Tema 4 - Ejercicio 6

Curso Álgebra Lineal

Enunciado

Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{cases}$$

Solución

Vayamos a ver de qué tipo puede ser este sistema.

En primer lugar, calcularemos el rango de la matriz de coeficientes del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

y lo haremos mediante determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$$

Ahora, la pregunta es: ¿Cuándo este determinante vale 0?

Pues cuando

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ y } a = -2$$

Entonces, tenemos 3 casos:

- $a \neq 1$ y $a \neq -2$
- $a = 1$
- $a = -2$

El primer caso, $a \neq 1$ y $a \neq -2$, es el más sencillo ya que al ser el determinante de A no nulo, lo que tenemos es que tanto A como la matriz ampliada del sistema tienen rango 3. Esto nos lleva a concluir que se trata de un sistema compatible determinado por el Teorema de Rouché-Frobenius.

Ahora, ¿qué ocurre cuando $a = 1$? Pues, en primer lugar, que el rango de A es estrictamente menor a 3, con lo cuál, veamos si es 2 o 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todas las filas y todas las columnas son iguales, el rango de A es 1, ya que no hay ningún menor de orden 2 en esta matriz que sea no nulo.

Veamos qué ocurre con la ampliada:

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pues ocurre exactamente lo mismo: todas las filas y todas las columnas son iguales. Entonces, el rango es 1. En este caso, por el Th. Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un sistema compatible indeterminado.

Finalmente, si $a = -2$, tenemos lo siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si tomamos el menor de orden 2 formado por las 2 primeras filas y las dos primeras columnas, tenemos que es no nulo

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

con lo cual, el rango de la matriz de coeficientes del sistema es 2. ¿Qué ocurre ahora con el rango de la matriz ampliada?

Si orlamos el menor anterior, que ya hemos visto que no era nulo, con la última fila y la cuarta columna, lo que obtenemos es

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 - (-2 - 2 + 1) = 9 \neq 0$$

Por tanto, acabamos de ver que el rango de la ampliada es 3, lo que nos lleva a concluir que, al ser los rangos diferentes, el sistema es incompatible