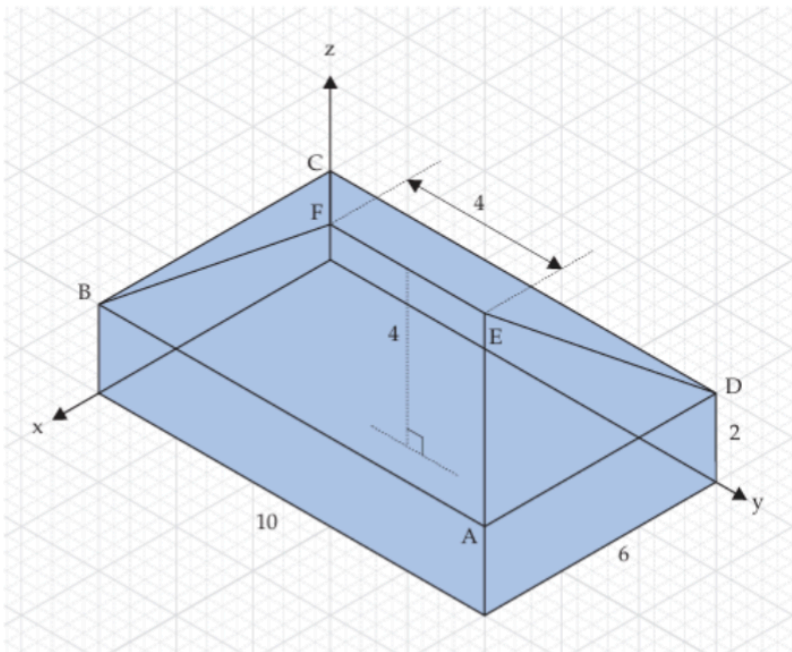
Matematik hjemmeopgave 3.11

Uge 2

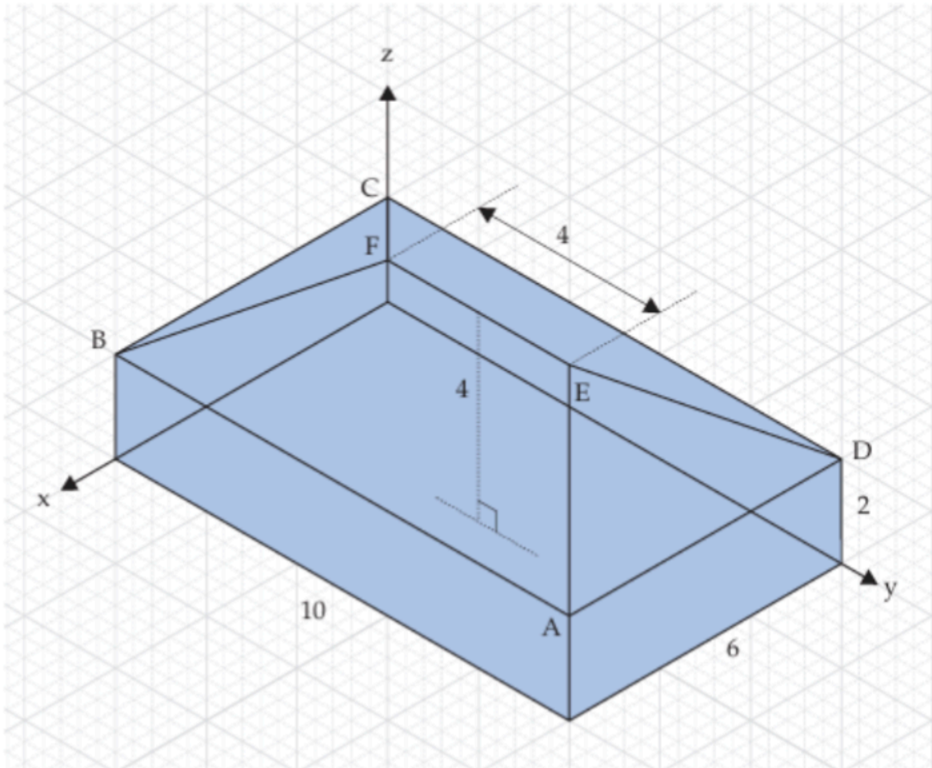


20. Januar 2025

Indholdsfortegnelse

Opgave 1

Du har givet et hus med afvalmet tag, som er indlagt i et rumligt koordinatsystem som vist på figur 15.46. Alle mål er i meter.



a) Bestem koordinaterne til punkterne A, B, C, D, E og F

Følgende koordinater kan aflæses på figuren: A, B, C og D. De har koordinaterne:

$$A(6, 10, 2)$$

$$B(6, 0, 2)$$

$$\text{C}(0,\ 0,\ 2)$$

$$\text{D}(0,\ 10,\ 2)$$

Koordinaterne til punkt E kan findes således:

$$E_x = \frac{6}{2} = 3$$

$$E_y = 10 - \frac{10-4}{2} = 7$$

$$E_z = 4$$

E har altså koordinaterne E(3, 7, 4). Det er kun F's y-koordinat, som er anderledes, og det kan udregnes således:

$$F_y = \frac{10-4}{2} = 3$$

F har altså koordinaterne F(3, 3, 4).

Dette er x, y og z koordinaterne for punkterne A, B, C, D, E og F.

b) Bestem afstanden mellem punkt A og E

Afstanden findes med afstandformlen:

$$|AE| = \sqrt{(E_x - A_x)^2 + \left(E_y - A_y\right)^2 + (E_z - A_z)^2}$$

$$|AE| = \sqrt{(3-6)^2 + (7-10)^2 + (4-2)^2}$$

$$|AE| = \sqrt{22}$$

$$|AE| = 4,69$$

Alle mål er i meter, så afstanden fra A til E er altså $4,69$m.

c) Bestem en ligning for det plan, der indeholder punkterne A, B, E og F

Planens ligning kan findes ud fra et punkt i planen og en normalvektor. Normalvektoren kan findes ved at krydse de to vektorer som udspænder planen. Vi kan tage udgangspunkt i punkt E og vektorerne $\overrightarrow{EA}$ og $\overrightarrow{EF}$. Vektorerne kan findes således:

$$\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} A_x - E_x \\ A_y - E_y \\ A_z - E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 10-7 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} F_x - E_x \\ F_y - E_y \\ F_z - E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-7 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalvektoren findes ved krydsproduktet:

$$\overrightarrow{EA} \times \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Planens ligning kan skrives:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Hvor (x_0, y_0, z_0) er et punkt i planen og (a, b, c) er normalvektoren. Vi kan indsætte punktet E og normalvektoren i ligningen:

$$-8(x - 3) + 0(y - 7) - 12(z - 4) = 0$$

$$-8x + 24 - 12z + 48 = 0$$

$$-8x - 12z = -72$$

$$2x + 3z = 18$$

Dette er ligningen for planen *ABEF*.

d) Bestem en ligning det plan, der indeholder punkterne C, D, E og F

Planens ligning kan også findes ved at se på punkterne, som planen går igennem:

$$C(0, 0, 2)$$

$$D(0, 10, 2)$$

$$E(3, 7, 4)$$

$$F(3, 3, 4)$$

Ved $C \wedge D$ er $x = 0 \wedge z = 2$
Ved $E \wedge F$ er $x = 3$ og $z = 4$

Når x stiger med 3 stiger z med 2. Hældningen er derfor $a = \frac{3}{2}$. b kan findes ved at indsætte et af punkterne, fx D:

$$z = \frac{2}{3}x + b$$

$$2 = \frac{2}{3} \cdot 0 + b$$

$$b = 2$$

Derfor er planens ligning for $CDEF$:

$$z = \frac{2}{3}x + 2$$

$$3z = 2x + 6$$

$$3z - 2x = 6$$

Dette er ligningen for planen *CDEF*.

e) Bestem vinklen mellem plan $ABEF$ og plan $CDEF$

Vinklen mellem planerne kan findes med følgende formel:

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}$$

Hvor $\overrightarrow{n_\alpha}$ og $\overrightarrow{n_\beta}$ er normalvektorerne til planerne. Normalvektorerne er koefficienterne x, y og z i planernes ligninger:

$$ABEF = 2x + 3z = 18$$
$$CDEF = 3z - 2x = 6$$

Normalvektoren for $ABEF$ er dermed:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Og for $CDEF$:

$$\overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem planerne er altså:

$$\cos(v) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos(v) = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{13}}\right)$$

$$v = 67,38°$$

Vinklen mellem planerne er $67,38°$.

Opgave 2

Du har givet en by med 80.000 indbyggere. Her er en sygdom brudt ud, og du kan regne med, at det er en epidemi, som følger en logistisk vækstfunktion. Den første måling giver 200 tilfælde. En uge senere er der 320 tilfælde. Du kan sætte $y =$ antal smittede personer til uge nr. x

a) Bestem ligningen til løsningskurven

En logistisk vækstfunktion kan beskrives med forskriften:

$$y = \frac{M}{1 + ke^{-bx}}$$

- y er antallet af smittede personer
- M eller $\frac{b}{a}$ er den maksimale værdi; i dette tilfælde 80.000
- k er en konstant
- b er vækstraten
- x er antallet af passerede uger

Når der er gået 0 uger er der 200 smittede ud af 80.000 beboere. Disse værdier indsættes i ligningen:

$$\begin{aligned} 200 &= \frac{80.000}{1 + ke^{b \cdot 0}} \\ 200 &= \frac{80.000}{1 + k} \\ 1 + k &= \frac{80.000}{200} \\ 1 + k &= 400 \\ k &= 399 \end{aligned}$$

Værdierne efter 1 uge indsættes nu og b isoleres i maple:

$$320 = \frac{80.000}{1 + 399e^{-b \cdot 1}}$$

$$b = -0,471$$

Ligningen til løsningskurven er altså:

$$\boxed{y = \frac{80.000}{1 + 399e^{-0,471x}}}$$

Her kan antal af smittede eller antal af uger findes afhængigt af hvad der indsættes på x's eller y's plads.

b) Bestem antal smittede i uge nr. 3, 4 og 5

For at bestemme antal smittede i en vilkårlige uge indsættes ugenummeret på x's plads. Antal smittede i uge 3 findes dermed:

$$y_3 = \frac{80.000}{1 + 399e^{-0{,}471 \cdot 3}}$$

$$y_3 = 816{,}55$$

Samme gøres for uge 4 og 5:

$$y_4 = \frac{80.000}{1 + 399e^{-0{,}471 \cdot 4}}$$

$$y_4 = 1300{,}45$$

$$y_5 = \frac{80.000}{1 + 399e^{-0{,}471 \cdot 5}}$$

$$y_5 = 2063{,}64$$

Det kan ses, at antallet af smittede stiger eksponentielt fra uge 3 til 5, da det stiger med ca. 484 fra uge 3 til 4 og ca. 763 fra uge 4 til 5.

c) I hvilket ugenummer er halvdelen af befolkningen i byen smittet?

Halvdelen af befolkningen er smittet, når $y = 40.000$. Dette indsættes i ligningen og x isoleres:

$$40.000 = \frac{80.000}{1 + 399e^{-0{,}471x}}$$

$$x = 12{,}70$$

Efter ca. 12 uger og 5 dage er halvdelen af befolkningen altså smittet.