



UNIVERSIDADE DO MINHO

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Carlos Preto (a89587) Maria João Moreira (a89540)
Pedro Veloso (a89557) Rui Fernandes (a89138)

Dezembro 2020

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Problema	2
2.1	Definição do problema	2
2.2	Formulação Problema <code>relax4</code>	2
2.3	Solução e interpretação do resultado	3
3	Validação do Modelo	7
4	Conclusão	9
5	Anexos	10
5.1	Grafo G	10
5.2	Grafo G'	10
5.3	Input do RELAX4	13
5.4	Output do RELAX4	13
5.5	Input do LPSolve	14
5.6	Output do LPSolve	14

1 Introdução

A exploração de minas a céu aberto é uma técnica usada para extrair minérios quando estes se encontram perto da superfície. Durante a fase de exploração, o terreno é escavado, definindo um contorno que é determinado pela remoção de blocos em diferentes níveis de profundidade até se atingir o material que se pretende retirar. Além disso, são impostas regras para o contorno da escavação, relacionadas, por exemplo, com questões de segurança, como a estabilidade do terreno, ou com questões práticas, como a construção de caminhos para transporte do material para a superfície. Desta forma, considera-se que para extrair um bloco é necessário extrair três blocos do nível de profundidade acima, o que está imediatamente acima e os dois que lhe são adjacentes.

Este trabalho prático tem como objetivo determinar os blocos que devem ser extraídos de forma a maximizar o lucro. Quando transferido para um grafo orientado, este problema resume-se a encontrar o fecho máximo do grafo.

Dado um grafo orientado $G = (V, A)$, em que cada vértice $j \in V$ tem associado um peso, c_j , que pode ser positivo ou negativo, e arcos $(i, j) \in A$, o problema do fecho máximo de um grafo consiste em determinar o subconjunto fechado de vértices $S \subseteq V$, tal que $\sum_{j \in S} c_j$ seja máximo. Um subconjunto S é fechado se todos os sucessores dos vértices de S pertencerem também a S .

O objetivo deste trabalho prático é resolver este problema, que pode ser formulado como um problema de maximização do fluxo numa rede, utilizando o *software* de otimização em rede **RELAX4**.

2 Problema

Observando os números de inscrição dos membros do grupo, constatamos que o maior número de inscrição era 89587. Fazendo *pattern matching* para o padrão ABCDE e seguindo as regras definidas no enunciado, determinou-se o valor de cada um dos blocos apresentado na Tabela 1.

						10	8				
					12	14	15	40			
				16				20			
			3	18	9			5			
				20	8		7				

Tabela 1: Valor de cada bloco

2.1 Definição do problema

O problema apresentado deve ser formulado como um problema de transporte numa rede geral $G = (V, A)$.

Para cada um dos blocos, define-se o lucro como a diferença entre o valor do minério presente no bloco e o custo da extração do respetivo bloco. Na Tabela 2 apresenta-se o lucro associado à extração de cada um dos blocos.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	
		-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3		
			-1	14	5	-4	-4	1			
				15	3	-5	2				

Tabela 2: Lucro associado a cada bloco

2.2 Formulação Problema relax4

Uma vez que existem 40 vértices, mais os vértices s e t , ficamos com um total de 42 vértices. Através da análise das tabelas de Excel fornecidas, sabe-se quais os vértices que têm lucro positivo e os que têm lucro negativo. Assim, tem-se 14 vértices com lucro positivo que irão sair do vértice 41(correspondente a s) e 26 vértices com lucro negativo que irão chegar ao vértice 42(correspondente a t).

Seguidamente, precisa-se de saber quais os arcos associados à extração de um determinado vértice de lucro positivo. Uma vez que para extrair um bloco tem-se que extrair os 3 vértices acima deste, pode-se interpretar a extração de um vértice como uma "escavação em forma de cone", como demonstrado no exemplo correspondente à extração do vértice 1, que representa um vértice com lucro positivo e que, portanto, interessa extrair.

						10	8				
					12	14	15	40			
				16				20			
			3	18	9			5			
				20	8		7				

Figura 1: Vértices que fazem parte "cone" extração de vértice 1 (a azul)

Porém, de maneira a extrair um vértice apenas interessa conectá-lo com os dos níveis acima, que cumprem as restrições de extração e têm lucro negativo.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	
		-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3		
			-1	14	5	-4	-4	1			
				15	3	-5	2				

Figura 2: Vértices que formarão arcos com o vértice 1 (a azul)

Assim, é possível escrever os arcos para o ficheiro input do **relax4**, referentes à extração do vértice 1 (colocou-se 1000 no valor da capacidade para simbolizar que não tem limite de capacidade):

```

1 5 0 1000
1 11 0 1000
1 12 0 1000
1 14 0 1000
1 15 0 1000
1 19 0 1000
1 20 0 1000
1 21 0 1000
1 22 0 1000
1 29 0 1000
1 30 0 1000
1 31 0 1000
1 32 0 1000
1 33 0 1000
1 34 0 1000
1 37 0 1000

```

Assim sendo, para os restantes vértices cujo lucro é positivo, procedeu-se da mesma forma, acrescentando-os ao input do **relax4**. Somando o número de arcos, fica-se com um total de 131 arcos. Falta porém acrescentar a conexão de s com t , que se representa por:

```
41 42 -1 100
```

Colocou-se -1 porque o **relax4** apenas resolve problemas de minimização e neste trabalho pretende-se maximizar o fluxo na rede, logo está-se a minimizar o simétrico do fluxo. Somando os arcos todos, fica-se com um total de 132 arcos.

No final do ficheiro input do **relax4** foi usado 42 vezes o valor 0, porque não há oferta em nenhum vértice.

2.3 Solução e interpretação do resultado

O fecho máximo de um grafo pode ser determinado resolvendo um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar $G' = (V', A')$, em que o conjunto de vértices de G' tem dois vértices adicionais, uma fonte s e um terminal t , isto é, $V' = V \cup \{s, t\}$. Seja $V^+ = \{j \in V : c_j \geq 0\}$ e $V^- = \{j \in V : c_j \leq 0\}$. O grafo auxiliar G' terá os arcos (s, j) de s para todos os vértices $j \in V^+$, com custo c_j , e arcos (j, t) de todos os vértices $j \in V^-$ para t , com custo $-c_j$. Adicionalmente, existe um arco de capacidade infinita desde cada vértice com lucro (valor positivo) para cada vértice com custo (valor negativo) para o qual o vértice com lucro pode contribuir, ou seja, incluído no “cone de desbaste”.

Importa salientar que o problema de fluxo máximo é equivalente ao problema do corte mínimo, existindo uma relação do tipo *min-max*, isto é, o fluxo máximo num grafo tem um valor igual ao seu corte mínimo. Desta forma, o fecho máximo do grafo G é determinado pelo corte mínimo

(s, t) do grafo G' , o problema dual do problema de fluxo máximo. Assim, o problema proposto é equivalente ao problema de fluxo máximo do grafo G' apresentado em 5.2.

De forma a que o input gerado para o *software* de otimização em rede RELAX4 seja válido, é necessário converter o nome dos vértices para números. Assim, considerou-se que o vértice 41 representa s e o vértice 42 representa t . Resolvendo o problema com o input apresentado em 5.3, obtivemos o output apresentado em 5.4.

Tendo como ponto de partida o output do RELAX4, é necessário analisar qual o fluxo que passa pelos arcos que saem do vértice s . Este fluxo indica quanto do proveito de um bloco com minério foi gasto para suportar a despesa associada às escavações de blocos que se encontram em níveis superiores. Uma vez que, o objetivo é maximizar o lucro, se esse gasto for inferior ao lucro do bloco, então este fará parte da solução ótima e será extraído, obtendo-se um lucro igual à diferença entre o proveito do bloco e os custos associados às remoções. Por outro lado, se o fluxo for igual ao lucro, então esse bloco não fará parte da solução ótima e não será extraído, uma vez que a totalidade do seu lucro serviria para pagar remoções de outros blocos, não se obtendo nenhum lucro por parte deste. Além disto, existem alguns vértices ligados a s que têm fluxo nulo, o que significa que o lucro desse mesmo bloco não será gasto na remoção dos blocos em níveis superiores. Isto pode acontecer caso o bloco em questão esteja no nível de profundidade superior, não havendo blocos por cima, ou quando os blocos que se encontram por cima de um dado bloco i foram removidos e este custo foi suportado com o lucro de outros blocos que fazem parte do cone de desbaste de i e que foram previamente extraídos. Nestas situações, não há custos associados à remoção do bloco, pelo que se obtém o proveito desse bloco na totalidade, sendo que por isso, este faz parte da solução ótima.

- O bloco 1 tem um proveito de 15 u.m., sendo que são gastas 8 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $15 - 8 = 7$ u.m., pelo que este bloco será extraído¹.
- O bloco 2 tem um proveito de 3 u.m., sendo que são gastas 3 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $3 - 3 = 0$ u.m., pelo que este bloco não será extraído.
- O bloco 4 tem um proveito de 2 u.m., sendo que são gastas 2 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $2 - 2 = 0$ u.m., pelo que este bloco não será extraído.
- O bloco 6 tem um proveito de 14 u.m., sendo que são gastas 6 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $14 - 6 = 8$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 7 tem um proveito de 5 u.m., sendo que são gastas 5 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $5 - 5 = 0$ u.m. No entanto, de forma a extrair o bloco 1, é necessário extrair o bloco 7, pelo que este será extraído.
- O bloco 10 tem um proveito de 1 u.m., sendo que é gasta 1 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $1 - 1 = 0$ u.m., pelo que este bloco não será extraído.
- O bloco 13 tem um proveito de 13 u.m., sendo que são gastas 6 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $13 - 6 = 7$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 17 tem um proveito de 17 u.m., sendo que são gastas 3 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $17 - 3 = 14$ u.m., pelo que este bloco será extraído.

¹Note-se que quando se refere que um bloco i é extraído, considera-se que também são extraídos os blocos em níveis superiores pertencentes ao seu cone de desbaste

- O bloco 23 tem um proveito de 10 u.m., sendo que são gastas 1 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $10 - 1 = 9$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 24 tem um proveito de 12 u.m., sendo que são gastas 1 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $12 - 1 = 11$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 25 tem um proveito de 13 u.m., sendo que são gastas 1 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $13 - 1 = 12$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 26 tem um proveito de 38 u.m., sendo que são gastas 1 u.m. para remover blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $38 - 1 = 37$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 35 tem um proveito de 9 u.m., sendo que não há custos associados à remoção de blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $9 - 0 = 9$ u.m., pelo que este bloco será extraído.
- O bloco 36 tem um proveito de 7 u.m., sendo que não há custos associados à remoção de blocos em níveis superiores. O lucro associado a este bloco será $7 - 0 = 7$ u.m., pelo que este bloco será extraído.

Deste modo, conclui-se que os blocos a extrair são os blocos 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 e 39.

Uma vez conhecida a nossa solução, é nos possível conhecer o Proveito, o Custo de Operação e o Lucro:

- Proveito: $15 + 14 + 5 + 13 + 17 + 10 + 12 + 13 + 38 + 9 + 7 = 153$ u.m
- Custo: $8 + 6 + 5 + 6 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 32$ u.m
- Lucro: $7 + 8 + 0 + 7 + 14 + 9 + 11 + 12 + 37 + 9 + 7 = 121$ u.m

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
		11	12	13	14	15	16	17	18		
			5	6	7	8	9	10			
				1	2	3	4				

Tabela 3: Solução do problema proposto

O problema de fecho máximo de um grafo $G = (V, A)$ pode também ser formulado como um problema de programação linear com variáveis binárias.

Variáveis de decisão

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{no caso de o bloco } i \text{ ser extraído} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função objetivo

Assim, a formulação matemática do problema do fecho máximo de um grafo é a seguinte:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j \in A} c_j x_j \\ \text{sujeito a:} & x_j - x_i \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in V \end{array}$$

A restrição $x_j - x_i \leq 0$ traduz que, se o vértice i pertencer ao fecho de um grafo, então o vértice j também deve pertencer.

Utilizando o *software* **LPSolve**, resolveu-se este problema utilizando como input o ficheiro apresentado em 5.5, obtendo-se a mesma solução que a apresentada anteriormente.

3 Validação do Modelo

Para que o modelo obtido seja válido, este deve verificar:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} x_{ij} = 0$$
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Estas restrições designam-se por *restrições de conservação de fluxo* e *restrições de capacidade*, respetivamente.

Analisando o output apresentado em 5.4, conclui-se que todos os arcos satisfazem as restrições de capacidade. Relativamente às restrições de conservação de fluxo, verificando cada um dos vértices temos:

Vértice 1

$$f_{(1,5)} + f_{(1,11)} + f_{(1,15)} + f_{(1,19)} + f_{(1,29)} - f_{(41,1)} = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 + 1 + 2 + 1 - 8 = 0 \checkmark$$

Vértice 5

$$f_{(5,42)} - f_{(1,5)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \checkmark$$

Vértice 6

$$f_{(6,12)} + f_{(6,20)} + f_{(6,30)} - f_{(41,6)} = 0 \Leftrightarrow 3 + 2 + 1 - 6 = 0 \checkmark$$

Vértice 7

$$f_{(7,14)} + f_{(7,15)} - f_{(41,7)} = 0 \Leftrightarrow 3 + 2 - 5 = 0 \checkmark$$

Vértice 11

$$f_{(11,42)} - f_{(1,11)} = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0 \checkmark$$

Vértice 12

$$f_{(12,42)} - f_{(6,12)} = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0 \checkmark$$

Vértice 13

$$f_{(13,21)} + f_{(13,22)} + f_{(13,31)} + f_{(13,32)} - f_{(41,13)} = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 + 1 + 1 - 6 = 0 \checkmark$$

Vértice 14

$$f_{(14,42)} - f_{(7,14)} = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0 \checkmark$$

Vértice 15

$$f_{(15,42)} - f_{(4,15)} - f_{(7,15)} = 0 \Leftrightarrow 3 - 2 - 1 = 0 \checkmark$$

Vértice 17

$$f_{(17,27)} + f_{(17,39)} - f_{(41,17)} = 0 \Leftrightarrow 2 + 1 - 3 = 0 \checkmark$$

Vértice 19

$$f_{(19,42)} - f_{(1,19)} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0 \checkmark$$

Vértice 20

$$f_{(20,42)} - f_{(6,20)} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 21

$$f_{(21,42)} - f_{(13,21)} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 22

$$f_{(22,42)} - f_{(13,22)} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 23

$$f_{(23,33)} - f_{(41,23)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 24

$$f_{(24,34)} - f_{(41,24)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 25

$$f_{(25,37)} - f_{(41,25)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 26

$$f_{(26,38)} - f_{(41,26)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 27

$$f_{(27,42)} - f_{(17,42)} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 29

$$f_{(29,42)} - f_{(1,29)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 30

$$f_{(30,42)} - f_{(6,30)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 31

$$f_{(31,42)} - f_{(13,31)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 32

$$f_{(32,42)} - f_{(13,32)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 33

$$f_{(33,42)} - f_{(23,33)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértice 34

$$f_{(34,42)} - f_{(24,34)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Vértices 35 e 36 Não existe fluxo nos vértices 35 e 36

Vértice 37

$$f_{(37,42)} - f_{(25,37)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \checkmark$$

Vértice 38

$$f_{(38,42)} - f_{(26,38)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \checkmark$$

Vértice 39

$$f_{(39,42)} - f_{(17,39)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \checkmark$$

Verificadas as restrições para cada um dos arcos do grafo, conclui-se que todos respeitam ambas as restrições, logo o modelo é válido.

4 Conclusão

Através da utilização do *software* de otimização em rede **RELAX4** obteve-se a solução ótima, na qual são extraídos os blocos 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 e 39, sendo o lucro associado à sua extração igual a 121.

Neste trabalho foi possível determinar o lucro máximo que se pode obter através da exploração da mina e quais os blocos a ser extraídos, respeitando um conjunto de restrições. Também é importante referir que se aprendeu a utilizar uma nova ferramenta, o **relax4**, e a interpretar quer o input necessário a introduzir, quer o output produzido.

5 Anexos

5.1 Grafo G

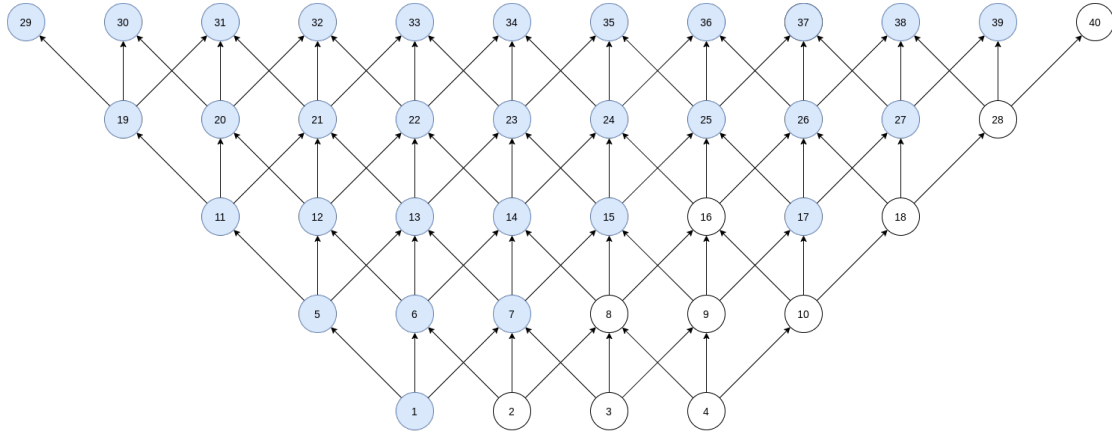


Figura 3: Grafo G . A azul estão assinalados os vértices que fazem parte da solução ótima.

5.2 Grafo G'

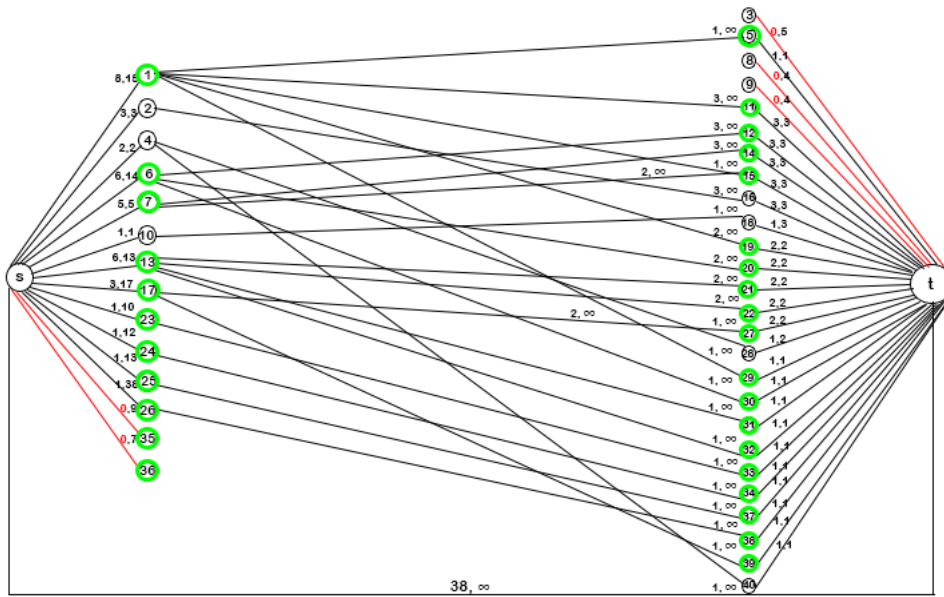


Figura 4: Grafo G' : Grafo com fluxos e lucros, onde os vértices a verde pertencem ao corte

Por motivos de organização, optou-se por não representar no grafo G' todos os arcos que tenham um fluxo nulo, e que por isso ficariam com os valores " $0, \infty$ ".

No entanto, decidimos criar as seguintes tabelas correspondentes a esses mesmos arcos com fluxo nulo.

1	→	12
1	→	14
1	→	20
1	→	21
1	→	22
1	→	30
1	→	31
1	→	32
1	→	33
1	→	34
1	→	37

Tabela 4: Arcos que saem do vértice 1 e têm fluxo nulo

2	→	8
2	→	12
2	→	14
2	→	15
2	→	20
2	→	21
2	→	22
2	→	30
2	→	31
2	→	32
2	→	33
2	→	34
2	→	37
2	→	38

Tabela 5: Arcos que saem do vértice 2 e têm fluxo nulo

4	→	8
4	→	9
4	→	14
4	→	15
4	→	16
4	→	18
4	→	22
4	→	27
4	→	32
4	→	33
4	→	34
4	→	37
4	→	38
4	→	39

Tabela 6: Arcos que saem do vértice 4 e têm fluxo nulo

6	→	14
6	→	21
6	→	22
6	→	31
6	→	32
6	→	33
6	→	34

Tabela 7: Arcos que saem do vértice 6 e têm fluxo nulo

7	→	21
7	→	22
7	→	31
7	→	32
7	→	33
7	→	34
7	→	37

Tabela 8: Arcos que saem do vértice 7 e têm fluxo nulo

10	→	16
10	→	27
10	→	28
10	→	34
10	→	37
10	→	38
10	→	38
10	→	40

Tabela 9: Arcos que saem do vértice 10 e têm fluxo nulo

13	→	33
13	→	34

Tabela 10: Arcos que saem do vértice 13 e têm fluxo nulo

17	→	37
17	→	38

Tabela 11: Arcos que saem do vértice 17 e têm fluxo nulo

23	→	34
----	---	----

Tabela 12: Arcos que saem do vértice 23 e têm fluxo nulo

26	→	37
----	---	----

Tabela 13: Arcos que saem do vértice 26 e têm fluxo nulo

5.3 Input do RELAX4

42	1 5 0 1000	4 34 0 1000	17 39 0 1000	0
132	1 11 0 1000	4 37 0 1000	23 33 0 1000	0
41 1 0 15	1 12 0 1000	4 38 0 1000	23 34 0 1000	0
41 2 0 3	1 14 0 1000	4 39 0 1000	24 34 0 1000	0
41 4 0 2	1 15 0 1000	4 40 0 1000	25 37 0 1000	0
41 6 0 14	1 19 0 1000	6 12 0 1000	26 37 0 1000	0
41 7 0 5	1 20 0 1000	6 14 0 1000	26 38 0 1000	0
41 10 0 1	1 21 0 1000	6 20 0 1000	42 41 -1 1000	0
41 13 0 13	1 22 0 1000	6 21 0 1000	0	0
41 17 0 17	1 29 0 1000	6 22 0 1000	0	
41 23 0 10	1 30 0 1000	6 30 0 1000	0	
41 24 0 12	1 31 0 1000	6 31 0 1000	0	
41 25 0 13	1 32 0 1000	6 32 0 1000	0	
41 26 0 38	1 33 0 1000	6 33 0 1000	0	
41 35 0 9	1 34 0 1000	6 34 0 1000	0	
41 36 0 7	1 37 0 1000	7 14 0 1000	0	
3 42 0 5	2 8 0 1000	7 15 0 1000	0	
5 42 0 1	2 12 0 1000	7 21 0 1000	0	
8 42 0 4	2 14 0 1000	7 22 0 1000	0	
9 42 0 4	2 15 0 1000	7 31 0 1000	0	
11 42 0 3	2 16 0 1000	7 32 0 1000	0	
12 42 0 3	2 20 0 1000	7 33 0 1000	0	
14 42 0 3	2 21 0 1000	7 34 0 1000	0	
15 42 0 3	2 22 0 1000	7 37 0 1000	0	
16 42 0 3	2 30 0 1000	10 16 0 1000	0	
18 42 0 3	2 31 0 1000	10 18 0 1000	0	
19 42 0 2	2 32 0 1000	10 27 0 1000	0	
20 42 0 2	2 33 0 1000	10 28 0 1000	0	
21 42 0 2	2 34 0 1000	10 34 0 1000	0	
22 42 0 2	2 37 0 1000	10 37 0 1000	0	
27 42 0 2	2 38 0 1000	10 38 0 1000	0	
28 42 0 2	4 8 0 1000	10 39 0 1000	0	
29 42 0 1	4 9 0 1000	10 40 0 1000	0	
30 42 0 1	4 14 0 1000	13 21 0 1000	0	
31 42 0 1	4 15 0 1000	13 22 0 1000	0	
32 42 0 1	4 16 0 1000	13 31 0 1000	0	
33 42 0 1	4 18 0 1000	13 32 0 1000	0	
34 42 0 1	4 22 0 1000	13 33 0 1000	0	
37 42 0 1	4 27 0 1000	13 34 0 1000	0	
38 42 0 1	4 28 0 1000	17 27 0 1000	0	
39 42 0 1	4 32 0 1000	17 37 0 1000	0	
40 42 0 1	4 33 0 1000	17 38 0 1000	0	

Figura 5: Input relax4.

5.4 Output do RELAX4

END OF READING	1 5 1.
NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 132	1 11 3.
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM	1 15 1.
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM	1 19 2.
*****	1 29 1.
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.	2 16 3.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.	4 28 1.
41 1 8.	4 40 1.
41 2 3.	6 12 3.
41 4 2.	6 20 2.
41 6 6.	6 30 1.
41 7 5.	7 14 3.
41 10 1.	7 15 2.
41 13 6.	10 18 1.
41 17 3.	13 21 2.
41 23 1.	13 22 2.
41 24 1.	13 31 1.
41 25 1.	13 32 1.
41 26 1.	17 27 2.
5 42 1.	17 39 1.
11 42 3.	23 33 1.
12 42 3.	24 34 1.
14 42 3.	25 37 1.
15 42 3.	26 38 1.
16 42 3.	42 41 38.
18 42 1.	OPTIMAL COST = -38.
19 42 2.	NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 56
20 42 2.	NUMBER OF ITERATIONS = 127
21 42 2.	NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 15
22 42 2.	NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 2
27 42 2.	NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 20
28 42 1.	*****
29 42 1.	
30 42 1.	
31 42 1.	
32 42 1.	
33 42 1.	
34 42 1.	
37 42 1.	
38 42 1.	
39 42 1.	
40 42 1.	

Figura 6: Output relax4.

5.5 Input do LPSolve

```

/* Função objetivo */
max: 15x1 + 3x2 - 5x3 + 2x4 - 1x5 + 14x6 + 5x7 - 4x8 - 4x9
+ 1x10 - 3x11 - 3x12 + 13x13 - 3x14 - 3x15 - 3x16 + 17x17
- 3x18 - 2x19 - 2x20 - 2x21 - 2x22 + 10x23 + 12x24 + 13x25
+ 38x26 - 2x27 - 2x28 - x29 - x30 - x31 - x32 - x33 - x34
+ 9x35 + 7x36 - x37 - x38 - x39 - x40;

/* Restrições */
x1 <= x5;
x1 <= x6;
x1 <= x7;

x2 <= x6;
x2 <= x7;
x2 <= x8;

x3 <= x7;
x3 <= x8;
x3 <= x9;

x4 <= x8;
x4 <= x9;
x4 <= x10;

x5 <= x11;
x5 <= x12;
x5 <= x13;

x6 <= x12;
x6 <= x13;
x6 <= x14;

x7 <= x13;
x7 <= x14;
x7 <= x15;

x8 <= x14;
x8 <= x15;
x8 <= x16;

x9 <= x15;
x9 <= x16;

x9 <= x17;
x10 <= x16;
x10 <= x17;
x10 <= x18;

x11 <= x19;
x11 <= x20;
x11 <= x21;

x12 <= x20;
x12 <= x21;
x12 <= x22;

x13 <= x21;
x13 <= x22;
x13 <= x23;

x14 <= x22;
x14 <= x23;
x14 <= x24;

x15 <= x23;
x15 <= x24;
x15 <= x25;

x16 <= x24;
x16 <= x25;
x16 <= x26;

x17 <= x25;
x17 <= x26;
x17 <= x27;

x18 <= x26;
x18 <= x27;
x18 <= x28;

x19 <= x29;
x19 <= x30;
x19 <= x31;

x21 <= x31;
x21 <= x32;
x21 <= x33;

x22 <= x32;
x22 <= x33;
x22 <= x34;

x23 <= x33;
x23 <= x34;
x23 <= x35;

x24 <= x34;
x24 <= x35;
x24 <= x36;

x25 <= x35;
x25 <= x36;
x25 <= x37;

x26 <= x36;
x26 <= x37;
x26 <= x38;

x27 <= x37;
x27 <= x38;
x27 <= x39;

x28 <= x38;
x28 <= x39;
x28 <= x40;

bin x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15,
x16, x17, x18, x19, x20, x21, x22, x23, x24, x25, x26, x27, x28,
x29, x30, x31, x32, x33, x34, x35, x36, x37, x38, x39, x40;

```

Figura 7: Input LPSolve.

5.6 Output do LPSolve

Variables	MILP ...	result	Variables	MILP ...	result
	121	121	x35	1	1
x1	1	1	x36	1	1
x2	0	0	x37	1	1
x3	0	0	x38	1	1
x4	0	0	x39	1	1
x5	1	1	x40	0	0
x6	1	1			
x7	1	1			
x8	0	0			
x9	0	0			
x10	0	0			
x11	1	1			
x12	1	1			
x13	1	1			
x14	1	1			
x15	1	1			
x16	0	0			
x17	1	1			
x18	0	0			
x19	1	1			
x20	1	1			
x21	1	1			
x22	1	1			
x23	1	1			
x24	1	1			
x25	1	1			
x26	1	1			
x27	1	1			
x28	0	0			
x29	1	1			
x30	1	1			
x31	1	1			
x32	1	1			
x33	1	1			
x34	1	1			

Figura 8: Output do LPSolve