Aufgabe 1 (12 Punkte)
Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

a) Eine Menge M ist unendlich, wenn es eine injektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt.

wahr: ☐ falsch: ☐

b) Wenn eine Relation nicht symmetrisch ist, ist sie antisymmetrisch.

wahr: ☐ falsch: ☐

c) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
R ist transitiv $\Rightarrow R \circ R \subseteq R$.

wahr: ☐ falsch: ☐

d) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
$R \circ R \subseteq R \Rightarrow R$ ist transitiv.

wahr: ☐ falsch: ☐

e) Das leere Wort ϵ ist eine surjektive Abbildung: $\{\} \to \{\}$.

wahr: ☐ falsch: ☐

f) Seien L_1 und L_2 formale Sprachen. $L_1^* = L_2^* \Rightarrow L_1 = L_2$.

wahr: ☐ falsch: ☐

g) $\sqrt{n} \in O(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr: ☐ falsch: ☐

h) $\sqrt{n} \in \Theta(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr: ☐ falsch: ☐

i) $\sqrt{n} \in \Omega(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr: ☐ falsch: ☐

j) Gegeben seien zwei reguläre Ausdrücke $R_1 = \emptyset$`* | 0(0|1)* | (0|1)*00(0|1)*` und $R_2 =$ `((0*1)*01*)*`
Es gilt: $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$.

wahr: ☐ falsch: ☐

k) Die Funktion $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ gibt als Funktionswert die größte Primzahl p zurück, für die gilt: $\exists k \in \mathbb{N}_+ : n = k \cdot p$
Es gilt $f(n) \in O(\sqrt{n})$.

wahr: ☐ falsch: ☐

l) Die aussagenlogische Formel $(A \Rightarrow \neg B) \vee ((B \wedge \neg C) \wedge (C \vee D)) \vee A$ ist äquivalent zu $A \vee \neg A$

wahr: ☐ falsch: ☐

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Gegeben sei folgende Funktion $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$:

$f(0,0) = 0$
$f(x,y) = \min\{z, z \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x' < x : z \neq f(x',y) \text{ und } \forall y' < y : z \neq f(x,y')\}$

Hinweis: Dabei ist mit $\min\{M\}$ das kleinste Element der Menge M gemeint.

a) Berechnen Sie $\forall x, y \in \mathbb{G}_5 : f(x,y)$. Verwenden Sie dazu folgende Tabelle:

[*3 Punkte*]

f(x,y)	**y=0**	**y=1**	**y=2**	**y=3**	**y=4**
x=0					
x=1					
x=2					
x=3					
x=4					

b) Zeigen Sie per Induktion über $n = x + y$: [*6 Punkte*]
$\forall x, y \in \mathbb{N}_0$:

- Für $x \neq y$ ist $f(x,y) \neq 0$ und
- für $x = y$ ist $f(x,y) = 0$.

Hinweis: Sie können annehmen, dass $\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : f(x,y) = f(y,x)$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

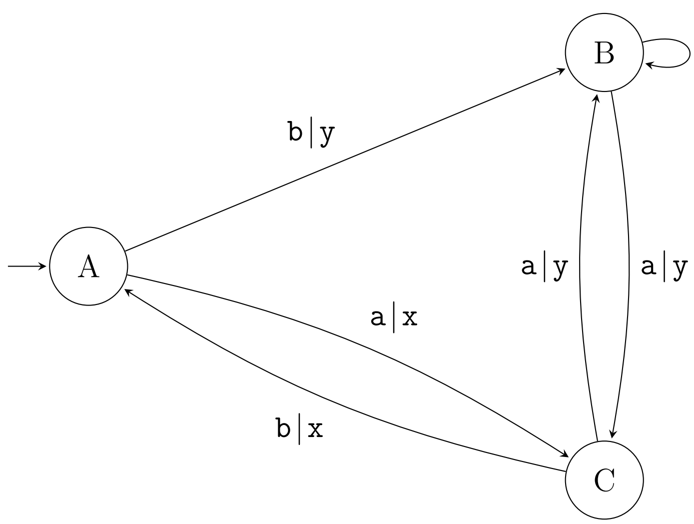
1. Geben Sie zu folgenden regulären Ausdrücken R_i, $i \in \{1, 2\}$ jeweils einen endlichen Akzeptor A_i (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(A_i) = \langle R_i \rangle$.

   a) $R_1 =$ `(aa)*b(aaa)*` [*2 Punkte*]

   b) $R_2 =$ `(a|ba)*(b|ab)+` [*4 Punkte*]

   Hinweis: Für einen beliebigen regulären Ausdruck R ist R`+` die Abkürzung von RR`*`.

2. Geben Sie zu folgendem Mealy-Automaten $M = (Z_m, A, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, f_m, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}, g_m)$ einen Moore-Automaten $N = (Z_n, A, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, f_n, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}, g_n)$ an, so dass für alle $w \in \{a, b\}^+$ gilt: $g_m^{**}(A, w) = g_n^{**}(A, w)$. [*3 Punkte*]



Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei folgende formale Sprache
$L = \{(\mathtt{ab})^k \mathtt{c}^m \mathtt{d}^l \mid k, m, l > 0 \text{ und } (k = m \text{ oder } k = l)\}$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ an, für die gilt:
$L(G) = L$ *[3 Punkte]*

b) Geben Sie alle Wörter der Länge 7 an, die in L liegen. *[2 Punkte]*

Aufgabe 2 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um ungerichtete Graphen ohne Schlingen.

1. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 5 Knoten und genau 5 Kanten, die einen Weg besitzen, in dem alle Knoten vorkommen.

   Suchen Sie sich einen Ihrer Graphen aus und geben Sie für ihn die Wegematrix an.

2. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 6 Knoten, die alle Grad 1 haben.

3. Wieviele ungerichtete schlingenfreie Graphen mit Knotenmenge $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es, bei denen alle Knoten Grad 1 haben?

Achtung: Bei den ersten beiden Teilaufgaben gibt es bei Angabe mehrerer isomorpher Graphen Punktabzug. (Aber man kann auf keine Teilaufgabe weniger als 0 Punkte bekommen.)

Aufgabe 4 (7 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

1. Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	3	11	24	8	7	36

   (a) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

   (b) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes `bad` an.

2. Für $k \geq 1$ sei ein Alphabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ mit $k + 1$ Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol a_i mit Häufigkeit 2^i vorkommt für $0 \leq i \leq k$.

   Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole a_i an.

Aufgabe 7 (2,5+2,5+1+2 = 8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3
a	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, -1)$	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_4, \mathtt{b}, 1)$
b	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_1, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, -1)$	$(z_3, \mathtt{b}, -1)$
$\square$	-	$(z_3, \square, -1)$	-	-

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen anfangs auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$.

a) Geben Sie für die Eingaben `aab, aba, baa` jeweils die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

b) Die Eingabe enthalte n mal das Zeichen `a` und m mal das Zeichen `b`. Wie viele `a` und wie viele `b` stehen auf dem Band, wenn sich die Turingmaschine im Zustand z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 befindet?

c) Geben Sie eine geschlossene Formel für das Wort w' an, das am Ende der Berechnung der Turingmaschine bei Eingabe von w auf dem Band steht.

d) Geben Sie eine (möglichst einfache) Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, so dass die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine bei Eingabe des Wortes $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ macht, in $\Theta(f(n))$ liegt.