Abiturvorbereitung Mathe

Til Blechschmidt
Schüler, Otto-Hahn-Gymnasium Geesthacht, Germany

3. April 2017

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Analysis

1.1 Kurvendiskussion

1.1.1 Nullstellen

Eine Nullstelle beschreibt den Ort, an dem ein Graph die X-Achse schneidet, also seine Y-Komponente null entspricht. Zur Berechnung der Nullstellen einer Funktion muss $f(x) = 0$ gelten. Löst man diese nun nach x auf erhält man die X-Komponente des Nullpunkts.

$$f(x) = 5x^2 + 4x \tag{1}$$

Setzt man nun die Funktion 1 gleich null so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 5x^2 + 4x &= 0 \\ x(5x+4) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun kann man den folgenden Satz anwenden: Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

$$x_1 = 0 \tag{3}$$

$$5x_2 + 4 = 0 \tag{4}$$

Löst man nun Gleichung 4 nach x auf, so erhält man schlussendlich die beiden X-Koordinaten der Nullpunkte

$$\begin{aligned} 5x_2 + 4 &= 0 \\ 5x_2 &= -4 \\ x_2 &= -\frac{4}{5} \end{aligned} \tag{5}$$

Nun kann man diese X-Komponente mit der Y-Komponente, welche im Falle der Nullpunkte immer null entspricht, zu einem Punkt zusammenschließen.

$$N_1\,(0|0)\,; N_2\left(0\middle|-\frac{4}{5}\right) \tag{6}$$

1.1.2 Ableitungen

Summenregel

Beinhaltet die Funktion, welche man ableitet eine Summe, so leitet man Summantenweise, also jeden Summanten einzeln ab.

Produktregel

Beinhaltet die Funktion, welche man ableitet ein Produkt, so wird wie folgt abgeleitet.

$$f(x) = u(x) * v(x) \tag{7a}$$

$$f'(x) = u'(x) * v(x) + v'(x) * u(x) \tag{7b}$$

Quotientenregel

Beinhaltet die Funktion, welche man ableitet einen Quotient, so wird wie folgt abgeleitet.

$$f(x) = u(x) * v(x) \tag{8a}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)}{v^2(x)} \tag{8b}$$

Kettenregel

Wenn die abzuleitende Funktion aus mehreren ableitbaren Teilen besteht, so leitet man zunächst die innere Funktion ab und multipliziert sie anschließend mit der äußeren.

$$f(x) = (3x - 2)^8 \tag{9a}$$
$$u(x) = 3x - 2 \tag{9b}$$
$$a(x) = u(x)^8 \tag{9c}$$

$$u'(x) = 3 \tag{10a}$$
$$a'(x) = 8u(x)^7 \tag{10b}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8u(x)^7 * 3 \\ f'(x) &= 8(3x-2)^7 * 3 \\ f'(x) &= 24(3x-2)^7 \end{aligned} \tag{11}$$

Beispiel

Die folgenden Funktionen werden als Beispiel für eine Reihe von Ableitungen dienen:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^b + c \\ g(x) &= 10x^2 + 3 \end{aligned} \tag{12}$$

Die erste Ableitung eines Graphen gibt dessen Steigung an.

$$f(x)' = a * bx^{b-1} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned} g(x)' &= 10 * 2x^1 \\ g(x)' &= 20x \end{aligned} \tag{13b}$$

Die zweite Ableitung bildet sich, indem man die erste Ableitung ableitet, also die Steigung der ersten Ableitung angibt.

$$g(x)'' = 20 \tag{14}$$

Folglich bildet sich die dritte Ableitung, indem man die zweite ableitet.

$$g(x)''' = 0 \tag{15}$$

1.1.3 Extremstellen

Extremstellen beschreiben Orte, an denen der Graph einer Funktion $f(x)$ seine maximale Auslenkung erreicht. Zur Berechnung der Extremstelle einer Funktion muss $f(x)' = 0$, sowie $f(x)'' \neq 0$ gelten. Anschaulich bedeutet es, dass die Steigung des Graphen null entspricht und seine Ausrichtung ist nicht parallel zur X-Achse. Folglich setzt man nun die erste Ableitung (13b) mit null gleich.

$$\begin{aligned} g(x)' &= 0 \\ 20x &= 0 \\ x &= \frac{0}{20} \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Nun muss man die zweite, hinreichende Bedingung überprüfen, indem man die zweite Ableitung (14) an der zuvor berechneten Stelle berechnet.

$$\begin{aligned} g(0)'' &\neq 0 \\ 20 &\neq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Um den dazugehörige Extrempunkt zu berechnen kann man nun die zuvor in Gleichung 16 berechnete X-Komponente in die Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(0) &= y \\ 10 * 0^2 + 3 &= y \\ 3 &= y \end{aligned} \tag{18}$$

$$E_1\,(0|3) \tag{19}$$

1.1.4 Wendestellen

1.1.5 Symmetrie

Y-Achse Ein Graph ist zur Y-Achse symmetrisch, sofern seine Funktion die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllt. Beispielhaft für die Gleichung 12:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ 10x^2 + 3 &= 10(-x)^2 + 3 \\ 10x^2 &= 10(-x)^2 \\ x^2 &= (-x)^2 \\ x^2 &= x^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Da dies eine wahre Aussage ist, ist der Graph der Funktion 12 achsensymmetrisch zur Y-Achse

Punktsymmetrie Ein Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, sofern seine Funktion die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Beispielhaft für die Gleichung 12:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ 10(-x)^2 + 3 &= -10x^2 - 3 \\ 10x^2 + 3 &= -10x^2 - 3 \\ x^2 + 3 &= -x^2 - 3 \\ x^2 + 6 &\neq -x^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Da die Bedingung nicht erfüllt ist, ist der Graph nicht symmetrisch zum Ursprung.

1.2 Ganz-rationale Funktionen

1.3 Integralrechnung

Das Integral definiert die Summe aller Flächen einer Funktion zwischen einem Graphen und der X-Achse. Dabei ist zu beachten, dass der Wert, der Flächen unterhalb der X-Achse negativ ist und das Integral somit nicht den Flächeninhalt zwischen dem Graph und der X-Achse angibt. Um diese zu berechnen ist es erforderlich mehrere Integrale zu berechnen, welche an den Nullstellen getrennt sind, und diese aufzusummieren.
Das Integral mit den Grenzen $a; b$, wobei $a < b$ gilt, wird generell wie folgt ausgedrückt:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{22}$$

1.3.1 Fläche zwischen Graph und X-Achse

Das Integral kann gelöst werden, indem man die gegebene Funktion integriert, also ihre Stammfunktion bildet. Dies ist der zur Ableitung entgegengesetzte Vorgang. Die Stammfunktion des Integrals von $f(x) = x^2$ lautet wie folgt.

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b \\ &= \frac{1}{3} * a^3 - (\frac{1}{3} * b^3) \end{aligned} \tag{23}$$

Nun kann man für die untere Grenze a und die obere Grenze b Werte einsetzen und erhält den Wert des Integrals zwischen den Grenzen. Möchte man den Flächeninhalt zwischen dem Graph und der X-Achse erhalten, muss man die Nullstellen berechnen und für jeden Bereich zwischen einer Grenze und einer Nullstelle bzw. zwischen zwei Nullstellen ein unabhängiges Integral berechnen. Diese Integrale summiert man auf und erhält den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der X-Achse.

1.3.2 Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

1.4 Extremwertaufgaben

2 Stochastik

2.1 Baumdiagramm

2.2 Vierfeldertafel

Die Vierfeldertafel ist eine Methode um den Zusammenhang mehrerer Wahrscheinlichkeiten darzustellen. Dabei werden die angegebenen Wahrscheinlichkeiten vertikal beziehungsweise horizontal summiert und dann anschließend zu 100% addiert.

	B	$\overline{B}$	
A	42%	25%	67%
$\overline{A}$	8%	25%	33%
	50%	50%	100

2.3 Verteilungen

2.3.1 Binomialkoeffizient

Ein Binomialkoeffizient ist wie folgt definiert.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{24}$$

2.3.2 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung gibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von Versuchen an, bei denen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse nicht verändert. Dabei können die Versuche nur zwei mögliche Ergebnisse haben. Solche Versuchsreihen werden als Bernoulli-Kette beschrieben.
Um die Binomialverteilung $B(X = k)$ zu berechnen, benötigt man die Erfolgswahrscheinlichkeit p sowie die Anzahl der Versuche n und die Anzahl der zu erwartenden Erfolge k.

$$B(n;p;k) = B(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{25}$$

2.3.3 Hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung gibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von Versuchen an, bei denen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse im Laufe der Versuchsreihe ändern. Zur Berechnung benötigt man:

- N Anzahl der Elemente (z.B. Kugeln)
- K Anzahl der positiven Elemente (z.B. weißen Kugeln)
- n Anzahl der Züge
- k Anzahl der gezogenen Erfolge

Mit diesen Variablen ist die hypergeometrische Verteilung wie folgt definiert.

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{26}$$

2.4 Erwartungswert

Der Erwartungswert gibt den Wert an, welcher zu erwarten ist, wenn man das gegebene Experiment n-Mal durchführt wird. Er wird mit $E(X)$ bzw. μ beschrieben und ist wie folgt definiert.

$$E(X) = \mu = a_1 * P(X = a_1) + a_2 * P(X = a_2) + \ldots + a_m * P(X = a_m) \tag{27}$$

Bei der Binomialverteilung kann man den Erwartungswert wie folgt ausdrücken.

$$E(X) = n * p \tag{28}$$

2.5 Varianz

Die Varianz gibt die zu erwartende quadratische Abweichung vom Erwartungswert μ an und wird mit $V(X)$ beziehungsweise σ beschrieben. Man kann sie mittels folgender Gleichung berechnen.

$$V(X) = \sigma^2 = (a_1 - \mu)^2 * P(X = a_1) + (a_2 - \mu)^2 * P(X = a_2) + \ldots + (a_m - \mu)^2 * P(X = a_m) \tag{29}$$

Bei der Binomialverteilung kann man die Varianz wie folgt ausdrücken.

$$\begin{aligned} V(X) &= n * p * q \\ V(X) &= n * p * (1 - p) \end{aligned} \tag{30}$$

2.6 Standardabweichung

Die Standardabweichung gibt die Abweichung der Werte vom Erwartungswert an. Sie ist die Quadratwurzel der Varianz.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \tag{31}$$

2.7 Sigma-Regel

Mittels der Sigma-Regeln können die Wahrscheinlichkeiten der Umgebung des Erwartungswertes näherungsweise bestimmt werden. Diese treffen jedoch nur zu, sofern die Laplace-Bedingung erfüllt ist ($\sigma > 3$).

$$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0.683 \tag{32a}$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.955 \tag{32b}$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997 \tag{32c}$$

$$P(\mu - 1.64\sigma \leq X \leq \mu + 1.64\sigma) \approx 0.90 \tag{33a}$$
$$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) \approx 0.95 \tag{33b}$$
$$P(\mu - 2.58\sigma \leq X \leq \mu + 2.58\sigma) \approx 0.99 \tag{33c}$$