Teoria dei Sistemi

Lezione 20 (5 novembre 2021)

Esempio numerico

Consideriamo un sistema a tempo discreto dove

$$W(z) = \frac{z}{z+1}$$

e studiamo il comportamento dell'uscita forzata quando si hanno diversi tipi di ingresso. Iniziamo studiando cosa succede quando $u(t) = \delta_{-1}(t)$. La risposta forzata in t è:

$$y_F(t) = Z^{-1}[y_F(z)] = Z^{-1}[W(z)U(z)] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z+1} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{Z[\delta_{-1}(t)]}\right] = Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z+1)(z-1)}\right]$$

La funzione da anti-trasformare è una funzione razionale propria, che possiamo scomporre in fratti semplici *solo dopo aver diviso per* z:

$$\frac{1}{z} y_F(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z-1}$$

Calcolare i residui è facile: per trovare R_1 basta moltiplicare tutto per $z+1$ e fare il limite per $z \to -1$:

$$R_1 = \lim_{z \to -1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{2}$$

Discorso analogo per R_2, si moltiplica per $z-1$ e si fa andare $z \to 1$:

$$R_2 = \lim_{z \to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

Una volta fatto questo, basta rimoltiplicare per z e anti-trasformare:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} R_2$$

$$\implies \quad y_F(t) = Z^{-1}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1}\right] = \frac{1}{2}(-1)^t + \frac{1}{2}$$

Per ricordare che il tutto è ≥ 0, possiamo, volendo, scrivere:

$$y_F(t) = \left(\frac{1}{2}(-1)^t + \frac{1}{2}\right) \delta_{-1}(t)$$

Ma possiamo ometterlo se abbiamo ben chiaro che $t \geq 0$.

Studiamo la risposta che abbiamo trovato: $y_F(t)$ è composta da vari termini, di cui la parte $\frac{1}{2}(-1)^t$ nasce *dal sistema* (perché è formata da $(z+1)$ che stava in $W(z)$, quindi già nel sistema), e l'altra parte $(\frac{1}{2})$ viene fuori *dall'ingresso* (perché formata da $(z-1)$ che stava in $U(z)$, quindi non è *intrinseca* del sistema). E vale così in generale: nella risposta forzata si possono distinguere due parti, una che dipende dal sistema e l'altra che dipende dall'ingresso. In questo caso, l'ingresso era una costante, $\delta_{-1}(t)$, e la parte d'uscita relativa a $U(z)$ è anch'essa una costante: $\frac{1}{2}$.

***

Consideriamo, ora, un altro ingresso:

$$u(t) = 2^t$$

La sua trasformata è $U(z) = \frac{z}{z-2}$ e l'uscita forzata in z sarà:

$$y_F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$$

$$\implies \quad \frac{1}{z} y_F(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z-2}$$

Si trova che $R_1 = \frac{1}{3}$ e $R_2 = \frac{2}{3}$. Perciò, rimoltiplicando per z:

$$y_F(t) = Z^{-1}\left[\frac{1}{3}\,\frac{z}{z+1} + \frac{2}{3}\,\frac{z}{z-2}\right] = \frac{1}{3}(-1)^t + \frac{2}{3}2^t$$

Anche stavolta, c'è una parte che dipende dal sistema, ovvero $\frac{1}{3}(-1)^t$, e una parte che dipende dall'ingresso, $\frac{2}{3}2^t$. In particolare, l'ingresso era 2^t e la parte dipendente dall'ingresso rimane 2^t (a meno del coefficiente).

***

Consideriamo l'ingresso:

$$u(t) = \sin 2t$$

Trasformandola si ha:

$$U(z) = \frac{z \sin 2}{z^2 - 2z\cos 2 + 1}$$

Nota che i termini trigonometrici che appaiono sono semplicemente delle costanti: $\sin 2 \approx 0{,}909$ e $\cos 2 \approx -0{,}416$. Si ha che:

$$y_F(z) = \frac{z^2 \sin 2}{(z+1)(z^2 - 2z\cos 2 + 1)}$$

Notiamo che la funzione ottenuta è *strettamente propria*, perciò non c'è bisogno di dividere per z e possiamo scomporre in fratti semplici direttamente. Le radici di $z^2 - 2z\cos 2 + 1$ sono, banalmente:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2\cos(2) \pm \sqrt{4\cos^2(2) - 4}}{2} = \\ &= \cos(2) \pm \sqrt{\cos^2(2) - 1} = \\ &= \cos(2) \pm \sqrt{-\sin^2(2)} \\ &= \cos(2) \pm j\sin(2) = \\ &= e^{\pm 2j} \end{aligned}$$

Nota: continueremo i calcoli con la versione esponenziale ($e^{\pm 2j}$) invece che con la versione trigonometrica ($\cos 2 \pm j \sin 2$) solo perché è più elegante e compatta, ma entrambe sono equivalenti (il professore ha usato, questa volta, quella trigonometrica, ma non c'è assolutamente differenza). Abbiamo, allora:

$$y_F(z) = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z - e^{2j}} + \frac{R_2^*}{z - e^{-2j}}$$

Calcoliamo i residui:

$$R_1 = \lim_{z\to -1} \frac{z^2 \sin 2}{z^2 - 2z\cos 2 + 1} = \frac{\sin 2}{1 + 2\cos 2 + 1} = \frac{\sin 2}{2(1+\cos 2)}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \lim_{z\to e^{2j}} (z - e^{2j}) \frac{z^2 \sin 2}{(z+1)(z^2 - 2z\cos 2 + 1)} = \\ &= \lim_{z\to e^{2j}} \frac{z^2 \sin 2}{(z+1)(z-e^{-2j})} = \\ &= \frac{e^{4j}\sin 2}{(e^{2j}+1)(e^{2j}-e^{-2j})} = \\ &= \frac{e^{4j}\sin 2}{2j(e^{2j}+1)\left(\frac{e^{2j}-e^{-2j}}{2j}\right)} = \\ &= \frac{e^{4j}\sin 2}{2j(e^{2j}+1)\sin 2} = \\ &= -\frac{je^{4j}}{2(e^{2j}+1)} \end{aligned}$$

Questo numero complesso, una volta razionalizzato, avrà la sua parte reale R_a e la parte immaginaria R_b, che ora non calcoleremo. Abbiamo allora:

$$y_F(z) = \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_a + jR_b}{z - e^{2j}} + \frac{R_a - jR_b}{z - e^{-2j}}$$

Non sappiamo anti-trasformare queste quantità, perciò è utile *moltiplicare per z*: in questo modo, però, bisogna tener conto che stiamo calcolando l'anti-trasformata della funzione *anticipata*, ovvero stiamo calcolando $y_F(t+1)$:

$$zy_F(z) = \frac{z}{z+1} R_1 + \frac{z}{z-e^{2j}}(R_a + jR_b) + \frac{z}{z-e^{-2j}}(R_a - jR_b)$$

Nota: il discorso di moltiplicare per z può essere fatto anche individualmente, *per un singolo termine*, e non necessariamente per tutta la funzione; se serviva una z al numeratore solamente per il termine di R_1, avrei potuto moltiplicare per z solo R_1, anti-trasformare, e poi ritardare solo quel termine.

Per quanto riguarda l'anti-trasformazione dei termini complessi, ovvero $\frac{z}{z-e^{2j}}(R_a + jR_b)$ e $\frac{z}{z-e^{-2j}}(R_a - jR_b)$, è possibile procedere in due modi: uno, quello illustrato sopra, è anti-trasformare direttamente lasciando l'esponenziale immaginario $e^{\pm 2j}$; l'altro è quello di effettuare il prodotto tra i due termini e cercare di ricondurlo a una forma simile a quella della trasformata del seno o del coseno. Il primo procedimento, in genere, è più veloce; in questo caso viene:

$$\begin{aligned} y_F(t+1) &= R_1(-1)^t + (R_a + jR_b)e^{2jt} + (R_a - jR_b)e^{-2j} = \\ &= R_1(-1)^t + R_a(e^{2jt} + e^{-2jt}) + jR_b(e^{2jt} - e^{-2jt}) = \\ &= R_1(-1)^t + 2R_a\cos 2t - 2R_b \sin 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \quad y_F(t) &= R_1(-1)^t + 2R_a \cos\big(2(t-1)\big) - 2R_b \sin\big(2(t-1)\big) = \\ &= R_1(-1)^t + 2R_a\cos(2t-2) - 2R_b\sin(2t-2) \end{aligned}$$

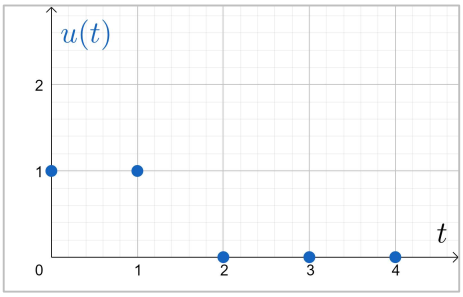
Anche questa volta, come negli esempi precedenti, ci sono due parti di termini nella risposta forzata: la parte dipendente dal sistema, $R_1(-1)^t$, e la parte che è dipendente dall'ingresso. In questo caso, l'ingresso è un seno e abbiamo ottenuto dei termini seno e coseno.

Intuizione e funzioni

Immaginiamo di avere un sistema a tempo discreto con

$$W(z) = \frac{1}{z}$$

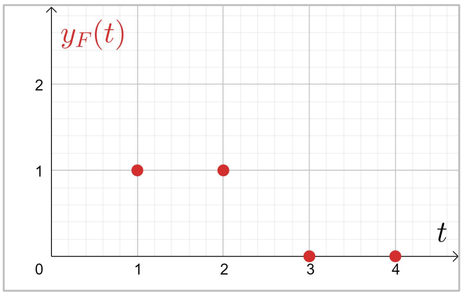
e prendiamo un ingresso $u(t)$ fatto in questo modo:



Che grafico avrà l'uscita forzata $y_F(t)$? In questo caso, è immediato: $W(z) = z^{-1}$, e sappiamo che moltiplicare per z^{-1} nel dominio di z, risulta in un *ritardo* della funzione, ovvero, graficamente, in uno spostamento verso "destra" della funzione. Una breve dimostrazione:

$$y_F(t) = Z^{-1}[y_F(z)] = Z^{-1}[U(z)W(z)] = Z^{-1}[z^{-1}U(z)] = u(t-1)$$

Ovvero, $y_F(t)$ avrà lo stesso grafico di $u(t)$ ma "spostato verso destra" di 1:

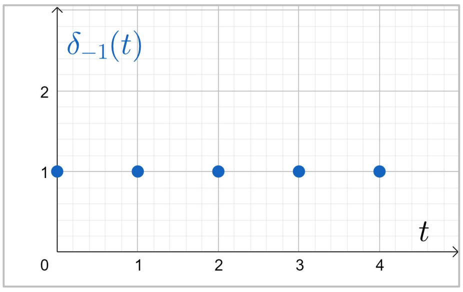


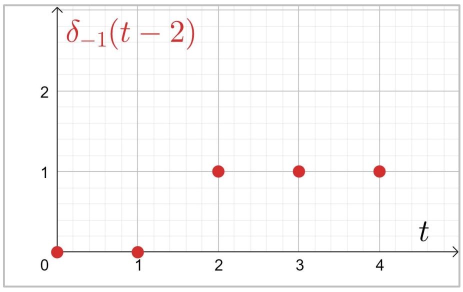
Se $W(z)$ fosse stato uguale a z, allora si avrebbe un *anticipo* della funzione in ingresso, ma questo *non è possibile*: non si può sapere "adesso" quello che accadrà nel prossimo istante, si perderebbe la *causalità*, quindi il sistema non avrebbe più un senso fisico.

Nel caso descritto prima, $W(z)$ è una funzione facilmente trattabile che corrisponde semplicemente a un ritardo della funzione; se così non fosse (oppure se si vuole semplicemente verificare che ciò sia vero numericamente), si può passare ai numeri. Per farlo, serve un'espressione analitica di $u(t)$. Nell'esempio grafico, $u(t)$ corrisponde alla funzione:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dobbiamo cercare di “costruire” analiticamente questa funzione. Un modo è pensare a $u(t)$ come costante, a cui *togliamo* i termini dopo $t = 2$; in altre parole, $u(t)$ è una funzione gradino a cui è stata tolta un'altra funzione gradino spostata in $t = 2$:





Risulta evidente come $u(t)$ risulti allora la differenza della funzione a sinistra, $\delta_{-1}(t)$, con quella a destra, $\delta_{-1}(t-2)$:

$$u(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2)$$

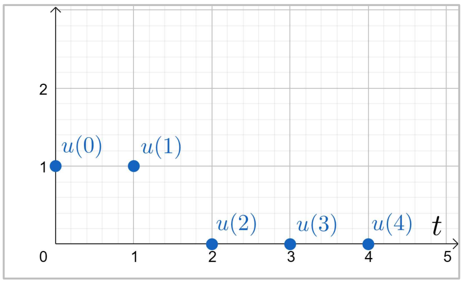
A questo punto procediamo col calcolo di $U(z)$:

$$\begin{aligned} U(z) &= Z[\delta_{-1}(t)] - Z[\delta_{-1}(t-2)] \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} Z[\delta_{-1}(t)] - z^{-2} Z[\delta_{-1}(t)] = \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

*Moltiplicare per z^{-1} corrisponde a un ritardo di 1 della funzione; a noi serve un ritardo di 2, perciò moltiplichiamo due volte per z^{-1}, ovvero moltiplichiamo per z^{-2}. Possiamo calcolare $U(z)$ in questo modo, oppure ricorrere alla definizione:

$$U(z) = \sum_{t=0}^{\infty} u(t) z^{-t} = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + u(3)z^{-3} + \cdots$$

In questo caso, $u(2), u(3), \ldots$ sono tutti nulli:



Per cui, si ha che:

$$U(z) = \underbrace{u(0)}_{1} + \underbrace{u(1)}_{1} z^{-1} + \underbrace{u(2)z^{-2} + \cdots}_{0} = 1 + \frac{1}{z}$$

A questo punto:

$$y_F(z) = U(z)W(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$\implies y_F(t) = Z^{-1}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right] = Z^{-1}\left[z\frac{1}{z}\right] + Z^{-1}\left[z^2\frac{1}{z^2}\right] = \delta(t-1) + \delta(t-2)$$

La funzione ottenuta è esattamente la funzione di $y_F(t)$ che abbiamo ottenuto graficamente.

Il ragionamento può essere fatto anche da un'altra prospettiva: il sistema e tutte le operazioni annesse sono *lineari*; perciò, possiamo scrivere

$$u(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2) = u_1(t) + u_2(t)$$

Ponendo $u_1(t) = \delta_{-1}(t)$ e $u_2(t) = -\delta_{-1}(t-2)$. In questo modo, possiamo calcolare $y_F(z)$ linearmente:

$$U(z) = Z[u_1(t)] + Z[u_2(t)] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z^2(z-1)} = U_1(z) + U_2(z)$$

$$\implies y_F(z) = W(z)U_1(z) + W(z)U_2(z) = y_{F1}(z) + y_{F2}(z)$$

Inoltre, notiamo che $U_2(z) = \frac{-1}{z^2}U_1(z)$, ovvero che

$$y_{F2}(z) = -\frac{1}{z^2}y_{F1}(z)$$

Perciò si avrà che:

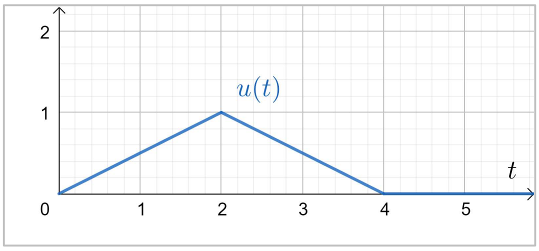
$$\begin{aligned} y_F(t) &= Z^{-1}[y_{F1}(z) + y_{F2}(z)] = \\ &= Z^{-1}[y_{F1}(z) - z^{-2}y_{F1}(z)] = \\ &= y_{F1}(t) - y_{F1}(t-2) \end{aligned}$$

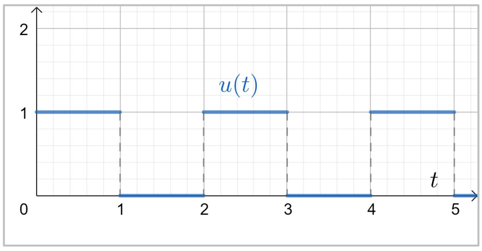
In definitiva, se riusciamo a scrivere l'ingresso come combinazione di funzioni "uguali" risparmiamo, come abbiamo visto, parecchi calcoli. Lo stesso discorso si applica anche nel caso del tempo continuo.

L'esercizio proposto dal professore è, nel caso del tempo continuo, considerare

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

e studiare la risposta forzata prendendo come input i seguenti ingressi:





Dove il secondo si ripete all'infinito[1].

[1] Questo esercizio verrà svolto e pubblicato prossimamente come post su Patreon.

Teoria dei Sistemi

Lezione 21 (8 novembre 2021)

Trasformate nel tempo discreto campionato

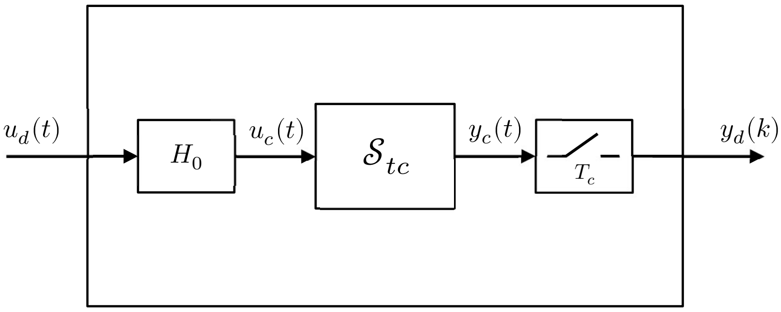
Abbiamo visto come possiamo esprimere i sistemi a tempo continuo nel dominio trasformato, ovvero:

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s)x_0 + H(s)U(s) \\ Y(s) = \Psi(s)x_0 + W(s)U(s) \end{cases}$$

e possiamo fare la stessa cosa per i sistemi a tempo discreto, con la trasformata Z:

$$\begin{cases} X(z) = \Phi(z)x_0 + H(z)U(z) \\ Y(z) = \Psi(z)x_0 + W(z)U(z) \end{cases}$$

Abbiamo visto, poi, che esistono dei sistemi a tempo discreto che non sono altro che sistemi a tempo continuo che vengono "osservati" ad intervalli di tempo regolari: vediamo, ora, come possiamo esprimerli nel dominio trasformato. Consideriamo allora un sistema a tempo continuo $\mathcal{S}_{tc}$, che avrà un ingresso a tempo discreto $u_d(t)$, reso continuo grazie ad un dispositivo di tenuta di ordine zero[1] H_0; l'uscita (continua) $y_c(t)$ di questo sistema sarà campionata mediante un campionatore a tempo T_c (tempo di campionamento) e diventerà un'uscita $y_d(k)$ discreta:



Se ci interessa solamente il legame ingresso-uscita, possiamo rappresentare il sistema tramite la sua funzione di trasferimento $W(s)$. In particolare, vediamo come rappresentare la trasformata $W(z)$ in termini della trasformata $W(s)$. Dobbiamo, quindi, prendere un ingresso $u_d(t)$, tenerlo con una tenuta di ordine zero per renderlo continuo e ottenere $u_c(t)$, passare questo dentro il sistema a tempo continuo producendo un'uscita $y_c(t)$ che va campionata per ottenere $y_d(k) = y_c(kT_c)$.

Poniamo, per semplicità di calcolo, $p = q = 1$, ovvero ingresso e uscita unidimensionali. Sempre per semplicità, scegliamo un ingresso facile da campionare e da calcolare; scegliamo allora l'ingresso costante $u_d(t) = \delta_{-1}(t)$ dove $\delta_{-1}(t)$ è la funzione gradino discreta. È immediato vedere che, tenendo l'ingresso con tenuta di ordine zero, otteniamo un ingresso continuo sempre costante $u_c(t) = \delta_{-1}(t)$ dove, questa volta, $\delta_{-1}(t)$ è la funzione gradino continua. A questo punto, si trova che

$$y_F(s) = W(s)U(s) = W(s)\ \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = W(s)\frac{1}{s}$$

$$\implies\ y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right]$$

dove y_F è la parte forzata dell'uscita continua; indicheremo con y_{dF} la parte forzata dell'uscita discreta.

[1] Rivedere la lezione 10 del 14 ottobre 2021 per la spiegazione dei sistemi discreti campionati.

Ora, dobbiamo campionare $y_d(k)$, che non è altro che l'uscita continua $y_c(t)$ calcolata negli intervalli discreti rispetto al tempo di campionamento T_c (continuiamo a considerare solo la parte forzata):

$$y_{dF}(k) = y_F(kT_c) = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right]_{t=kT_c}$$

Per calcolare la $W(z)$ che stiamo cercando, consideriamo che:

$$y_{dF}(z) = W(z)U(z)$$

$$\text{dove } y_{dF}(z) = Z[y_{dF}(k)] = Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right]_{t=kT_c}\right]$$

Se consideriamo sempre l'ingresso costante $u_d(t) = \delta_{-1}(t)$, si ha $U(z) = Z[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z-1}$, da cui:

$$Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right]_{t=kT_c}\right] = W(z)\ \frac{z}{z-1}$$

$$\implies\ W(z) = Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right]_{t=kT_c}\right]\frac{z-1}{z}$$

Esempio pratico

Consideriamo l'ingresso $u_d(t) = \delta_{-1}(t)$ come abbiamo fatto finora e

$$W(s) = \frac{1}{s+10}$$

Per trovare $W(z)$, troviamo prima $y_F(t)$:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+10)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+10}\right] = R_1 + R_2 e^{-10t}$$

dove $R_1 = \frac{1}{10}$ e $R_2 = -\frac{1}{10}$. Ora dobbiamo campionare, ovvero dobbiamo calcolare $y_{dF}(k) = y_F(kT_c)$:

$$y_{dF}(k) = \left[R_1 + R_2 e^{-10t}\right]_{t=kT_c} = R_1 + R_2 e^{-10T_c k}$$

Trasformiamo in z l'uscita ottenuta:

$$Z[y_F(kT_c)] = Z\left[R_1 + R_2(e^{-10T_c})^k\right] = \frac{z}{z-1}R_1 + \frac{z}{z-e^{-10T_c}}R_2$$

Infine, moltiplichiamo per $\frac{z-1}{z}$ per ottenere $W(z)$:

$$W(z) = \left(\frac{z}{z-1}R_1 + \frac{z}{z-e^{-10T_c}}R_2\right)\frac{z-1}{z} = R_1 + \frac{z-1}{z-e^{-10\ \ _c}}R_2$$

Quando abbiamo studiato i sistemi discreti campionati, avevamo visto che gli autovalori del tempo discreto non erano altro che:

$$\lambda_d = e^{\lambda_c T_c}$$

e, in effetti, siamo partiti da un autovalore $\lambda_c = -10$:

$$W(s) = \frac{1}{s+10} = \frac{1}{s-\lambda_c}$$

e abbiamo trovato che l'autovalore del tempo discreto corrispondente è $\lambda_d = e^{\lambda_c T_c}$:

$$W(z) = R_1 + \frac{z-1}{z-e^{-10T_c}} R_2 = R_1 + \frac{z-1}{z-\lambda_d} R_2$$

Risposta a regime permanente

Abbiamo notato, già dalla scorsa lezione, che la risposta forzata è formata dalla somma di due contributi, una parte che "nasce" dai poli di W, e l'altra che "nasce" dai poli introdotti dall'ingresso. Ovvero, se abbiamo

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

e una certa espressione di $u(t)$ (o $U(s)$), avremo che:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}U(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \overbrace{\cdots}^{\substack{\text{parte dipendente} \\ \text{da } U(s)}}\right] = R_1 e^{-t} + R_2 e^{-2t} + \cdots$$

dove l'anti-trasformata della parte dipendente da $U(s)$ è un'espressione "simile" all'ingresso. In particolare, più i termini dipendenti da W tendono a zero, più l'uscita tende a somigliare all'ingresso. Per l'uscita libera vale la stessa cosa: se i modi naturali presenti nell'uscita libera tendono a zero per $t \to +\infty$, questa tende a sparire. In altre parole, considerando l'uscita:

$$y(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

Se Ψ (che è molto simile a W a meno di modi naturali che potrebbero comparire in più) tende a zero, allora si ha che per $t \to +\infty$ l'uscita *non dipende* da $x(t_0)$; in particolare, andrà a zero anche la parte di uscita dipendente da W, ovvero l'uscita stessa assomiglierà sempre di più all'ingresso. Se questo accade, il sistema non dipenderà dalla condizione iniziale $x(t_0)$, per $t \to +\infty$.

In altre parole, il vantaggio di avere un sistema non dipendente da $x(t_0)$ è che il limite per $t \to +\infty$ dell'uscita corrisponde praticamente al limite per $t \to +\infty$ dell'ingresso. Il problema è che, fisicamente e ingegneristicamente, non si può utilizzare l'uscita se vale per un tempo tendente all'infinito. Per dare una definizione formale, allora, sfruttiamo il fatto che studiamo sistemi stazionari: se facciamo lo stesso esperimento in un altro momento, il risultato non cambia. Allora, invece di far aumentare t, facciamo diminuire t_0, così da avere, invece del limite per $t \to +\infty$, il limite per $t_0 \to -\infty$. Il risultato che otteniamo è una grandezza che vale in t, che è possibile utilizzare a livello fisico:

$$\lim_{t_0 \to -\infty} y(t) = \lim_{t_0 \to -\infty}\left(\Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau\right) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

Questo vale sempre e solo quando le leggi temporali in Ψ e in W tendono a zero (ed è anche il motivo per cui la parte $\Psi(t-t_0)x(t_0)$ sparisce nel limite). Se il risultato del limite esiste, allora chiamiamo questa quantità *uscita a regime permanente*, e la indichiamo con $y_{RP}(t)$:

$$y_{RP}(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

Ripetiamo ancora che, per avere y_{RP}, deve essere verificato che $\lim_{t\to-\infty} \Psi(t-t_0)x(t_0) = 0$ e deve esistere l'integrale qui sopra. La prima condizione è soddisfatta quando gli autovalori osservabili sono tutti con parte reale negativa:

$$\lim_{t\to-\infty} \Psi(t-t_0)x(t_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Re(\Lambda_o) < 0$$

Inoltre, l'integrale sopra deve continuare ad essere sempre *sommabile*, ovvero l'ingresso u deve essere tale che, moltiplicato per W (che contiene espressioni esponenziali), vada a zero; la maggior parte delle volte è così. Ricapitolando, se il prodotto $W(t-\tau)u(\tau)$ *non diverge*, allora $Re(\Lambda_o) < 0$ è *condizione necessaria e sufficiente* affinché esista $y_{RP}(t)$. Tuttavia, anche se questo è vero matematicamente, in generale preferiamo che sia soddisfatta la condizione

$$Re(\Lambda) < 0$$

che è una condizione solo sufficiente (non necessaria) ma, se fosse vera, avremmo molti meno problemi a livello di stabilità del sistema.

Espressione dell'uscita come regime permanente e transitoria

La risposta $y(t)$ ha una parte libera e una parte forzata:

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t) \tag{1}$$

Supponendo che $y_{RP}(t)$ sia calcolabile, dove si colloca all'interno di questa espressione? Sicuramente non è $y_L(t)$, perché tende a zero; non coincide neanche con $y_F(t)$, perché ci sono delle parti di essa che tendono a 0, tuttavia è *una parte* di risposta forzata, ovvero quella che dipende dall'ingresso. Tutto il resto dell'uscita che non fa parte dell'uscita a regime permanente possiamo chiamarlo *uscita transitoria* e indicarla con $y_T(t)$. A questo punto, possiamo esprimere l'uscita come:

$$y(t) = y_T(t) + y_{RP}(t) \tag{2}$$

Dentro $y_T(t)$ c'è tutta la risposta libera $y_L(t)$, più la parte di uscita forzata dipendente da W. Le due espressioni (1) e (2) sono due modi equivalenti di esprimere l'uscita del sistema.

Studio dell'uscita a regime permanente con vari ingressi

Studiamo l'uscita a regime permanente ponendo come ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ e supponendo che $W(s)$ abbia modi naturali tendenti a zero. Abbiamo allora:

$$y_{RP}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} W(t-\tau)\cdot 1\ d\tau \stackrel{2}{=} \int_{\theta=0}^{\theta=+\infty} W(\theta)\ d\theta$$

L'integrale assomiglia al calcolo della trasformata di Laplace $W(s)$; manca, però, il termine $e^{-s\theta}$ (invece di t compare θ in questo caso, ma non cambia nulla). Notiamo, però, che il termine $e^{-s\theta}$ è nullo se $s = 0$; potremmo, allora, moltiplicare dentro l'integrale per $e^{-s\theta}$, e poi calcolare l'integrale per $s = 0$:

$$\int_0^{+\infty} W(\theta)\ d\theta = \int_0^{+\infty} W(\theta)e^{-s\theta}\ d\theta\,\bigg|_{s=0}$$

Le due forme sono equivalenti, visto che ponendo $s = 0$ a destra si ottiene esattamente l'espressione a sinistra; tuttavia, sappiamo come calcolare l'espressione a destra: vale esattamente $W(s)|_{s=0}$, che è semplicemente una costante. Allora, se abbiamo:

$$W(s) = \frac{3}{(s+2)^2}$$

con l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$, già sappiamo che l'uscita a regime permanente sarà

$$y_{RP}(t) = W(s)|_{s=0} = \frac{3}{(s+2)^2}\bigg|_{s=0} = \frac{3}{4}$$

Se il sistema rappresentasse un treno in movimento e volessimo, per esempio, regolarne la velocità a 30 km/h costanti, basterebbe considerare l'ingresso $u(t) = k\delta_{-1}(t)$, così che l'uscita sarà

$$y_{RP}(t) = kW(s)|_{s=0} = k\frac{3}{4}$$

e porre $k = 40$ perché quest'espressione sia uguale a 30. Poter "prevedere" cosa mettere in ingresso per ottenere una certa uscita è molto utile.

***

Proviamo, ora, a mettere l'ingresso $u(t) = t$, per $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)\cdot\tau\ d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta)(t-\theta)\ d\theta = \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta)t\ d\theta + \int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)\ d\theta \end{aligned}$$

[2] Il calcolo dei limiti di integrazione è:

$$\begin{aligned} \tau = -\infty &\implies \theta = t - \tau = t + \infty = +\infty \\ \tau = t &\implies \theta = t - \tau = t - t = 0 \end{aligned}$$

Inoltre, $d\theta = d(t-\tau) = -d\tau$, il che risulta in un segno meno che moltiplica l'integrale. Scambiando gli estremi di integrazione, il segno meno si annulla.

Nel primo integrale basta portare t fuori, visto che non dipende da θ, e calcolare l'integrale come fatto per $u(t) = \delta_{-1}(t)$. Per quanto riguarda il secondo integrale, considero sempre l'espressione della trasformata:

$$W(s) = \int_0^{+\infty} W(\theta)e^{-s\theta}\, d\theta$$

Per far comparire un termine θ che moltiplica tutto, possiamo prendere la derivata:

$$\frac{d}{ds}W(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} W(\theta)e^{-s\theta}\, d\theta = \int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)e^{-s\theta}\, d\theta$$

A questo punto, basta calcolare in $s = 0$ per togliere il termine $e^{-s\theta}$. Abbiamo allora, in definitiva:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= \int_0^{+\infty} W(\theta)t\, d\theta + \int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)\, d\theta = \\ &= tW(s)|_{s=0} + \left[\frac{d}{ds}W(s)\right]_{s=0} \end{aligned}$$

***

Infine, consideriamo l'ingresso

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}$$

Il ragionamento è simile:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)\cdot\frac{\tau^k}{k!}\, d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta)\frac{(t-\theta)^k}{k!}\, d\theta \end{aligned}$$

Considerando il binomio di Newton:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i}$$

otteniamo, sostituendo:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= \int_0^{+\infty} W(\theta)\frac{(t-\theta)^k}{k!}\, d\theta = \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta)\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-\theta)^i\, t^{k-i}\, d\theta \\ &= \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k!}\binom{k}{i}t^{k-i}\int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)^i\, d\theta = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\frac{t^{k-i}(-1)^i}{i!\,(k-i)!}\int_0^{+\infty} W(\theta)\,\theta^i\, d\theta \end{aligned}$$

Anche se sembra un'espressione complicata, in realtà sono solo calcoli numerici da svolgere e la quantità

$$M_i = \int_0^{+\infty} W(\theta)\,\theta^i\, d\theta$$

viene chiamata *momento di ordine i* ed è un *numero* (una costante). Nota: in particolare, se $i = 1$, questa quantità corrisponde alla quantità fisica chiamata *momento d'inerzia*. Per calcolarlo notiamo che, come abbiamo visto:

$$\frac{d}{ds}W(s) = \int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)e^{-s\theta}\, d\theta$$

e, se continuiamo a derivare, otteniamo:

$$\frac{d^2}{ds^2}W(s) = \int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)^2 e^{-s\theta}\, d\theta$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^i}{ds^i} = \int_0^{+\infty} W(\theta)(-\theta)^i e^{-s\theta}\, d\theta$$

Ora, non resta che calcolare in $s = 0$ per ottenere le quantità $(-1)^i M_i$:

$$(-1)^1 M_1 = \left[\frac{d}{ds}W(s)\right]_{s=0} = -\int_0^{+\infty} W(\theta)\,\theta\, d\theta$$

$$\vdots$$

$$(-1)^i M_i = \left[\frac{d^i}{ds^i}W(s)\right]_{s=0} = (-1)^i \int_0^{+\infty} W(\theta)\theta^i\, d\theta$$

In definitiva, l'espressione dell'uscita a regime permanente per $u(t) = \frac{t^k}{k!}$ è:

$$y_{RP}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{i!\,(k-i)!} \left[\frac{d^i}{ds^i}W(s)\right]_{s=0}$$