MATEMÁTICA

CAPÍTULO 3 - QUAL A RELAÇÃO EXISTENTE ENTRE OS CONCEITOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS DE UMA FUNÇÃO?

Thuysa Schlichting de Souza

INICIAR

Introdução

Em muitas situações, utilizamos a Matemática como ferramenta para descrever e analisar fenômenos reais. Particularmente, o conceito de função nos permite modelar diversas relações apresentadas no cotidiano e nas diferentes áreas do conhecimento científico. Podemos citar, por exemplo, o estudo do tamanho de determinadas populações, o cálculo de taxas de medicamentos na corrente sanguínea, a velocidade de um objeto em queda livre, a determinação de juros compostos em aplicações financeiras, entre outros.

De modo geral, as funções costumam ser categorizadas de acordo com suas características principais. Isso possibilita uma melhor identificação de suas propriedades, a visualização de padrões e, ainda, facilita o trabalho de análise e interpretação de seus elementos algébricos e geométricos. Neste capítulo, trataremos especialmente das funções polinomiais do 1º e do 2º grau, das funções exponenciais e das logarítmicas.

Podemos lembrar que a principal característica da função polinomial do 1º grau é que sua taxa de variação é constante. Já a função polinomial do 2º grau é aquela cujo gráfico é representado por uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas. Tais características viabilizam diversas aplicações em situações reais. Assim, vamos utilizar os conceitos e as propriedades algébricas já conhecidas para resolver problemas práticos e para aprofundar nossos conhecimentos sobre suas propriedades gráficas com o auxílio do GeoGebra®.

Outro tipo de função com diversas aplicações são as funções exponenciais. Elas são utilizadas principalmente na modelagem de muitos padrões de crescimento, incluindo pesquisas de crescimento populacional. Ainda por meio das funções exponenciais, podemos compreender as primeiras ideias da função logarítmica, uma vez que esta é definida como inversa da exponencial.

Por isso, vamos estudar detalhadamente as características das funções exponenciais e das funções logarítmicas, iniciando com a parte de fundamentação, além de suas principais aplicações. Dessa forma, ao final do capítulo, seremos capazes de responder as questões: o que caracteriza estas funções? Como é o comportamento de seus gráficos? Onde podemos encontrá-las em situações reais?

Acompanhe este conteúdo e bons estudos!

3.1 A utilização de *softwares* gráficos no ensino de funções polinomiais do 1º e 2º grau

Você se lembra das características principais das funções polinomiais do 1º e do 2º grau? Elas recebem a nomenclatura de funções polinomiais, pois sua lei de formação é expressa por um polinômio, cujo grau indica também o grau da função polinomial. Como não há restrições para os valores que as variáveis de um polinômio podem assumir, podemos definir a função polinomial sobre o conjunto de todos os números reais.

Vamos recordar as principais propriedades algébricas e gráficas das funções polinomiais do 1º e do 2º grau na tabela a seguir:

Características	Função polinomial do 1º grau	Função polinomial do 2º grau
Lei de formação	$f(x) = ax + b, a \neq 0$	$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Gráfico	Reta inclinada que intercepta o eixo das abscissas no ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e o eixo das ordenadas no ponto (0,b).	Parábola com a concavidade voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). O ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é $(0, c)$. Podem existir, no máximo, dois pontos de intersecção com o eixo das abscissas que são da forma: $\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ e $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$

Tabela 1 - Características algébricas e gráficas das funções polinomiais de grau 1 e de grau 2. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Na sequência, vamos explorar outros aspectos gráficos destas funções. Para isso, utilizaremos o GeoGebra®, um *software* gratuito de matemática dinâmica, que reúne recursos algébricos e gráficos num único ambiente e permite, assim, a interação assíncrona entre estas duas representações da função.

VOCÊ SABIA?

Você pode fazer *download* do GeoGebra® gratuitamente, pelo site oficial <http://www.geogebra.org (http://www.geogebra.org)>. Também é possível utilizar sua versão *online*, que está disponível no mesmo site. Apesar de se tratar de uma ferramenta de manipulação bastante intuitiva, em caso de dúvidas, existe um fórum próprio para discussões de questões referentes ao uso do programa.

Sendo assim, GeoGebra® é uma ferramenta que possibilita a ilustração das propriedades das funções. No caso da função polinomial do 1º grau, vamos explorar as relações entre a variação dos coeficientes da função e o comportamento da reta que representa seu gráfico. Assim, sugerimos que você siga cada passo da construção gráfica da função polinomial do 1º grau, que realizaremos a seguir, no seu próprio computador.

Para a criação do gráfico de uma função polinomial do 1º grau, devemos construir dois seletores (ou controle deslizantes) *a* e *b*, sendo *a* = 1 e *b* = 1 e variação de valor entre -10 e 10. Em seguida, na entrada algébrica, devemos digitar a função da forma f(x):= a*x+b. Assim, podemos movimentar os seletores e observar como a reta da função se comporta.

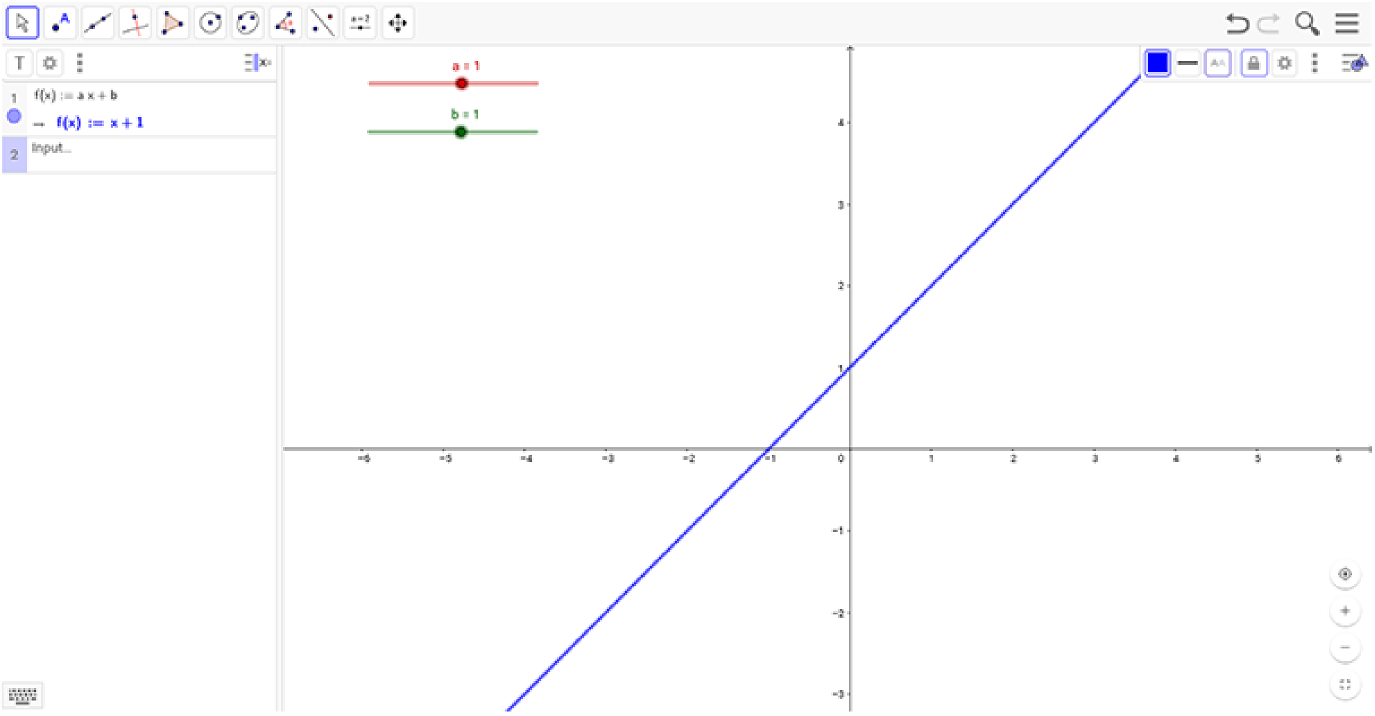

Figura 1 - Reta que representa a função afim f(x) = x + 1. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Primeiro, deslize o seletor *a* para a esquerda e para a direita de 1. Depois, retorne o seletor *a* para o valor 1 e deslize o seletor *b* da mesma forma. *O* que você percebeu de mudança no gráfico da função quando da variação dos coeficientes *a* e *b*? Observe a figura a seguir:

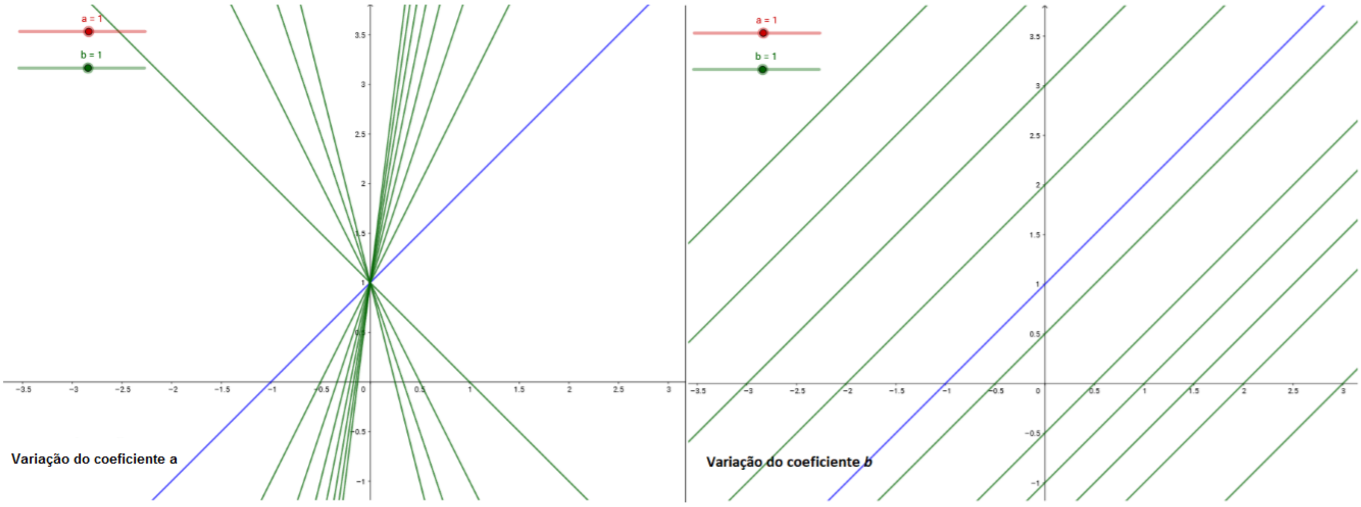

Figura 2 - À direita, as retas são da forma f(x) = ax + 1, com -10 < a < 10. À esquerda, as retas são da forma f(x) = x + b, com -10 < b < 10. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Você pode verificar que o coeficiente a, que acompanha a variável x, está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas. Por isso, este coeficiente é também conhecido como o **coeficiente angular** da reta. Já o termo constante b é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas e está relacionado ao deslocamento linear da reta. Por esta razão, é usualmente denominado de coeficiente linear da reta.

Podemos perceber ainda que, quando o coeficiente angular assume valores positivos, a função é crescente. Do contrário, quando este coeficiente é um valor negativo, a função se torna decrescente. Isto significa que a análise da variação da função polinomial do 1º grau deve ser realizada apenas considerando o coeficiente que acompanha a variável independente.

É interessante observar que o programa viabiliza a análise da função e a determinação da sua raiz sem que haja a necessidade de realizarmos cálculos. Para isso, basta digitarmos no campo de entrada a expressão “raiz[f(x)]”. Assim, a resposta será dada algebricamente na janela de álgebra. Além disso, na janela de visualização, será criado automaticamente um ponto no gráfico da função que é a interseção entre a reta e o eixo das abscissas.

Podemos investigar as relações entre a variação dos coeficientes da função e o comportamento do seu gráfico também para as funções polinomiais do 2º grau. Dessa forma, vamos proceder com a construção gráfica da função, utilizando a lei de formação na forma genérica e os coeficientes variando no intervalo de -10 a 10.

Assim, devemos usar novamente o recurso do controle deslizante para *a*, *b* e *c*, definindo *a* = 1, *b* = 2 e *c* = 1. Em seguida, na entrada algébrica, devemos digitar a função da forma f(x):= a*x+b*x+c.

Na janela de visualização, aparecerá uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas, que, como já sabemos, representa graficamente a função quadrática. Podemos destacar o vértice da parábola escrevendo no campo de entrada a expressão “extremo[f(x)]”. Agora, você já pode deslizar os seletores e analisar o comportamento do vértice da parábola considerando a variação de cada coeficiente.

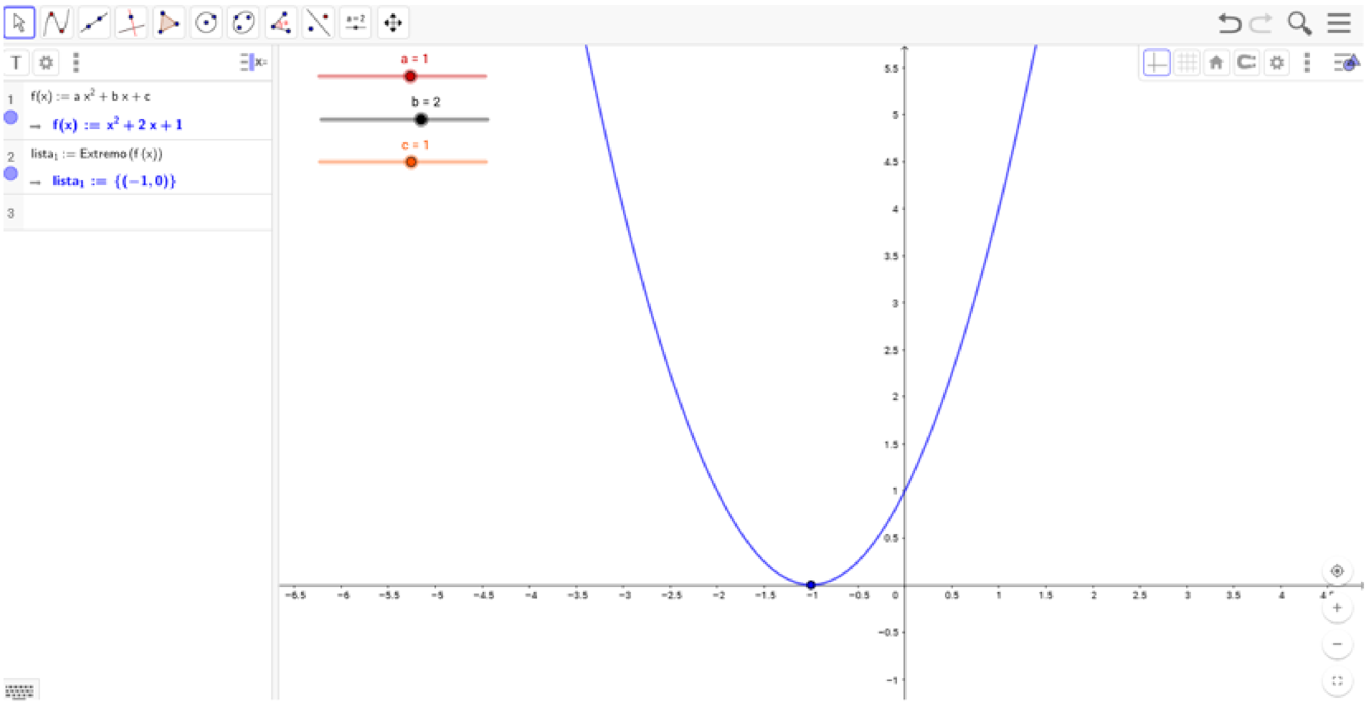

Figura 3 - Parábola que representa a função quadrática *f*(*x*) = *x*2 + 2 *x* + 1. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Vamos fixar os coeficientes *a* e *b* e variar coeficiente *c*. Como o vértice da parábola se deslocou com a variação do coeficiente? Você deve ter notado que, quando aumentamos os valores do seletor *c*, o gráfico foi transladado para cima, no sentido positivo do eixo y. E, quando diminuímos os valores do seletor *c*, a parábola foi transladada para baixo, no sentido negativo do eixo y. Isto significa que o vértice se movimentou paralelamente ao eixo das ordenadas e, consequentemente, a parábola se deslocou verticalmente.

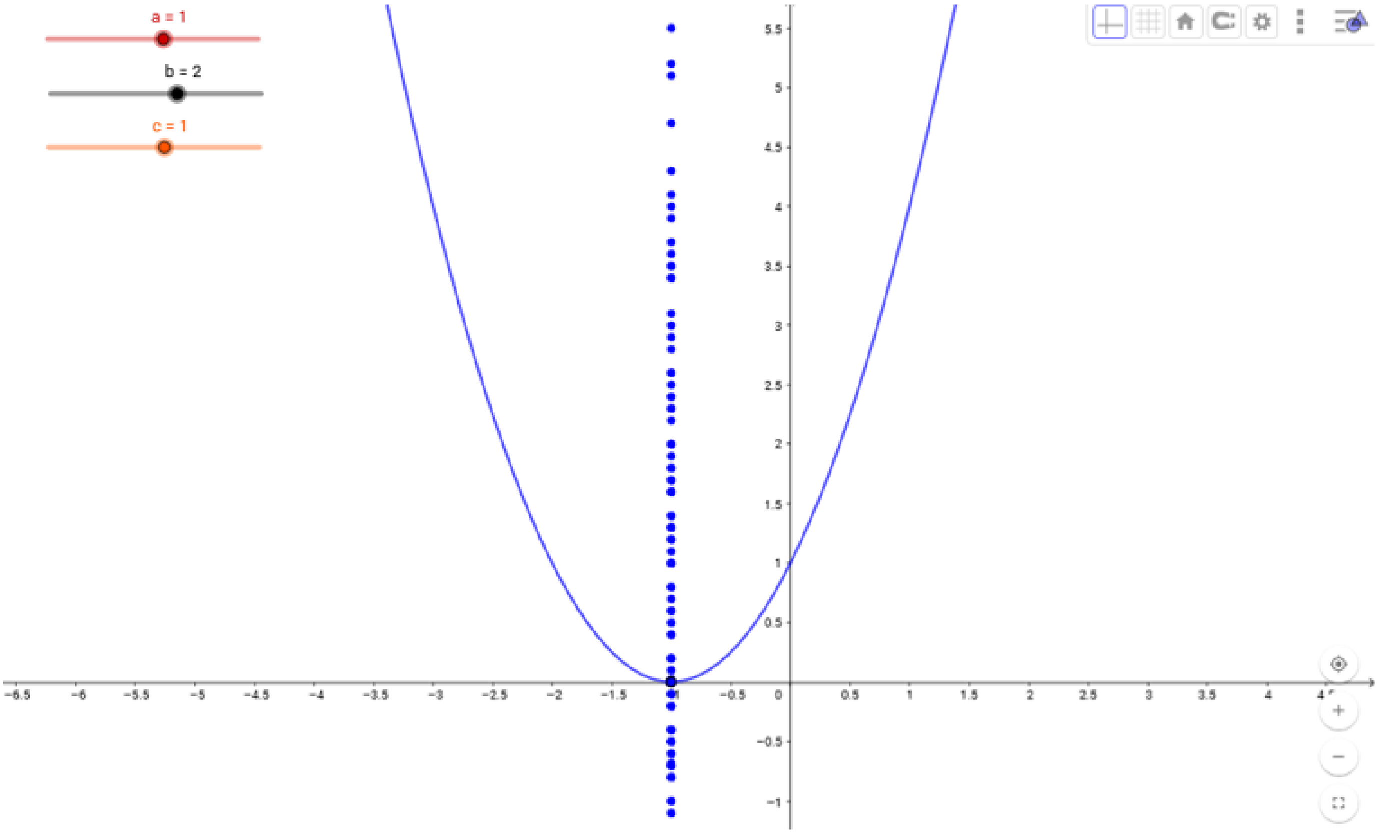

Figura 4 - Quando fixamos os coeficientes a e b e variamos o coeficiente c da função $f(x) = x + 2x + c$, os vértices se movimentaram paralelamente ao eixo y. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Outras propriedades já estudadas também podem ser facilmente verificadas com o uso do programa, como, por exemplo, o coeficiente a determinar se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo. Além disso, podemos investigar as raízes da função quadrática, procedendo da mesma forma que foi realizado para as funções polinomiais do 1º grau. Assim, a análise do sinal da função é facilitada com a utilização do GeoGebra®.

Na sequência, vamos estudar as propriedades de outro tipo especial de função com importantes aplicações em problemas reais.

3.2 Equação e função exponencial

Vamos estudar um novo tipo de função, chamada de **função exponencial**, enfocando suas principais características e as diferentes formas de representá-la. Inicialmente, vamos verificar uma aplicação prática da função exponencial para seguirmos com sua definição e a análise de suas propriedades algébricas e geométricas. Analisemos o problema a seguir.

Suponha que um laboratório está pesquisando o desenvolvimento de um determinado tipo de bactéria. Durante o estudo, um pesquisador observou que o número de bactérias dobrava a cada hora e que, num dado momento, a população de bactérias alcançou o número de 32.768 unidades (DEMANA et al., 2013). É possível sabermos exatamente em quanto tempo a população chegou a 32.768 unidades?

Vamos verificar o crescimento do número de bactérias durante as primeiras cinco horas de observação:

Tempo	Total de bactérias
Após 1 hora	$2 \cdot 1 = 2 = 2^1$
Após 2 horas	$2 \cdot 2 = 4 = 2^2$
Após 3 horas	$2 \cdot 4 = 8 = 2^3$
Após 4 horas	$2 \cdot 8 = 16 = 2^4$
Após 5 horas	$2 \cdot 16 = 32 = 2^5$

Tabela 2 - Crescimento da população de uma determinada bactéria nas cinco horas iniciais de observação. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Note que o número de bactérias por hora pode ser dado pela lei $f(x) = 2^x$, em que x representa o tempo decorrido do início da observação. Sendo assim, para descobrir quando a população de bactérias alcançou o número de 32.768 unidades, basta resolvermos a equação: $32.768 = 2^x \Rightarrow 2^{15} = 2^x \Rightarrow x = 12$.

Portanto o número de bactérias era de 32.768 unidades, após 15 horas de observação.

A função do problema anterior apresenta a variável independente como expoente de uma potência de base 2. Uma função desse tipo, que pode ser descrita da forma $f(x)=b^x$, com b um número positivo diferente de 1, é denominada **função exponencial de base b e de expoente x**. Como os valores do expoente podem assumir qualquer valor do conjunto dos reais, podemos defini-la como uma função real de variável real. Em linguagem matemática, temos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Você pode se perguntar: por que restringimos os valores para a base b?

Vamos supor que b possa assumir o valor 1 e, portanto, $f(x)=1^x$. O que acontece com o valor da imagem quando $x=-2$, $x=0$ ou $x=1$, por exemplo? Pela definição de potenciação, temos que $f(-2)=f(0)=f(1)=1$. Assim, para qualquer valor real assumido por x, vale a relação $f(x)=1$, isto é, f é uma função constante.

Agora, suponhamos que b = 0 e, portanto, $f(x)=0^x$. Quando $x=0$, temos que $f(0)=0^0$, o qual é um valor que não está definido nos reais. Da mesma forma, quando x assume um valor inteiro negativo, por exemplo -2, temos que: $f(x)=0^{-2}=\left(\frac{1}{0}\right)^2$. Já vimos que a divisão por zero também não é definida nos reais. Portanto, no caso de b = 0, a função exponencial não estaria definida para todo $x \in R$.

Finalmente, supondo que $b<0$, podemos verificar que $f(x)=b^x$ nem sempre existirá no conjunto dos reais. Por exemplo, se $b=-9$ e $x=\frac{1}{2}$, então $f\left(\frac{1}{2}\right)=(-9)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-9}$, que não é um valor real.

A partir da definição, podemos analisar como será a curva que representa uma função exponencial, evidenciando suas características principais. Para isso, vamos utilizar todo o nosso conhecimento sobre funções estudados até aqui.

Inicialmente, vamos investigar o ponto do gráfico que intercepta o eixo das ordenadas, ou seja, o valor de y, que é imagem de $x=0$. Observe que independentemente do valor da base b (com $b>0$ e $b\neq 1$, temos que: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=b^0=1$. Isto significa que o gráfico de uma função exponencial da forma $f(x)=b^x$ sempre cortará o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1.

Agora, observemos o que acontece com os valores da imagem de uma função exponencial de base $b>1$, com os exemplos da tabela a seguir.

Valores x do domínio	$f(x) = 2^x$	$f(x) = 4^x$	$f(x) = 10^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$4^{-2} = \frac{1}{16}$	$10^{-2} = \frac{1}{100}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$4^{-1} = \frac{1}{4}$	$10^{-1} = \frac{1}{10}$
1	$2^{1} = 2$	$4^{1} = 4$	$10^{1} = 10$
2	$2^{2} = 4$	$4^{2} = 16$	$10^{2} = 100$
10	$2^{10} = 1024$	$4^{10} = 1.048.576$	$10^{10} = 10.000.000.000$

Tabela 3 - Valores do domínio e da imagem de funções exponenciais de base b > 1. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Podemos perceber que os valores da imagem sempre aumentam quando também aumentamos os valores do domínio da função. Em termos matemáticos, se tomarmos dois números reais x_1 e x_2 do domínio, de modo que $x_1 < x_2$, isso implica que $b^{x_1} < b^{x_2}$. Sendo assim, a função $f(x) = b^x$ com $b > 1$ é uma **função crescente**.

Consideremos, agora, o que acontece com os valores da imagem de uma função exponencial de base $0 < b < 1$.

Valores x do domínio	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$	$f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^x$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$	$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}=10$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^{1}=\frac{1}{10}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{1}{16}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^{1}=\frac{1}{100}$
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{1}{1.048.576}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^{10}=\frac{1}{10^{10}}$

Tabela 4 - Valores do domínio e da imagem de funções exponenciais de base 0 < b < 1. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Para valores do domínio tal que $x_1 < x_2$, temos que $b^{x_1} > b^{x_2}$. Isso quer dizer que os valores da imagem diminuem quando tomamos valores do domínio cada vez maiores. Logo, as funções exponenciais da forma $f(x)=b^x$ com $0<a<1$ são **funções decrescentes**.

Pela definição de função exponencial, sabemos que a base b é sempre um número positivo e diferente de 1. Como, independentemente do valor do expoente, este não pode mudar o sinal da base, o valor assumido pela imagem b^x, sempre será um número positivo. Portanto, podemos afirmar que o gráfico da função exponencial $f(x)=b^x$, com $b>0$ e $b\neq 1$, está acima do eixo das abscissas.

Levando em consideração as informações de nossas análises e os valores determinados nas tabelas anteriores, podemos construir os gráficos das funções exponenciais como na figura a seguir.

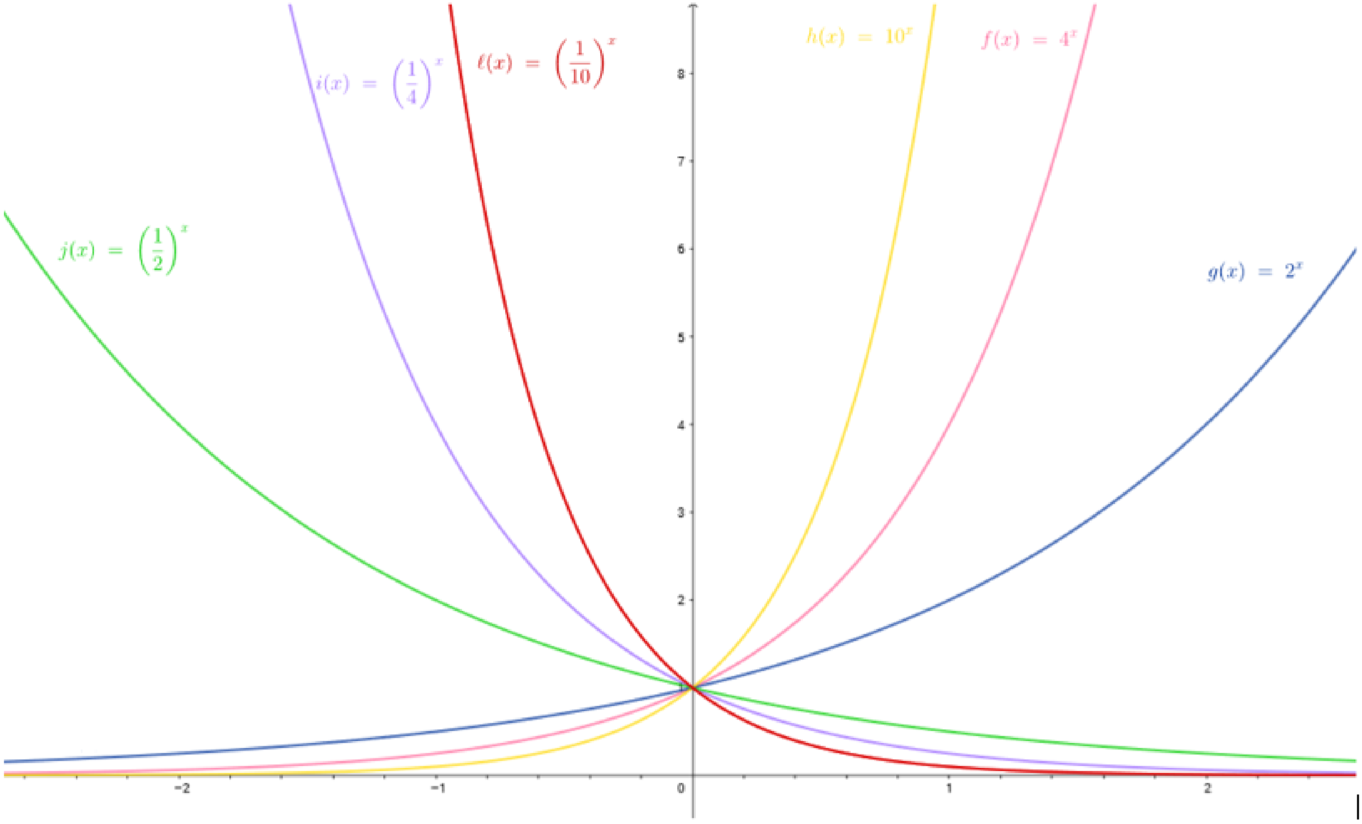

Figura 5 - A curva que representa uma função exponencial $f(x) = bx$ é decrescente quando $0 < b < 1$ e é crescente quando $b < 1$. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Você reparou que, dependendo do valor da base, a curva da função exponencial têm o mesmo comportamento quando os valores do domínio crescem ou decrescem? Se quando $0 < b < 1$, então $f(x) = b^x$ aproxima-se de 0 quando x cresce. Se $b > 1$, então a $f(x) = b^x$ tende a 0 conforme x decresce. Logo, o conjunto imagem da função exponencial $f(x) = b^x$ é $\mathrm{I}(f) = \{y = f(x) \in R | y > 0\}$.

Vale ressaltar que frequentemente alguns estudantes confundem a função exponencial $f(x) = b^x$ com a função potência $f(x) = x^b$. Observe que, em b^x, a base b é constante e a variável x é o expoente, enquanto em x^b, a variável x é a base e o expoente b é constante (HOFFMANN; BRADLEY, 2011). Na figura abaixo, podemos comparar o comportamento das curvas que representam a função potência $f(x) = x^4$ e a função exponencial $g(x) = 4^x$.

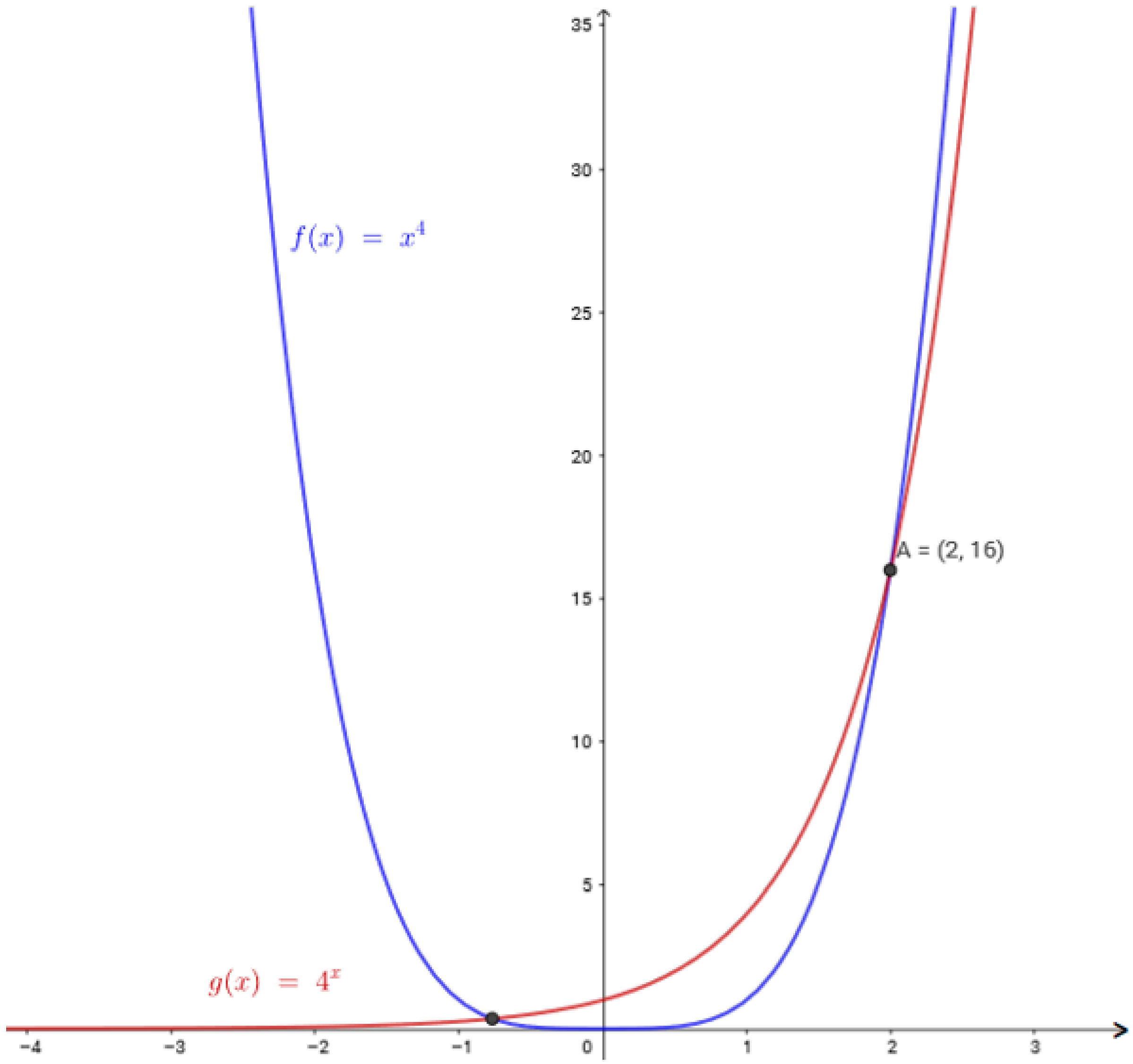

Figura 6 - Representação gráfica da função potência $f(x) = x4$ e da função exponencial $g(x) = 4x$. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Observe que, a partir do ponto de interseção A = (2, 16), a curva da função exponencial $g(x)=4^x$ aumenta mais rapidamente com x do que a curva da função potência $f(x)=x^4$. Vejamos, por exemplo, o que acontece com o valor da imagem de cada função quando $x=8$. No caso da função potência, temos que $f(8)=8^4=4.096$, isto é, o ponto (8, 4.096) pertence à curva que representa a função. Enquanto que, na função exponencial, temos que $g(8)=4^8=65.536$ e, portanto, o ponto (8, 65.536) pertence à curva da função exponencial.

Devido às suas características especiais, as funções exponenciais podem modelar, matematicamente, situações em que grandezas crescem ou decrescem numa taxa constante. Por exemplo, as aplicações financeiras a juros compostos, são descritas eficientemente por funções exponenciais. Vejamos um problema:

Luísa aplicou R$3.000,00 no banco, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Agora, ela quer saber quanto esse dinheiro renderá após dois anos de aplicação.

Você sabe o que significa aplicar um valor a juros compostos? No regime de juros compostos, o juro recebido em cada período se agrega ao montante do início do período, e essa soma passa a gerar juros no período seguinte (MORETTIN; HAZZAN; BUSSAB, 2012).

No caso de Luísa, ao final do primeiro mês, os juros incidentes sobre o capital inicial podem ser calculados da forma: $3000g0,02 = 60$. Agora, incorporando o valor de R$60,00 ao capital inicial, obtemos o montante de R$ 3.060,00.

Vamos seguir a mesma ideia, calculando o montante para os primeiros quatro meses de aplicação na tabela a seguir:

Taxa de juros: 2% ao mês	
Mês	Montante
0 (inicial)	R$3.000,00
1	R$3.060,00 = 3000 + 3000 · 0,02 = 3000 · (1+0.02)
2	R$3.121,20 = 3060 + 3060 · 0,02 = 3060 · (1 + 0.02) = 3000 · (1 + 0.02) · (1 + 0.02) = 3000 · (1 + 0.02)^2
3	R$3.183,62 = 3121,2 + 3121,2 · 0,02 = 3121,2 · (1 + 0.02) = 3000 · (1 + 0.02)^2 · (1 + 0.02) = 3000 · (1 +0.02)^3
4	R$3.247,3 = 3183,62 + 3183,62 · 0,02 = 3183,62 · (1 + 0.02) = 3000 · (1 + 0.02)^3 · (1 + 0.02) = 3000 · (1 + 0.02)^4

Tabela 5 - Montante gerado nos quatro primeiros meses de uma aplicação financeira a juros compostos de 2%. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

O mesmo processo pode ser feito para os demais meses de aplicação. Contudo, será que é possível encontrar o montante final, após dois anos, sem precisarmos calcular o montante para cada mês separadamente? Podemos encontrar alguma regularidade nos cálculos realizados na tabela anterior?

Note que o capital de R$3.000,00 investido inicialmente a juros compostos com taxa de 2% ou 0,02 por mês, gera um montante, após n meses, da forma M = 3000 (1,02)n. Portanto, o montante após dois anos de aplicação (24 meses) pode ser calculado a partir do investimento inicial, fazendo-se: $3000,00g(1,02)^{24} \cong 4825,31$. Isto é, o valor que Luísa receberá será de, aproximadamente, R$4.825,31.

Podemos, ainda, generalizar a fórmula, se considerarmos um capital C investido inicialmente a juros compostos com taxa i por período de tempo, então o montante, após n períodos, será dado pela função $M = C(1+i)^n$.

Suponha, agora, que Luísa tenha realizado uma segunda aplicação a juros compostos. Dessa vez, investiu R$2.500,00 à uma taxa de 0,95%. Após um determinado período de tempo, ela resgatou o valor de R$2.800,37. Quanto tempo o capital inicial ficou aplicado nessa situação?

Primeiro, vamos sistematizar as informações disponibilizadas no problema:

C = R$2.500,00;

M = R$2.800,37;

i = 0,95% ou 0,0095.

Substituindo esses valores na fórmula do montante $M = C(1+i)^n$, temos: $2.800,37 = 2.500,00g(1+0,0095)^x \Rightarrow (1,0095)^x = 1,12g(1,0095)^x = (1,0095)^{12} gx = 12$. Portanto, Luísa resgatou seu dinheiro após 12 meses de aplicação.

Para resolver o problema anterior e determinar o período de aplicação, foi necessário fazer a resolução de uma **equação exponencial**. De modo geral, uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências. A técnica utilizada no problema anterior foi a redução de ambos os membros da equação a potências de mesma base. Assim, aplicamos a seguinte propriedade: $b^{x_1} = b^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$, com $0 < b \neq 1$.

Vejamos outros exemplos de resolução de equações exponenciais considerando valores reais:

- $2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$;
- $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{6.561} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^8} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \Rightarrow x = 8$;
- $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64 \Rightarrow (4^{-1})^x = 64 \Rightarrow 4^{-x} = 4^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$;
- $10^{2x} = 10.000 \Rightarrow 10^{2x} = 10^4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$;
- $5^{x+3} = 15.625 \Rightarrow 5^{x+3} = 5^6 \Rightarrow x+3 = 6 \Rightarrow x = 6-3 \Rightarrow x = 3$;

- $8^x = 16 \Rightarrow (2^3)^x = 2^4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.

Agora, analisemos a seguinte equação exponencial: $3^x = 25$. É possível transformar os dois membros em potências de mesma base? A resposta é não, pois o 25 não pode ser escrito como uma potência de 3.

Para resolver uma equação exponencial desse tipo, é necessário que utilizemos os logaritmos, uma vez que estes invertem o processo de exponenciação. Na sequência, vamos discutir as propriedades básicas das funções logarítmicas e algumas de suas principais aplicações. Assim, ainda poderemos desenvolver mais uma técnica para a resolução de equações exponenciais.

3.3 Equação e função logarítmica

Os logaritmos nasceram como uma ferramenta computacional e permitiram que os cientistas realizassem complexos cálculos aritméticos. Eles foram introduzidos no século XVII pelo matemático escocês John Napier (1550-1617) e pelo matemático inglês Henry Briggs (1561-1630) (MORETTIN; HAZZAN; BUSSAB, 2012).

O conceito de logaritmo está estritamente relacionado com a ideia de exponencial. Quando respondemos à pergunta “qual é o expoente da base 2 que faz a potência resultar em 32?”, estamos procurando o valor do expoente x que satisfaz a equação exponencial $2^x = 32$. Como já vimos anteriormente, a resposta dessa equação é $x = 5$. O procedimento que acabamos de realizar foi procurar o logaritmo de 32 na base 2.

Sendo assim, se a e b são números reais, tais que $0 < b \neq 1$ e $a > 0$, definimos o logaritmo de a na base b – escreve-se $log_b a$ – o valor de x tal que: $log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$. O símbolo $\Leftrightarrow$ indica que as duas expressões são equivalentes. Ainda, b é denominada base do logaritmo, a é chamado de logaritmando e x é o logaritmo.

Vale destacar que, se a base do logaritmo é b = 10, então podemos omiti-la, de forma que $log_{10} a = log a$.

Vejamos, então, como calcular os seguintes logaritmos:

- $log_3 81$:

pela definição, temos que $log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81$. Como 81 = 34, podemos escrever a equação de forma equivalente $3^x = 3^4$. Logo, o valor de x é 4, e dizemos que $log_3 81 = 4$.

- $log_5 \dfrac{1}{25}$:

pela definição, $log_5 \dfrac{1}{25} = x \Leftrightarrow 5^x = \dfrac{1}{25}$. Resolvendo a equação exponencial a pela técnica de redução de ambos os membros a uma potências de mesma base, temos: $5^x = \dfrac{1}{25} \Rightarrow 5^x = 25^{-1} \Rightarrow 5^x = \left(5^2\right)^{-1} \Rightarrow 5^x = 5^{-2} \Rightarrow x = -2$. Logo, $log_5 \dfrac{1}{25} = -2$.

- $log 10$:

lembre-se que $log 10 = log_{10} 10$. Pela definição, $log_{10} 10 = x \Leftrightarrow 10^x = 10$. Como 10 = 101, o valor de x é 1. Podemos dizer, então, que o logaritmo de 10 na base 10 é 1 ou, em termos matemáticos, $log_{10} 10 = 1$.

- $log_2 1$:

pela definição, $log_2 1 = x \Leftrightarrow 2^x = 1$. Para resolvermos a equação exponencial, precisamos encontrar uma potência de base 2 que seja equivalente a 1. Recorde que qualquer potência de expoente 0 é igual a 1. Portanto, $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$. Logo, $log_2 1 = 0$.

Nos exemplos anteriores, podemos verificar que a definição do logaritmo ocasiona algumas consequências. Vamos generalizar tais resultados observados na tabela a seguir:

Propriedades básicas dos logaritmos
Para $x > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ e y como um número real qualquer:
1 - $\log_b 1 = 0$, porque $b^0 = 1$
2 - $\log_b b = 1$, porque $b^1 = b$
3 - $\log_b b^y = y$, porque $b^y = b^y$
4 - $b^{\log_b x} = x$, porque $\log_b x = \log_b x$

Tabela 6 - Quatro propriedades básicas dos logaritmos que são consequências da definição. Fonte: DEMANA et al., 2013, p. 158.

Levando em consideração as propriedades anteriores, podemos calcular o valor da expressão: $log_7 1 + log_3 729$. Observe que $log_7 1 = 0$ e $log_3 729 log_3 3^6$. Aplicando as propriedades 1 e 3, respectivamente, temos que: $log_7 1 + log_3 729 = 0 + log_3 3^6 = 6$.

VOCÊ QUER VER?

O vídeo intitulado *Pandemia* (ROMAN, 2012) trata de um caso fictício sobre a possibilidade de um surto de uma doença viral no nosso planeta. Nesse contexto, dois pesquisadores discutem a velocidade de propagação da doença no Brasil e na Alemanha, objetivando determinar o tempo disponível para a criação de uma vacina contra o vírus. Os pesquisadores utilizam as funções logarítmica e exponencial para modelar o problema matematicamente. Ao longo do vídeo, são exploradas as propriedades da exponencial e do logaritmo. Para assistir ao vídeo completo, acesse a página: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=19XXQTCXP-I (https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=19XXQTCXP-I)>.

A definição de logaritmo restringe os valores da base a e do expoente x, de modo que b e x são números positivos e $b \neq 1$, isso implica que a expressão $log_b x$ também representa um número real. Sendo assim, podemos definir uma função logarítmica como a função de $R_{+} \to R$, tal que $f(x) = log_b x$ (com $0 < b \neq 1$). Alguns exemplos de funções logarítmicas são $f(x) = log_2 x$, $f(x) = log_{10} x$ e $f(x) = log_e x$.

Da mesma forma que procedemos com as funções exponenciais, vamos investigar o comportamento do gráfico da função logarítmica. Será que sua curva segue algum padrão, como acontece com as exponenciais?

Segundo Hoffmann e Bradley (2011, p. 253), podemos construir a curva da função logarítmica $y = log_b x$ a partir da curva da função exponencial $y = b^x$. Como $y = log_b x$ é equivalente $x = b^y$, é possível usar a ideia de que a curva de $y = log_b x$ é igual à curva de $y = b^x$ com os papéis de x e y invertidos.

Podemos exemplificar essa observação na tabela que relaciona os valores da função exponencial $f(x) = 2^x$ e da função logarítmica $f(x) = log_2 x$.

Função exponencial: $y = f(x) = 2^x$		Função logarítmica: $y = f(x) = \log_2 x$	
x	y	x	y
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2

Tabela 7 - A função exponencial f(x) = 2x e a função logarítmica f(x) = log 2x. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Seguindo esta proposta, se tomarmos um ponto (x_1, y_1) do gráfico de uma função logarítmica da forma $f(x) = log_b x$, então $y_1 = log_b x_1$. Pela definição de logaritmo, uma forma equivalente de escrever essa relação é $x_1 = b^{y_1}$. Isso significa que o ponto (y_1, x_1) está no gráfico da função exponencial de mesma base, além disso os pontos (x_1, y_1) e (y_1, x_1) são simétricos em relação à reta bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes do plano cartesiano. Isto significa que, se conhecemos o gráfico de uma função exponencial $f(x) = b^x$, também podemos encontrar o gráfico da função logarítmica $f(x) = log_b x$ por simetria.

Portanto, a curva que representa a função logarítmica terá o aspecto de um dos gráficos abaixo, conforme o valor da base b. Para valores da base maior que 1, temos:

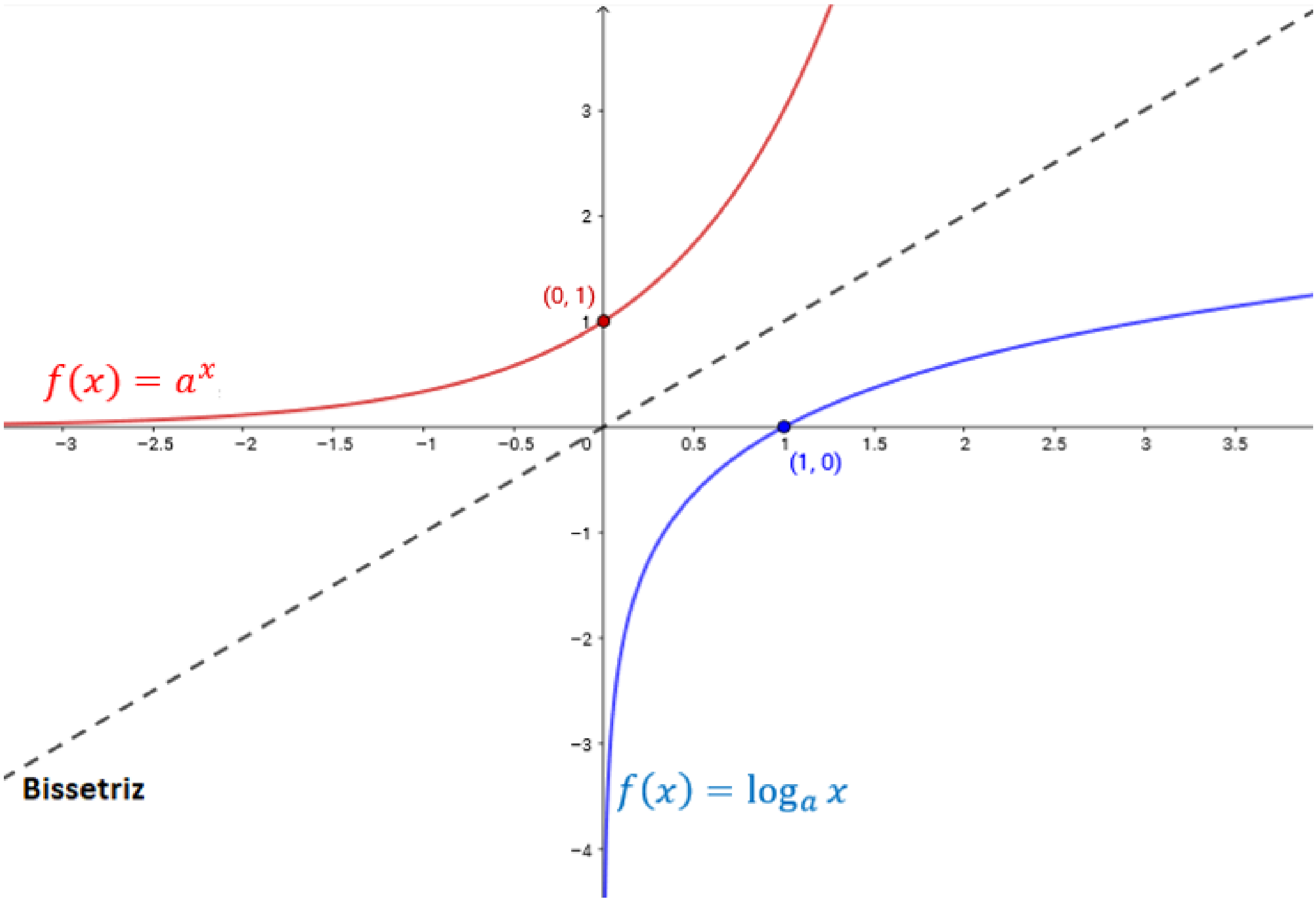

Figura 7 - A função logarítmica *f*(*x*) = logb *x* (com *b* > 1) tende a 0 conforme *x* decresce. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Para valores da base positivos e menores que 1, temos:

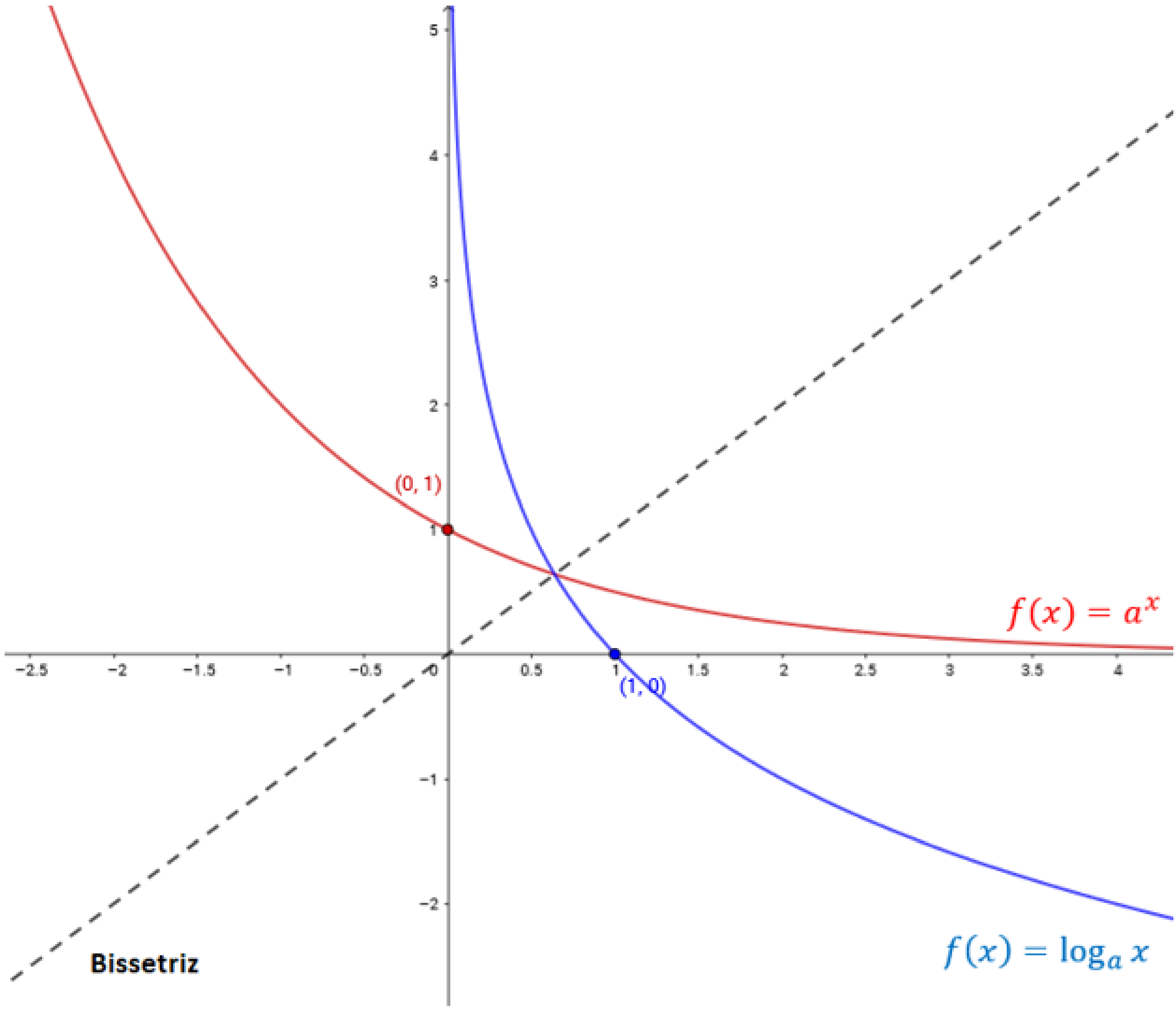

Figura 8 - A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ (com $0 < b < 1$) tende a 0 conforme x decresce. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Podemos resumir as características da função logarítmica $f(x) = log_b x\,(b > 0, b \neq 1)$:

- seu domínio é o conjunto $D(f) = \{x \in R | x > 0\}$;
- seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (1, 0);
- não existem pontos de interseção com o eixo das ordenadas;
- se $b > 1$, a função logarítmica é crescente e a concavidade da curva é para baixo em todo o seu domínio;
- se $0 < b < 1$, então a função logarítmica é decrescente e a concavidade da curva é para cima para todos os valores domínio.

Você teve a oportunidade de compreender as relações existentes entre as potências e a definição de logaritmo. Assim, foi possível construir o gráfico de uma função logarítmica utilizando a ideia de inversa de uma função exponencial. Agora, você tem condições de fazer uso dessas propriedades como ferramentas que ajudam na resolução de problemas.

De acordo com Hoffmann e Bradley (2011), as funções logarítmicas desempenham um papel importante em diferentes âmbitos da atividade humana, por exemplo, na capacidade da medida dos canais de comunicação e na famosa escala Richter para indicar a intensidade de terremotos. Além disso, a sua estreita relação com as funções exponenciais, nos permite utilizar os logaritmos para a resolução de equações exponenciais estabelecidas durante a solução de problemas envolvendo as exponenciais.

Já vimos que existem equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base por meio da aplicação das propriedades das potências. Nesse caso, a resolução da equação será baseada na definição de logaritmo: $b^x = a \Rightarrow x = log_b a$, com $0 < b \neq 1$ e $a > 0$.

Portanto, podemos resolver as seguintes equações exponenciais:

- $2^x = 5$:

$2^x = 5 \Rightarrow x = log_2 5$. Com o auxílio da calculadora, chegamos no resultado: $x = log_2 5 \cong 2,32$.

- $3^{x-1} = 7$:

$3^{x-1} = 7 \Rightarrow \dfrac{3^x}{3^1} = 7 \Rightarrow 3^x = 21 \Rightarrow x = log_3 21$. Com o auxílio da calculadora, chegamos no resultado: $x = log_3 21 \cong 2,77$.

- $2^{2x+3} = 9$:

$2^{2x+3} = 9 \Rightarrow 2^{2x} \cdot 2^3 = 9 \Rightarrow 2^{2x} \cdot 8 = 9 \Rightarrow 2^{2x} = \dfrac{9}{8} \Rightarrow 4^x = \dfrac{9}{8} \Rightarrow x = log_4 \dfrac{9}{8} \Rightarrow x = log_4 1,125$. Com o auxílio da calculadora, chegamos no resultado: $x = log_4 1,125 \cong 0,085$.

VOCÊ SABIA?

O GeoGebra® apresenta uma janela denominada **Planilha de Cálculo**, que permite o cálculo de logaritmos em qualquer base. Numa célula da planilha, basta digitar a função *log (b, x)*, onde *b* é a base do logaritmo e *x* o logaritmando. Já as calculadoras científicas, de modo geral, apresentam a função logarítmica decimal, que pode ser acessada pela tecla **LOG** ou **LOG10,** e a função logarítmica natural, que é indicada pela tecla **LN**. Assim, quando se deseja calcular um logaritmo em outra base qualquer, é necessário usar a propriedade de mudança de base que estudaremos na sequência.

Quando resolvemos equações que envolvem logaritmos, muitas vezes precisamos usar algumas propriedades que mudam as expressões e facilitam os cálculos algébricos e aritméticos.

Propriedades dos Logaritmos	
Sejam **a**, **R** e **S**, números reais positivos com **b** ≠ **1** e **c**, como um número real qualquer.	
Regra do Produto	$\log_b(RS) = \log_b R + \log_b S$
Regra do Quociente	$\log_b\left(\frac{R}{S}\right) = \log_b R - \log_b S$
Regra da Potência	$\log_b(R)^c = c \cdot \log_b R$

Tabela 8 - Propriedades do logaritmos que são aplicadas na resolução de equações. Fonte: DEMANA et al., 2013, p. 161.

Outra propriedade importante trata-se da **fórmula da mudança de base para logaritmos**. Em algumas situações, trabalhamos com uma base que não é adequada para a simplificação dos cálculos, assim é possível transformar a expressão em um quociente de logaritmos com uma base que seja mais conveniente para o momento. Como a fórmula funciona? Segundo Demana (et al., 2013), para números reais positivos *a, b* e *x*, com $b \neq 1$ e $a \neq 1$, podemos escrever $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$:

Vamos resolver os exemplos a seguir aplicando as propriedades de logaritmos e a fórmula de mudança de base.

- $\log_2 20$:

  $\log_2 20 = \log_2(2 \cdot 10) = \log_2 2 + \log_2 10 = 1 + \dfrac{\log 10}{\log 2} \cong 1 + \dfrac{1}{0{,}3} = 4{,}32$. Portanto, temos que: $\log_2 20 \cong 4{,}32$.

- $\log_2 6$:

  $\log_2 6 = \log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3 = 1 + \dfrac{\log 3}{\log 2} \cong 1 + 1{,}59 = 2{,}59$

  Assim, encontramos a resposta: $\log_2 6 \cong 2{,}59$.

- $\log_3\left(\dfrac{9}{5}\right) = \log_3 9 - \log_3 5 = \log_3 3^2 - \log_3 5 = 2 \cdot \log_3 2 - \log_3 5 = 2 - \log_3 5 = 2 - \dfrac{\log 5}{\log 3}$

  $= 2 - 1{,}47 = 0{,}53$. Logo, temos que: $\log_3\left(\dfrac{9}{5}\right) \cong 0{,}53$.

Agora, vamos utilizar as propriedades algébricas da função logarítmica para analisar outras aplicações e problemas práticos.

Volume Sonoro:

O decibel é a menor variação de volume sonoro que pode ser captado pelo nosso ouvido. Devido ao modo de funcionamento do ouvido humano, quando dois sons de intensidades I_1 e I_2 são escutados, a diferença de volume é igual a D decibéis, onde $D = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$. O volume limiar detectado pela audição humana sonora é de $I_0 = 10^{-12}$ *watts*/*cm*^{3} (HOFFMAN; BRADLEY, 2011). Sendo assim, em relação a este volume, quantos decibéis gera uma banda de *rock* que emite uma intensidade sonora de 10^{-1} W/m^2?

Aplicando os valores $I_1 = 10^{-1}$ e $I_2 = I_0 = 10^{-12}$ na fórmula do nível de intensidade sonoro, temos a equação: $D = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log(10^{-1-(-12)}) = 10 \cdot \log 10^{11} = 10 \cdot 11 \cdot \log 10 = 110$. Portanto, a banda de *rock* gera 110 decibéis.

Agora, considere que uma conversação em volume normal é de 60 decibéis em relação a I_0. Determine quantas vezes mais intenso que o som de uma conversação normal é o som produzido por uma banda de *rock*.

Vamos considerar que $D_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$ é o nível de intensidade sonora produzido pela banda de *rock* e que $D_2 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)$ é o nível de intensidade sonora produzido numa conversação normal. Subtraindo D_1 e D_2 temos a equação: $D_1 - D_2 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)$. Como $D_1 = 110$ e $D_2 = 60$, podemos reescrever a subtração como:

$$110 - 60 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow 50 = 10 \cdot \left(\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) - \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)\right) \Rightarrow 5 = \log \frac{\left(\frac{I_1}{I_0}\right)}{\left(\frac{I_2}{I_0}\right)}.$$

$$\Rightarrow 5 = \log \frac{I_1}{I_2}$$

Vamos analisar, agora, a equação: $\log \frac{I_1}{I_2} = 5$. Como resolvê-la? Observe que podemos aplicar a propriedade básica de logaritmos vista anteriormente: $a^{\log_a x} = x$. Sendo assim, $10^{\log \frac{I_1}{I_2}} = 10^5 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^5 \Rightarrow I_1 = 10^5 \cdot I_2$. Ou seja, o som produzido por uma banda de rock é 10^5 vezes maior que o som de uma conversação normal.

A escala Richter:

A magnitude R de um terremoto, medido pela escala Richter, é calculada pela fórmula $R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, onde E é a energia (em kWh) liberada pelo terremoto e $E_0 = 10^{-3}$ kWh é a energia utilizada como referência que é equivalente à energia liberada por um pequeno terremoto (HOFFMAN; BRADLEY, 2011). Levando em consideração estas informações, qual é a energia em kWh liberada por um terremoto de 5 graus e por um de 6 graus na escala Richter?

Para um terremoto de magnitude 5, temos que:
$$5 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Rightarrow 5 \cdot \frac{3}{2} = \log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) = \frac{15}{2} \Rightarrow 10^{\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)} = 10^{\frac{15}{2}} \Rightarrow \frac{E}{10^{-3}} = 10^{\frac{15}{2}} \Rightarrow E = 10^{\frac{15}{2}} \cdot 10^{-3} \Rightarrow E = 10^{\frac{9}{2}}$$
. Sendo assim, $E = 10.000\sqrt{10}$ kWh para $I = 5$.

Para um terremoto de magnitude 6, temos:
$$6 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) = \frac{18}{2} \Rightarrow 10^{\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)} = 10^9 \Rightarrow \frac{E}{10^{-3}} = 10^9 \Rightarrow E = 10^9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow E = 10^6$$
Sendo assim, E = 1.000.000 kWh para I = 6.

Podemos observar que o aumento de intensidade de um terremoto de magnitude 5 para um terremoto de magnitude 6 é de $\frac{1.000.000}{10.000\sqrt{10}} = \frac{100}{\sqrt{10}} = 10\sqrt{10}$. Ou seja, o aumento de 1 grau da intensidade do terremoto ocasiona um aumento de $10\sqrt{10}$ na energia liberada. Por isso, a utilização da escala logarítmica é conveniente no caso da medição da intensidade de terremotos.

VOCÊ QUER LER?

Para conhecer outras aplicações interessantes e motivadoras dos logaritmos, sugerimos a leitura do artigo "Logaritmo" (ÁVILA; MARTINS; FRAENKEL, [s/d]), uma compilação de textos publicados na Revista do Professor de Matemática (RPM). Você poderá conferir vários aspectos da relação entre o conceito de logaritmos e de funções exponenciais. O texto está disponível nas páginas 75 a 83 do *site*: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf (http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf%20) >.

As funções logarítmicas viabilizam, ainda, a solução de equações exponenciais encontradas durante o processo de resolução de problemas envolvendo as funções exponenciais. Por exemplo, como veremos no problema de **concentração de medicamento na corrente sanguínea** que analisaremos na sequência.

Um medicamento ingerido por um paciente entra em sua corrente sanguínea e passa pelo fígado e pelos rins, onde é metabolizado. Em seguida, a droga começa a ser eliminada a uma taxa que é característica para cada droga em particular. No caso do antibiótico Ampicilina, a taxa de eliminação é de 40% a cada hora. Ou seja, uma pessoa que tomou uma dose de 250 mg do antibiótico, possui, após uma hora de ingestão, apenas 60% (150 mg) dessa substância na sua corrente sanguínea. Após duas horas, o paciente terá 60% de 150 mg, ou seja 90 mg de substância no sangue, e assim por diante (REZENDE, [s/d]).

Qual é a função exponencial que relacione a quantidade de Ampicilina na corrente sanguínea com a quantidade de horas após o paciente ter ingerido 250 mg do medicamento? Supondo que um médico recomende o antibiótico para um paciente que está realizando um tratamento cuja quantidade de Ampicilina na corrente sanguínea não deve baixar do valor de 11,664 mg, qual é a periodicidade, em horas, que o antibiótico deve ser ingerido?

Vamos denominar de Q a quantidade (em miligramas) de Ampicilina na corrente sanguínea do paciente, e de t o tempo (em horas) a partir da ingestão do medicamento. Na tabela a seguir, podemos visualizar como acontece a redução do remédio na corrente sanguínea, iniciando no momento $t=0$, que corresponde à dosagem inicial de 250 mg, até o momento $t=4$:

Tempo em horas	Quantidade em miligramas
0	250
1	$250 \cdot 0{,}6 = 150$
2	$\mathbf{150} \cdot 0{,}6 = \mathbf{250 \cdot 0{,}6} \cdot 0{,}6 = 250 \cdot (0{,}6)^2 = 90$
3	$\mathbf{90} \cdot 0{,}6 = \mathbf{250 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6} \cdot 0{,}6 = 250 \cdot (0{,}6)^3 = 54$
4	$\mathbf{54} \cdot 0{,}6 = \mathbf{250 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6} \cdot 0{,}6 = 250 \cdot (0{,}6)^4 = 32{,}4$

Tabela 9 - Relação entre o tempo de ingestão e a quantidade (mg) de Ampicilina no sangue. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Observe que a relação entre o tempo de ingestão e a quantidade em miligramas do antibiótico no sangue pode ser dada pela função exponencial da forma $Q = f(t) = 250g(0,6)^t$, cujo domínio é o conjunto dos números reais não-negativos, uma vez que não podemos considerar horas negativas.

Agora, podemos usar a função para determinar em quantas horas a quantidade de Ampicilina na corrente sanguínea chega a 11,664 mg. Em termos matemáticos, vamos resolver a equação: $f(t) = 11,664 \Rightarrow 250g(0,6)^t = 11,664 \Rightarrow (0,6)^t = \frac{11,664}{250} \Rightarrow (0,6)^t = 0,046656$. Aplicando o logaritmo nos dois lados da igualdade, obtemos $log\,(0,6)^t = log\,0,046656 \Rightarrow t \times log\,0,6 = log\,0,046656 \Rightarrow t = \frac{log\,0,046656}{log\,0,6}$. Resolvendo a divisão na calculadora, temos o resultado $t = 6$. Podemos concluir, então, que o remédio deve ser tomado a cada seis horas para que a quantidade de antibiótico na corrente sanguínea do paciente não baixe de 11,664 mg.

Por fim, vamos analisar um caso que trata de uma importante aplicação da função exponencial.

›O

prietária de uma empresa que produziu 12.000 unidades de produto no último ano. Ela projeta, para os ito anos, um aumento anual de 20% na produção total da empresa. Ela gostaria de verificar em quantos lução chegará a 20.736 unidades. Como ela pode proceder?

e, ela pode analisar a produção total da empresa após um ano. Como 20% equivale a 0,2, o cálculo será . Para

ano, ela deve considerar o cálculo: .

o $P1$, ela obtém a equação equivalente: . Analogamente, para o terceiro ano, a

otal $P3$ será calculada a partir da produção $P2$. Assim, .

o $P2$, obtemos .

laria verificará que a produção pode ser modelada pela função exponencial

iona a quantidade P de produtos totais produzidos pela empresa em t anos, sendo . Agora, ›brir em quantos anos a produção será de 20.736 unidades, ela deve resolver a equação . Isolando o termo com o expoente

. Aplicando o logaritmo nos dois termos da igualdade e utilizando a

ı, ela encontrará a solução .

produção anual da empresa de Maria será de 20.736 unidades após três anos de aumento anual de 20% lução total.

Na sequência, vamos estudar um caso particular de função exponencial e de função logarítmica e que está relacionado com o valor da base.

3.4 Logaritmos naturais

As funções exponenciais de base e, em que e é um número irracional conhecido como número de Euler e cujo valor é 2,7182818284..., têm fundamental importância em muitos problemas teóricos e práticos das Ciências em geral. Isto acontece porque este número aparece naturalmente em situações de crescimento e decaimento exponencial que descrevem variações de grandezas relevantes para a Economia e Finanças, e também para as Ciências Físicas, Sociais e Biológicas (HOFFMANN; BRADLEY, 2011).

VOCÊ O CONHECE?

Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático suíço. Ele iniciou seus trabalhos na Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, em 1729. Mas, a partir de 1740, trabalhou na Alemanha, período no qual publicou aproximadamente 380 artigos. Em 1771, Euler ficou totalmente cego devido a uma operação de catarata malsucedida. Contudo, continuou a publicar com a mesma intensidade extraordinária. O conteúdo de suas obras abrangeu praticamente todo o saber matemático e científico de sua época, além de criar novos campos. As notações e para a base natural e $f(x)$ para funções foram introduzidas por Euler em 1727 e 1734, respectivamente (ADAMI; DORNELLES FILHO; LORANDI, 2015).

A função $f(x) = e^x$ é denominada de **função exponencial natural**. Ela é definida no conjunto de todos os números reais e, como o valor da base é maior que 1, é crescente para todo valor de x do domínio. O seu gráfico apresenta o mesmo comportamento de uma função exponencial de base maior que 1 qualquer, como podemos observar na figura abaixo:

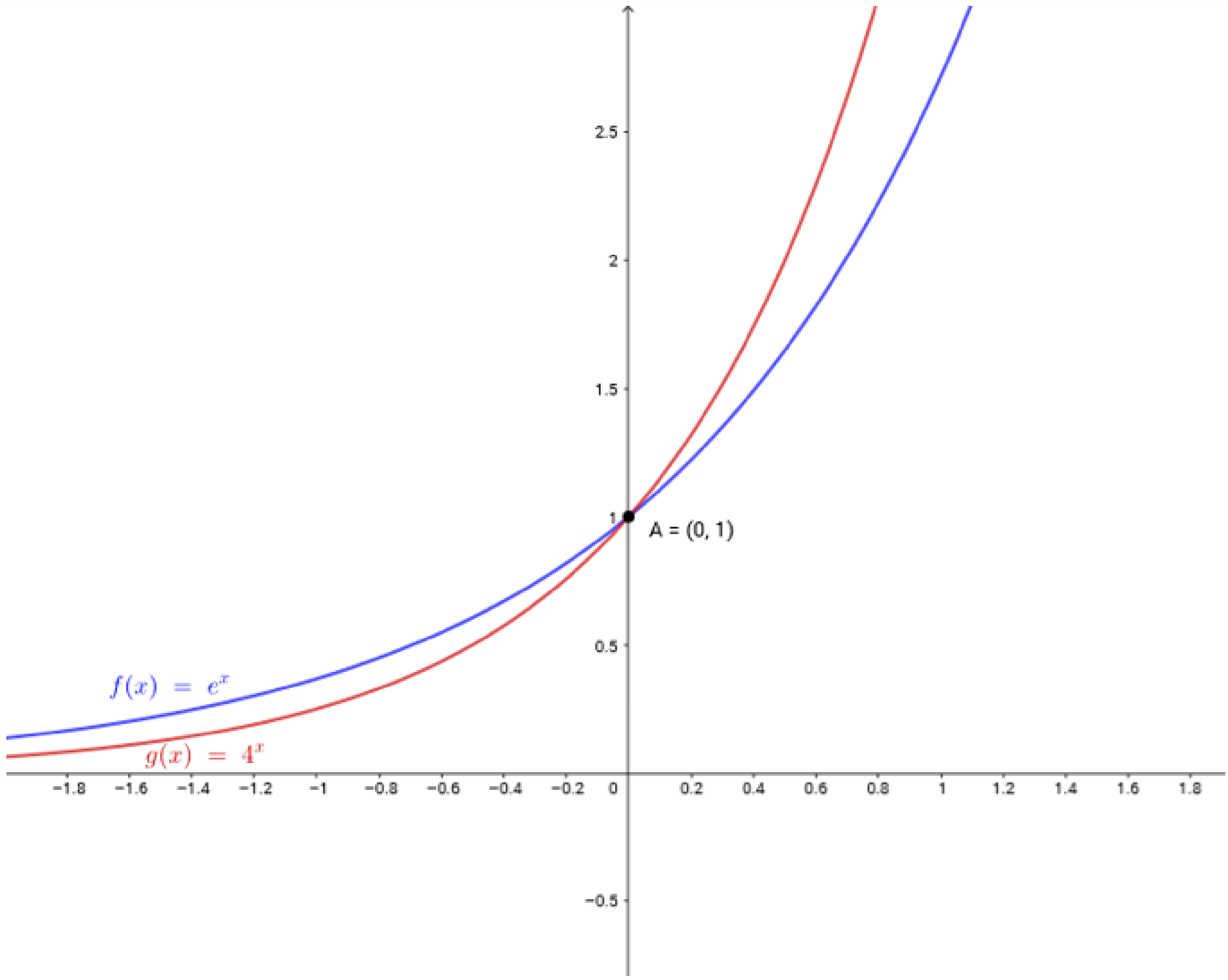

Figura 9 - Comparação entre o comportamento da função exponencial natural e da função exponencial de base 4. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Um resultado importante envolvendo as funções exponenciais é que qualquer função exponencial pode ser expressa em termos da base natural e. Segundo Demana (et al., 2013), uma função exponencial da forma $f(x) = a \cdot b^x$, onde $a \neq 0$ e $0 < b \neq 1$, pode ser reescrita como $f(x) = a \cdot e^{kx}$, sendo k um número real apropriadamente escolhido. Se os valores de a e de k são positivos, então a função apresenta um crescimento exponencial. No caso do valor de a ser positivo e de k ser negativo, então a função apresenta um decaimento exponencial.

VOCÊ QUER LER?

O artigo intitulado “O número e, por quê?” e escrito pelo matemático brasileiro Elon Lages Lima ([s/d]) objetiva explicar, de modo simples e conciso, o motivo da escolha do número de Euler como base dos logaritmos. Além disso, explicita a importância desse número para o Cálculo (Diferencial e Integral), área da Matemática fundamental para as Ciências. O texto está disponível nas páginas 28 a 30, do *site*: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf (http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf)>. Vale a pena conferir!

Observe o comportamento da curva de $f(x)=e^{kx}$, quando a constante k é positiva ou negativa.

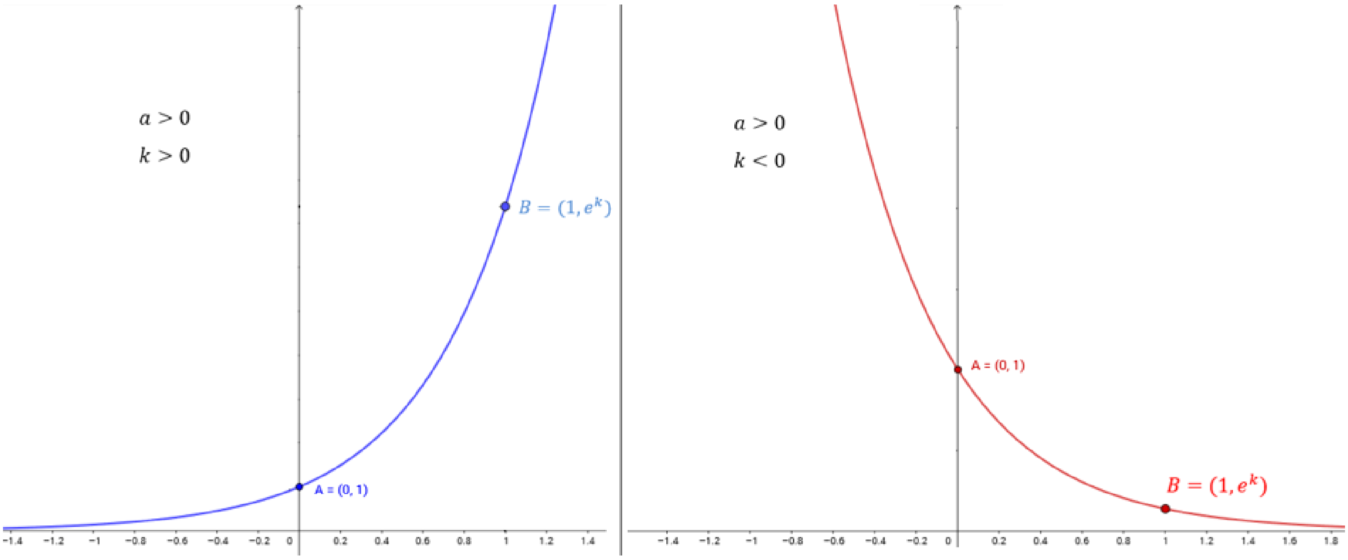

Figura 10 - Gráficos de *f*(*x*) = *ekx* para *k* < 0 (à esquerda) e para *k* < 0 (à direita). Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Da mesma forma que definimos as exponenciais de base natural, podemos caracterizar os logaritmos naturais. Dizemos que o conjunto dos logaritmos base e de todos os números reais positivos, constitui o sistema de logaritmos naturais (também conhecido como neperiano). A notação usual para o logaritmo natural $log_e x$ é lnx. Assim, a **função logarítmica natural** é $f(x)=log_e x=lnx$. Pela definição, temos que: $y = lnx \Leftrightarrow e^y = x$.

O gráfico da função $y=f(x)=lnx$ é simétrico ao gráfico de $y=f(x)=e^x$ em relação à reta bissetriz do primeiro e do terceiro quadrante do plano cartesiano. Portanto, a função logarítmica natural está definida para os valores de x reais e positivo. Veja o comportamento da curva da função na figura seguinte:

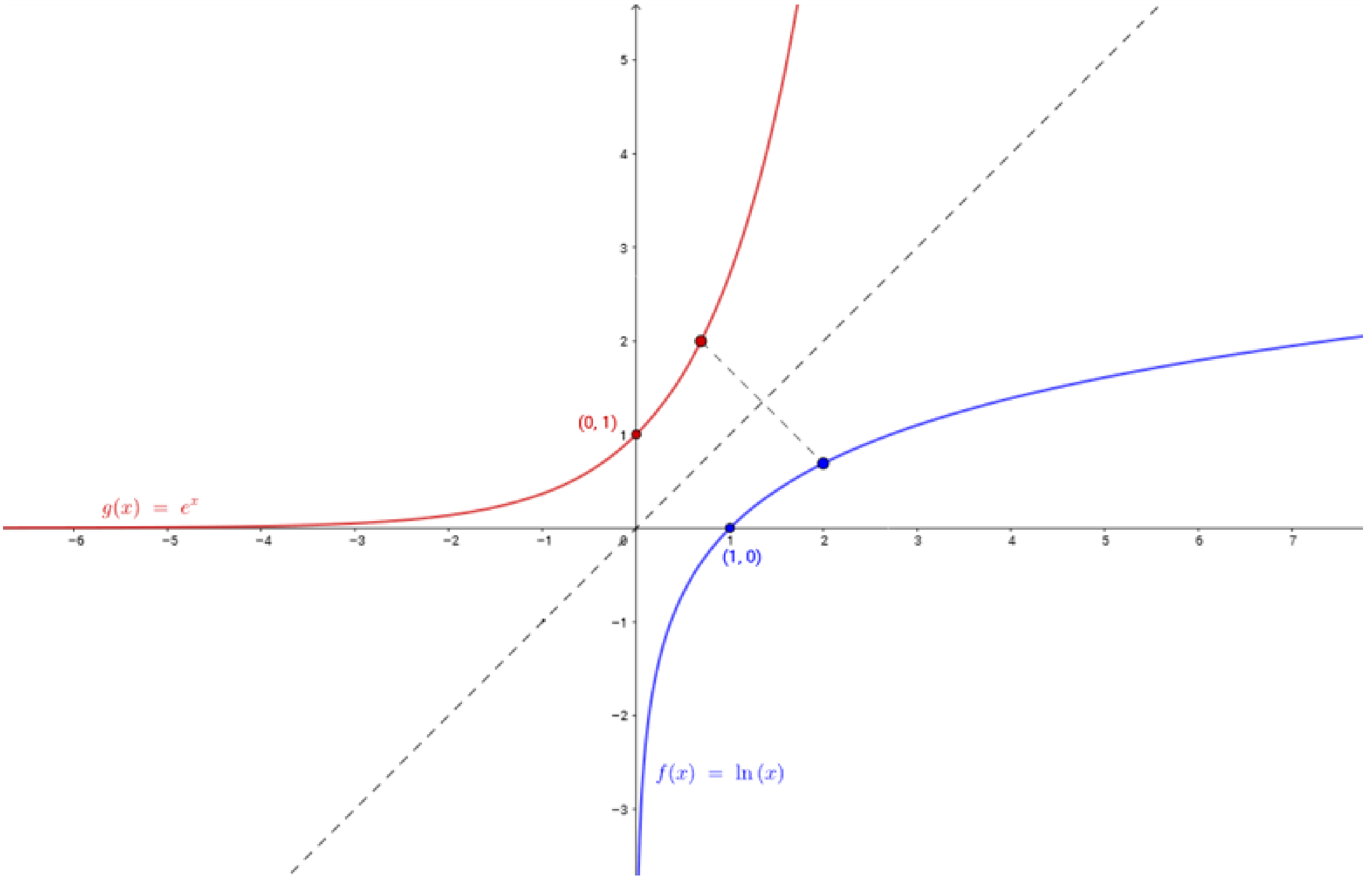

Figura 11 - A curva da função logarítmica natural é simétrica à curva da função exponencial natural. Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Todas as propriedades e resultados obtidos para os logaritmos de base arbitrária b $(b > 0, b \neq 1)$, podem ser particularizados para o caso da base natural. Levando em consideração tais propriedades e a definição de logaritmo natural, podemos resolver os seguintes exemplos:

- lne^4:

$lne^4 = log_e e^4 = 4x.log_e e = 4.1 = 4$;

- $ln\sqrt[3]{e}$:

$ln\sqrt[3]{e} = log_e \sqrt[3]{e} = log_e e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} log_e e = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$;

- e^{ln7}:

$e^{ln7} = e^{log_e 7} = 7$;

Uma aplicação das funções exponenciais, que utiliza as propriedades dos logaritmos naturais, trata-se da **meia vida de substâncias radioativas.** Pesquisadores observaram, experimentalmente, que a maior parte das substâncias radioativas decai exponencialmente. Assim, se uma amostra possui uma massa inicial a, após t anos a massa restante pode ser calculada pela função $Q(t) = a \cdot e^{-kt}$. A constante positiva k é uma medida da taxa de decaimento, a qual, em geral, é indicada em termos do tempo t necessário para que a amostra decaia pela metade. Por isso, costuma-se denominar este tempo de **meia-vida** da substância radioativa (HOFFMANN; BRADLEY, 2011).

Considerando estas informações, podemos calcular, de forma genérica, a meia-vida t_0 de uma substância radioativa em termos de k. Assim, basta considerar então$Q(t_0) = \frac{a}{2}$. Logo, $Q(t_0) = a \cdot e^{-kt_0} \Rightarrow \frac{a}{2} = a \cdot e^{-kt_0} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt_0}$.

Agora, como podemos resolver a equação exponencial $e^{-kt_0} = \frac{1}{2}$? Lembre-se que, quando não é possível transformar ambos os lados em potencias de mesma base, podemos aplicar a técnica de aplicar o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade. Portanto: $e^{-kt_0} = \frac{1}{2} \Longrightarrow lne^{-kt_0} = ln\frac{1}{2} \Longrightarrow -kt_0 = ln(2)^{-1} \Longrightarrow -kt_0 = -ln2 \Longrightarrow t_0 = \frac{ln2}{k}$. Isto significa que a meia vida t_0 é $\frac{ln2}{k}$, sendo k a taxa de decaimento.

Agora, considere que uma amostra contém 1 grama de rádio e que a meia vida do Rádio (Ra226) é 1620 anos. Quantas gramas de Rádio restarão na amostra após 500 anos?

Primeiro, vamos sistematizar as informações fornecidas no problema. Sabemos que a = 1, $t_0 = 1620$ e ainda não temos o valor da constante k. Assim, para descobrir seu valor, podemos usar a relação da meia vida $t_0 = \frac{ln2}{k}$. , da forma: $1620 = \frac{ln2}{k} \Longrightarrow k \cong 0{,}0004279$

Já podemos usar a função $Q(t) = a \cdot e^{-kt}$ substituindo pelos valores encontrados. Logo, a função da massa da amostra do Rádio é dada pela lei:$Q(t) = 1 \cdot e^{-0{,}0004279t}$. Para determinar a quantidade de Rádio restante na amostra após 500 anos, fazemos t = 500 na função e obtemos:$Q(500) = 1 \cdot e^{-0{,}0004279 \cdot 500} \Longrightarrow Q(500) = 0{,}807$ gramas. Após 500 anos, existirão $0{,}807$ gramas de Rádio na amostra.

Neste capítulo, discutimos várias aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, como o cálculo de juros compostos, o estudo do crescimento e decaimento exponenciais e o cálculo da meia vida de elementos radioativos.

Assim, foi possível perceber a importância do conhecimento das propriedades das potências e dos logaritmos, como ferramentas para a resolução de problemas aplicados.

Síntese

Neste terceiro capítulo, pudemos conhecer novas ferramentas que auxiliam na compreensão do comportamento das funções polinomiais do 1º e do 2º grau. Além disso, aprendemos a reconhecer as funções exponenciais e as funções logarítmicas por meio de suas leis de formação e da representação gráfica. A construção do gráfico da função logarítmica foi realizada, utilizando a definição de logaritmo como inversa da exponencial.

Neste capítulo, você teve a oportunidade de:

- estudar as funções polinomiais do 1º e do 2º grau, utilizando programas computacionais;
- identificar as principais características da função exponencial e da função logarítmica;
- resolver equações exponenciais;
- aprender as principais propriedades básicas dos logaritmos;
- construir os gráficos das funções exponenciais e das funções logarítmicas;
- resolver problemas aplicados envolvendo os conceitos de função exponencial e logarítmica;
- estudar detalhadamente a função exponencial de base e.

PDF Clique para baixar o conteúdo deste tema.

Bibliografia

ADAMI, A. M.; DORNELLES FILHO, A. A.; LORANDI, M. M. **Pré-cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2015.

ÁVILA, G.; MARTINS, A. S. G; FRAENKEL, R. **Capítulo 2 - Funções**. Coleção Explorando o Ensino – Matemática, vol. 3, p. 75-83. Ministério da Educação, [s/d]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf (http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf%20) >. Acesso em: 19/06/2018.

DEMANA, F. D.; et al. **Pré-cálculo**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

GEOGEBRA. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/ (https://www.geogebra.org/)>. Acesso em: 09/06/2018.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LIMA, E. L. **Capítulo 1 - O número e, por quê?** Coleção Explorando o Ensino – Matemática, vol. 3, p. 28-30. Ministério da Educação, [s/d]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf (http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf)>. Acesso em: 03/07/2018.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. **Cálculo:** funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2012.

REZENDE, W. M. **Informações suplementares:** Concentração de substâncias no sangue. Portal Universidade Federal Fluminense, [s/d]. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/exponencial/exponencial-html/info-br.html (http://www.uff.br/cdme/exponencial/exponencial-html/info-br.html)>. Acesso em: 03/07/2018.

ROMAN, P. **Pandemia**. Canal M3 Matemática Multimídia, YouTube, publicado em 19 de mar de 2012. Ministério da Ciência e Tecnologia. Ministério da Educação. Unicamp. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=19XXQTCXP-I (https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=19XXQTCXP-I) >. Acesso em: 03/07/2018.