Ejercicios

Diagonalización

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $\lambda = -1$ es un valor propio de A y que $(3, -6, 2)$ es un vector propio asociado a λ. ¿Es el vector $(1, 2, -1)$ un vector propio asociado a $\lambda = -1$?

Pregunta 2

Justifica si son diagonalizables las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3

Prueba si son o no diagonalizables las siguientes matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y, en caso de serlo, encuentra una matriz P de vectores propios y la matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a+1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & a-1 \\ 1 & 2a & -1 \\ 2a+1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a+1 & a+b & b \\ -a & -a & -1 \\ a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4

Sea A una matriz real, cuadrada de orden p con todos los coeficientes igual a 1

- Demuestra que $A^n = p^{n-1}A$ para todo entero $n \geq 1$
- Calcula los valores propios de A
- Encuentra, si es posible, una matriz P tal que $P^{-1}A^P$ sea diagonal y calcula P^{-1}

Pregunta 5

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Prueba que A es diagonalizable
- Calcula A^n para todo $n \geq 1$
- Prueba que $p_A(A) = 0$ donde $p_A(x)$ es el polinomio característico de la matriz A

Pregunta 6

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula, utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, A^{-1}, B^4, B^5

Pregunta 7

Dado $a \in \mathbb{R}$, considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Demuestra que $A^3 - aA^2 + 2A - I_3 = 0$
- Demuestra que A es invertible y calcula A^{-1}
- Encuentra el valor de $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I_3$

Pregunta 8

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n. Demuestra que los valores propios de A y A^t coinciden.

Pregunta 9

Calcula A^n para todo $n \in \mathbb{N}$, si la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 10

Encuentra el término general de la sucesión $\frac{a_n}{b_n}$ definida por

$$a_1 = b_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n + b_n$$

Pregunta 11

Considera las sucesiones definidas recurrentemente para todo $n \geq 1$ por

$$u_n = -4u_{n-1} + 6v_{n-1} \qquad v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \qquad w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1}$$

Calcula u_n, v_n, w_n en función de u_0, v_0, w_0