Ejercicios

Matrices

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Clasifica las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2

Realiza las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- G^t
- D^t
- $A + H$
- $A^2 + H^2$
- $(A + H)^2$
- $B \cdot G$
- $B^t + G$
- $F + D$
- $E + C^t$
- $E \cdot C + H \cdot A$
- $A \cdot H^t$
- $E \cdot D + C$
- $G \cdot A + B^t \cdot H$
- $A(E \cdot C + H)$
- $C(H \cdot E + C^t \cdot F)$

Pregunta 3

Halla la forma escalonada y escalonada reducida por filas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4

Halla la forma escalonada y escalonada reducida por columnas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 5

Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Pregunta 6

¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, tiene rango 3 la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pregunta 7

Calcula la inversa de las siguientes matrices, siempre que sea posible

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 8

¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, tiene inversa la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 9

¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$, tiene inversa la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \alpha(4-2i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 10

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz nilpotente de índice m, es decir, que cumple $A^m = 0$. Demuestra que $I_n - A$ es invertible y que $I_n + A + A^2 + \cdots A^{m-1}$ es la inversa de $I_n - A$

Pregunta 11

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Demostrad que $I_3 - A$ es nilpontente de índice 3
- Utilizad el apartado anterior y el binomio de Newton para calcular A^n para todo $n \in \mathbb{Z}^+$
- Calculad la unversa de A. PISTA: puedes hacer uso del problema anterior.

Pregunta 12

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcula A^n para todo $n \in \mathbb{Z}^+$
- Sea $B = A + I_4$. Calculad las potencias de B en función de A
- Demostrad que la inversa de B es $A^2 - A + I_4$

Pregunta 13

Dada la matriz de números complejos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix}$$

demostrad por inducción que $A^n = 4^{n-1}A$

Pregunta 14

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ y consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrad que la matriz $B = A^2 + I_3$ es simétrica e idempotente ($B^2 = B$)