\square$

			z_1
a	a	a	$\square$

			z_4
a	a	b	$\square$

z_0			
`b`	`a`	`a`	□
	z_1		
`a`	`a`	`a`	□
z_2			
`a`	`b`	`a`	□
		z_1	
`a`	`a`	`a`	□
	z_2		
`a`	`a`	`b`	□
			z_1
`a`	`a`	`a`	□
			z_4
`a`	`a`	`b`	□

b) Die Eingabe enthalte n mal das Zeichen `a` und m mal das Zeichen `b`. Wie viele `a` und wie viele `b` stehen auf dem Band, wenn sich die Turingmaschine im Zustand z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 befindet?

Lösung:

	`a`	`b`
z_0	n	m
z_1	$n+1$	$m-1$
z_2	n	m
z_3	$n+1$	$m-1$
z_4	n	m

c) Geben Sie eine geschlossene Formel für das Wort w' an, das am Ende der Berechnung der Turingmaschine bei Eingabe von w auf dem Band steht.

Lösung: $w' = \mathtt{a}^{N_a(w)}\mathtt{b}^{N_b(w)}$

d) Geben Sie eine (möglichst einfache) Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, so dass die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine bei Eingabe des Wortes $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ macht, in $\Theta(f(n))$ liegt.

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n$