Tema 2 - Ejercicio 1

Curso Álgebra Lineal

Enunciado

Comprobad que se cumple $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & 4 & -3 & | & 1 \\ 3 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

Para hallar el rango de una matriz, lo hacemos encontrando la matriz escalonada por filas equivalente y contando el número de filas no nulas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim_{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \sim_{\frac{f_2}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vemos que en la matriz escalonada por filas no hay ninguna fila nula. Con lo cual, hay 3 filas no nulas, cosa que nos indica que $\text{rg}(A) = 3$

Vamos a ver qué ocurre con la matriz ampliada del sistema:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & 4 & -3 & | & 1 \\ 3 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim_{f_1-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 2 & -7 & | & -17 \\ 3 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 2 & -7 & | & -17 \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{pmatrix} \sim_{\frac{f_2}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

De nuevo vuelve a haber 3 filas no nulas, con lo cual el rango de la matriz ampliada es $\text{rg}(A|B) = 3$, que era lo que queríamos probar