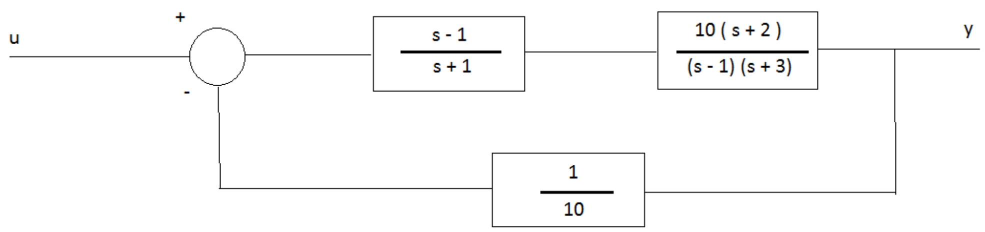
Compiti di Teoria dei Sistemi

1 Compito 11/06/2012

1. E' possibile rendere il sistema asintoticamente stabile con una reazione dallo stato?
2. E' possibile ricostruire lo stato dalle misure di ingresso e uscita?
3. E' possibile renderlo asintoticamente stabile con una reazione dall'uscita?
4. Spiegare a parole quali sono le caratteristiche di una rappresentazione con lo stato a tempo discreto equivalente ad un sistema a tempo continuo.
5. Assegnato:



   - Individuare una rappresentazione con lo stato equivalente, sostituendo rappresentazioni con lo stato di singoli blocchi.
   - Effettuare analisi dei modi.
   - Calcolare la risposta a reg. permanente, se esiste, per sen(t-1).
   - Calcolare risposta indiciale e guadagno.
   - Significato del guadagno?
   - Studiare raggiungibilità e osservabilità.
   - Scomporre secondo Kalman.
   - Stabilità interna ed esterna.

2 Compito 16/01/2012

1. Assegnato:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \end{pmatrix} x$$

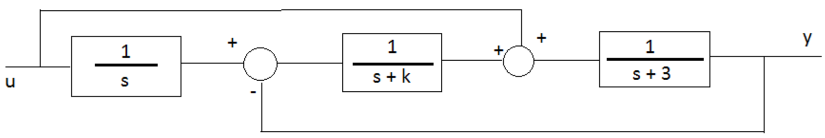
   - Studiare eccitabilità e osservabilità
   - Calcolare W(t).
   - Tracciare i diagrammi di Bode.
   - Stabilità interna ed esterna.

2. Calcolare il tempo discreto di:
$$\frac{s-1}{s(s+2)}$$
3. Relazione tra poli di W(s) ed autovalori.
4. Definizione formale di guadagno e significato fisico.

5. Dato:
$$\frac{k(s+1)}{s(s-10)}$$
studiare la stabilità con k a CR unitaria.

3 Compito 07/03/2011

1. Assegnato il sistema:



- Calcolare W(s) e rappresentazione con lo stato del sistema.
- Studiare la stabilità al variare di k.
- Posto k=1, calcolare la risposta indiciale.
- Tracciare i diagrammi di Bode e polare.

2. Si calcoli il sistema a tempo discreto equivalente di:
$$W(s) = \frac{k}{1+\tau\, s}$$

3. I modi naturali: definizione e parametri caratteristici.

4. Si dimostri che, assegnato:
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ x(0) = 0$$
al tempo k=2 si possono raggiungere tutti e soli gli stati
$$x_R \in Im(B\ AB)$$

4 Compito 06/11/2012

1. Si consideri il sistema a tempo continuo:
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + 2u(t)$$

- Si studi l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi.
- Si calcolino le matrici
$$\Phi(t), H(t), \Psi(t), W(t)$$
- Si calcoli l'insieme degli stati iniziali per cui la risposta in evoluzione libera nello stato tende asintoticamente a zero.
- Si calcoli la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente all'ingresso u(t)=t.

2. Si traccino i diagrammi di Bode e polare per:
$$F(s) = \frac{10-s}{(s+10)(s^2+s+1)}$$

3. La risposta a regime permanente ad ingressi sinusoidali: sistemi a tempo continuo.

5 Compito 02/02/2010

1. Un sistema lineare e stazionario a tempo continuo è descritto dalla seguente matrice di funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{s+2} \\ \\ \frac{s+5}{s^2+5s+6} \end{pmatrix}$$

   Si calcoli una realizzazione in forma canonica raggiungibile ed una in forma canonica osservabile.

2. Si consideri il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ y &= 3x_2 \end{aligned}$$

   - Si studi l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali.
   - Si indichino quali stati iniziali eccitano un solo modo naturale alla volta.
   - Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.
   - Si calcoli la risposta forzata all'ingresso

$$u(t) = \sin(t-1)\delta_{-1}(t)$$

   - Si disegni uno schema di simulazione.

3. Si traccino i diagrammi di Bode per un sistema la cui funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{s^2 + 9s - 10}{(s^2 + s + 1)(s - 10)}$$

4. Si calcoli la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente all'ingresso a gradino per il sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W(z) = \frac{z + 10}{z - 0.5}$$

5. I modi naturali per i sistemi a tempo continuo.

6 Compito 07/02/2012

1. Si consideri il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

   - Eseguire scomposizione di Kalman.
   - Studiare eccitabilità e osservabilità dei modi.
   - Stabilità interna ed esterna.
   - Calcolare la W(t).

2. (testo incompleto)

7 Compito 08/01/2010

Dato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - 2x_3 + u \\ y &= x_1 + x_3 \end{aligned}$$

- Studiare raggiungibilità e osservabilità degli autovalori.

- Calcolare le matrici
$$\Phi(t), H(t), \Psi(t), W(t)$$
- Calcolare l'insieme degli stati iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato tende a 0, al crescere del tempo.
- Tracciare lo schema di simulazione.
- Calcolare la risposta forzata associata all'ingresso
$$u(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2)$$
Quindi calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente.
- Si tracci qualitativamente l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale
$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8 Compito 11/02/2011

1. Sia dato il sistema a tempo continuo:
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$
   - Studiare l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi.
   - Calcolare la risposta indiciale traslata, cioé
   $$W_{-1}(t-1)\,\delta_{-1}(t-1)$$
   - Calcolare la risposta forzata in uscita per l'ingresso
   $$u(t) = \sin(t)\,\delta_{-1}(t-1)$$
   - Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente per l'ingresso
   $$u(t) = \sin(t)\,\delta_{-1}(t)$$
   - Studiare la stabilità interna ed esterna in ogni stato.
   - Tracciare i diagrammi di bode e polare della funzione di trasferimento del sistema.
   - Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con T=2 sec.
2. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema con un ingresso e un'uscita con guadagno k=10, una costante di tempo τ = -1 e un polo in zero. Il guadagno di questo sistema può essere calcolato sperimentalmente? Giustificare la risposta.
3. La risposta a regime permanente per i sistemi a tempo discreto.
4. Mostrare che in un sistema a tempo discreto equivalente:
$$\lambda_i^D = e^{\lambda_i T}$$

Nome e Cognome:... Matricola:................

Fondamenti di Automatica

8 Gennaio 2013

Compito **B**

[1] Si consideri il sistema a tempo continuo

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x - u
\end{aligned}
$$

a. Si studi l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi al variare del parametro a

b. Posto $a = -2$ si calcoli la funzione di trasferimento e si traccino i diagrammi di Bode corrispondenti

c. Posto $a = -2$ si calcoli la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente all'ingresso $u(t) = t\delta_{-1}(t-1) - sent\,\delta_{-1}(t)$

d. Sempre per $a = -2$ si calcoli il modello discreto equivalente ottenuto campionando con passo $T = 2sec$.

Soluzioni del compito di
Teoria dei sistemi
8 gennaio 2013
Compito A

A cura di:
Raffaello Bonghi - bonghi@dis.uniroma1.it
Giovanni Mattei - mattei@dis.uniroma1.it

1. Assegnato il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

dati:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -2\,a & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2\,a+2 & a-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 1$$

con $a = -2$

- Studiare dal punto di vista dell'analisi modale, quindi calcolare $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
- Indicare per quali stati iniziali l'evoluzione libera non presenta oscillazioni;
- Stabilità interna ed esterna;
- Calcolare, se possibile, la risposta a regime $y_r(t)$ dato un ingresso $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Sostituendo nella matrice A con $a = -2$ si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- Occorre innanzi tutto determinare gli autovalori di A, ossia le radici del polinomio caratteristico:
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda^2 + 4\lambda + 5)(\lambda + 1) = 0$$
si ricavano pertanto la coppia di autovalori complessi $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ e l'autovalore reale $\lambda_3 = -1$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando dall'autovettore reale λ_3:
$$(A - \lambda_3 I)\, u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} u_1 = 0$$
si trova quindi l'autovettore
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$
si sceglierà per semplicità il valore $\alpha = 1$.

Per quanto riguarda la coppia di autovettori complessi si otterrà:

$$(A - \lambda_2 I)\, u_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 4 & 2 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ -1 & -2 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}d \\ b+\mathrm{i}e \\ c+\mathrm{i}f \end{pmatrix} = 0$$

ottenendo il vettore nella forma

$$u_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \mathrm{i}\alpha \\ 0 \\ \mathrm{i}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

anche qui per semplicità si sceglierà $\alpha = 1$. Si ottiene quindi la coppia di autovettori definita come:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice degli autovettori destri è:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda gli autovettori sinistri questi si calcolano imponendo la condizione di ortonormalità, ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_{2,1}^T \\ v_{2,2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Si può quindi trasformare la matrice A nella matrice:

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Adesso è immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} T =$$

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t)+\sin(t)) & 2e^{-t} - 2e^{-2t}\cos(t) + 2e^{-2t}\sin(t) & 2e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ -e^{-2t}\sin(t) & 2e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-t} & e^{-2t}(\cos(t)-\sin(t)) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t)$:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-t} - 4e^{-2t}\sin(t) \\ -e^{-t} \\ 2e^{-t} - 3e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(t) & 2e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B + D = 1 - e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\sin(t) \tag{2}$$

- Per poter trovare quali siano gli stati iniziali per cui l'evoluzione libera non presenta oscillazioni è sufficiente osservare che, nelle coordinate trasformate, la matrice di transizione nello stato:

$$\Phi(t) = T^{-1}e^{Dt}T$$

è diagonale a blocchi e presenta una struttura tale per cui, partendo da tutti gli stati iniziali $z_0 = [k\ 0\ 0]$, si ottiene una soluzione non oscillante $z(t) = e^{Dt}z_0$, infatti si ha:

$$z(t) = e^{Dt}z_0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} z_0$$

Utilizzando quindi il cambio di coordinate tale che $z = Tx$ (con T precedentemente calcolata nella 1), gli stati iniziali cercati sono del tipo:

$$x_0 = T^{-1}z_0 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$$

Infatti, a partire da essi, le soluzioni che si ottengono sono del tipo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2ke^{-t} \\ ke^{-t} \\ -2ke^{-t} \end{pmatrix}$$

- Dati quindi gli autovalori del sistema in esame

$$\Lambda = \{-1, -2+j, -2-j\}$$

Si ha che stabilità asintotica interna per

$$\Lambda \subset C^-$$

ove C^- indica il semipiano negativo aperto dei numeri complessi, questa condizione risulta soddisfatta in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale negativa.

Per quanto riguarda la stabilità esterna, gli autovalori simultaneamente eccitabili che osservabili, dovranno essere a parte reale negativa, ma sapengo che il sistema risulta internamente stabile questa implicherà che sarà stabile anche esternamente, infatti:

$$\Lambda_E^O \subset C^-$$

ove

$$\Lambda_E^O = \{-2+j, -2-j\}$$

- Il sistema ammette soluzione a regime permanente, in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale minore di zero, dato quindi un segnale nella forma $u(t) = u_0 \sin \omega t$ la risposta a regime sarà nella forma:

$$y_r(t) = u_0 M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) + Du(t)$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \qquad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

Dato quindi il segnale in ingresso del tipo $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$ tale segnale può essere rivisto nella forma:

$$u(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Presa quindi la funzione di trasferimento del sistema nella 2 si esegue la trasformata nel dominio di Laplace ottenendo:

$$W(s) = \frac{s(s+3)}{s^2 + 4s + 5}$$

dove il modulo e la fase sono rispettivamente

$$M(\omega)|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{5}}{4} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=1} = \arctan(2) \sim 1.1071$$

la soluzione è quindi:

$$y_r(t) \sim \frac{\sqrt{5}}{4}\cos\left(t - 0.4636\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(t)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = -\frac{1}{2}\frac{(s+\frac{1}{2})(s+1)}{(s^2-1)(s^2+3s+2)}$$

tracciare i diagrammi di Bode, rispettivamente del modulo e della fase.

Per prima cosa è necessario portare in forma di Bode la funzione di trasferimento, ottenendo:

$$W(s) = \frac{1}{8}\frac{(1+2s)}{(1+\frac{1}{2}s)(1-s)(1+s)} \tag{3}$$

Si hanno quindi un guadagno $K = \frac{1}{8}$ uno zero con constante di tempo in $\tau_1 = 2$, i poli in $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $\tau_2 = -1$ e $\tau_3 = 1$.

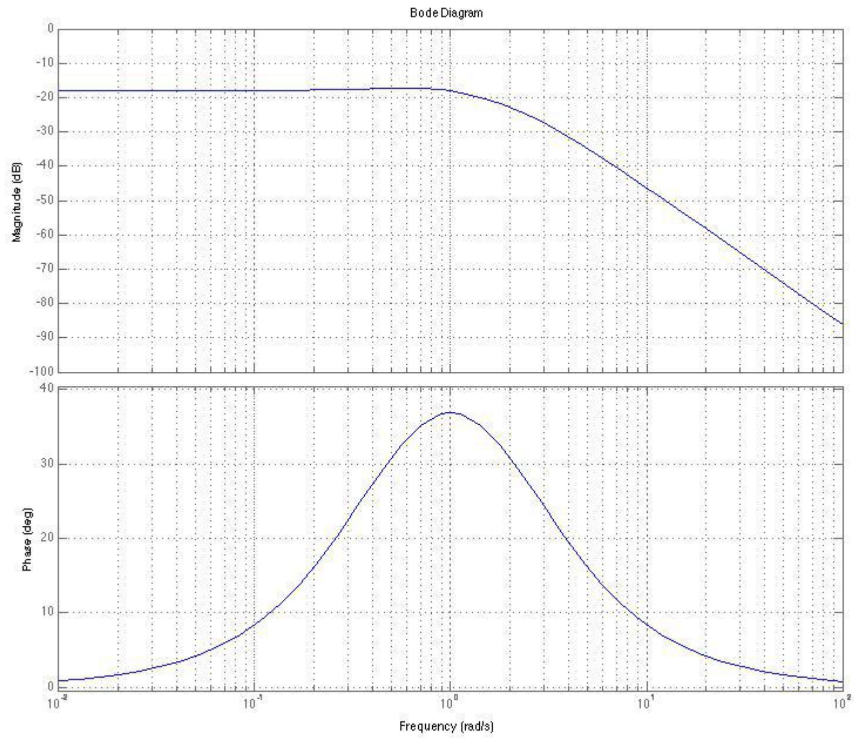


Figura 1: Diagramma di bode della funzione di trasferimento

3. Spiegare cos'è il sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo.

Il sistema tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo è una sua rappresentazione quando il segnale d'ingresso è costante a tratti su intervalli di ampiezza fissa oppure campionato e si è interessati a calcolare le evoluzioni negli istanti, detti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso. Il problema del calcolo del sistema a tempo discreto equivalente è detto anche *problema della discretizzazione*. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

il sistema a tempo discreto equivalente, detto T il tempo di campionamento, è:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_D x(k) + B_D u(k) \\ y(k) &= C_D(k) \end{aligned}$$

ove

$$A_D = e^{AT} \qquad B_D = \int_0^T e^{A\xi}\, d\xi\, B \qquad C_D = C$$

Teoria dei sistemi
8 gennaio 2013
Compito B

1. Assegnato il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}$$

dati:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -2\,a & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2\,a+2 & a-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a = -1$

- Studiare dal punto di vista dell'analisi modale, quindi calcolare $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
- Indicare per quali stati iniziali l'evoluzione libera non presenta oscillazioni;
- Stabilità interna ed esterna;
- Calcolare se possibile la risposta a regime $y_r(t)$ dato un ingresso $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Sostituendo nella matrice A con $a = -1$ si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Occore innanzi tutto determinare gli autovalori di A ossia le radici del polinomio caratteristico:
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$
si ricavano pertanto la coppia di autovalori complessi $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ e l'autovalore reale $\lambda_3 = -1$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando dall'autovettore reale λ_3:
$$(A - \lambda_3 I)\, u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0$$
si trova quindi l'autovettore
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$
si sceglierà per semplicità il valore $\alpha = 1$.
Per quanto riguarda la coppia di autovettori complessi si otterrà:
$$(A - \lambda_2 I)\, u_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 & 2 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ -1 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}d \\ b+\mathrm{i}e \\ c+\mathrm{i}f \end{pmatrix} = 0$$

ottenendo il vettore nella forma

$$u_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \mathrm{i}\alpha \\ 0 \\ \mathrm{i}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

anche qui per semplicità si sceglierà $\alpha = 1$. Si otterrà la coppia di autovettori definita come:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si otterrà quindi la matrice degli autovettori destri:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda gli autovettori sinistri questi si calcolano imponendo la condizione di ortonormalità , ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_{2,1}^T \\ v_{2,2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Si può quindi trasformare la matrice A nella matrice:

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Adesso è immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ 0 & -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix} T =$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) & 2e^{-t} - 2e^{-t}\cos(t) + 2e^{-t}\sin(t) & 2e^{-t}\sin(t) \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ -e^{-t}\sin(t) & 2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t} & e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t)$:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t} - 4e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t} \\ 2e^{-t} - 3e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) & 2e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B = -e^{-t}\cos(t) - 3e^{-t}\sin(t) \tag{5}$$

- Dati quindi gli autovalori del sistema in esame

$$\Lambda = \{-1, -1+j, -1-j\}$$

Si ha che stabilità asintotica interna per

$$\Lambda \subset C^-$$

ove C^- indica il semipiano negativo aperto dei numeri complessi, questa condizione risulta soddisfatta in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale negativa.

Per quanto riguarda la stabilità esterna, gli autovalori simultaneamente eccitabili che osservabili, dovranno essere a parte reale negativa, ma sapengo che il sistema risulta internamente stabile questa implicherà che sarà stabile anche esternamente, infatti:

$$\Lambda_E^O \subset C^-$$

ove

$$\Lambda_E^O = \{-1+j, -1-j\}$$

- Per poter trovare quali siano gli stati iniziali per cui l'evoluzione libera non presenta oscillazioni è sufficiente osservare che, nelle coordinate trasformate, la matrice di transizione nello stato:

$$\Phi(t) = T^{-1}e^{Dt}T$$

è diagonale a blocchi e presenta una struttura tale per cui, partendo da tutti gli stati iniziali $z_0 = [k\ 0\ 0]$, si ottiene una soluzione non oscillante $z(t) = e^{Dt}z_0$, infatti si ha:

$$z(t) = e^{Dt}z_0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} z_0$$

Utilizzando quindi il cambio di coordinate tale che $z = Tx$ (con T precedentemente calcolata nella 1), gli stati iniziali cercati sono del tipo:

$$x_0 = T^{-1}z_0 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$$

Infatti, a partire da essi, le soluzioni che si ottengono sono del tipo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2ke^{-t} \\ ke^{-t} \\ -2ke^{-t} \end{pmatrix}$$

- Il sistema ammette soluzione a regime permanente, in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale minore di zero, dato quindi un segnale nella forma $u(t) = u_0 \sin \omega t$ la corrispondente risposta a regime sarà nella forma:

$$y_r(t) = u_0 M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \qquad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

Dato quindi il segnale in ingresso del tipo $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{2})$ tale segnale può essere rivisto nella forma:

$$u(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Presa quindi la funzione di trasferimento del sistema nella 5 si esegue la trasformata nel dominio di Laplace ottenendo:

$$W(s) = -\frac{s+4}{s^2+2s+2}$$

dove il modulo e la fase sono rispettivamente

$$M(\omega)|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{17}}{5} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=1} = \pi - \arctan\left(\frac{7}{6}\right) \sim 2.2794$$

la soluzione è quindi:

$$y_r(t) \sim \frac{\sqrt{5}\sqrt{17}}{5}\cos\left(t + 0.7086\right)\delta_{-1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{3}{2} \frac{(s+1)(s-2)}{(s-5)(s+2)(s^2+3s+2)}$$

tracciare i diagrammi di Bode, rispettivamente del modulo e della fase.

Per prima cosa è necessario portare in forma di Bode la funzione di trasferimento, ottenendo:

$$W(s) = \frac{3}{20} \frac{(1+\frac{1}{2}s)}{(1+\frac{1}{5}s)(1+\frac{1}{2}s)^2}$$

Si hanno quindi un guadagno $K = \frac{3}{20}$ uno zero con constante di tempo in $\tau_1 = \frac{1}{2}$, i poli in $\tau_1 = \frac{1}{5}$ e $\tau_{2,3} = \frac{1}{2}$.

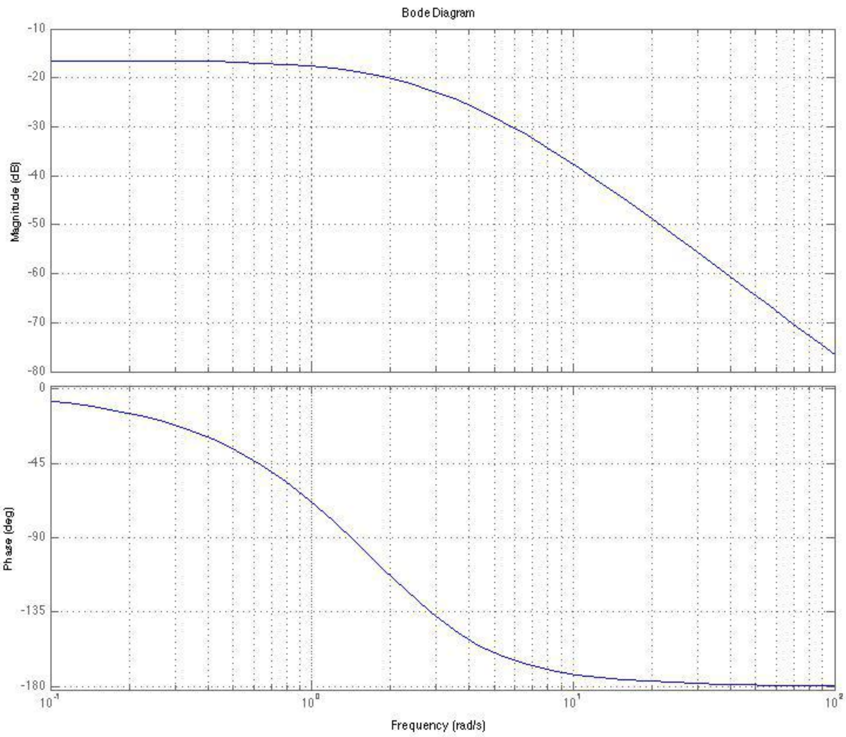


Figura 2: Diagramma di bode della funzione di trasferimento

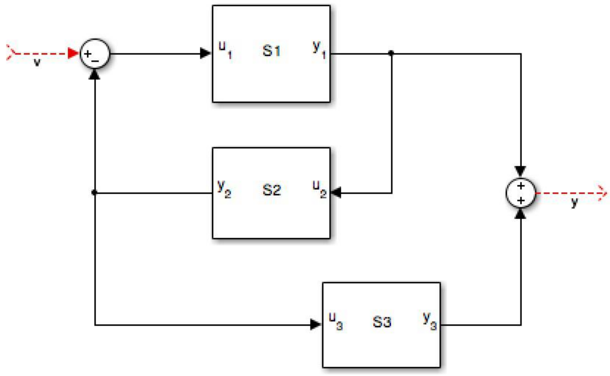
3. Spiegare cos'è il sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo.

Vedi pagina 6

Teoria dei sistemi
4 febbraio 2013
Compito A

A cura di:
Raffaello Bonghi - bonghi@dis.uniroma1.it
Giovanni Mattei - mattei@dis.uniroma1.it

Assegnato il sistema dinamico



dati:

$$S_1 = \frac{s+2}{s+1} \qquad S_2 = \frac{1}{s+2} \qquad S_3 = \frac{1}{s+1}$$

- Individuare una rappresentazione con lo stato equivalente del sistema rappresentato in figura;
- Studiare dal punto di vista dell'analisi modale, quindi calcolare $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
- Effettuare l'analisi dei modi naturali;
- Calcolare la risposta indiciale;
- Calcolare il guadagno;
- Calcolare se possibile la risposta a regime $y_r(t)$ dato un ingresso $u(t) = \cos(t - \frac{\pi}{4})$;
- Tracciare i diagrammi di Bode, rispettivamente del modulo e della fase.

- Per poter individuare la rappresentazione dello stato equivalente del sistema, si appresta ad associare ad ogni funzione di trasferimento una rappresentazione con lo stato equivalente.

$$S_1 = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+2}{s+1} = \frac{1}{s+1} + 1$$

Si ottiene la seguente relazione nello stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1 \\ y_1 &= x_1 + u_1 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda funzione di trasferimento S_2

$$S_2 = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{s+2}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -2x_2 + u_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Infine per S_3

$$S_3 = \frac{Y_3(s)}{U_3(s)} = \frac{1}{s+1}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -x_3 + u_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Dallo schema a blocchi si estrapolano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} u_1 &= v - y_2 \\ u_2 &= y_1 \\ u_3 &= y_2 \\ y &= y_1 + y_3 \end{aligned}$$

Il sistema complessivo é quindi nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + v \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 + v \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 \\ y &= x_1 - x_2 + x_3 + v \end{aligned}$$

si puó riscrivere quindi:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

con:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 1$$

- Occorre innanzi tutto determinare gli autovalori di A, ossia le radici del polinomio caratteristico:

  $$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda + 2)^2(\lambda + 1) = 0$$

  si ricavano pertanto la coppia di autovalori $\lambda_{1,2} = -2$ con molteplicitá geometrica geometrica doppia ed un terzo autovalore reale $\lambda_3 = -1$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando dall'autovettore reale $\lambda_{1,2} = -2$ con molteplicitá algebrica doppia.

  É importante ricordare che affinché sia possibile trovare l'autovettore generalizzato si ha che:

  $$(A - \lambda I)^k u^k = 0$$
  $$(A - \lambda I)^{k-1} u^k \neq 0$$

  Si calcola quindi il primo autovettore generalizzato

  $$(A - \lambda_1 I)\, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} u_1 = 0$$

  si trova quindi l'autovettore

  $$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

  si sceglierá per semplicitá il valore $\alpha = 1$, ottenendo quindi:

  $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per trovare il secondo autovettore si prosegue calcolando:

$$(A - \lambda_{1,2}I)\,(A - \lambda_{1,2}I)\,u_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 u_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_1^2 = 0$$

da cui si ottiene:

$$u_1^2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

si sceglie:

$$u_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Si puó verificare la correttezza del risultato in quanto:

$$(A - \lambda I)u_1^2 = u_1$$

Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda_3 = -1$ si ha

$$(A - \lambda_3 I)\,u_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} u_3 = 0$$

ottenendo:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ponendo per semplicitá $a = 1$ si ottiene l'autovettore:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice degli autovettori destri é:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_1^2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda gli autovettori sinistri questi si calcolano imponendo la condizione di ortonormalit?, ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ (v_1^2)^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_1^2 & u_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si puó quindi trasformare la matrice A nella matrice:

$$J = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Adesso é immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Jt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} & t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2\,t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} T =$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} + t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & -t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & 0 \\ t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & \mathrm{e}^{-2\,t} - t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2\,t} - t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t)$:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-2\,t} & t\,\mathrm{e}^{-2\,t} - \mathrm{e}^{-2\,t} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B + D = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2\,t} + \delta(t) \tag{1}$$

- Partendo dalla considerazione che i moti sono detti *eccitabiliá* se risulta:

  $$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau = e^{At}B$$

  ed in quanto la condizione di eccitabilitá del generico i-esimo modo naturale nel caso di autovalori distinti é $v_i'B \neq 0$ infatti l'espressione puó essere riscritta come:

  $$e^{At}B = \left(\sum_{i=i}^{m_1} e^{\lambda_i t}u_i v_i' \right) B$$

  si comprende che la legge temporale $e^{\lambda_i t}$ compare a secondo membro se e solo se la condizione citata é verificata. Analoghe considerazioni si possono osservare per il l'osservabilitá del sistema in quanto un modo risulta osservabile se compare nella Ce^{At}, nel caso in esame, quindi di autovalori distinti, un moto é osservabile se e solo se $Cu_i \neq 0$ per autovalori reali, risulta evidente dall'espressione:

$$Ce^{At} = C\left(\sum_{i=i}^{m_1} e^{\lambda_i t} u_i v_i'\right)$$

Si risolve quindi calcolando per l'autovalore reale con molteplicitá algebrica doppia $\lambda_{1,2} = -2$:

$$v_1 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$v_1^2 B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$Cu_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Solo uno degli autovalori con $\lambda_1 = -2$ risulta eccitabile e osservabile, mentre il secondo autovalore del secondo ordine non risulta ne eccitabile che osservabile. Infine per l'autovalore $\lambda_3 = -1$:

$$v_3 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$Cu_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

L'autovalore $\lambda_3 = -1$ risulta sia eccitabile che osservabile.

- La risposta indiciale, definito come ingresso:

$$u(t) = \delta_{-1}(t) \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

puó essere calcolata passando attraverso la trasformata di Laplace, si calcola quindi la funzione di trasferimento del sistema data dell'equazione 1:

$$W(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)} \tag{2}$$

Si ha quindi che l'uscita sará:

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

Ottenendo quindi:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s+1)(s+2)}$$

antitrasformando si avrá quindi:

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}$$

- Il guadagno del sistema si puó calcolare dalla funzione di trasferimento 2 calcolata in zero:

$$K = W(0) = \frac{3}{2}$$

- Il sistema ammette soluzione a regime permanente, in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale minore di zero, dato quindi un segnale nella forma $u(t) = u_0 \sin \omega t$ la risposta a regime sará nella forma:

$$y_r(t) = u_0 M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \qquad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

Dato quindi il segnale in ingresso del tipo $u(t) = \cos(t - \frac{\pi}{4})\delta_{-1}(t)$ e presa la funzione di trasferimento 2 dove il modulo e la fase sono rispettivamente:

$$M(\omega)|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{13}}{10} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=1} \sim -0.2663$$

la soluzione é quindi:

$$y_r(t) \sim \frac{\sqrt{10}\sqrt{13}}{10} \cos\left(t - 0.2663 - \frac{\pi}{4}\right) \delta_{-1}(t)$$

oppure

$$y_r(t) \sim 1.1402 \cos(t - 1.0517) \delta_{-1}(t)$$

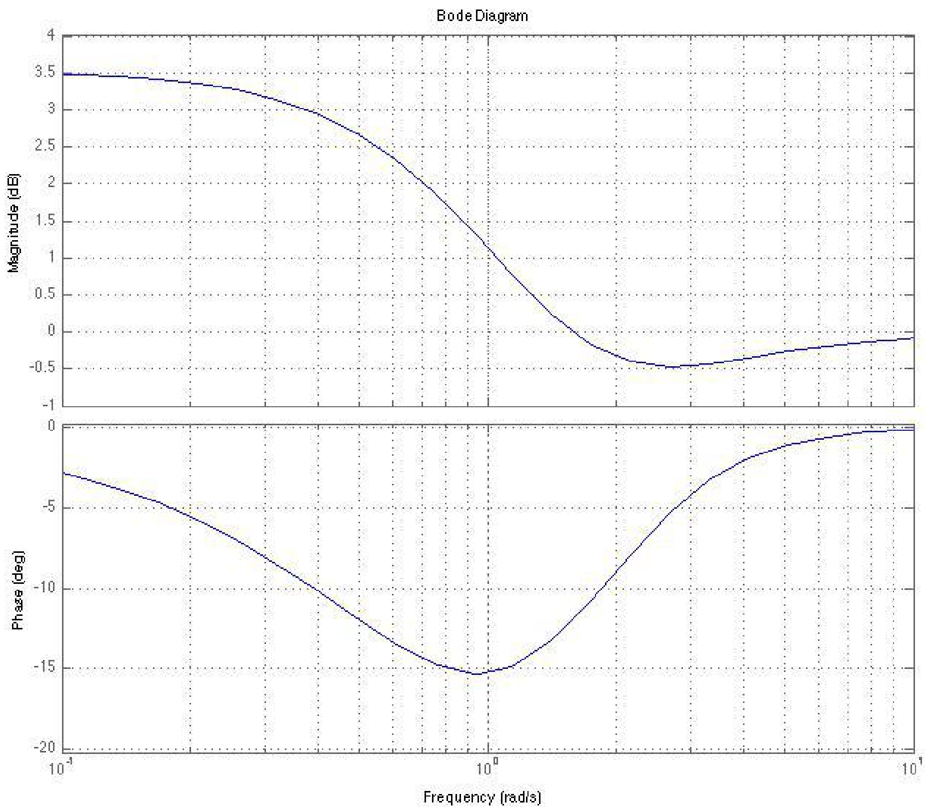
- Per prima cosa é necessario portare in forma di Bode la funzione di trasferimento, ottenendo:

$$W(s) = \frac{3}{2} \frac{(1 + s + \frac{1}{3}s^2)}{(1 + \frac{1}{2}s)(1 + s)}$$

Si hanno quindi un guadagno $K = \frac{3}{2}$ uno zero complesso con pulsazione naturale e smorzamento rispettivamente:

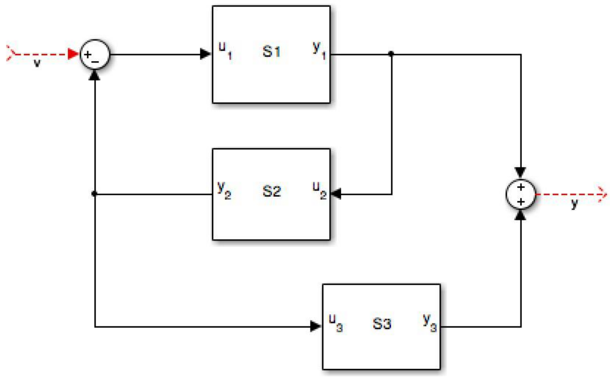
$$\omega_n = \sqrt{3} \qquad \xi = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

e due poli con constante di tempo in $\tau_1 = 1$, i poli in $\tau_1 = \frac{1}{2}$. Il diagramma di bode del sistema in esame risulta quindi:



Teoria dei sistemi
4 febbraio 2013
Compito B

Assegnato il sistema dinamico



dati:

$$S_1 = \frac{s+1}{s+2} \qquad S_2 = \frac{1}{s+1} \qquad S_3 = \frac{1}{s+2}$$

- Individuare una rappresentazione con lo stato equivalente del sistema rappresentato in figura;
- Studiare dal punto di vista dell'analisi modale, quindi calcolare $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;
- Effettuare l'analisi dei modi naturali;
- Calcolare la risposta forzata per $u(t) = t\delta_{-1}(t-2) - t\delta_{-1}(t-4)$;
- Calcolare il guadagno;
- Calcolare se possibile la risposta a regime $y_r(t)$ dato un ingresso $u(t) = 4\sin(3t - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos(2t)$;
- Tracciare i diagrammi di Bode, rispettivamente del modulo e della fase.

- Per poter individuare la rappresentazione dello stato equivalente del sistema, si appresta ad associare ad ogni funzione di trasferimento una rappresentazione con lo stato equivalente.

$$S_1 = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

Si ottiene la seguente relazione nello stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + u_1 \\ y_1 &= -x_1 + u_1 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda funzione di trasferimento S_2

$$S_2 = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{s+1}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -x_2 + u_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Infine per S_3

$$S_3 = \frac{Y_3(s)}{U_3(s)} = \frac{1}{s+2}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -2x_3 + u_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Dallo schema a blocchi si estrapolano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} u_1 &= v - y_2 \\ u_2 &= y_1 \\ u_3 &= y_2 \\ y &= y_1 + y_3 \end{aligned}$$

Il sistema complessivo é quindi nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 + v \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + v \\ \dot{x}_3 &= x_2 - 2x_3 \\ y &= -x_1 - x_2 + x_3 + v \end{aligned}$$

si puó riscrivere quindi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

con:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = 1$$

- Occorre innanzi tutto determinare gli autovalori di A, ossia le radici del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

si ricavano pertanto gli autovalori $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$ ed infine $\lambda_3 = -1$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando dall'autovettore reale λ_1:

$$(A - \lambda_1 I)\, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} u_1 = 0$$

ottenendo:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ponendo per semplicitá $\alpha = 1$ si ottiene l'autovettore:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per il secondo autovalore $\lambda_2 = -2$

$$(A - \lambda_2 I)\, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} u_2 = 0$$

con:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad u_2|_{a=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

infine per $\lambda_3 = -3$:

$$(A - \lambda_3 I)\, u_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} u_3 = 0$$

ottenendo:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad u_3|_{a=1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice degli autovettori destri é:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

per quanto riguarda gli autovettori sinistri questi si calcolano imponendo la condizione di ortonormalitá, ossia:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Si puó quindi trasformare la matrice A nella matrice:

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Adesso é immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3\,t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2\,t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} T =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} & \frac{\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} & 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} & \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} & 0 \\ -\frac{\mathrm{e}^{-3\,t}\left(\mathrm{e}^{t}-1\right)^2}{2} & \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} & \mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t)$:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3\,t} \\ \mathrm{e}^{-3\,t} \\ \mathrm{e}^{-2\,t} - \mathrm{e}^{-3\,t} \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione dell'uscita $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} & \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-3\,t}}{2} & \mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}$$

La matrice delle risposte impulsive $W(t)$:

$$w(t) = Ce^{At}B + D = \delta(t) + \mathrm{e}^{-3\,t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$$

- Partendo dalla considerazione che i moti sono detti *eccitabiliá* se risulta:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\delta(\tau) d\tau = e^{At}B$$

ed in quanto la condizione di eccitabilitá del generico i-esimo modo naturale nel caso di autovalori distinti é $v_i'B \neq 0$ infatti l'espressione puó essere riscritta come:

$$e^{At}B = \left(\sum_{i=i}^{m_1} e^{\lambda_i t} u_i v_i' \right) B$$

si comprende che la legge temporale $e^{\lambda_i t}$ compare a secondo membro se e solo se la condizione citata é verificata. Analoghe considerazioni si possono osservare per il l'osservabilitá del sistema in quanto un modo risulta osservabile se compare nella Ce^{At}, nel caso in esame, quindi di autovalori distinti, un moto é osservabile se e solo se $Cu_i \neq 0$ per autovalori reali, risulta evidente dall'espressione:

$$Ce^{At} = C \left(\sum_{i=i}^{m_1} e^{\lambda_i t} u_i v_i' \right)$$

Si risolve quindi calcolando per l'autovalore reale $\lambda_1 = -3$:

$$v_1 B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Questo autovalore risulta sia eccitabile che osservabile, per il secondo autovalore $\lambda_2 = -2$:

$$v_2 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$Cu_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

risulta osservabile ed eccitabile, infine per l'autovalore $\lambda_3 = -1$:

$$v_3 B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$C u_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

risulta non eccitabile ma osservabile.

- Il segnale in ingresso $u(t) = t\delta_{-1}(t-2) - t\delta_{-1}(t-4)$ é una sovrapposizione di rampe, puó essere calcolata passando attraverso la trasformata di Laplace, si calcola quindi la funzione di trasferimento del sistema data dell'equazione :

$$W(s) = \frac{(s^2 + 3\,s + 3)}{(s+3)\cdot(s+2)} \tag{3}$$

Si puó quindi trasformare il segnale in ingresso:

$$U(s) = \frac{2\,\mathrm{e}^{-2\,s}}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-2\,s}}{s^2} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-4\,s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-4\,s}}{s^2}$$

Si ha quindi che l'uscita:

$$Y(s) = W(s)U(s) = -\frac{\mathrm{e}^{-4\,s}\,\left(s^2 + 3\,s + 3\right)\,\left(4\,s - \mathrm{e}^{2\,s} - 2\,s\,\mathrm{e}^{2\,s} + 1\right)}{s^2\,(s+2)\,(s+3)}$$

antitrasformando si avrá quindi:

$$\begin{aligned} y(t) = &\left(\frac{1}{12} + \frac{t}{2} - \frac{3\,\mathrm{e}^{4-2\,t}}{4} + \frac{5\,\mathrm{e}^{6-3\,t}}{3}\right)\delta_{-1}(t-2) \\ &-\left(\frac{1}{12} + \frac{t}{2} - \frac{7\,\mathrm{e}^{8-2\,t}}{4} + \frac{11\,\mathrm{e}^{12-3\,t}}{3}\right)\delta_{-1}(t-4) \end{aligned}$$

Si puó vedere l'andamento del segnale nella figura seguente:

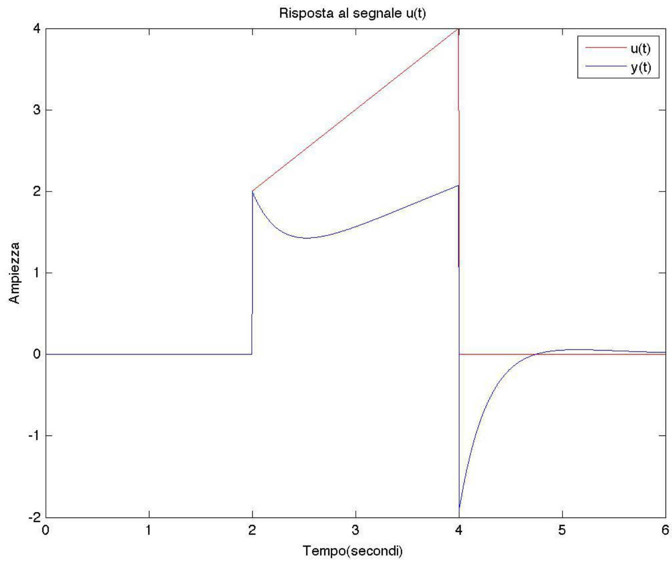


Figura 1: Risposta per il segnale: $u(t) = t\,\delta_{-1}\,(t-2) - t\,\delta_{-1}\,(t-4)$

- Il guadagno del sistema si puó calcolare dalla funzione di trasferimento 3 calcolata in zero:

$$k = \lim_{s \to 0} W(s) = W(0) = \frac{1}{2}$$

- Il sistema ammette soluzione a regime permanente, in quanto tutti gli autovalori sono a parte reale minore di zero, il segnale $u(t) = 4\,\sin\!\left(3\,t - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,\cos(2\,t)$ puó essere calcolato basandosi sulla sovrapposizione degli effetti dati da due segnali $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$:

$$u_1(t) = 4\,\sin\!\left(3\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$u_2(t) = -\sqrt{2}\,\cos(2\,t)$$

Il primo segnale per le formule di sottrazione puó essere rivisto come: $u_1(t) = 2\sqrt{2}\,(\sin(3t) - \cos(3t))$

$$y_r(t) = u_0 M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \qquad \phi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

ottenendo:

$$M(\omega)|_{\omega=3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=3} \sim 0.3906$$

infine si avrá:

$$y_1(t) = -\sqrt{2}\left(\frac{10\,\cos(3\,t)}{13} - \frac{24\,\sin(3\,t)}{13}\right) \sim 2\sqrt{2}\sin\left(3t - 0.3948\right)$$

per quanto riguarda l'ingresso $u_2(t)$ si avranno:

$$M(\omega)|_{\omega=2} = \frac{\sqrt{26}\,\sqrt{37}}{52} \qquad \phi(\omega)|_{\omega=2} \sim 0.3625$$

ottenendo:

$$y_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{52}\left(29\,\cos(2\,t) - 11\,\sin(2\,t)\right) \sim -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{26}\,\sqrt{37}}{52}\cos\left(2\,t + 0.3625\right)$$

L'uscita complessiva a regime sará la combinazione lineare dei due segnali:

$$y_r(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

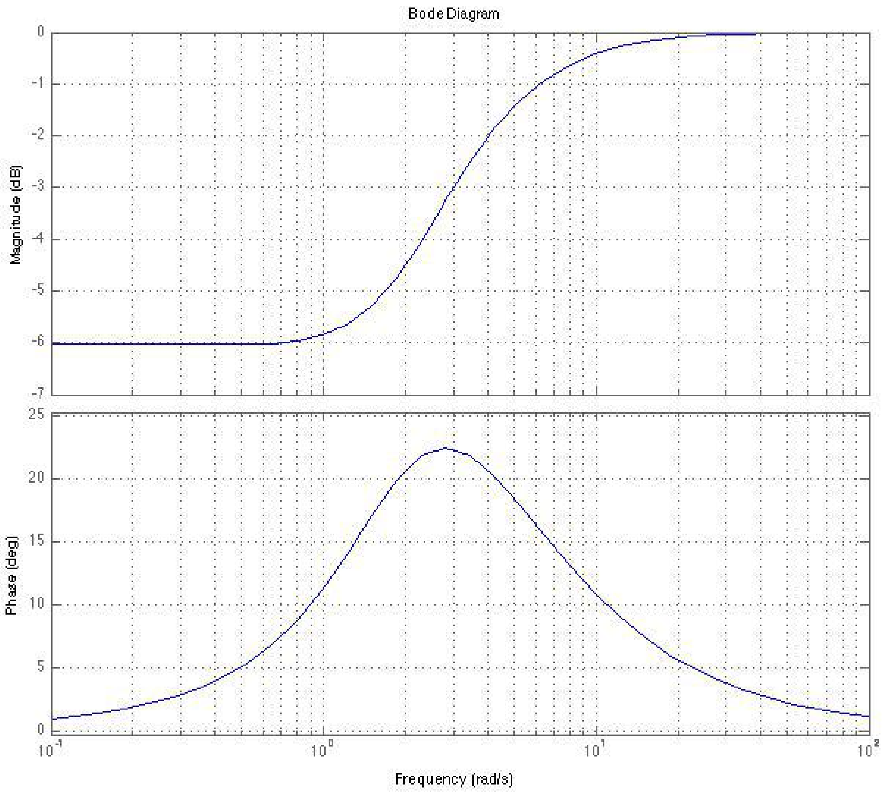
- Per prima cosa é necessario portare in forma di Bode la funzione di trasferimento, ottenendo:

$$W(s) = \frac{1}{2}\frac{1 + s + \frac{1}{3}s^2}{(1 + \frac{1}{3}s)(1 + \frac{1}{2}s)}$$

Si hanno quindi un guadagno $K = \frac{1}{2}$ uno zero complesso con pulsazione naturale e smorzamento rispettivamente:

$$\omega_n = \sqrt{3} \qquad \xi = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

e due poli con constante di tempo in $\tau_1 = \frac{1}{3}$, i poli in $\tau_1 = \frac{1}{2}$. Il diagramma di bode del sistema in esame risulta quindi:


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
25
20
15
10
5
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

Teoria dei Sistemi
8/01/16

Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

   a. le matrici $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;

   b. individuare i modi e studiarne eccitabilità e osservabilità;

   c. studiare la stabilità interna ed esterna;

   d. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$;

   e. tracciare i diagrammi polari;

   f. calcolare una realizzazione minima della funzione di trasferimento.

2. Calcolare la funzione di trasferimento di un sistema che ha risposta indiciale

$$W_{-1}(k) = (0.5^{k-1} - 1)\delta_{-1}(k-1)$$

3. Dimostrare che gli autovalori del sistema a tempo discreto equivalente di un sistema continuo sono $\lambda_i^D = e^{\lambda_i T}$, in cui λ_i l'autovalore i-esimo del sistema tempo continuo e T l'intervallo di campionamento.

4. ~~Dimostrare che per un sistema a tempo discreto l'insieme degli stati raggiungibili coincide con l'immagine della matrice $R = (B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B)$ in cui n la dimensione del sistema.~~

5. Definire $W(t)$, $W(s)$ e $W(j\omega)$; hanno un significato fisico e interpretazione sperimentale?

Teoria dei Sistemi
8/01/16

Fila B

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

   a. le matrici $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;

   b. individuare i modi e studiarne eccitabilità e osservabilità;

   c. studiare la stabilità interna ed esterna;

   d. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$;

   e. tracciare i diagrammi polari;

   f. calcolare una *realizzazione minima* della funzione di trasferimento.

2. Calcolare la funzione di trasferimento di un sistema che ha risposta indiciale

$$W_{-1}(k) = (1 - 0.7^{k-1})\delta_{-1}(k-1)$$

3. ~~Dimostrare che gli autovalori del sistema a tempo discreto equivalente di un sistema a tempo continuo sono $\lambda_i^d = e^{\lambda_i T}$, in cui λ_i l'autovalore i-esimo del sistema a tempo continuo e T l'intervallo di campionamento.~~

4. ~~Dimostrare che per un sistema a tempo discreto l'insieme degli stati raggiungibili coincide con l'immagine della matrice $R = (B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B)$, in cui n la dimensione del sistema.~~

5. Regime permanente: definizione e condizioni di esistenza.

Teoria dei Sistemi
22/12/16

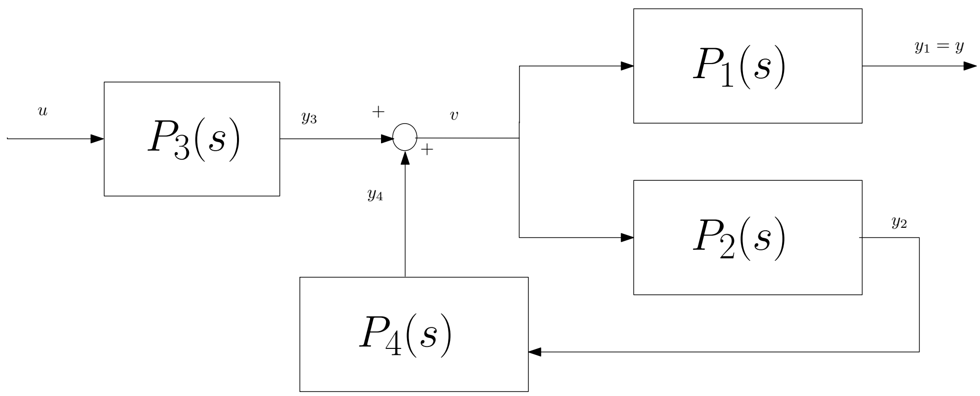
Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema S con



$$P_1(s) = \frac{1}{s-1}, \quad P_2(s) = \frac{s+2}{s+3}, \quad P_3(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad P_4(s) = \frac{1}{s+2};$$

   a. definirne una rappresentazione con lo stato;

   b. calcolare le matrici $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;

   c. studiarne la stabilità interna ed esterna;

   d. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin(t-1)\delta_{-1}(t-1)$;

   e. tracciare i diagrammi di Bode e polare;

   f. studiarne la raggiungibilità e l'osservabilità.

2. Il guadagno di un sistema dinamico lineare e stazionario: definizione e significato fisico.

3. Modi naturali e parametri caratteristici.

4. Risposta impulsiva, funzione di trasferimento e risposta armonica di un sistema lineare dinamico e stazionario a tempo continuo.

5. Il problema della discretizzazione.

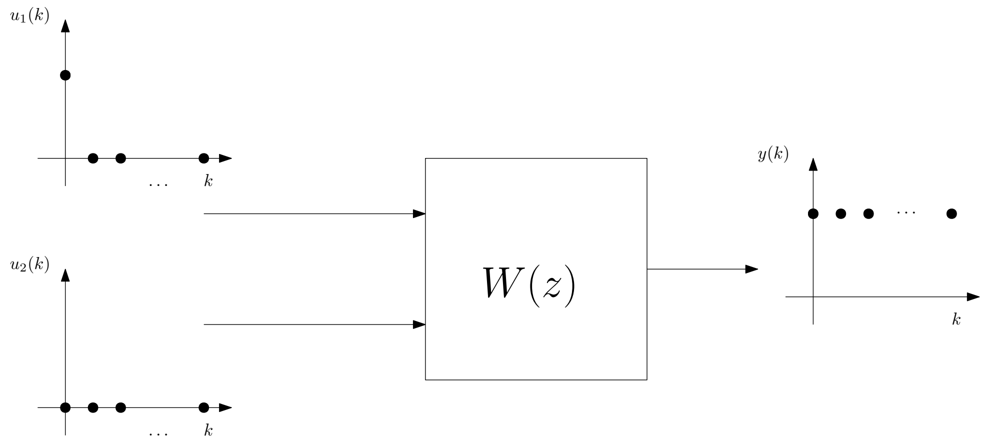
6. Calcolare la risposta a regime permanente per il sistema tempo continuo avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$ all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

7. Si scriva la rappresentazione con lo stato di un sistema a tempo continuo avente guadagno $K = 10$ e constante di tempo $\tau = 0.1$.

8. La risposta a regime permanente di un sistema dinamico lineare e stazionario a tempo continuo.

9. La relazione tra autovalori e poli di un sistema dinamico lineare e stazionario a tempo continuo.

10. Dato il seguente sistema tempo discreto si identifichi la funziona di trasferimento $W(z)$ a



partire dai segnali in ingresso e quello in uscita.

11. Cosa si intende per realizzazione di Gilbert? Definizione di realizzazione minima.

Teoria dei Sistemi
9/01/17

Fila A

Nome e Cognome: ________________________

Matricola: ________________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

   a. condurre l'analisi dei modi;

   b. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t) + \sin t\ \delta_{-1}(t)$

   c. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t)$;

   d. tracciare i diagrammi di Bode e polare;

   e. studiarne la stabilità interna ed esterna.

2. Dato il nucleo

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s+1}{s^2+2s+1} \end{pmatrix}$$

   si calcoli una rappresentazione con lo stato equivalente e se ne studi la stabilità.

3. Definizione di guadagno di un sistema dinamico, lineare e stazionario tempo-continuo e significato fisico.

4. La stabilità interna ed esterna: definizioni e implicazioni.

5. La scomposizione di Kalman.

6. Dato un sistema dinamico, lineare e stazionario a tempo discreto di dimensione n con un ingresso ed un'uscita, dimostrare che lo spazio degli stati raggiungibili è dato dall'immagine della matrice $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

Teoria dei Sistemi
9/01/17

Fila B

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

   a. condurre l'analisi dei modi;

   b. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t) + e^{-2t}\ \delta_{-1}(t)$

   c. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \cos(t)\delta_{-1}(t)$;

   d. tracciare i diagrammi di Bode e polare;

   e. studiarne la stabilità interna ed esterna.

2. Dato il nucleo

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s^2+4s+4} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

   si calcoli una rappresentazione con lo stato equivalente e se ne studi la stabilità.

3. La risposta a regime permanente di un sistema dinamico lineare e stazionario a tempo continuo ad ingresso canonici.

4. La stabilità interna ed esterna: definizioni e implicazioni.

5. La raggiungibilità di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo continuo e la scomposizione raggiungibile.

6. Dato un sistema dinamico, lineare e stazionario a tempo discreto di dimensione n con un ingresso ed un'uscita, dimostrare che lo spazio degli stati inosservabili è dato dal nucleo della matrice $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$.

Teoria dei Sistemi
07/02/17

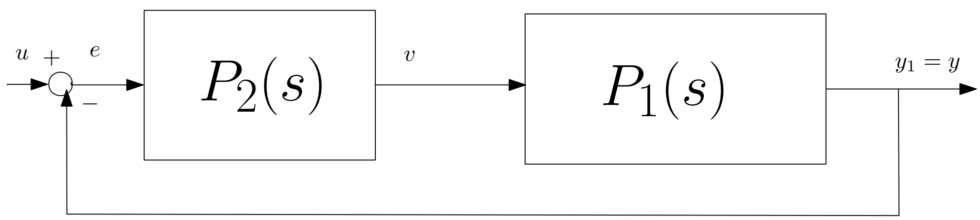
Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema S con



$$P_2(s) = \frac{-4}{s^2+1}, \quad P_1(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)^2};$$

a. definirne una rappresentazione con lo stato;

b. calcolare le matrici Φ, H, Ψ e W;

c. studiarne la stabilità interna ed esterna;

d. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin(t-1)\delta_{-1}(t-1)$;

e. tracciare i diagrammi di Bode e polare;

f. calcolare la risposta forzata a $u(t) = e^{-(t-1)}\delta_{-1}(t)$.

2. La risposta a regime permanente e la risposta armonica.

3. I modi naturali per sistemi a tempo discreto.

4. Si consideri un sistema dinamico lineare e stazionario. È possibile calcolare, tramite opportuni esperimenti, un modello del comportamento ingresso-uscita?

5. Calcolare il sistema tempo discreto equivalente per tempo di campionamento $T = 0.1$s del sistema continuo avente funzione di trasferimento
$$W(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+1}.$$

Teoria dei Sistemi
07/02/17

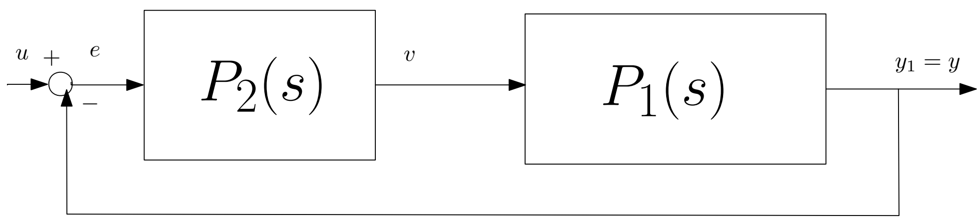
Fila B

Nome e Cognome: __________________________

Matricola: __________________________

---

1. Dato il sistema S con



$$P_2(s) = \frac{-2}{s(s+2)}, \quad P_1(s) = \frac{s}{(s+1)^2};$$

a. definirne una rappresentazione con lo stato;

b. calcolare le matrici Φ, H, Ψ e W;

c. studiarne la stabilità interna ed esterna;

d. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin(t-1)\delta_{-1}(t-1)$;

e. tracciare i diagrammi di Bode e polare;

f. calcolare la risposta forzata a $u(t) = t\delta_{-1}(t-1)$.

2. Si consideri un sistema lineare stazionario avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s+1}$ siano $\Lambda = \{-1, 0, -1\}$ l'insieme degli autovalori del sistema e tra questi $\Lambda_E = \{-1, -1\}$ e $\Lambda_O = \{-1, 0\}$ l'insieme degli autovalori associati a modi naturali eccitabili e modi naturali osservabili, rispettivamente. Definire l'esistenza della risposta a regime permanente.

3. I modi naturali per sistemi a tempo continuo e parametri caratteristici.

4. La stabilitá interna di un sistema dinamico, lineare stazionario e i criteri per il suo studio.

5. Calcolare il sistema tempo discreto equivalente per tempo di campionamento $T = 0.1$s del sistema continuo avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+s-6}.$$

Teoria dei Sistemi
24/03/17

Fila A

Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

   a. calcolare l'evoluzione libera nello stato a partire da $x_0 = (1\ 1\ 1)^\top$ e il suo comportamento asintotico (ovvero, per $t \to \infty$);

   b. calcolare la risposta complessiva in uscita per $x_0 = (1\ 1\ 1)^\top$ e $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$;

   c. studiarne la stabilità interna ed esterna;

   d. scomposizione di Kalman.

2. Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente del sistema continuo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

   per periodo di campionamento $T_s = 1$ s. Calcolare, inoltre, la risposta forzata del sistema a tempo discreto equivalente all'ingresso $u(k) = \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)$.

3. Come si possono dedurre i diagrammi polari di un sistema a partire da misure del comportamento ingresso-uscita (u-y)?

4. Definizione di guadagno e significato fisico.

5. Trattare un argomento a piacere in 1 pagina al massimo.

Teoria dei Sistemi
7/06/17

Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

   a. Calcolare ϕ, H, Ψ e W;

   b. Condurre l'analisi modale;

   c. studiare la stabilità interna ed esterna;

   d. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \cos(t)\delta_{-1}(t - \frac{\pi}{4})$;

   e. Calcolare l'evoluzione forzata in uscita corrispondente a $u(t) = \cos(t-1)\delta_{-1}(t-1)$.

2. Dato il sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}{s^2 - s}$$

   calcolarne una realizzazione con lo stato minima.

3. Tracciare i diagrammi di Bode e polari della funzione di trasferimento

$$W(s) = -\frac{s+1}{(s^2+s+1)(s-10)}$$

4. La risposta a regime permanente per sistemi a tempo continuo: definizione e condizioni di esistenza.

5. Il problema della discretizzazione.

Teoria dei Sistemi
7/06/17

Fila B

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

   a. Calcolare ϕ, H, Ψ e W;

   b. Condurre l'analisi modale;

   c. studiare la stabilità interna ed esterna;

   d. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \cos(t)\delta_{-1}(t)$;

2. Dato il sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & 0 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}}{s^2 + s - 2}$$

   calcolarne una realizzazione con lo stato minima.

3. Tracciare i diagrammi di Bode e polari della funzione di trasferimento

$$W(s) = -0.1 \frac{s - 10}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

4. Modi naturali per sistemi a tempo continuo: definizione e parametri caratteristici.

5. Definire e illustrare *Modulo a Risonanza*, *Banda Passante a 3 dB*, *Tempo di Risalita* e *Sovraelongazione.*

Teoria dei Sistemi
4/7/17

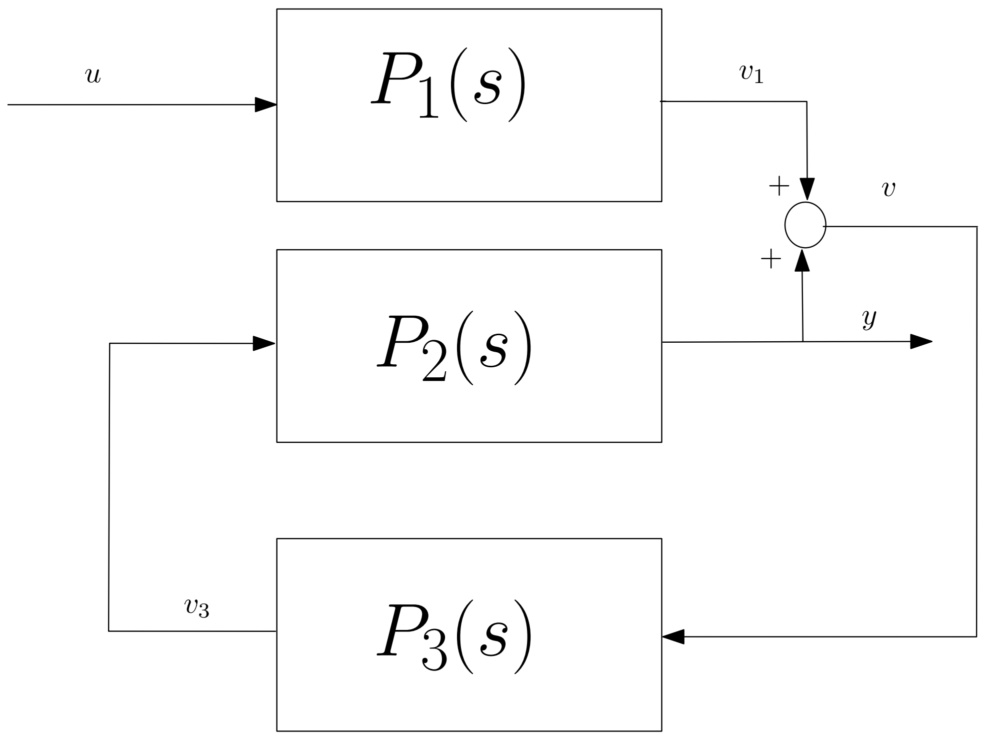
Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema S con



$$P_1(s) = \frac{s+1}{s^2 - s + 1}, \quad P_2(s) = \frac{1}{s-1}, \quad P_3(s) = \frac{s-1}{s+2};$$

a. individuarne una rappresentazione con lo stato;

b. calcolare le matrici Φ, H, Ψ e W;

c. condurre l'analisi modale;

d. studiarne la stabilità interna ed esterna;

e. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin(t-1)\delta_{-1}(t-1)$;

f. tracciare i diagrammi di Bode e polare;

2. Si scriva la rappresentazione con lo stato di un sistema a tempo continuo avente guadagno $K = 10$, un polo in $s_0 = 0$ ed uno in $s_1 = -1$. Se ne determini, inoltre, il sistema a tempo discreto-equivalente per periodo di campionamento $T = 1$ secondo.

3. La raggiungibilità di un sistema lineare stazionario: definizioni, decomposizioni e criteri di studio.

4. A cosa serve il metodo di Gilbert?

Teoria dei Sistemi
23/12/17

Canale 2

Durata: 150'

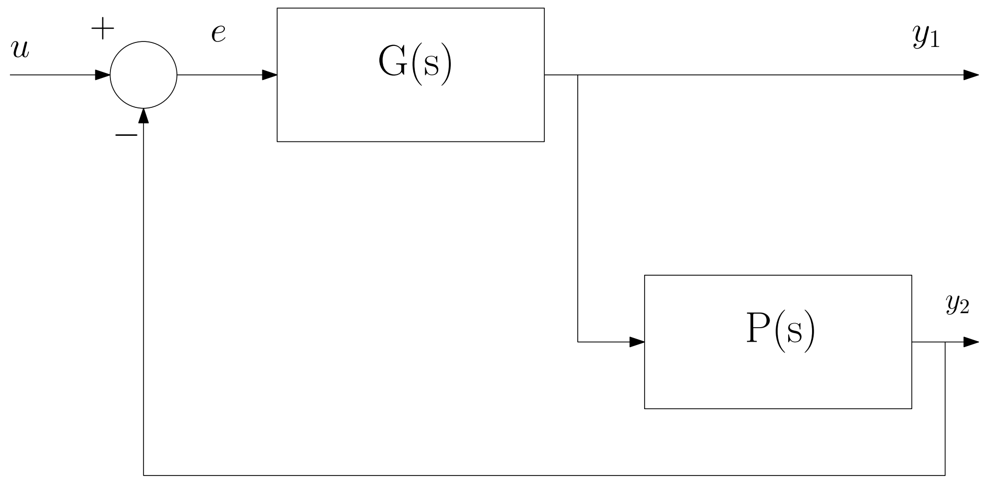
Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Email: ____________________

---

1. Dato il sistema S con



$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$$

   (a) calcolare P(s) sapendo che, per $u(t) = \delta_{-1}(t)$ e $y_2(t) = 0$, $y_1(t) = (1 - e^{-2t})\delta_{-1}(t)$;
   (b) calcolare una rappresentazione con lo stato del sistema complessivo con ingresso u e uscita $y = (y_1\ y_2)^\top$;
   (c) considerando il canale u-y_1 (i.e., sistema con ingresso u e uscita y_1), condurre l'analisi modale;
   (d) studiare la stabilità interna ed esterna;
   (e) calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente a $u_r(t) = \sin{(t - \frac{\pi}{2})}\delta_{-1}(t)$;
   (f) calcolare la risposta $y(t)$ corrispondente a $u(t) = t\delta_{-1}(t)$.

2. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema lineare con guadagno $K = 10$, una costante di tempo $\tau = 1$ e uno zero in -1. Se ne traccino inoltre i diagrammi di Bode e polare.

3. Dato un sistema a tempo discreto di dimensione $n = 2$, è possibile che uno stato x_R sia raggiunto (per la prima volta) in tempo $k \geq 3$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = 0$? Motivare la risposta.

4. Modi naturali aperiodici di un sistema a tempo continuo e parametri caratteristici.

5. La risposta a regime permanente di un sistema dinamico lineare e stazionario a tempo continuo: definizione, condizioni di esistenza e legami con la stabilità.

Domande in sostituzione dell'esame orale (30' supplementari)

1. Dato il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, derivare la forma esplicita della soluzione a partire da uno stato iniziale $x(0) = 0$ con $t_0 = 0$ e la sua scomposizione in modi naturali.

2. Spiegare perché la rappresentazione implicita di un sistema esprime una procedura di simulazione/emulazione in tempo reale (si può far riferimento a sistemi a tempo continuo o a tempo discreto, a scelta).

Teoria dei Sistemi
8/01/2018

Canale 2

Durata: 150'

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Email: ____________________

---

1. [18/33] Dato il sistema avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s-2)}$

   (a) [2/18] Calcolare una rappresentazione con lo stato nella forma

   $$\dot{x} = Ax + Bu$$
   $$y = Cx + Du$$

   (b) [2/18] Quali sono le leggi di moto dei modi naturali del sistema?

   (c) [2/18] Studiare la stabilità interna ed esterna del sistema;

   (d) [2/18] Ponendo ora $u = (CB)^{-1}(v - CAx)$ si consideri il nuovo sistema con ingresso v, stato x e uscita y e

      i. [3/18] studiarne i modi naturali;

      ii. [3/18] studiarne la stabilità interna ed esterna;

      iii. [4/18] calcolarne la funzione di trasferimento, una sua realizzazioen con lo stato e il sistema a tempo discreto equivalente del sistema risultante.

2. [5/33] $W(t)$, $W(s)$ e $W(j\omega)$: cosa rappresentano e qual'è il loro significato fisico.

3. [3/33] Guadagno di un sistema a tempo-continuo e a tempo-discreto: definizione e significato fisico.

4. [3/33] È possibile che un sistema abbia funzione di trasferimento uguale a zero? Se sì, sotto quali condizioni?

5. [4/33] Definizione di stabilità esterna e condizioni.

Teoria dei Sistemi
18/06/18

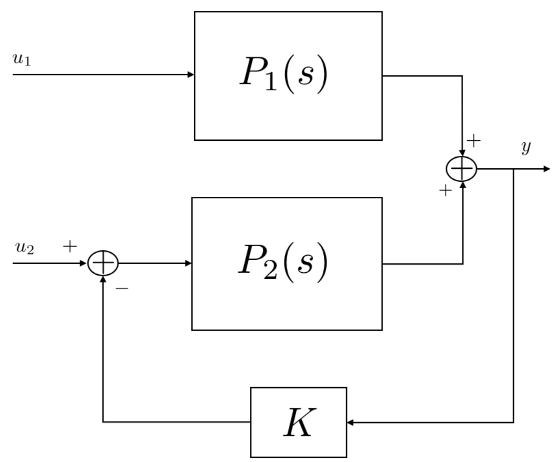
Fila A

Nome e Cognome: ____________________________

Matricola: ____________________________

---

1. Si consideri il sistema in cui $P_1(s) = \frac{1}{s-1}$, $P_2(s) = \frac{s+2}{s^2-2s+1}$ e $K \in \mathbb{R}$.



   a. Calcolarne una rappresentazione con lo stato;

   b. Studiare la stabilità (interna ed esterna) del sistema al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$;

   c. Per $K = 1$, calcolare, se esiste, la risposta a regime permamente all'ingresso $u(t) = \sin t\delta_{-1}(t)$;

   d. Per $K = 1$, Studiarne la raggiungibilità e l'osservabilità.

2. Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente del sistema continuo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

   per periodo di campionamento $T_s = 1$ s. Calcolare, inoltre, la risposta del sistema a tempo discreto equivalente all'ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k-1)$ e stato iniziale $x_0 = (0\ 0)^\top$.

3. Tracciare i diagrammi di bode e polari di un sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = 2\frac{s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

4. La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza.

5. La raggiungibilità dei sistemi lineari a tempo discreto: definizione e condizioni.

Teoria dei Sistemi
18/06/18

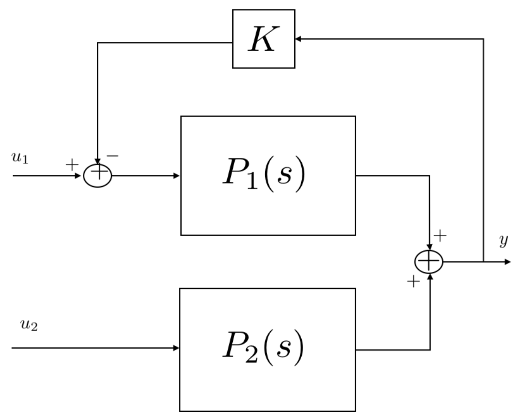
Fila B

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Si consideri il sistema in cui $P_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $P_2(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+1}$ e $K \in \mathbb{R}$.



   a. Calcolarne una rappresentazione con lo stato;

   b. Studiare la stabilità (interna ed esterna) del sistema al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$;

   c. Per $K = 1$, calcolare, se esiste, la risposta a regime permamente all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$;

   d. Per $K = 1$, studiarne la raggiungibilità e l'osservabilità.

2. Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente del sistema continuo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

   per periodo di campionamento $T_s = 1$ s. Calcolare, inoltre, la risposta del sistema a tempo discreto equivalente all'ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k-1)$ e stato iniziale $x_0 = (0\ 0)^\top$.

3. Tracciare i diagrammi di bode e polari di un sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

4. I modi naturali dei sistemi lineari a tempo continuo: definizione e parametri caratteristici.

5. L'osservabilità dei sistemi lineari a tempo discreto: definizione e condizioni.

Teoria dei Sistemi
4/07/2018

Fila A

Nome e Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

---

1. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

   (a) studiarne i modi naturali;

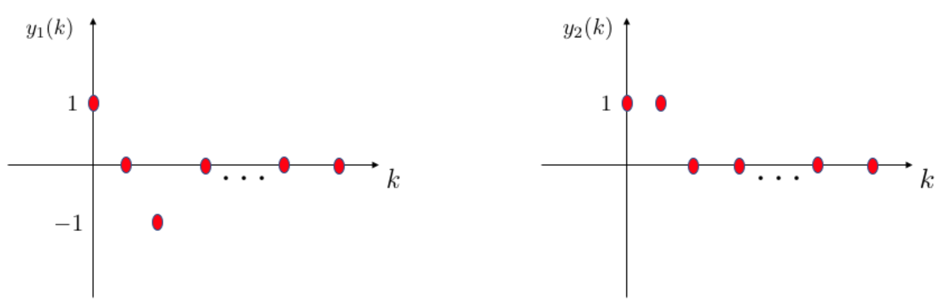
   (b) studiarne stabilità interna ed esterna;

   (c) calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = t\delta_{-1}(t-1)$;

   (d) tracciarne i diagrammi di Bode e polari;

   (e) calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t)$.

2. Calcolare la rappresentazione con lo stato di un sistema a un ingresso e due uscite sapendo, rispetto all'ingresso a gradino unitario $u(k) = \delta_{-1}(k)$, la risposta forzata è la seguente:



3. Il problema della discretizzazione.

4. Definizione di guadagno e suo significato fisico.

5. Può un sistema lineare essere caratterizzato da modi naturali aventi la stessa legge di moto?

Teoria dei Sistemi
24/07/18

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

   (a) studiarne l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali;

   (b) studiarne la stabilità interna ed esterna;

   (c) calcolare $\lim_{t\to\infty} x_\ell(t)$ per $x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^\top$ dove x_ℓ rappresenta l'evoluzione libera nello stato;

   (d) calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin 2t\delta_{-1}(t)$;

   (e) calcolare la risposta forzata in uscita all'ingresso $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$.

2. Calcolare la risposta a regime permanente del sistema a tempo discreto-equivalente al sistema avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{s}{s^2-1}$ e rispetto all'ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k)$ per $T = 1$ secondo.

3. Assegnato un sistema lineare (A, B, C) di dimensione n dimostrare che, se $CA^kB = 0$ per $k = 0, \dots, n-1$, allora la risposta impulsiva è identicamente nulla.

4. Si consideri un sistema lineare di dimensione n e con un ingresso. Quali sono le proprietà dell'insieme degli stati raggiungibili? Si assuma, inoltre, che il sottospazio degli stati raggiungibili sia di dimensione $\nu < n$. Quando una combinazione lineare di qualsiasi $\nu + 1$ stati è raggiungibile?

Teoria dei Sistemi
Fondamenti di Automatica
3/09/2018

Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Corso e Canale: ______________________

---

1. Dato il sistema avente risposta indiciale
$$W_{-1}(t) = (\cos t + \sin t - 1)\delta_{-1}(t)$$
   (a) calcolarne una rappresentazione con lo stato
$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1a}$$
$$y = Cx + Du \tag{1b}$$
   (b) studiarne la stabilità;
   (c) tracciarne i diagrammi di Bode;
   (d) **[Solo TdS Canale 2 e FdA]** Si consideri ora il sistema dedotto da (1) per $u(t) = 10y(t) + v(t)$ in cui v rappresenta un ulteriore ingresso esterno:
      i. calcolarne, se esiste, la risposta a regime permanente rispetto all'ingresso $v(t) = \sin t$;
      ii. studiarne la stabilià interna ed esterna.

2. Dato il sistema avente matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) scomporre secondo Kalman;
   (b) calcolarne la funzione di trasferimento.

3. Definire $W(t)$, $W(s)$ e $W(j\omega)$ e discuterne il significato fisico.

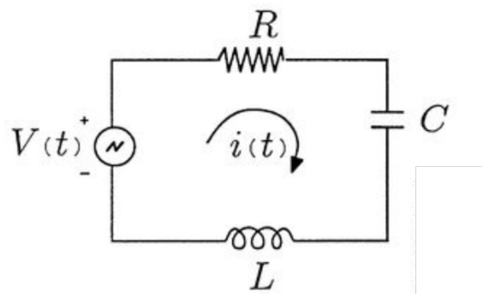
4. **[Solo TdS Canale 2]** Discretizzare il sistema avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s}$.

Teoria dei Sistemi
Fondamenti di Automatica
19/10/2018

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Corso e Canale: ____________________



1. Si consideri il circuito RLC in figura il cui funzionamento è descritto dall'equazione

$$V(t) = RC\dot{V}_c(t) + LC\ddot{V}_c(t) + V_c(t)$$

con $R, L, C \geq 0$ e in cui V_c denota la tensione ai capi del condensatore e V la tensione in ingresso. Assumendo l'uscita data dalla tensione ai capi del condensatore

   (a) calcolarne una rappresentazione con lo stato

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1a}$$
$$y = Cx + Du \tag{1b}$$

   (b) studiarne la stabilità al variare dei parametri R, C e L;

   (c) caratterizzarne i tipi di modial variare dei parametri R, C e L;

   (d) **[Solo TdS Canale 2]** Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente per $R = C = L = 1$ e tempo di campionamento $T = 1$ secondo.

2. Dato il sistema a tempo continuo avente matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) condurre l'analisi modale;

   (b) dedurre uno stato iniziale x_0 a partire dal quale l'evoluzione libera nello stato converga a 0;

(c) calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente rispetto $u(t) = \delta_{-1}(t)$;
(d) stabilità esterna ed interna;
(e) diagrammi di Bode e polari.

3. La risposta a regime permamente: definizione e condizioni di esistenza;
4. Dato un sistema a lineare e stazionario, si discuta il legame tra gli autovalori della matrice dinamica e i poli della funzione di trasferimento.

Teoria dei Sistemi
21/12/18

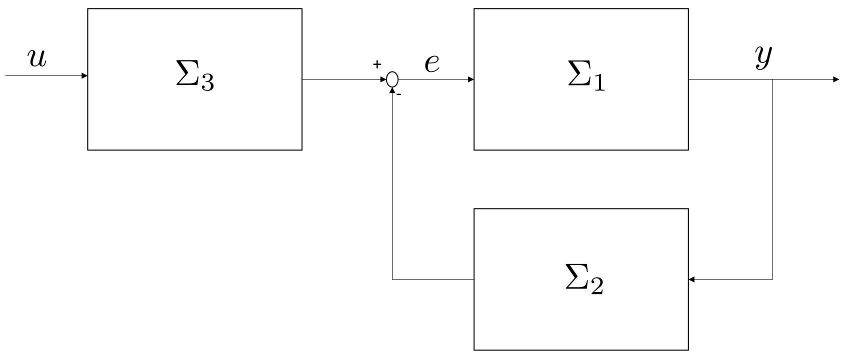
Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Dato il sistema con



$$\Sigma_1 : P_1(s) = \frac{K}{s+1}, \qquad \Sigma_2 : P_2(s) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \Sigma_3 : P_3(s) = \frac{1}{s+1}$$

   (a) definirne una rappresentazione con lo stato;

   (b) studiarne la stabilità interna al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$;

   (c) studiarne raggiungibilità e osservabilità;

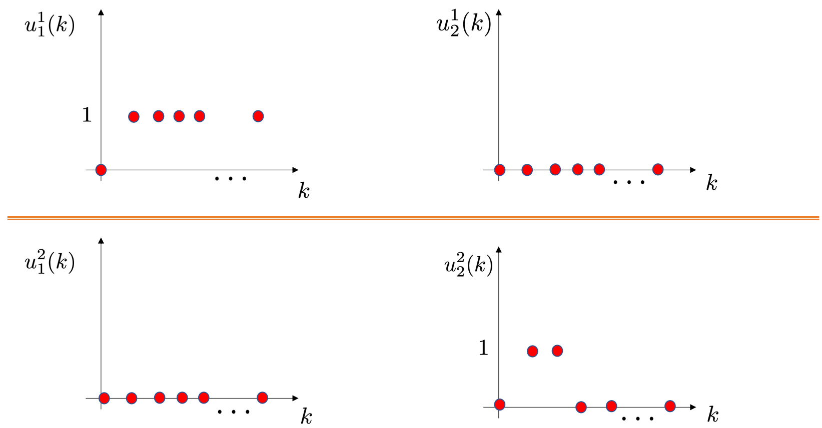
   (d) fissato $K = -1$, calcolare la risposta in uscita e, se esiste, la risposta a regime permanente in corrispondenza di $x_0 = (0\ 0\ 0)^\top$ e $u(t) = 2\sin(t-1)\delta_{-1}(t)$;

   (e) fissato $K = -1$, tracciarne i diagrammi di Bode e polare.

2. **Solo TdS 9 CFU.** Si consideri il sistema a tempo discreto con ingresso $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^\top$ e uscita y.

   (a) Definirne una rappresentazione con lo stato di dimensione minima sapendo che, per condizione iniziale nulla, agli ingressi $u^1(k) = \begin{pmatrix} u_1^1(k) & u_2^1(k) \end{pmatrix}^\top$ $u^2(k) = \begin{pmatrix} u_1^2(k) & u_2^2(k) \end{pmatrix}^\top$ riportati in Figura 2 corrispondono, rispettivamente, le seguenti uscite

$$\begin{aligned} y^1(k) =& (-1)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + \frac{4}{3}(-0.5)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + \frac{1}{3}\delta_{-1}(k-1) \\ y^2(k) =& (0.1)^{k-2}\delta_{-1}(k-2) + (0.1)^{k-3}\delta_{-1}(k-3); \end{aligned}$$



(b) Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente in corrispondenza di $u(k) = \begin{pmatrix} 4\delta_{-1}(k-2) \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. I modi naturali di un sistema a tempo continuo: definizioni e parametri caratteristici.

4. Scrivere la rappresentazione con lo stato della cascata di due ritardatori a tempo discreto e studiarne stabilità interna ed esterna.

Domande in sostituzione della prova orale.

1. Risposta impulsiva e funzione di trasferimento: si possono calcolare per via sperimentale? In caso affermativo, come?

2. La stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità di un sistema dinamico lineare e stazionario (tempo discreto o tempo continuo) dipendono dalla rappresentazione? Cosa accade se si cambiano le coordinate?

Teoria dei Sistemi
21/12/18

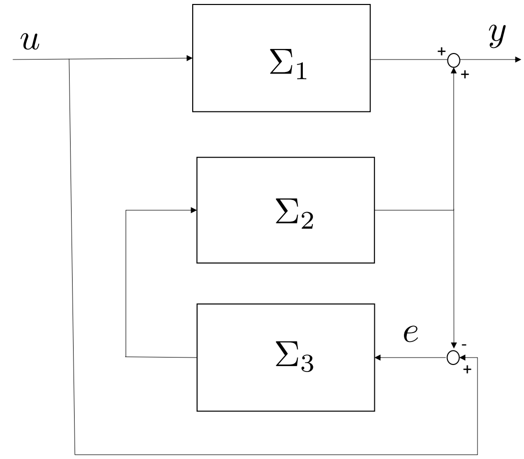
Fila C

Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

---

1. Dato il sistema con



$$\Sigma_1 : P_1(s) = \frac{2}{s}, \qquad \Sigma_2 : P_2(s) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \Sigma_3 : P_3(s) = \frac{K}{s+1}$$

(a) definirne una rappresentazione con lo stato;

(b) studiarne la stabilità interna al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$;

(c) studiarne raggiungibilità e osservabilità;

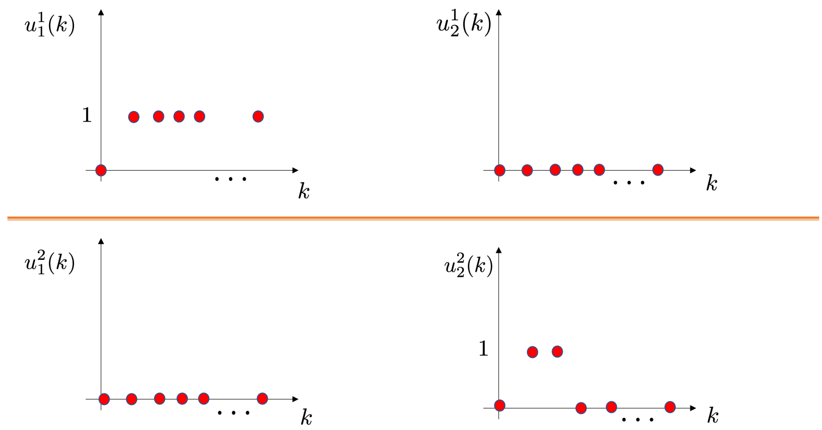
(d) fissato $K = -1$, calcolare la risposta in uscita e, se esiste, la risposta a regime permanente in corrispondenza di $x_0 = (0\ 0\ 0)^\top$ e $u(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4})\delta_{-1}(t)$;

(e) fissato $K = -1$, tracciarne i diagrammi di Bode e polare.

2. Si consideri il sistema a tempo discreto con ingresso $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^\top$ e uscita y.

(a) Calcolare una rappresentazione minima sapendo che, per condizione iniziale nulla, agli ingressi $u^1(k) = \begin{pmatrix} u_1^1(k) & u_2^1(k) \end{pmatrix}^\top$ $u^2(k) = \begin{pmatrix} u_1^2(k) & u_2^2(k) \end{pmatrix}^\top$ riportati in Figura 2 corrispondono, rispettivamente, le seguenti uscite

$$\begin{aligned} y^1(k) &= (-0.3)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + \frac{1}{2}(-0.5)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + \frac{1}{2}\delta_{-1}(k-1) \\ y^2(k) &= (0.2)^{k-2}\delta_{-1}(k-2) + (0.2)^{k-3}\delta_{-1}(k-3); \end{aligned}$$



(b) Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente in corrispondenza di $u(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\delta_{-1}(k-2) \end{pmatrix}$.

3. La risposta armonica: può essere intesa rappresentare il guadagno di un sistema dinamico lineare e stazionario? Argomentare la risposta.

4. Scrivere la rappresentazione con lo stato di un sistema continuo di dimensione $n = 1$ avente un modo naturale con legge di moto $e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcolarne, inoltre, il sistema a tempo discreto approssimato secondo Eulero per periodo di campionamento $T_s \geq 0$ e studiarne la stabilità al variare di λ e T_s.

Domande in sostituzione della prova orale.

1. Descrivere e motivare il problema della realizzazione di un nucleo $K(t)$.

2. Si consideri un sistema dinamico stazionario e lineare

$$\begin{aligned} x(k+1) =& Ax(k) \\ y(k) =& Cx(k) \end{aligned}$$

di dimensione $n = 4$. Si consideri uno stato $x_0 \in \mathbb{R}^4$ a partire dal quale $y(k) = 0$ per $k = 0, 1, 2, 3$. È possibile che $y(k)$ sia non nulla per istanti di tempo successivi?.

Teoria dei Sistemi
10/01/19

Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Crediti: ____________________

---

1. Dato il sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + ks^2 - s - k}$$

con $k \in \mathbb{R}$

(a) calcolarne il guadagno;

(b) calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente rispetto $u(t) = 2\sin(3t)$;

(c) calcolarne una realizzazione;

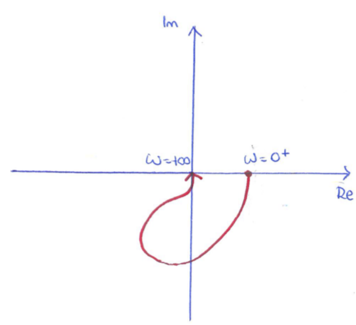
(d) condurre l'analisi modale;

(e) studiarne raggiungibilità e osservabilità;

(f) studiarne stabilità interna ed esterna;

(g) calcolare il sistema a tempo discreto equivalente per periodo di campionamento fissato a $T_s > 0$.

2. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema avente il diagramma polare della forma



3. È noto che la funzione di trasferimento di un sistema è del tipo $W(s) = \frac{K}{1+\tau s}$ con $K, \tau \in \mathbb{R}$.

   (a) calcolare K e τ sapendo che: (i) la risposta a regime permanente all'ingresso $u^1(t) = 1$ è $y_r^1(t) = -3$; (ii) la risposta a regime permanente rispetto $u^2(t) = 3\sin(3t)$ subisce uno sfasamento di $\Delta\varphi = -225°$;

   (b) calcolare la risposta transitoria rispetto l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

4. Dimostrare la formula della risposta a regime permanente all'ingresso $u(k) = \sin(\theta k)$ per un sistema a tempo discreto.

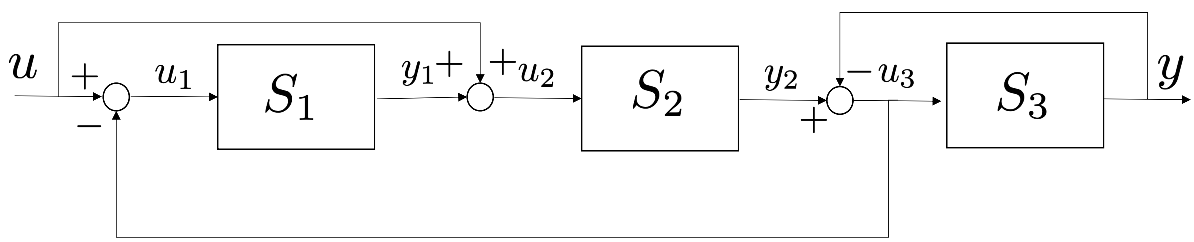
TdS & FdA
5/02/19

Fila A

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Crediti e Docente: ____________________



1. Assegnato il sistema in figura, si denotino con $W_i(s)$ e (A_i, B_i, C_i, D_i) per $i = 1, 2, 3$ la funzione di trasferimento e la rappresentazione con lo stato del generico sotto-sistema i-esimo.

   (a) si calcoli una rappresentazione con lo stato (A, B, C, D) e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema complessivo;

(b) Assunti $W_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $W_2(s) = K \in \mathbb{R}$ e $W_3(s) = \frac{1}{s+2}$

i. calcolarne una rappresentazione con lo stato (A, B, C, D) e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema complessivo;

ii. studiarne stabilità interna ed esterna al variare di K;

iii. fissare $\bar{K} \neq 0$ in modo tale che esista la risposta a regime permanente e calcolarla per $u(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4})$

iv. **(Solo TdS 9CFU e FdA.)** tracciare i diagrammi di Bode per $K = 1$.

2. Si dimostri che, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \delta_{-1}(t)$ è uguale al guadagno del sistema.

3. Dimostrare che la funzione di trasferimento $W(s)$ non dipende dalla scelta delle coordinate.

4. Dato un sistema con funzione di trasferimento $W(s) = \frac{10}{s+2}$ è possibile che la risposta indiciale $w_{-1}(t)$ ammetta una sovraelongazione? Argomentare la risposta.

5. **(Solo TdS 9CFU)** Calcolare la funzione di trasferimento del sistema a tempo-discreto equivalente di un integratore a tempo continuo.

TdS & FdA
25/03/19

Fila A

Nome e Cognome: __________________________

Matricola: __________________________

Crediti e Docente: __________________________

---

1. Si considerino i sistemi S_1 e S_2 dati da

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 \qquad \dot{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2$$
$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x_1 \qquad y_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} x_2$$

   (a) si calcoli una realizzazione del sistema S complessivo dato dalla contro-reazione unitaria dei sistemi S_1 e S_2 in catena diretta.

(b) Studiare raggiungibilità e osservabilità del sistema complessivo S e operare la scomposizione di Kalman.

(c) Studiare la stabilià interna ed esterna del sistema complessivo S.

(d) Tracciare i diagrammi di Bode e polare del sistema complessivo S.

2. Per $\kappa \in \mathbb{R}$, si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} =& -x + \kappa u \\ y =& x\end{aligned}$$

   (a) calcolare la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente rispetto $u(t) = \delta_{-1}(t)$;

   (b) calcolare, se esiste, $\kappa \in \mathbb{R}$ tale che il tempo di assestamento rispetto $u(t) = \delta_{-1}(t)$ sia $T \leq 10^{-2}$.

3. Risposta a regime permanente per sistemi a tempo discreto.

4. Definire l’eccitabilità di un modo naturale e dimostrarne la condizione. Come sono legate l’eccitabilitd̀a dei modi naturali con la raggiunbilità del sistema?

Nome e Cognome:.. Matricola:................

Teoria dei Sistemi

6 Giugno 2019

1) Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

a) Si calcolino le matrici che caratterizzano il modello esplicito nel dominio del tempo

b) Studiare l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi

c) Si calcoli l'insieme degli stati iniziali per i quali la risposta in evoluzione libera **nello stato** tende a zero al crescere del tempo

d) Tracciare lo schema di simulazione.

e) Si calcoli la risposta forzata in uscita e, se esiste, a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-1)$$

Giustificare la risposta

2) Per la funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{(s^2 + 100)(10s + 1)}$$

a) Si calcoli una realizzazione minima in forma canonica osservabile

b) Si traccino i diagrammi qualitativi di Bode e polare relativi alla funzione di trasferimento

3) Illustrare il procedimento di calcolo delle matrici che caratterizzano un sistema discretizzato, mettendo in evidenza le relazioni che esistono tra gli autovalori e gli autovettori del sistema continuo e gli autovalori ed autovettori del discretizzato associato

TdS & FdA
04/07/19

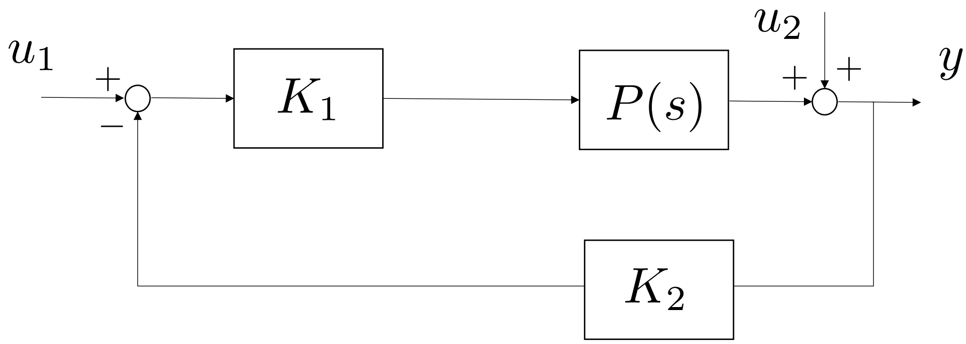
Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Crediti e Docente: ______________________

---

1. Si consideri il sistema in figura con $P(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}$ e $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$



   (a) calcolarne una realizzazione <u>minima</u>;

   (b) studiarne la stabilità interna ed esterna al variare di $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$;

   (c) calcolare, se possibile, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ in modo tale che la risposta a regime permanente rispetto $u_2(t) = \sin\sqrt{2}t$ e $u_1(t) = 0$ sia $y_r(t) = 0$;

   (d) fissati $K_1 = -18$ e $K_2 = 1$, tracciare i diagrammi di Bode e polare della funzione di trasferimento u_1/y.

2. Definizione di modi naturali e parametri caratteristici.

3. Dimostrare che, per un sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

   l'insieme degli stati inosservabili coincide con gli l'insieme degli stati indistinguibili dallo stato zero.

4. **Solo TdS 9 CFU**. Calcolare la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto ad un ingresso e due uscite sapendo che l'uscita in corrispondenza dell'ingresso a gradino è

$$y(k) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\delta_{-1}(k) - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^k \\ \frac{40}{33}\delta_{-1}(k) + \frac{5}{6}(-\frac{1}{2})^k - \frac{45}{22}(-\frac{1}{10})^k \end{pmatrix}.$$

   Inoltre, se esiste, determinare la risposta a regime permanente del sistema rispetto allo stesso ingresso.

Teoria dei Sistemi
03/09/19

Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Crediti e Docente: ______________________

---

1. Calcolare la rappresentazione con lo stato del sistema a tempo continuo il cui discretizzato ha funzione di trasferimento $W_d(z) = \frac{1}{z-1}$.

2. Assegnato il sistema con $P(s) = \frac{k}{s+10}$ e $k \in \mathbb{R}$, si calcoli il guadagno del sistema in catena diretta (ovvero di $P(s)$) sapendo che la risposta indiciale del sistema in retroazione in Figura 1 è

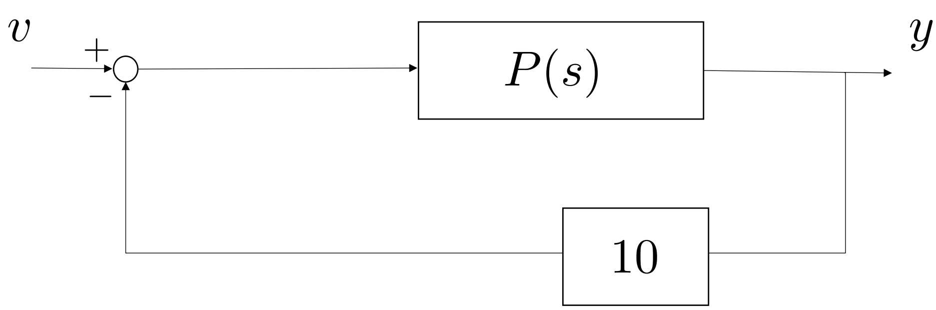


Figura 1:

$$y(t) = W_{-1}(t) = \delta_{-1}(t) - e^{-\frac{10}{9}t}\delta_{-1}(t).$$

3. Dato un sistema a tempo discreto di dimensione $n > 0$, caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili in due passi a partire da un generico stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

4. Si vuole studiare l'evoluzione di una popolazione composta da $n = 2$ specie di batteri. Si indichi con $x_i(t)$ il numero di batteri della specie i-esima ($i = 1, 2$) all'istante $t \geq 0$. Le variazioni di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ nel tempo dipendono da quattro costanti reali $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$ e $j = 1, 2$) nel modo seguente:

   - la variazione di $x_1(t)$ cresce linearmente con $x_1(t)$ secondo $\alpha_{11} > 0$ e cresce linearmente con $x_2(t)$ secondo $\alpha_{12} < 0$;
   - la variazione di $x_2(t)$ cresce linearmente con $x_1(t)$ secondo $\alpha_{21} > 0$ e cresce linearmente con $x_2(t)$ secondo $\alpha_{22} < 0$.

   (a) Si calcoli un modello a tempo continuo lineare e stazionario che descriva le evoluzioni delle densità delle popolazioni.

(b) Si spieghi cosa accade nelle due popolazioni al variare dei coefficienti $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ (*Si pensi alla carratterizzazione dell'evoluzione libera in termini di modi naturali*).

(c) Sotto quali condizioni, ad esempio, l'evoluzione di ciascuna delle due specie tende a non estinguersi qualunque sia la numerosità iniziale?

(d) Fissati $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{21} = 3$ e $\alpha_{22} = -2$, si assuma un innesto esterno di 10 batteri al secondo ($u_1(t) = 10$) della prima specie a partire da $t = 1$ secondo. Calcolare il numero di batteri della seconda specie (ovvero $x_2(t)$) per $t \geq 0$ sapendo che $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

TdS & FdA
7/11/19
Fila A

Nome e Cognome: ________________________

Matricola: ________________________

Crediti e Docente: ________________________

---

1. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

   (a) Condurre l'analisi modale.

(b) Calcolare la risposta forzata a $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t-2)$.

(c) Studiare la stabilià interna ed esterna.

(d) Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \cos t$.

2. (**solo TdS 9 CFU**) Calcolare un sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_d(k+1) =& A_d x(k) + B_d u_d(k) \\ y_d(k) =& C_d x_d(k) \end{aligned}$$

avente lo stesso comportamento ingresso-uscita del sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

agli istanti di campionamento $t = kT$ con $T = 1$ secondo e $k \geq 0$.

3. Tracciare i diagrammi di Bode e polare del sistema avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s-1}{s^3+7s^2+16s+10}.$$

sapendo che il denominatore ha una radice in $s^\star = -1$.

4. Il problema della realizzazione.

5. Dato un sistema a tempo continuo (A, B, C, D) con $D = 0$ si denoti con Λ l'insieme degli autovalori del sistema e con Λ_e e Λ_o l'insieme degli autovalori associati ai modi eccitabili e osservabili. Dimostrare che se $\Lambda_e \cap \Lambda_o = \emptyset$ allora la risposta impulsiva è nulla.

Teoria dei Sistemi
18/12/19

Nome e Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

---

1. Assegnato il sistema in Figura 1 con

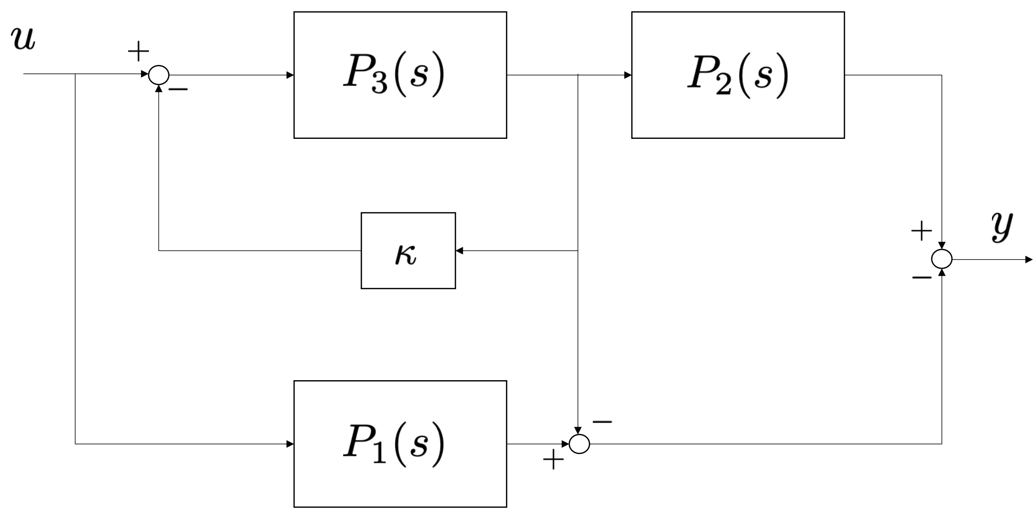


Figura 1: Grafico Problema 1

$$P_1(s) = \frac{1}{s+3}, \qquad P_2(s) = \frac{s+1}{s+2}, \qquad P_3(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \qquad \kappa = 1$$

   (a) individuare una rappresentazione con lo stato;
   (b) calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$;
   (c) studiare la stabilità interna ed esterna (nello stato zero e in ogni stato);
   (d) calcolare se esiste la risposta a regime permanente a $u(t) = sen(t)$;
   (e) calcolare una realizzazione della funzione di trasferimento $W(s)$.

2. Tracciare i diagrammi di bode e polare della funzione di trasferimento $W(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2(s+2)(s+3)}$.

3. Assegnato il sistema in Figura 2 studiare la stabilià interna ed esterna (nello stato zero e in ogni stato) del sistema complessivo (da v a y) al variare di $\kappa > 0$.

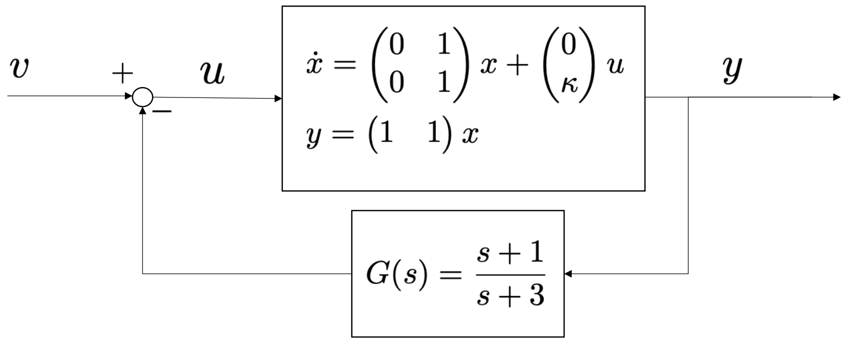


Figura 2: Grafico Problema 2

4. Definizioni e condizioni per la stabilità interna dei sistemi lineari.

5. Definizione di raggiungibilità di uno stato; caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili per sistemi dinamici lineari stazionari; confrontare il caso tempo continuo e tempo discreto.

6. Il ruolo dell'osservabilità nella ricostruzione del comportamento interno.

7. Sotto quali condizioni ad un autovalore di molteplicità algebrica μ corrisponde un blocco di Jordan di dimensione $\mu \times \mu$?

Teoria dei Sistemi e FdA
18/12/19

Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

---

1. Assegnato il sistema in Figura 1 con

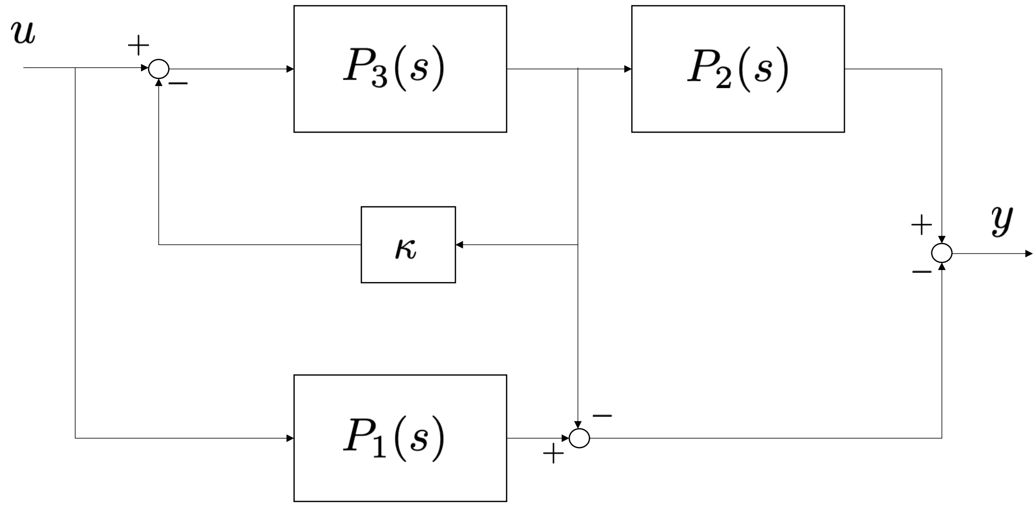


Figura 1: Grafico Problema 1

$$P_1(s) = \frac{1}{s+3}, \qquad P_2(s) = \frac{s+1}{s+2}, \qquad P_3(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \qquad \kappa = 1$$

   (a) individuare una rappresentazione con lo stato;
   (b) calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$;
   (c) studiare la stabilità interna ed esterna (nello stato zero e in ogni stato);
   (d) calcolare se esiste la risposta a regime permanente a $u(t) = sen(t)$;
   (e) calcolare una realizzazione della funzione di trasferimento $W(s)$.

2. Tracciare i diagrammi di bode e polare della funzione di trasferimento $W(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2(s+2)(s+3)}$.

3. Assegnato il sistema in Figura 2

   (a) studiare la stabilià interna ed esterna (nello stato zero e in ogni stato) del sistema complessivo (da v a y) al variare di $\kappa > 0$;

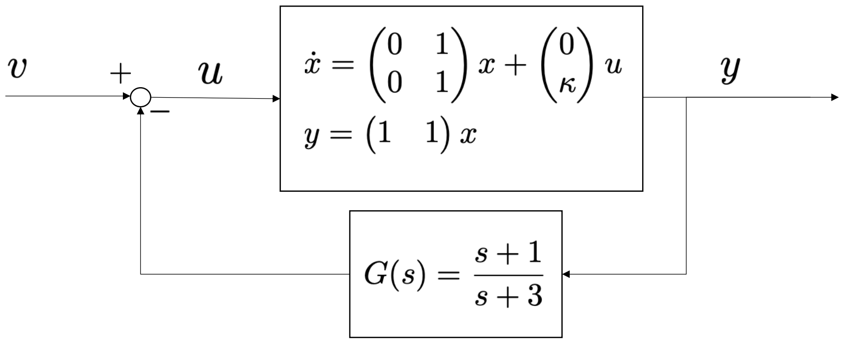


Figura 2: Grafico Problema 2

4. Assegnato il sistema $P(s) = \frac{10}{(s+10)(s+1)}$ calcolare i parametri caratteristici della risposta indiciale.

5. Definizioni e condizioni per la stabilità interna dei sistemi lineari.

6. Definizione di raggiungibilità di uno stato; caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili per sistemi dinamici lineari stazionari; confrontare il caso tempo continuo e tempo discreto.

7. Sotto quali condizioni ad un autovalore di molteplicità algebrica μ corrisponde un solo blocco di Jordan di dimensione $\mu \times \mu$?

Teoria dei Sistemi e FdA
03/02/2020

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Crediti e Docente: ____________________

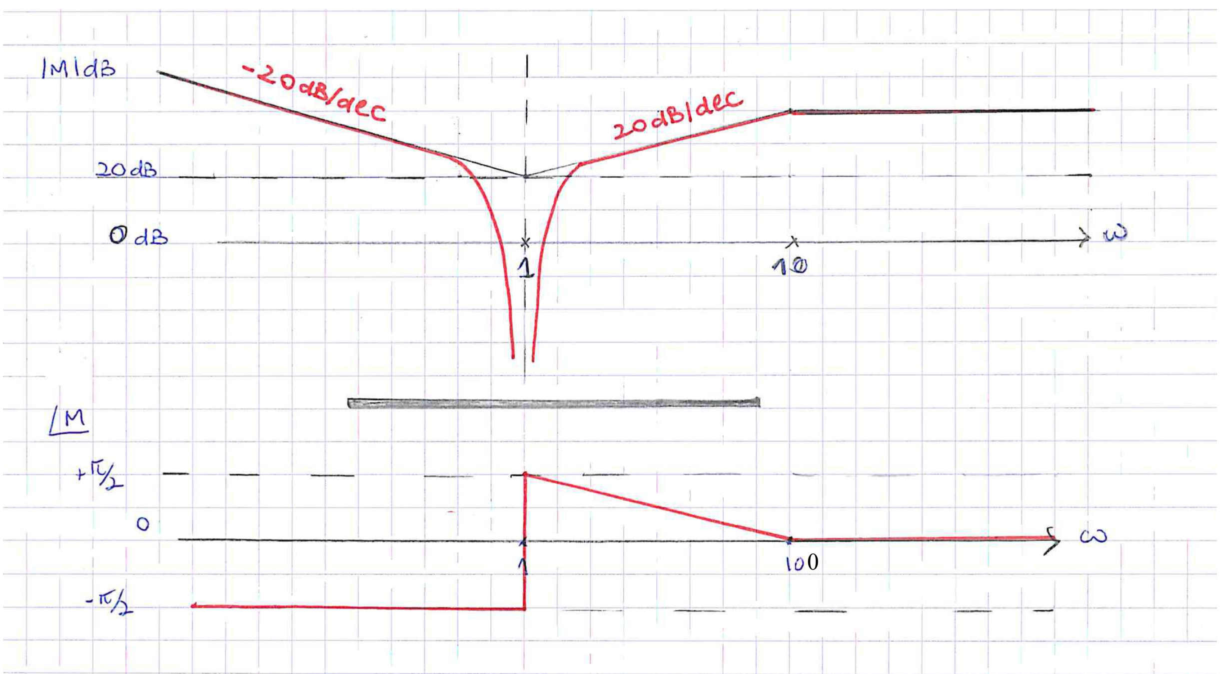


Figura 1: Grafico Problema 1

1. A partire dai diagrammi di Bode <u>asintotici</u> in Figura 1, calcolare

   (a) una rappresentazione con lo stato del sistema;

   (b) la risposta forzata in uscita all'ingresso $u(t) = \sin t$;

   (c) se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

2. Assegnato il sistema lineare e stazionario con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

studiare le proprietà di raggiungibilità, osservabilità e stabilità al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

3. Assegnato il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato dalla seguente equazione al secondo ordine

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

in cui $y = y(t)$ denota la posizione della massa $m > 0$ all'istante $t \geq 0$ e $b, k \geq 0$ sono, rispettivamente, i coefficienti dell'attrito viscoso e della forza elastica

   (a) calcolare un modello lineare e stazionario;

   (b) scegliendo opportunamente i valori dei parametri b, k, m illustrarne i diversi comportamenti effettuando l'analisi modale.

4. Un sistema dinamico può esser rappresentato tramite un modello implicito o esplicito.

   (a) Illustrare i diversi vantaggi e svantaggi delle due rappresentazioni;

   (b) Per sistemi a tempo discreto lineari e stazionari, indicare i passaggi matematici che permettono di passare da una rappresentazione all'altra e viceversa.

5. Calcolare un modello del primo ordine di un sistema a tempo continuo con costante di tempo $\tau = 1$ secondo e guadagno $k = 10$. Calcolarne il sistema a tempo discreto equivalente per periodo di campionamento $T_s = 0.1$ secondi.

Teoria dei Sistemi e FdA
08/05/2020

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Crediti e Docente: ____________________

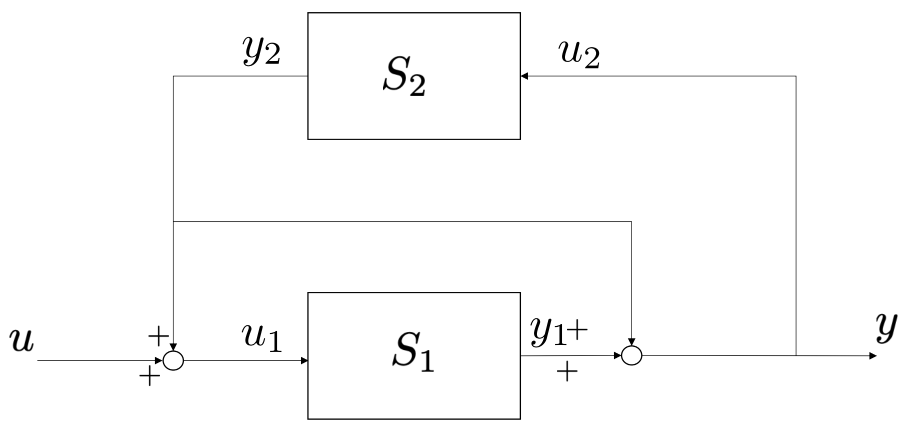


Figura 1: Grafico Problema 1

1. Assegnato il sistema in Figura 1 con

$$S_1 : W_1(s), \quad (A_1, B_1, C_1)$$
$$S_2 : W_2(s), \quad (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

   (a) calcolare una rappresentazione con lo stato;

   (b) calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

   (c) fissate $W_1(s) = \frac{1}{s}$, $W_2(s) = \frac{2s+1}{s+1}$

      i. verificare la perdita di raggiungibilità o osservabilità;

      ii. studiare la stabilità interna ed esterna.

2. Assegnato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} =& Ax + Bu \\ y =& Cx + Du\end{aligned}$$

dimostrare che la risposta forzata verifica $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)U(s)\}(t)$ in cui $W(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema e $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}(s)$.

3. Assegnato il sistema $\dot{x} = Ax + b$ con $x, b \in \mathbb{R}^n$
   (a) calcolare gli stati di equilibrio;
   (b) come si studia la stabilità di questi?

4. **Solo TdS.** È noto che il campionamento, con periodo $T > 0$, della risposta indiciale di un sistema dinamico LTI è pari a $(Tk)\delta_{-1}(k)$. Calcolare una rappresentazione con lo stato del sistema.

5. **Solo TdS.** Definizione di: costante di tempo, pulsazione naturale e smorzamento.

Teoria dei Sistemi e FdA
08/06/2020

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Crediti e Docente: ____________________

---

1. Assegnato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

   (a) individuare e studiare le proprietà dei modi naturali e loro analisi;
   (b) effettuare la scomposizione di Kalman;
   (c) calcolare la risposta in uscita e, se esiste, la risposta a regime permanente per $x_0 = (1\ 1\ 1)^\top$ e $u(t) = \delta_{-1}(t-2) + \cos t\delta_{-1}(t)$.
   (d) studiare la stabilità interna ed esterna.
   (e) (**Solo TdS**) Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente su intervallo di campionamento e di tenuta $T_s = 1$ secondo.

2. Calcolare una rappresentazione con lo stato e i diagrammi di Bode e Polare di un sistema avente un ingresso ed un'uscita sapendo che:
   - la risposta a regime permanente in corrispondenza di $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$ è $y_r(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
   - la risposta a regime permanente in corrispondenza di $u(t) = \delta_{-1}(t)$ è $y_r(t) = \frac{1}{2}$;
   - il sistema ha un modo naturale con smorzamento $\zeta = \frac{1}{2}$ e pulsazione naturale $\omega_n = 1$.

3. (**Solo TdS 9 CFU**) Per un sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) =& Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) =& Cx(k) \end{aligned}$$

   con $x \in \mathbb{R}^n$, $y, u \in \mathbb{R}$, si denoti con $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ il sottospazio degli stati inosservabili. Si dimostri che

$$\mathcal{I} \equiv \ker \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

5. $w(t)$, $W(s)$ e $W(j\omega)$: definizioni, relazioni e significato fisico.

Teoria dei Sistemi e FdA
06/07/2020

Nome e Cognome: ________________________

Matricola: ________________________

Crediti e Docente: ________________________

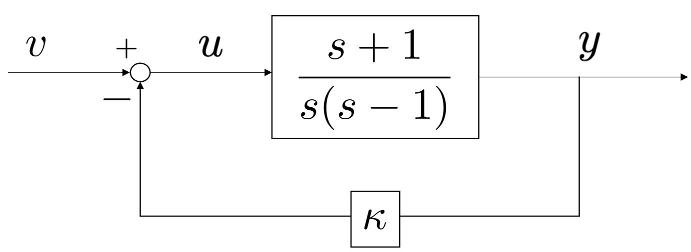
---

1. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario caratterizzato da:
   - un modo pseudoperiodico con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\zeta = 0,5$;
   - un modo aperiodico con costante di tempo $\tau = 1$;
   - guadagno $\kappa = -10$;
   - risposta a regime permanente ad ingresso $u(t) = \sin t$ pari a $y_r(t) = 10 \sin t$.

   Per tale funzione di trasferimento:

   (a) calcolare una realizzazione;
   (b) effettuare l'analisi dei modi naturali;
   (c) tracciare i diagrammi di Bode e polare;
   (d) discutere la dimensione della realizzazione; che dimensione ha quella calcolata? Ne esistono di dimensione maggiore? Ne esistono di dimensione minore?

2. Assegnato il sistema



   esiste un valore di $\kappa \in \mathbb{R}$, sia $\kappa^\star$, in corrispondenza del quale tra v e y si ha una risonanza infinita? Per il sistema risultante si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$.

3. Assegnato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = x_2$$

   (a) **(Solo TdS 9 CFU)** si calcoli il sistema a tempo discreto equivalente con $T = 1$ secondo;

(b) **(Solo TdS 9 CFU)** si studi la stabilità interna ed esterna del sistema a tempo discreto ottenuto.