Examen 1

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Dado el determinante de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & n & n & \cdots & n \\ n & \alpha^2 & n & \cdots & n \\ n & n & \alpha^2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

(a) Calcúlalo utilizando las propiedades de determinantes, indicando en cada paso cuál estás utilizando.

(b) Halla para qué valores de α el determinante anterior vale 0.

(c) En el caso particular en que $n = 9$, ¿cuáles son los valores de α que hacen que el determinante valga 0?

Pregunta 2

(a) Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius

(b) Utiliza dicho Teorema para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según el parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (a+1)x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & a-1 \\ x & + & y & + & z & = & a \end{cases}$$

(c) Resuelve por Cramer en caso de ser compatible determinado

Pregunta 3

Dados los vectores $u = (2, 3, 0)$ y $v = (-3, 0, 1)$, encuentra el valor k para que los vectores w, z sean perpendiculares, donde $w = 2u - v$ y $z = -3u + kv$.

Pregunta 4

Sea $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que

$$\begin{cases} v_1 & = & 2u_1 & - & u_2 & & \\ v_2 & = & u_1 & & & - & u_3 \\ v_3 & = & & & u_2 & & \end{cases}$$

(a) Demuestra que $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$
(b) Obtén las coordenadas de v_1, v_2, v_3 en la base B_u
(c) Obtén las coordenadas de u_1, u_2, u_3 en la base B_v
(d) Sean $w = (2, 3, 1)_{B_u}$, calcula las coordenadas de w en la base B_v