Abiturvorbereitung Mathe

Til Blechschmidt
Schüler, Otto-Hahn-Gymnasium Geesthacht, Germany

11. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Analysis

1.1 Kurvendiskussion

1.1.1 Nullstellen

Eine Nullstelle beschreibt den Ort, an dem ein Graph die X-Achse schneidet, also seine Y-Komponente null entspricht. Zur Berechnung der Nullstellen einer Funktion muss $f(x) = 0$ gelten. Löst man diese nun nach x auf erhält man die X-Komponente des Nullpunkts.

$$f(x) = 5x^2 + 4x \tag{1}$$

Setzt man nun die Funktion 1 gleich null so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 5x^2 + 4x &= 0 \\ x(5x + 4) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun kann man den folgenden Satz anwenden: Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

$$x_1 = 0 \tag{3}$$

$$5x_2 + 4 = 0 \tag{4}$$

Löst man nun Gleichung 4 nach x auf, so erhält man schlussendlich die beiden X-Koordinaten der Nullpunkte

$$\begin{aligned} 5x_2 + 4 &= 0 \\ 5x_2 &= -4 \\ x_2 &= -\frac{4}{5} \end{aligned} \tag{5}$$

Nun kann man diese X-Komponente mit der Y-Komponente, welche im Falle der Nullpunkte immer null entspricht, zu einem Punkt zusammenschließen.

$$N_1\left(0|0\right); N_2\left(0\middle|-\frac{4}{5}\right) \tag{6}$$

1.1.2 Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^b + c \\ g(x) &= 10x^2 + 3 \end{aligned} \tag{7}$$

Die erste Ableitung eines Graphen gibt die Steigung dessen an.

$$f(x)' = a * bx^{b-1} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} g(x)' &= 10 * 2x^1 \\ g(x)' &= 20x \end{aligned} \tag{8b}$$

Die zweite Ableitung bildet sich, indem man die erste Ableitung ableitet, also die Steigung der ersten Ableitung angibt.

$$g(x)'' = 20 \tag{9}$$

Folglich bildet sich die dritte Ableitung, indem man die zweite ableitet.

$$g(x)''' = 0 \tag{10}$$

1.1.3 Extremstellen

Extremstellen beschreiben Orte, an denen der Graph einer Funktion $f(x)$ seine maximale Auslenkung erreicht. Zur Berechnung der Extremstelle einer Funktion muss $f(x)' = 0$, sowie $f(x)'' \neq 0$ gelten. Anschaulich bedeutet es, dass die Steigung des Graphen null entspricht und seine Ausrichtung ist nicht parallel zur X-Achse. Folglich setzt man nun die erste Ableitung (8b) mit null gleich.

$$
\begin{aligned}
g(x)' &= 0 \\
20x &= 0 \\
x &= \frac{0}{20} \\
x &= 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Nun muss man die zweite, hinreichende Bedingung überprüfen, indem man die zweite Ableitung (9) an der zuvor berechneten Stelle berechnet.

$$
\begin{aligned}
g(0)'' &\neq 0 \\
20 &\neq 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Um den dazugehörige Extrempunkt zu berechnen kann man nun die zuvor in Gleichung 11 berechnete X-Komponente in die Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= y \\
10 * 0^2 + 3 &= y \\
3 &= y
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$E_1\,(0|3) \tag{14}$$

1.1.4 Wendestellen

1.1.5 Symmetrie

Y-Achse

Punktsymmetrie

1.2 Ganzrationale Funktionen

1.3 Integralrechnung

1.3.1 Fläche zwischen Graph und X-Achse

1.3.2 Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

1.4 Extremwertaufgaben

2 Stochastik

2.1 Baumdiagramm

2.2 Vierfeldertafel

2.3 Verteilungen

2.3.1 Binomialverteilung

2.3.2 hypergeometrische Verteilung

2.4 Erwartungswert

Der Erwartungswert gibt den Wert an, welcher zu erwarten ist, wenn man das gegebene Experiment n-Mal durchführt wird. Er wird mit $E\,(X)$ bzw. μ beschrieben und ist wie folgt definiert.

$$E(X) = \mu = a_1 * P(X = a_1) + a_2 * P(X = a_2) + \ldots + a_m * P(X = a_m) \tag{15}$$

2.5 Varianz

Die Varianz gibt die zu erwartende quadratische Abweichung vom Erwartungswert μ an und wird mit $V(X)$ beziehungsweise σ beschrieben. Man kann sie mittels folgender Gleichung berechnen.

$$V(X) = \sigma^2 = (a_1 - \mu)^2 * P(X = a_1) + (a_2 - \mu)^2 * P(X = a_2) + \ldots + (a_m - \mu)^2 * P(X = a_m) \tag{16}$$

2.6 Standardabweichung

Die Standartabweichung gibt die Abweichung der Werte vom Erwartungswert an. Sie ist die Quadratwurzel der Varianz.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \tag{17}$$

2.7 Sigma-Regel

Mittels der Sigma-Regeln können die Wahrscheinlichkeiten der Umgebung des Erwartungswertes näherungsweise bestimmt werden. Diese treffen jedoch nur zu, sofern die Laplace-Bedingung erfüllt ist ($\sigma > 3$).

$$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0.683 \tag{18a}$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.955 \tag{18b}$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997 \tag{18c}$$

$$P(\mu - 1.64\sigma \leq X \leq \mu + 1.64\sigma) \approx 0.90 \tag{19a}$$
$$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) \approx 0.95 \tag{19b}$$
$$P(\mu - 2.58\sigma \leq X \leq \mu + 2.58\sigma) \approx 0.99w \tag{19c}$$