

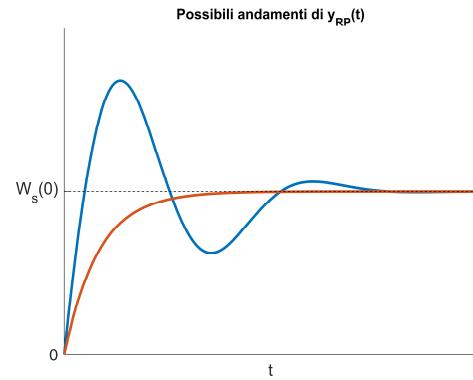
Teoria dei Sistemi

Lezione 25 (15 novembre 2021)**Risposta indiciale**

Finora abbiamo visto come rappresentare $W_s(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$ e abbiamo detto che questa quantità, se il sistema ammette risposta a regime permanente, possiamo chiamarla risposta armonica. Abbiamo visto i diagrammi di Bode che mostrano gli andamenti del modulo e della fase della funzione complessa $W_s(j\omega)$ in funzione della variabile reale ω .

Abbiamo visto come un ingresso costante nel sistema, $u(t) = \delta_-(t)$, risulti in un'uscita a regime permanente costante della forma $y_{RP}(t) = W_s(0)\delta_-(t)$. Per questo, ogni sistema che ammette risposta a regime permanente ha una quantità caratteristica chiamata *guadagno*, che corrisponde proprio a $W_s(0)$; matematicamente corrisponde al valore di $W_s(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0$.

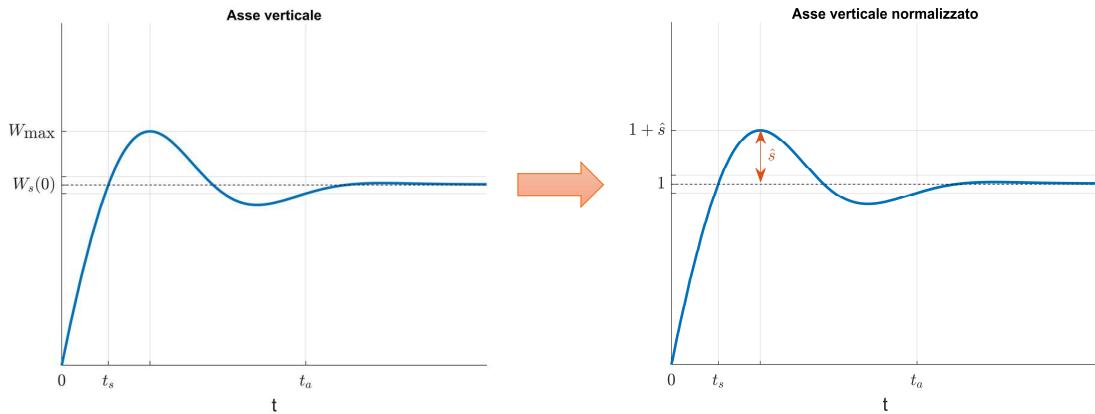
Preso un sistema, se volessimo calcolare la risposta con un *gradino* in ingresso, $u(t) = \delta_-(t)$, sappiamo che in $t = 0$ la risposta vale zero; a regime, la risposta vale $W_s(0)$. Il modo in cui la risposta va da 0 a $W_s(0)$ dipende dai termini di cui è composta $W(s)$ (vedi figura a lato). L'uscita raggiungerà il valore esatto di $W_s(0)$ ad un tempo infinito; tuttavia, dal punto di vista fisico e ingegneristico, possiamo scegliere un certo “margine d'errore”, e possiamo dire che se l'uscita resta in questo margine d'errore da un certo istante in poi, allora si è raggiunto il regime.



Il primo istante in cui l'uscita *raggiunge* il guadagno $W_s(0)$ si chiama *tempo di salita* t_s , mentre il primo istante in cui l'uscita *entra e resta* all'interno del “margine d'errore” si chiama *tempo di assestamento* t_a . Inoltre, considerando un'uscita simile alla funzione blu dell'immagine sopra, vorremmo sapere quanto, dopo aver superato il valore $W_s(0)$, il valore dell'uscita si discosti da quest'ultimo (raggiungendo il “picco” W_{\max}); in particolare, per avere una descrizione più completa del sistema che stiamo studiando, ci interessa sapere quanto si discosta W_{\max} *rispetto* a $W_s(0)$. Per fare questo, definiamo la quantità

$$\hat{s} := \frac{W_{\max}}{W_s(0)}$$

che chiameremo *sovraelongazione*. È utile normalizzare l'asse verticale dividendo l'unità per $W_s(0)$; in questo modo, la sovraelongazione è chiaramente visibile nel grafico:



Normalizzando solamente l'asse verticale, *l'asse orizzontale dei tempi rimane inalterato*. Questi tre parametri (t_s , t_a e \hat{s}), non facendo parte del regime permanente ma del periodo prima, caratterizzano la *risposta transitoria*. Quando l'ingresso è un gradino, la risposta forzata $y_F(t)$ viene spesso indicata con la notazione $W_{-1}(t)$, e viene chiamata *risposta indiciale*.

Rapidità del sistema nella risposta armonica

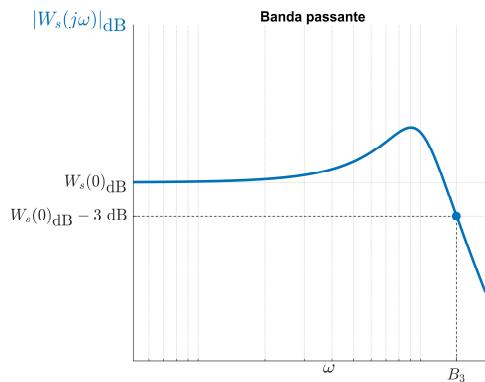
Possiamo pensare di “misurare” la rapidità del sistema a rispondere, nell’uscita, ad un determinato ingresso tramite il valore di t_s ; più piccolo è il valore di t_s , meno il sistema ci mette a raggiungere il suo valore massimo, e più diciamo che il sistema è “rapido”.

Questo è valido nella risposta indiciale, con ingresso a gradino; consideriamo adesso un ingresso sinusoidale e studiamone la relativa risposta armonica:

$$u(t) = \sin \omega t, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Se nella risposta indiciale possiamo vedere la rapidità del sistema tramite t_s , come possiamo misurare la rapidità del sistema nella risposta armonica, e quindi nel diagramma di Bode? Possiamo pensare che un sistema sia più rapido quando riesce a rispondere bene anche a pulsazioni molto elevate; questo perché, se l’ingresso ha una frequenza bassa, il sistema ha molto tempo per rispondere, mentre se la frequenza è elevata, il sistema può “non fare in tempo” a rispondere appieno¹.

Per misurare quanto un sistema risponda rapidamente nel diagramma di Bode si prende il valore in decibel del guadagno, $W_s(0)_{\text{dB}}$, e si considerano *tre decibel in meno*; il primo valore di ω per cui il modulo di $W_s(j\omega)$ è uguale a $W_s(0)_{\text{dB}} - 3$ dB è chiamato *banda passante* e si indica con B_3 (notazioni alternative sono Ω_3 o Ω_B):



Per cui, più è basso il tempo di salita t_s , più è alto il valore di B_3 , ovvero il valore di ω per cui $W_s(j\omega)$ è uguale a $W_s(0)_{\text{dB}} - 3$ dB.

¹ Immagina una lampada a incandescenza che, una volta premuto l'interruttore, impieghi cinque secondi per accendersi del tutto; se la accendi e la spegni dopo solo tre secondi, la lampada si spegnerà senza aver raggiunto la sua luminosità massima. Immagina ora una lampada a LED che, una volta premuto l'interruttore, impieghi 0.3 secondi per accendersi del tutto. Se premi l'interruttore anche due volte al secondo, raggiungerà ogni volta la sua luminosità massima. La lampada a LED, allora, è più reattiva, più “rapida” della lampada ad incandescenza, perché reagisce meglio a frequenze (o pulsazioni) maggiori.

Attrito del sistema nella risposta armonica

La sovraelongazione \hat{s} è legata alla presenza di attrito nel sistema: se allunghiamo una molla e la lasciamo andare, questa tende a tornare nella posizione di riposo “molleggiandoci intorno”, e si fermerà dopo un po’ di tempo. Se ripetiamo l’esperimento nell’acqua, essendoci più attrito, la molla non molleggia molto e tende a discostarsi meno dalla posizione a riposo, fermandosi prima.

Abbiamo un parametro anche nella risposta armonica che può essere ricondotto all’attrito: lo *smorzamento* z ; possiamo allora pensare che questa grandezza sia legata alla sovraelongazione. In effetti, più lo smorzamento è basso, più nel grafico di $|W_s(j\omega)|_{\text{dB}}$ compare una “pancia” della funzione in una determinata zona di pulsazioni, che sta ad indicare che il sistema reagisce in modo molto accentuato in quella zona². Introduciamo una grandezza che indica quanto vale il valore massimo del modulo di $W_s(j\omega)$ rispetto al guadagno $W_s(0)$:

$$M_r := \frac{|W|_{\max}}{W_s(0)}$$

chiamato *modulo alla risonanza*. $|W|_{\max}$ è il valore massimo assunto da $|W_s(j\omega)|$. A livello qualitativo, possiamo aspettarci che se un sistema ha risposta indiciale con un elevato valore della sovraelongazione, allora la relativa risposta armonica avrà un valore elevato anche del modulo alla risonanza. Anche in questo caso possiamo *normalizzare* l’asse verticale rispetto al guadagno ed esprimere in decibel; in questo modo, il grafico “inizia” sempre a 0 dB (*vedi nota 3*). In questo modo, la banda passante è valore di ω per cui il grafico normalizzato ha valore esattamente -3 dB; inoltre, il modulo alla risonanza corrisponderà esattamente al massimo del grafico.

Relazione tra B_3 e t_s

Considerando il sistema descritto da:

$$W(s) = \frac{K}{1 + \frac{2zs}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Si trova che la correlazione tra banda passante B_3 e il tempo di salita t_s è che il loro prodotto è circa costante al valore medio 3:

$$B_3 t_s \simeq 3$$

La relazione tra modulo alla risonanza e sovraelongazione, invece, è circa la seguente:

$$\frac{1 + \hat{s}}{M_r} \simeq 0.85$$

In particolare, queste due approssimazioni “empiriche” sono valide anche se nella funzione ci sono altri termini con punti di rottura lontani da ω_n (per esempio, se si hanno termini del tipo $1 + \tau s$ con τ lontano da ω_n in valore). Quindi, un sistema che ha un tempo di salita di 5 secondi, possiamo dire che, approssimativamente, la banda passante sarà intorno a 3/5 rad/s.

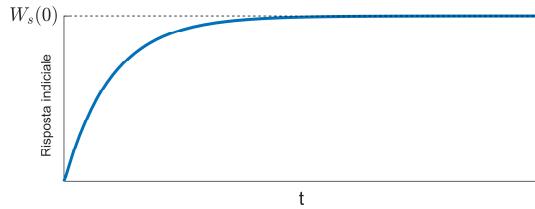
² Il modulo in decibel di $W_s(j\omega)$ sta ad indicare quanto viene amplificata (o smorzata) una sinusoide in ingresso. Se i valori in decibel sono negativi, la sinusoide viene smorzata (perché il modulo effettivo è minore di 1), altrimenti viene amplificata. Quindi, dove il grafico presenta un massimo, $|W|_{\max}$, quello è il punto in cui la sinusoide viene amplificata di più; se lo smorzamento è molto basso, il valore di $|W|_{\max}$ diventa molto alto.

³ Prima si normalizza il modulo, poi si esprime in decibel, non il contrario.

$$\left. \frac{|W|}{W(0)} \right|_{\text{dB}}, \quad \text{e non } \frac{|W|_{\text{dB}}}{W(0)}$$

Risposta indiciale esponenziale

Prendiamo un sistema in cui la risposta è molto più semplice; consideriamo un ingresso a gradino e una risposta indiciale che segue un andamento esponenziale semplice:



Per il tempo di assestamento t_a basta scegliere un margine d'errore come abbiamo detto in precedenza; la sovraelongazione non può esserci, perché il grafico non supera mai $W_s(0)$, perciò vale zero:

$$\hat{s} = 0$$

Il tempo di salita t_s , invece, non può esistere definito in questo modo, visto che il grafico non raggiunge mai il suo valore massimo; allora, possiamo modificare leggermente le definizioni date in precedenza per "adattarle" a questo caso: invece di misurare t_s come il tempo che impiega la risposta indiciale a raggiungere il valore massimo, lo definiamo, in questo caso, come *il tempo che impiega la risposta a raggiungere il 90% del valore massimo*.

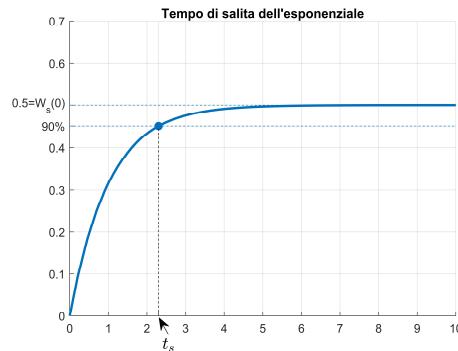
Prendiamo, per esempio, la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{0.5}{s + 1}$$

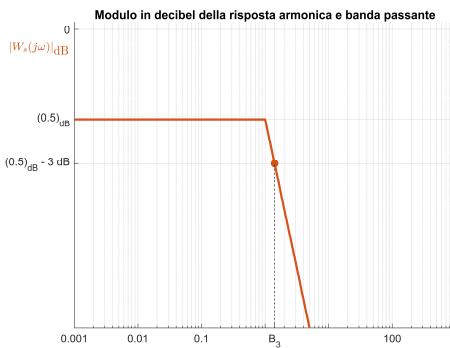
che corrisponderà alla risposta indiciale

$$W_{-1}(t) = 0.5(1 - e^{-t})$$

Si avrà, graficamente:



Il grafico approssimato della risposta armonica sarà:



Volendo, si può definire in generale il tempo di salita t_s come il tempo impiegato dalla risposta indiciale a raggiungere il 90% del valore massimo, visto che nel caso di ingressi “ondeggianti” (come quelli del primo esempio), il tempo impiegato a raggiungere il 90% è molto vicino a quello impiegato per raggiungere il 100%.

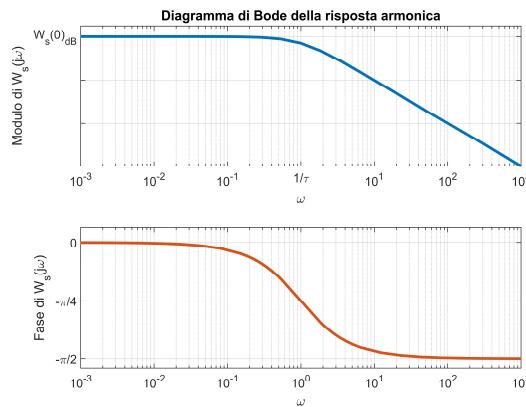
Spesso, la banda passante del sistema è tale da essere influenzata solamente dai primi poli che “appaiono” sul grafico del modulo; ovvero, quelli che hanno punto di rottura (ω_n nel caso di termini trinomi o $1/\tau$ nel caso di termini binomi) *più piccolo*. In questo caso, si dice che il polo in questione è il *polo dominante*.

In realtà, quando abbiamo approssimato il valore del modulo nel punto di rottura $1/\tau$ (per quanto riguarda i termini binomi), abbiamo visto che il suo valore in quel punto *era di circa 3 decibel*: questo significa che *il valore della banda passante B_3 coincide con quello del punto di rottura $1/\tau$* .

Rappresentazione della risposta armonica nel diagramma polare

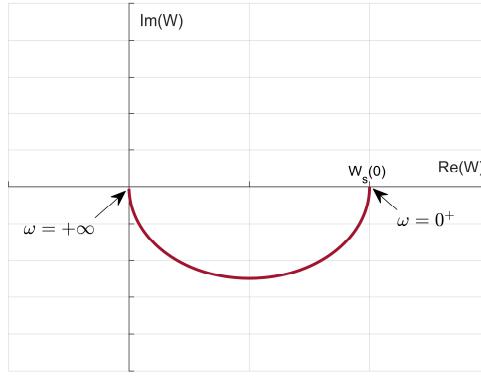
La risposta armonica è una funzione complessa, ovvero per ogni ω assume un valore complesso. Perciò, possiamo rappresentare il suo andamento in due possibili modi, come i numeri complessi: tramite il modulo e la fase, come abbiamo fatto finora con i diagrammi di Bode, oppure tramite la parte reale e quella immaginaria, ovvero rappresentando $W_s(j\omega)$ come una *curva sul piano reale-immaginario*. Introduciamo allora i *diagrammi polari*.

Per fare un esempio, prendiamo il diagramma di Bode di $W(s) = \frac{1}{s+1}$ (non approssimato):

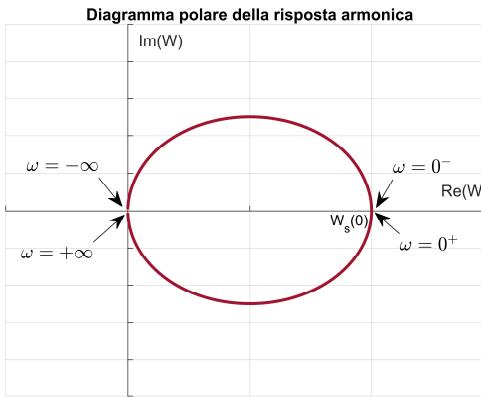


Per ottenere il diagramma polare, dobbiamo prendere il valore del modulo e della fase della risposta armonica per ogni valore di ω e tracciarlo sul piano reale-immaginario. Per $\omega \rightarrow 0^+$, la fase è nulla e il modulo (in decibel) è pari al guadagno $W_s(0)$; quindi, il relativo punto sul diagramma polare sarà sull'asse reale con valore

$\alpha = W_s(0)$. Al crescere di ω , il modulo diminuisce e la fase aumenta fino a $-\frac{\pi}{2}$; per cui, la curva sul diagramma polare sarà qualcosa del tipo:



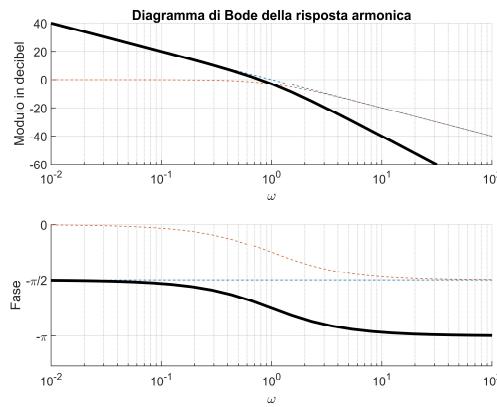
Finora, nei diagrammi di Bode abbiamo trascurato i valori negativi di ω , perché non aggiungevano informazioni nuove al grafico, visto che il modulo è una funzione pari e l'arcotangente una funzione dispari. Però, in questo caso, possiamo aggiungerli al diagramma polare: preso un qualsiasi $\bar{\omega}$, se per $\omega = \bar{\omega}$ si ha modulo ρ e fase θ , allora per $\omega = -\bar{\omega}$ si avrà modulo ρ e fase $-\theta$. Ciò significa che il grafico si “duplica” ribaltandosi sull’asse reale:



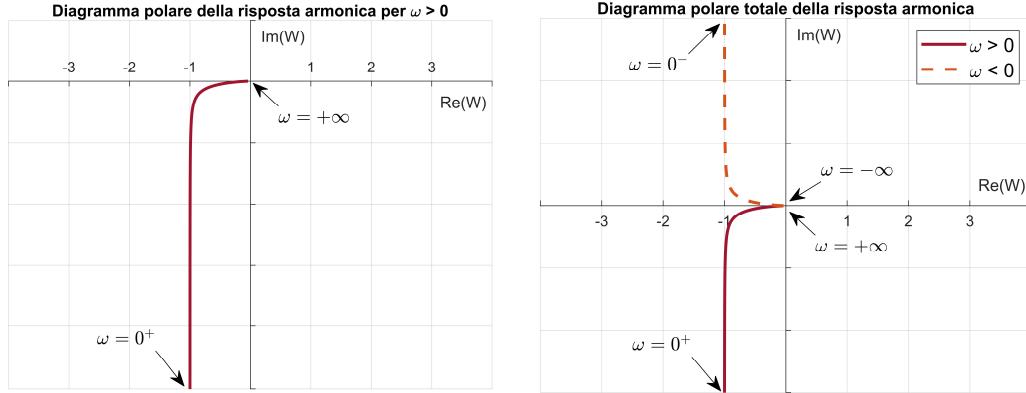
Se consideriamo, invece, una funzione di trasferimento fatta così:

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Allora, il suo diagramma di Bode (non approssimato) sarebbe:



Come si vede, il modulo per $\omega \rightarrow 0^+$ continua a crescere e va all'infinito (non si vede dal grafico, ma sarebbe una retta che continua verso sinistra), mentre la fase in quei punti vale $-\pi/2$, perciò a $\omega = 0^+$ il punto si trova sull'asse immaginario negativo, infinitamente lontano. Man mano che cresce ω , il modulo diminuisce e la fase va verso $-\pi$; significa che il punto si discosterà dall'asse immaginario, ma toccherà l'asse reale solo quando il modulo è nullo. Il suo diagramma polare è questo⁴:



⁴ Il diagramma polare del professore mostrato in classe è leggermente diverso. Per $\omega \rightarrow 0^+$, il grafico del professore tende ad accostarsi all'asse verticale:

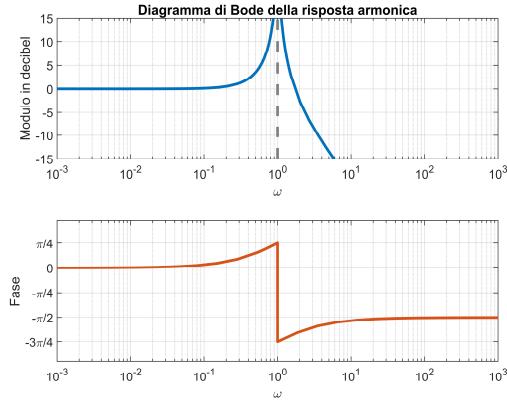


In realtà, quello mostrato in questo documento è il grafico effettivo, *senza approssimazione*, e per $\omega \rightarrow 0^+$ (e per $\omega \rightarrow 0^-$) la parte reale resta fissa a -1 . La fase tende a $-\pi/2$ tanto velocemente quanto il modulo cresce, e questo crea un peculiare "bilanciamento" tra i due che fa sì che il valore della parte reale resti fisso. Ovviamente, se si considerano i grafici approssimati, il bilanciamento non c'è e il grafico assomiglierà leggermente di più a quello del professore.

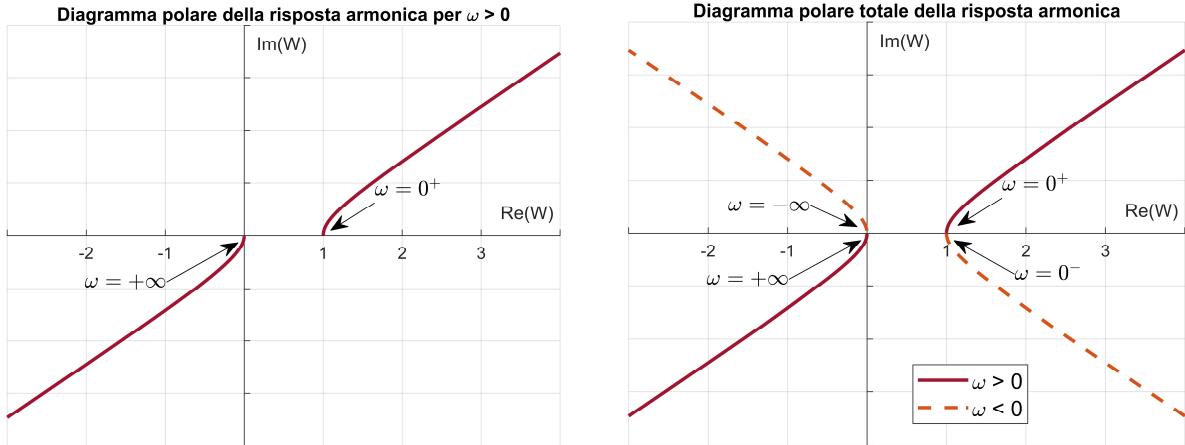
Consideriamo, infine, una funzione di trasferimento più complessa:

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2 + 1}$$

Il numeratore è composto da un termine binomio con $\tau = 1$, mentre al denominatore c'è un termine *trinomio* con $\omega_n = 1$ e $z = 0$ (infatti non compare il termine di s al primo grado, ma è comunque un termine trinomio). Il diagramma di Bode (che mostriamo non approssimato) è il seguente:



Notiamo subito che per $\omega \rightarrow 0^+$ il modulo in decibel vale 0, quindi il modulo effettivo varrà 1. Al crescere di ω , il modulo va all'infinito mentre la fase si sposta verso $\pi/4$; dopo l'asintoto, il grafico "sbuca" da sinistra con un angolo di $-3\pi/4$ e, per $\omega \rightarrow +\infty$, il modulo diventa sempre più piccolo, perciò il grafico andrà verso l'origine. Il grafico polare effettivo è il seguente:



Ricordiamo che per fare la parte di grafico per $\omega < 0$ basta *ribaltare il grafico rispetto all'asse reale*.

Teoria dei Sistemi

Lezione 26 (16 novembre 2021)**Stati indistinguibili e inosservabili**

Vediamo come, a parità di ingresso $u(t)$, si comporta l'uscita del sistema quando cambia la condizione iniziale. In particolare, vorremmo vedere quando due sistemi che partono da condizioni iniziali diverse hanno la stessa evoluzione. Prendiamo due punti x_{0a}, x_{0b} *distinti* ($x_{0a} \neq x_{0b}$) e consideriamo le rispettive uscite $y_a(t)$ e $y_b(t)$:

$$y_a(t) = \Psi(t)x_{0a} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

$$y_b(t) = \Psi(t)x_{0b} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Per capire quando queste risultano uguali per ogni t , effettuiamo la differenza termine a termine tra le due:

$$\begin{aligned} y_a(t) - y_b(t) &= \Psi(t)x_{0a} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau - \left(\Psi(t)x_{0b} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau \right) \\ &\implies 0 = \Psi(t)x_{0a} - \Psi(t)x_{0b} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Troviamo, quindi, che:

$$y_a(t) = y_b(t) \iff \Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Se questo accade, i due stati x_{0a} e x_{0b} sono chiamati *stati indistinguibili*; in altre parole, due stati x_{0a} e x_{0b} sono indistinguibili se risulta proprio $\Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0$. La differenza di due stati indistinguibili si chiama *stato inosservabile* e lo indichiamo con x_I . Risulta, allora, $\Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = \Psi(t)x_I = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Vediamo quali sono i valori di x_I per cui questo accade. Abbiamo¹:

$$\Psi(t)x_I = Ce^{At}x_I \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

C'è un teorema in analisi che afferma che se una funzione è identicamente nulla in un intervallo, lo sono anche le sue derivate. In questo caso, la funzione è identicamente nulla $\forall t \geq 0$, perciò avremo:

$$\begin{aligned} Ce^{At}x_I &\equiv 0 \\ CAe^{At}x_I &\equiv 0 \\ CA^2e^{At}x_I &\equiv 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Che sono tutte vere per ogni $t \geq 0$; prendiamo allora un punto in questo intervallo, come $t = 0$, e vediamo il valore di ciascuna delle equazioni in questo punto²:

$$\begin{aligned} Cx_I &= 0 \\ CAx_I &= 0 \\ CA^2x_I &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

¹ Il simbolo \equiv indica che la funzione è *identicamente nulla*, ovvero che vale zero in tutto l'intervallo considerato.

² Un modo alternativo per arrivare a questo risultato senza ricorrere al teorema dell'analisi è sviluppare l'esponenziale:

$$Ce^{At}x_I \equiv 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} C \frac{A^k t^k}{k!} x_I \equiv 0$$

Un polinomio è essere identicamente nullo quando i suoi coefficienti sono nulli, arrivando allo stesso risultato.

Per risolvere questo sistema di equazioni ricordiamo che, per un teorema di geometria noto come teorema di Cayley-Hamilton, data una matrice M , si ha che il suo polinomio caratteristico calcolato in M è pari a zero: $p_M(M) = 0$. In questo caso, si ha:

$$p_A(A) = 0$$

Con p_A polinomio caratteristico della matrice A . Ovvero, esplicitamente abbiamo che:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ \implies p_A(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0 \\ \iff A^n &= -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1A - a_0I \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

In particolare, si ha che

$$CA^n x_I = -a_{n-1}CA^{n-1}x_I - \cdots - a_1CAx_I - a_0Cx_I$$

Dunque, ogni termine del tipo CA^kx_I è funzione dei termini con potenze inferiori. In particolare, se sono vere tutte le equazioni da A^0 a A^{n-1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cx_I = 0 \\ CAx_I = 0 \\ CA^2x_I = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}x_I = 0 \end{array} \right.$$

risulterà che

$$CA^n x_I = -a_{n-1} \underbrace{CA^{n-1}x_I}_{=0} - \cdots - a_1 \underbrace{CAx_I}_{=0} - a_0 \underbrace{Cx_I}_{=0} = 0$$

Possiamo applicare il criterio di Cayley-Hamilton anche per potenze maggiori di A^n : basta moltiplicare l'equazione (\spadesuit) per A^i ($i > 0$) prima di moltiplicarla per C a sinistra e x_I a destra:

$$\begin{aligned} CA^i A^n x_I &= -a_{n-1}CA^i A^{n-1}x_I - \cdots - a_1CA^i Ax_I - a_0CA^i x_I \\ \implies CA^{n+i}x_I &= -a_{n-1}CA^{n+i-1}x_I - \cdots - a_1CA^{i+1}x_I - a_0CA^i x_I \end{aligned}$$

In questo modo, si ha che:

$$CA^{n+1}x_I = -a_{n-1} \underbrace{CA^n x_I}_{=0} - \cdots - a_1 \underbrace{CA^2 x_I}_{=0} - a_0 \underbrace{CAx_I}_{=0} = 0$$

E così via. Ricapitolando, se i termini $Cx_I, CAx_I, CA^2x_I, \dots$ fino a $CA^{n-1}x_I$ sono tutti uguali a zero, allora si avrà che anche $CA^n x_I, CA^{n+1} x_I$ e tutte le potenze di A superiori saranno tutte uguali a zero. Perciò, ora abbiamo un sistema non con infinite equazioni, ma solo con $n - 1$ equazioni q -dimensionali:

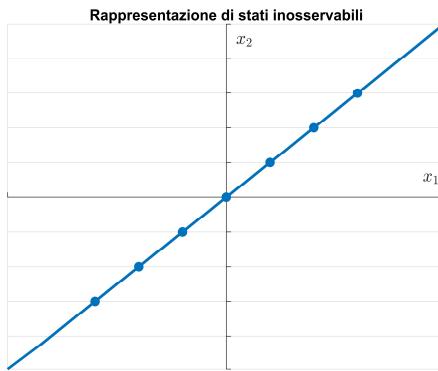
$$\left\{ \begin{array}{l} Cx_I = 0 \\ CAx_I = 0 \\ CA^2x_I = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}x_I = 0 \end{array} \right. \iff \left(\begin{array}{c} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array} \right) x_I = 0 \quad (\clubsuit)$$

E abbiamo dimostrato che se questo è vero, saranno nulli anche i termini successivi, perciò varrà alla fine che $\Psi(t)x_I \equiv 0 \ \forall t \geq 0$. Il sistema che abbiamo trovato è un *sistema lineare* omogeneo a coefficienti costanti, che ammette soluzioni diverse da zero se la matrice non ha rango pieno; se queste esistono, sono un sottospazio

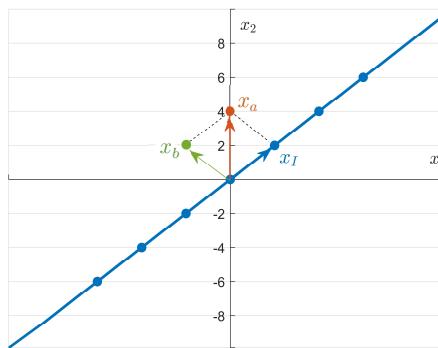
lineare. In altre parole, *preso lo spazio di stato*³, se ci sono stati inosservabili, questi sono un sottospazio lineare. Perciò, si hanno infiniti stati inosservabili.

Geometria degli stati inosservabili

Consideriamo uno spazio di stato su \mathbb{R}^2 . La matrice $\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$ può avere rango pieno, e quindi il sistema $\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} x_I = 0$ ammette una sola soluzione che è zero, oppure le soluzioni del sistema sono ∞^1 e stanno su un sottospazio, che in questo caso (in \mathbb{R}^2) è rappresentabile con una retta passante per l'origine:

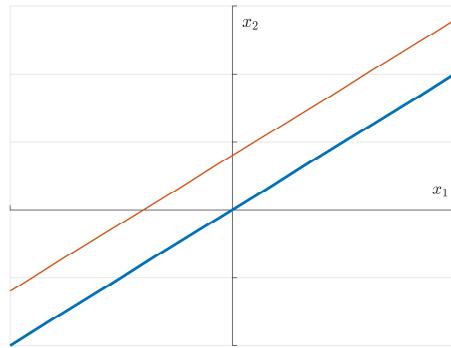


Ogni punto sulla retta è uno stato inosservabile x_I (ovvero è soluzione del sistema ♣). Siamo partiti dagli stati indistinguibili, da cui abbiamo introdotto gli stati inosservabili dicendo che questi ultimi sono dati dalla differenza di due stati indistinguibili. Allora, cerchiamo di capire graficamente "dove si trovano" questi stati indistinguibili. Visto che $x_a - x_b = x_I$, basta scegliere un qualsiasi punto $x_b \in \mathbb{R}^2$ e trovare il relativo $x_a = x_b + x_I$ facendo la somma vettoriale:



³ Lo spazio di stato è lo spazio vettoriale che contiene ogni singolo stato possibile. Negli esempi che faremo su \mathbb{R}^2 , lo spazio di stato è tutto \mathbb{R}^2 .

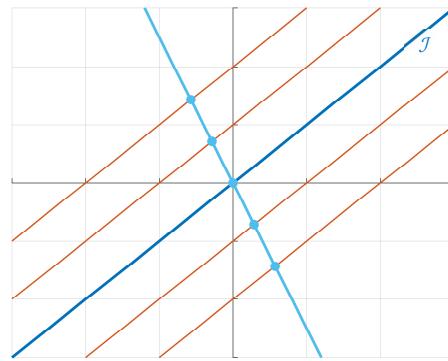
Fissando x_b e scegliendo punti x_I diversi, otteniamo una retta parallela alla retta degli stati inosservabili:



Allo stesso modo, scegliendo altri punti x_b , si ottengono rette diverse, ma sempre *parallele* alla retta degli stati inosservabili. *Presa una qualsiasi retta parallela alla retta degli stati inosservabili, tutti i punti su questa retta hanno la stessa evoluzione.* Questo esempio era su \mathbb{R}^2 , ma in generale si può trovare un *sottospazio* di soluzioni del sistema (♣), che non per forza è rappresentabile con una retta.

Allora, in presenza di un sottospazio di stati inosservabili (ovvero le soluzioni del sistema), lo spazio di stato si può separare in tanti *sottoinsiemi*⁴ che sono equivalenti dal punto di vista dell'osservabilità. Allora, visto che tutti i punti in uno di questi sottoinsiemi hanno la stessa evoluzione, *possiamo "cambiare" lo stato iniziale del sistema con un altro che si trova nello stesso sottoinsieme*. Lo spazio degli stati inosservabili lo indichiamo con \mathcal{I} (una “i” maiuscola in corsivo).

In generale, possiamo scegliere un punto in ogni sottoinsieme che ne sarà il *rappresentante* (che può essere un punto qualsiasi del sottoinsieme, visto che tutti i punti garantiscono la stessa uscita del sistema). Possiamo individuare un sottospazio che contiene i rappresentanti di tutti i sottoinsiemi dello spazio di stato.



Basta prendere una direzione diversa da quella di \mathcal{I} e automaticamente si incrociano tutti i sottoinsiemi, perciò possiamo scegliere la direzione come vogliamo. Ovvero, preso il sottospazio \mathcal{I} degli stati inosservabili, che ha una sua base, aggiungiamo nuovi vettori indipendenti fino ad andare a descrivere tutto lo spazio di stato; ogni vettore che aggiungiamo alla base di \mathcal{I} caratterizzano una selezione di stati indistinguibili.

⁴ Prendi le rette della figura sopra. Solo la retta blu è sottospazio, perché contiene l'origine. Tutte le rette parallele a questa, come la retta arancione, non sono sottospazi, ma semplici insiemi.

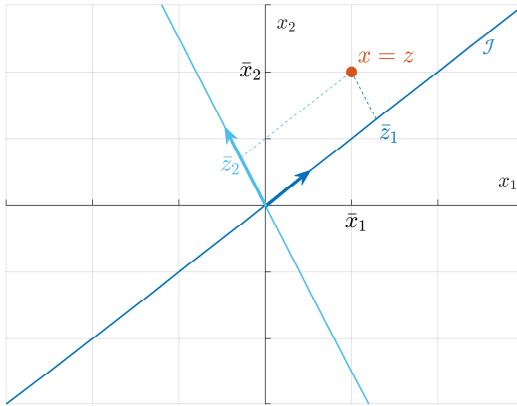
Cambio di coordinate dello spazio di stato

Ora vediamo com'è fatto lo stato in questa nuova base; se lo stato è descritto con la variabile x , consideriamo il cambio di base

$$z = Tx$$

Prendiamo il caso di \mathbb{R}^2 . Un qualsiasi punto $x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ dello spazio di stato, scritto rispetto alla nuova base sarà

$$z = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$



Se questo punto, invece di essere preso a caso, fosse uno stato inosservabile ($x \in \mathcal{J}$) si avrebbe

$$x_I = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \rightarrow Tx_I = z_I = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z_I avrà solamente le componenti relative allo spazio degli stati inosservabili \mathcal{J} , mentre tutte le altre saranno nulle. Lo spazio degli stati inosservabili è descritto in questo modo:

$$\mathcal{J} = \left\{ x_I \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_I = 0 \right\} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

I vettori v_1, \dots, v_m saranno i vettori di base di \mathcal{J} ⁽⁵⁾. L'obiettivo ora è trovare T ; per farlo, consideriamo che:

$$z = Tx \iff x = T^{-1}z$$

I vettori v_1, \dots, v_m nel sistema di coordinate di z , essendo vettori di base, avranno *coordinate canoniche*, per cui se moltiplichiamo T^{-1} per e_i otteniamo v_i (*vedi nota 6*):

$$v_1 = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

⁵ (N.d.R.) Il professore per questa lezione usa la lettera s invece che la lettera m . Tuttavia, nelle prossime userà la m , perciò per non confondere le idee ho scelto di utilizzare la m .

⁶ Per e_i si intende l' i -esimo vettore della base canonica. Per esempio, in \mathbb{R}^2 la base canonica è $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Per cui, si ha che $Tv_1 = e_1, Tv_2 = e_2, \dots$ con v_1, v_2, \dots vettori di base e T matrice di cambio di base.

Da cui ricaviamo che la matrice T^{-1} avrà come prima colonna v_1 , come seconda colonna v_2 , ecc. fino alla m -esima colonna che avrà v_m . Però, stiamo considerando tutto lo spazio di stato, per cui ai vettori di \mathcal{J} abbiamo aggiunto altri $n - m$ vettori v_{m+1}, \dots, v_n arbitrari ma tutti *indipendenti* per formare una base di tutto lo spazio di stato. Allora, in T^{-1} dopo gli m vettori ci saranno altri $n - m$ vettori:

$$T^{-1} = \left(\underbrace{\begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{matrix}}_{\text{Vettori di } \mathcal{J}} \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{m+1} & \cdots & v_n \end{matrix}}_{\text{Vettori non di } \mathcal{J}} \right)$$

Per cui, una T tale che T^{-1} assuma la forma qui sopra trasforma un qualsiasi punto dello stato x nel nuovo sistema di coordinate in z ; in particolare, le prime m componenti di ogni vettore in z sono quelle degli stati inosservabili, mentre le altre $n - m$ componenti stanno fuori. In altre parole, se un punto z ha tutti zeri nelle $n - m$ componenti finali, allora è sicuramente uno stato inosservabile; se c'è qualcosa diverso da zero in queste ultime componenti, lo stato non è inosservabile (potremmo dire che è “osservabile”).

Struttura delle matrici del sistema nelle nuove coordinate

Sappiamo che un sistema, nelle classiche coordinate, può essere rappresentato come:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Vediamo ora come diventa la rappresentazione del sistema nelle nuove coordinate. Se $x = T^{-1}z$ avremo:

$$\begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1}z + TBu \\ y = CT^{-1}z + Du \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{cases}$$

$\tilde{A} = TAT^{-1}$ è la nuova matrice dinamica, $\tilde{B} = TB$ è la nuova matrice degli ingressi e $\tilde{C} = CT^{-1}$ è la nuova matrice delle uscite. \tilde{D} non cambia e resta uguale a D , perché “scavalca” la dinamica del sistema e ha poco a che vedere con l’evoluzione. Consideriamo ora gli stati inosservabili. Prima del cambio di coordinate avevamo:

$$\begin{cases} Cx_I = 0 \\ CAx_I = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}x_I = 0 \end{cases}$$

Effettuando il cambio di base $x = T^{-1}z$ avremo:

$$\begin{cases} CT^{-1}z_I = 0 \\ CAT^{-1}z_I = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}T^{-1}z_I = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} CT^{-1}z_I = 0 \\ CT^{-1}TAT^{-1}z_I = 0 \\ \vdots \\ CT^{-1}TA^{n-1}T^{-1}z_I = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{C}z_I = 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}z_I = 0 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}z_I = 0 \end{cases}$$

E questo ci afferma che le rappresentazioni sono equivalenti. Tuttavia, ora sappiamo com'è fatto z_I :

$$z_I = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perciò, per valere $\tilde{C}z_I = 0$, dovrà valere:

$$\tilde{C}z_I = (\tilde{C}_1 \quad \dots \quad \tilde{C}_m \quad \dots \quad \tilde{C}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}_1 z_1 + \tilde{C}_2 z_2 + \dots + \tilde{C}_m z_m = 0$$

Da cui $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \dots = \tilde{C}_m = 0$. Ovvero, la matrice \tilde{C} avrà le prime m colonne nulle, a prescindere dalle $n - m$ colonne successive che possono essere qualsiasi cosa.

Una proprietà degli stati inosservabili, che non dipende dal sistema di riferimento in uso, è che se x_I è uno stato inosservabile, allora Ax_I è anche uno stato inosservabile (*il sottospazio \mathcal{I} è invariante rispetto ad A*)⁷. Da questo segue che, se z_I è uno stato inosservabile, $\tilde{A}z_I$ sarà anch'esso uno stato inosservabile. Continuiamo riprendendo il caso di \mathbb{R}^2 , per semplicità di calcoli; avremo allora $z_I = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e anche $\tilde{A}z_I$ sarà uno stato inosservabile della forma $\tilde{A}z_I = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Abbiamo allora:

$$\tilde{A}z_I = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \tilde{A}_{11}z_1 &= \bar{z}_1 \\ \tilde{A}_{21}z_1 &= 0 \end{aligned}$$

Per cui, \tilde{A} avrà una struttura molto particolare, che approfondiremo nella prossima lezione:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

⁷ Si dimostra facilmente: se x_I è inosservabile, allora $CA^k x_I = 0$, $\forall k = 0, 1, \dots, n - 1$. Se moltiplichiamo tutto per A , abbiamo che lo stato Ax_I è tale che $CA^k Ax_I = CA^{k+1}x_I = CA^h x_I = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n$, perché $CAx_I, CA^2x_I, \dots, CA^{n-1}x_I$ sono tutte nulle, da cui abbiamo visto che segue che anche $CA^n x_I = 0$. Da cui, Ax_I è inosservabile.