Delprøven uden hjælpemidler (opgave 1-3)

Delprøven uden hjælpemidler

Opgave 1

a)

$$f(x) = 8x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 5 \cdot 8x^{5-1} + 3 \cdot (-7)x^{3-1} + 2 \cdot 4x^{2-1} - 3$$

$$\underline{\underline{f'(x) = 40x^4 - 21x^2 + 8x - 3}}$$

Opgave 2

a)

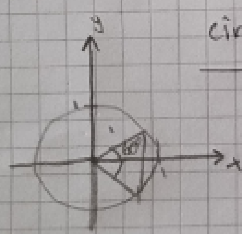
$$\int_0^2 e^x + 1\,dx = \left[e^x + x\right]_0^2 = (e^2 + 2) - (e^0 + 0) = e^2 + 2 - 1 = \underline{\underline{e^2 + 1}}$$

Opgave 3

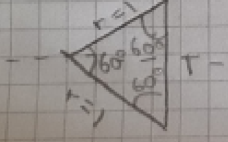
a)

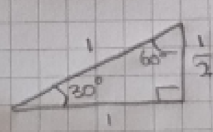
Den indskrevne cirkel i en vilkårlig trekant er dannet ud fra dets centrum (O), der ligger i skæringspunktet for dens 3 vinkelhalveringslinjer. Linjestykket OA ligger dermed på vinkelhalveringslinjen for vinkel A, der deler vinklen A i to lige store vinkler, da den ender i (og hermed skærer) centrum i den indskrevne cirkel, punktet O.

b)



Trekanten på Figur 2 må være regulær, da to sider er 1, og vinklen imellem er 60°. Hermed må alle vinkler være 60°, og alle sider er 1 lange. x-aksen som halveringslinje medfører trekanten herunder:





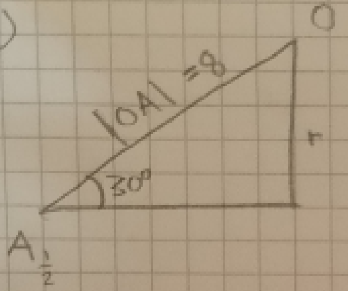
$$\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$\underline{\underline{\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}}}$$

Opgave 3 (fortsat)

c)



$$\boxed{|OA| = 8 \,, \quad A_{\frac{1}{2}} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ}$$

$$\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$$

$$\text{mod} = \sin(v) \cdot \text{hyp}$$

$$r = \sin(A_{\frac{1}{2}}) \cdot |OA|$$

$$r = \sin(30^\circ) \cdot 8$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 8$$

$$\underline{\underline{r = 4}}$$

Delprøven med hjælpemidler

Opgave 4

$with(Gym):$

Et punkt A, en plan α og en linje l er givet ved

$$A(1;1;-1)$$

$$\alpha: x-3y+2z+1=0$$

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Undersøg om A ligger i α.

Det kan undersøges om punktet A ligger i planen α, ved at indsætte koordinaterne fra A på hhv. x, y og z's plads i planens ligning.

Hvis udtrykket er sandt, dvs. hvis begge sider af lighedstegnet er lig med hinanden, ligger A i planen α. Hvis udtrykket er falskt, ligger punktet ikke i planen.

$$A := (1, 1, -1) = 1, 1, -1$$

$$\alpha := (x - 3y + 2z + 1 = 0) = x - 3y + 2z + 1 = 0$$

Ved indsættelse får vi følgende udtryk på venstre side:

$$1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 = -3$$

Udtrykket er falskt, da

$$-3 \neq 0$$

Punktet A ligger ikke i planen α.

b) Bestem den spidse vinkel mellem α og l.

Normalvektoren n til planen α aflæses fra koefficienterne i planens ligning, og ligeledes aflæses retningsvektoren r for linjen l ud fra linjen l's parameterfremstilling:

$$\alpha = x - 3\,y + 2\,z + 1 = 0$$
$$l := (x, y, z) = (2, 1, 2) + t\cdot(0, 2, 1) = (x, y, z) = (2, 1, 2) + t\,(0, 2, 1)$$

$$n := \langle 1, -3, 2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r := \langle 0, 2, 1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vinkel u mellem normalvektoren n og retningsvektoren r bestemmes:

$$solve\left(\mathrm{u} = \mathrm{arcCos}\left(\frac{\mathrm{n} \bullet \mathrm{r}}{len(n)\cdot len(r)}\right)\right) = 118.5608252 \xrightarrow{afrund} 118.56$$

Den spidse vinkel mellem α og l bestemmes herefter:

$$v = u - 90°$$
$$v = 118.5608252 - 90 = v = 28.5608252°$$
$$afrund(28.5608252) = 28.56°$$

Den spidse vinkel mellem α og l er $v = 28.56°$.

c) Bestem afstanden fra A til l.

$$A = (1, 1, -1)$$
$$l = (x, y, z) = (2, 1, 2) + t\,(0, 2, 1)$$

$with(Gym):$

Vektoren mellem punktet på linjen l, P og punktet A, PA, aflæses og bestemmes:

$$PA := \langle 1-2, 1-1, -1-2 \rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Afstanden fra punktet A til linjen l (benævnt e) bestemmes vha. retningsvektoren r og PA:

$$e := \frac{len(PA \times r)}{len(r)} = \frac{1}{5}\sqrt{41}\,\sqrt{5} \xrightarrow{afrund} 2.86$$

Afstanden fra A til l er e = 2,86.

Planen β indeholder A og l.

d) Bestem en parameterfremstilling for β.

Vi kender det første led af parameterfremstillingen for β, dvs. et punkt i planen, da vi ved et planen indeholder punktet A.
Da vi ved at planen β indeholder l, kan vi anvende dens retningsvektor i det andet led for parameterfremstillingen, som den første retningsvektor.
Og fordi vi ved at linjen l og punktet A indgår i β, må vektoren $\overrightarrow{PA}$ være endnu en retningsvektor for planen, og ergo vores sidste led.

Dette giver os følgende paramterfremstilling for planen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathrm{A} + \mathrm{s}\cdot\mathrm{r} + \mathrm{t}\cdot\mathrm{PA}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathrm{s}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{t}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingen for planen β er $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathrm{s}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{t}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.