Tema 1 - Demostraciones

María Santos

Propiedad Asociativa del producto. $(AB)C = A(BC)$

Demostración

Dadas $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$ con $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$ tenemos que

$$AB = D \Rightarrow d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$$(AB)C = DC = E \Rightarrow e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}$$

Por otro lado,

$$BC = F \Rightarrow f_{jl} = \sum_{k=1}^{l} b_{jk}c_{kl}$$

$$A(BC) = AF = G \Rightarrow g_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right)$$

Ahora, la pregunta es $E = G$. De momento vamos bien ya que $E, G \in \mathcal{M}_{n\times q}$. Por su parte

$$e_{il} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right) = g_{il}$$

y esta cadena de igualdades es cierta por las propiedades del cuerpo $\mathbb{K}$ vistas en el `Tema 0`