Ejercicios

Espacios vectoriales

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Considera los vectores $\vec{u} = (3, 0, 0),\ \vec{v} = (1, 0, -3),\ \vec{w} = (0, -2, 4)$

- Estudiad si son linealmente independientes o linealmente dependientes
- Encontrad, si es posible, una combinación lineal de estos vectores tal que su resultado sea el vector $(2, -4, 1)$
- ¿Es posible obtener cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?

Pregunta 2

Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (2, 4, 0),\ \vec{w} = (3, -2, 3)$

- Encuentra tres números reales a, b, c tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- ¿Es $\vec{u}$ combinación lineal de $\vec{v}, \vec{w}$?
- ¿Es $\vec{w}$ combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}$?
- Expresa el vector $(6, 0, 9)$ como combinación lineal de los 3 vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Pregunta 3

Determina si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes. Estudia su rango:

- $\{(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)\}$
- $\{(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, 5)\}$
- $\{(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)\}$
- $\{(2, -3, 7), (0, 0, 0), (3, -1, -4)\}$
- $\{(1, 1, 1), (1, -1, 5)\}$
- $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$
- $\{(2, 2, -1), (4, 2, -2), (7, -4, 1)\}$

Pregunta 4

Demostrad que $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (z, t)$ son linealmente dependientes si, y solo si, $xt - yz = 0$

Pregunta 5

Encontrad los valores de α tales que los vectores $(-2, \alpha, \alpha), (\alpha, -2, \alpha), (\alpha, \alpha, -2)$ sean linealmente dependientews

Pregunta 6

Dado el conjunto de vectores $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tal que u_4 es combinación lineal de u_1, u_2 y u_3 es combinación lineal de u_1, u_4, discutid si los vectores de este conjunto son LI o LD y decid cuál es el rango de U

Pregunta 7

Determinad si los vectores $u = (1, 0, 2)$, $v = (0, 1, -3)$, $w = (1, 1, 0)$ y $z = (0, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ forman un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

Pregunta 8

Si $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ es un conjunto de vectores de rango 3, comenta la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones

- Todos los subconjuntos de U de 3 vectores son conjuntos libres
- El vector u_3 es linealmente independiente del resto
- Los vectores del subconjunto $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ son LI
- Algún subconjunto de U de 3 vectores es libre (sus vectores son LI) ya que el rango es el número máximo de vectores LI que podemos encontrar en el conjunto. Por tanto, es suficiente con que haya al menos un subconjunto de 3 vectores LI

Pregunta 9

Estudiad si los siguientes conjuntos de vectores cumplen los requisitos para formar una base de $\mathbb{R}^3$

- $A = \{(1, 1, 1), (3, 1, -1), (-4, 2, 8)\}$
- $B = \{(3, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

Pregunta 10

Considerad los vectores $(1, 2, -1), (2, 1, -1)$. Encontrad un vector tal que con los otros dos forme una base de $\mathbb{R}^3$

Pregunta 11

Sea $\vec{u} = (2, 1, 3)$ en la base canónica. Calculad las componentes de $\vec{u}$ en la nueva base $B = \{(1, 2, 0), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$

Pregunta 12

Expresad el vector $(3, 1, 4)$ en la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $(1, -2, -1), (1, -1, 0), (0, 0, 3)$

Pregunta 13

Indica cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios indicados. Dad una base en el caso en que sea subespacio

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - z = 0\}$
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}$
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ y + z = 0\}$
- $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$
- $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ y = x + z + t + 1\}$
- $F = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4 \ y = x + z, \ t = 2x :\}$

Pregunta 14

Dentro del espacio vectorial de las matrices cuadradas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, decid cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales

- El conjunto de las matrices diagonales
- El conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- El conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad a + b = 0, \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Pregunta 15

- Probad que el conjunto $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.
- Encontrad, con respecto a esta base, las coordenadas del vector $(5, 1, -3)$.
- Encontrad las coordenadas en la base canónica del vector que tiene por coordenadas $(3, 1, -1)$ en la base B

Pregunta 16

Expresad el vector $u = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $u_1 = (1, -3, 2), u_2 = (2, -4, -1)$ y $u_3 = (1, -5, 7)$.

¿Forman u_1, u_2, u_3 una base de $\mathbb{R}^3$?

Pregunta 17

- Probad que el conjunto $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 1, 1, 1)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^4$.
- Obtened las coordenadas del vector $(-3, 2, 1, -2)$ en esta base B.
- Dado el vector $u = (3, 0, -1, 1)_B$, obtened sus coordenadas en la base canónica

Pregunta 18

Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial E. Sabiendo que

$$\begin{cases} v_1 & = & 2u_1 & - & u_2 & & \\ v_2 & = & -u_1 & & & + & u_3 \\ v_3 & = & & & u_2 & & \end{cases}$$

Obtened las coordenadas de v_1, v_2, v_3 en la base B.

Demostrad que la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ también forma una base de E.

Sean $(2, 1, 3)$ las coordenadas de un vector u en la base B, calcula sus coordenadas en la base B'

Pregunta 19

Consideremos los vectores LI e_1, e_2, e_3

- Demostrad que u_1, u_2, u_3 también son LI donde

$$\begin{cases} u_1 &= 2e_1 + e_3 \\ u_2 &= 3e_3 \\ u_3 &= e_2 - e_3 \end{cases}$$

- Dado un vector $v = 2e_1 + e_2 - 3e_3$, expresadlo como combinación lineal de u_1, u_2, u_3

Pregunta 20

Demostrad que el conjunto de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x - 3y & 5y \\ -4y & x + 3y \end{pmatrix}$$

con $x, y \in \mathbb{Q}$ forman un subespacio vectorial del espacio de matrices de orden 2 sobre el cuerpo de los racionales.

Pregunta 21

En el conjunto $\mathbb{R}^+$ de los números reales estrictamente positivos, se consideran las operaciones

- $(x, y) \mapsto xy$ (operación interna, suma)
- $(a, x) \mapsto x^a$ (operación externa, producto por escalares)

Demostrad que $\mathbb{R}^+$ junto con estas operaciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Pregunta 22

Demostrad que el conjunto $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ es un $\mathbb{Q}-$e.v. con las operaciones habituales.

¿Es también un $\mathbb{R}$-e.v.?

Pregunta 23

En $\mathbb{R}^4$ se consideran la base canónica B_C y los conjuntos

- $B_1 = \{(0, 1, 0, 3), (-1, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 2), (-1, -1, -1, 1)\}$
- $B_2 = \{(2, -2, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (3, 0, 1, -1), (0, -2, -1, 1)\}$

(a) Demostrad que B_1 y B_2 son bases de $\mathbb{R}^4$
(b) Calculad la matriz del cambio de base de B_1 a B_2
(c) Si $v = (2, 1, 0, -1)_{B_2}$, ¿Cuáles son sus coordenadas en B_1?

Pregunta 24

Expresad los polinomios $P(x) = 5 + 9x + 5x^2$ y $Q(x) = 12 + 6x^2$ como combinación lineal de

$$P_1(x) = 2 + x + x^4 P_2(x) = 1 - x + 3x^3 P_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$$

Pregunta 25

Considerad en $\mathbb{R}^4$ los subespacios

$$F = \langle (1,2,3,4),(2,2,2,6),(0,2,4,4) \rangle$$
$$G = \langle (1,0,1,2),(2,3,0,1) \rangle$$

Determinad las dimensiones y dad una base de cada uno de los espacios vectoriales cociente $\mathbb{R}^4/F$ y $\mathbb{R}^4/G$