Teoria dei Sistemi

Lezione 22 (9 novembre 2021)

Uscita a regime permanente con ingresso polinomiale

Nella scorsa lezione avevamo visto che, se consideriamo l'ingresso $u(t) = \frac{t^k}{k!}$, l'uscita a regime permanente ha la forma:

$$y_{RP}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} W(s)\right]_{s=0}$$

Ovvero, preso un ingresso polinomiale scritto nella forma notevole (cioè diviso per il rispettivo fattoriale), si trova come uscita a regime permanente un polinomio in t che ha potenze da 0 a k moltiplicato per un coefficiente che è facile da calcolare:

$$\frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} W(s)\right]_{s=0}$$

Considerando lo sviluppo di Maclaurin di $W(s)$, ci accorgiamo che i coefficienti che moltiplicano il polinomio nella risposta a regime permanente sono esattamente i coefficienti che moltiplicano le varie potenze nello sviluppo di $W(s)$:

$$\begin{aligned} W(s) = W(s)|_{s=0} \quad + \quad \left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} s \quad + \quad \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W(s)}{ds^2}\right|_{s=0} s^2 \quad + \cdots + \quad \frac{1}{k!}\left.\frac{d^kW(s)}{ds^k}\right|_{s=0} s^k \quad + \cdots = \\ = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_k s^k + \cdots \end{aligned}$$

Indicando con $c_0, c_1, \ldots$ questi coefficienti, la risposta a regime permanente può essere scritta più facilmente come

$$y_{RP}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \, c_i$$

ricordando, però, che in questo caso il termine c_0 moltiplica la potenza massima di t e il termine c_k è il termine noto (il contrario rispetto allo sviluppo di Maclaurin).

Esempi di y_{RP} con ingresso polinomiale

Per fare un esempio, consideriamo

$$u(t) = \frac{t^2}{2}, \quad W(s) = \frac{1}{s+1}$$

e calcoliamo la risposta a regime permanente:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= \frac{t^2}{2} c_0 + t c_1 + c_2 = \\ &= \frac{t^2}{2} W(s)|_{s=0} + t \left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \\ &= \frac{t^2}{2} \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=0} + t \left.\frac{-1}{(s+1)^2}\right|_{s=0} + \frac{1}{2}\left.\frac{1}{(s+1)^3}\right|_{s=0} = \\ &= \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se, invece,

$$u(t) = \frac{t^2}{2} + t$$

allora ai termini di $\frac{t^2}{2}$ che abbiamo già calcolato si aggiungono quelli relativi a t:

$$\begin{aligned}
y_{RP}(t) &= \underbrace{\frac{t^2}{2}c_0 + tc_1 + c_2}_{\text{termini di } \frac{t^2}{2}} + \underbrace{tc_0 + c_1}_{\text{termini di } t} = \\
&= \frac{t^2}{2} W(s)|_{s=0} + t\frac{dW(s)}{ds}\bigg|_{s=0} + \frac{1}{2}\frac{d^2W(s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} + tW(s)|_{s=0} + \frac{dW(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \\
&= \underbrace{\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}} + \underbrace{t - 1} = \\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

***

Consideriamo, ora, l'ingresso:

$$u(t) = t^3$$

Si vede che non è in forma notevole (non è diviso per 3!); perciò, questo ingresso andrà considerato come se fosse:

$$u(t) = \frac{t^3}{3!} \cdot 3!$$

e andrà fatto lo sviluppo di $\frac{t^3}{3!}$, moltiplicato tutto per 3!:

$$\begin{aligned}
y_{RP} &= \left(\frac{t^3}{3!}c_0 + \frac{t^2}{2!}c_1 + tc_2 + c_3\right) \cdot 3! = \\
&= t^3 c_0 + \frac{3!}{2!}c_1 + 3!\,tc_2 + 3!\,c_3
\end{aligned}$$

***

Prendiamo

$$u(t) = t, \quad W(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

Dobbiamo far attenzione in questo caso: i poli della funzione $W(s)$ non sono tutti minori di zero (il polo $s-1$ indica che c'è un autovalore $\lambda = 1$, che è positivo); si avrà, in W, *un modo naturale che non tende a zero e la risposta a regime permanente non può esistere.*

Uscita a regime permanente con ingresso periodico

Gli ingressi che "permangono" nel tempo ad un valore limitato sono quello costante, che abbiamo studiato generalizzandolo fino al livello polinomiale, e quello *periodico*. Per semplicità, prima di studiare la risposta a regime permanente con un ingresso del tipo $u(t) = \sin \omega t$, studiamo un ingresso esponenziale, per poi ricondurci all'ingresso trigonometrico tramite i numeri complessi.

Prendiamo allora:

$$u(t) = e^{at}$$

La risposta a regime permanente sarà:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)e^{a\tau}\, d\tau = \\ &= \int_{0}^{+\infty} W(\theta)e^{a(t-\theta)}\, d\theta = \\ &= e^{at}\int_{0}^{+\infty} W(\theta)e^{-a\theta}\, d\theta = \\ &= e^{at}W(s)|_{s=a} \end{aligned}$$

L'integrale che otteniamo nel penultimo passaggio è esattamente $W(s)$ con $s = a$, da cui segue il risultato; inoltre, s è una variabile complessa, per cui possiamo prendere qualsiasi $a \in \mathbb{C}$.

A questo punto, visto che

$$u(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

si avrà, applicando il risultato ottenuto poco fa:

$$y_{RP}(t) = \frac{e^{j\omega t}W_s(j\omega) - e^{-j\omega t}W_s(-j\omega)}{2j}$$

dove ho indicato $W_s(j\omega) := W(s)|_{s=j\omega}$ (*vedi nota 1*). Il termine $W_s(j\omega)$ è un termine complesso; possiamo, quindi, indicarlo nella forma modulo-fase; allora, $W_s(j\omega) = |W_s(j\omega)|\, e^{j\angle W_s(j\omega)}$, dove con $|W_s(j\omega)|$ se ne indica il modulo e con $\angle W_s(j\omega)$ la fase. Si ha allora:

$$y_{RP}(t) = \frac{e^{j\omega t}\,|W_s(j\omega)|\, e^{j\angle W_s(j\omega)} - e^{-j\omega t}\,|W_s(-j\omega)|\, e^{j\angle W_s(-j\omega)}}{2j}$$

Si dimostra, con lo studio delle trasformate di Fourier, che il modulo di una trasformata è una funzione *pari*, ovvero:

$$|W_s(-j\omega)| = |W_s(j\omega)|$$

Per lo stesso motivo, la fase è una funzione *dispari*:

$$\angle W_s(-j\omega) = -\angle W_s(j\omega)$$

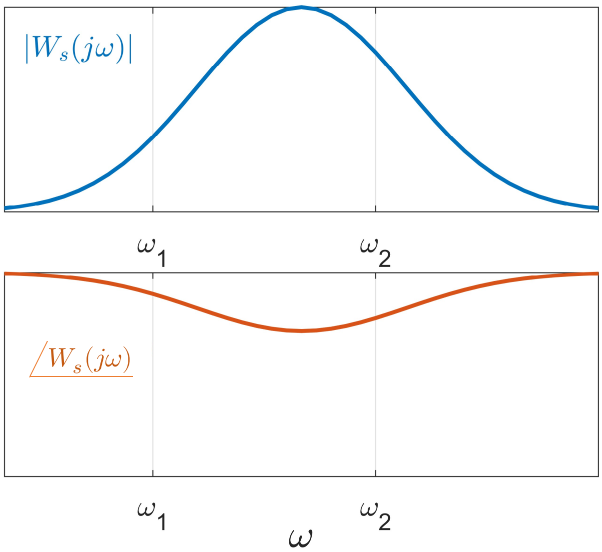
[1] (N.d.R.) Per indicare $W(s)|_{s=j\omega}$, il professore usa la notazione $W(j\omega)$, invece di $W_s(j\omega)$. In questi appunti ho adottato questa notazione per rendere chiaro che si tratta di $W(s)$ calcolata in $s = j\omega$, evitando fraintendimenti con la funzione $W(t)$.

Riscrivendo, allora, l'uscita a regime permanente:

$$
\begin{aligned}
y_{RP}(t) &= \frac{e^{j\omega t}\,|W_s(j\omega)|e^{j\underline{/W_s(j\omega)}} - e^{-j\omega t}\,|W_s(j\omega)|e^{-j\underline{/W_s(j\omega)}}}{2j} = \\
&= |W_s(j\omega)| \cdot \frac{e^{j\left(\omega t + \underline{/W_s(j\omega)}\right)} - e^{-j\left(\omega t + \underline{/W_s(j\omega)}\right)}}{2j} = \\
&= |W_s(j\omega)|\ \sin\!\left(\omega t + \underline{/W_s(j\omega)}\right)
\end{aligned}
$$

Studio della risposta armonica

La funzione $W_s(j\omega)$ viene chiamata *risposta armonica*, ed esiste solo quando esiste la risposta a regime permanente. Notiamo che se l'ingresso è una sinusoide con un certo periodo, l'uscita a regime permanente avrà *lo stesso periodo dell'ingresso* (cioè la stessa frequenza) e, al più, avrà diversa ampiezza e un certo sfasamento rispetto all'ingresso. Queste due variabili dipendono entrambe da $W_s(j\omega)$ dove varia $\omega \in \mathbb{R}$, perciò possiamo studiare semplicemente la funzione $W_s(j\omega)$; anche se è una funzione complessa, quello che a noi interessa è solo il suo modulo e la fase, perciò andremo a studiare separatamente le funzioni $|W_s(j\omega)|$ e $\underline{/W_s(j\omega)}$. Per esempio, se vogliamo che l'uscita di un sistema sia *amplificata* rispetto all'ingresso e abbiamo due pulsazioni ω_1 e ω_2 tali che:



allora sceglieremo ω_2 perché, nonostante generi in uscita una sinusoide *più sfasata* rispetto a quella di ingresso (è maggiore il valore di $\underline{/W_s(j\omega)}$), *è di ampiezza maggiore* (è maggiore il valore di $|W_s(j\omega)|$). Questo diagramma, con sopra il grafico del modulo e sotto il grafico della fase, viene chiamato *diagramma di Bode*.

Studiamo allora la funzione $W_s(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$; questa è una funzione *strettamente propria* (a meno che non ci sia D). Ciò significa che avremo un denominatore $d(s)$ e un numeratore $n(s)$:

$$
W_s(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \left.\frac{n(s)}{d(s)}\right|_{s=j\omega}
$$

Rendendo $p = q = 1$ per semplicità, avremo che il denominatore è un polinomio di grado n e il numeratore avrà grado *minore* di n. Sono due polinomi che possiamo provare a fattorizzare tramite le radici, che possono essere reali o complesse coniugate:

$$\left.\frac{n(s)}{d(s)}\right|_{s=j\omega} = \left.\frac{k_1(\quad)\dots(\quad)}{k_2(\quad)\dots(\quad)}\right|_{s=j\omega} \tag{$\spadesuit$}$$

dove nelle parentesi ci sono le radici di $W(s)$. Inoltre, per le proprietà del modulo:

$$|T_1 \cdot T_2| = |T_1| \cdot |T_2|, \quad \left|\frac{T_1}{T_2}\right| = \frac{|T_1|}{|T_2|}$$

e, per le proprietà della fase[2]:

$$\angle T_1 \cdot T_2 = \angle T_1 + \angle T_2, \quad \angle \frac{T_1}{T_2} = \angle T_1 - \angle T_2$$

allora, se vogliamo calcolare il modulo di $W_s(j\omega)$, lo fattorizziamo portandolo nella forma dell'equazione ($\spadesuit$) e prendiamo il modulo di ogni termine; per la fase, invece, dopo averlo fattorizzato sommiamo tutte le fasi dei termini al numeratore e sottraiamo le fasi dei termini al denominatore.

Risposta armonica in forma di Bode

Se fattorizziamo $W(s)$, otteniamo vari tipi di termini:

- Costanti;
- Termini di tipo s dati dalla radice $s_i = 0$;
- Termini di tipo $(s - s_i)$ dati da radici reali;
- Termini complessi coniugati di tipo $(s - s_i)(s - s_i^*)$.

Tralasciando le radici complesse, è utile scrivere i termini del tipo $(s - s_i)$ come $(1 \pm \cdots)$:

$$(s - s_i) \quad \longrightarrow \quad -s_i\left(1 - \frac{s}{s_i}\right)$$

in questo modo, tutte le costanti si mettono da parte e formano un unico termine K che moltiplica il tutto; a questo punto, possiamo scrivere $W(s)$ come:

$$W(s) = K\frac{\left(1 - \frac{s}{s_1}\right)\left(1 - \frac{s}{s_2}\right)\dots\left(1 - \frac{s}{s_n}\right)}{\left(1 - \frac{s}{s_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{s}{s_{n+2}}\right)\dots\left(1 - \frac{s}{s_{2n}}\right)}$$

Scrivendo $W(s)$ in questo modo, è evidente come il calcolo in $s = 0$ sia banale, poiché $W(0) = K$. Questa forma particolare di fattorizzazione di $W(s)$ viene chiamata *forma di Bode*.

Facciamo un esempio: prendiamo

$$W(s) = \frac{2(s+1)(s-2)}{s(s+10)(s+2)(s+3)}$$

[2] Se $T_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ e $T_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$, allora la fase del prodotto sarà:

$$\angle T_1 T_2 = \angle \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = \angle \rho_1\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} = \theta_1 + \theta_2 = \angle T_1 + \angle T_2$$

e la stessa cosa vale per il rapporto.

e scriviamolo nella forma di Bode; scriviamo tutti i termini del tipo $(s - s_i)$ come $(1 \pm \cdots)$, mettendo in evidenza il termine noto:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{2 \cdot (1+s) \cdot -2\left(1-\frac{s}{2}\right)}{s \cdot 10\left(1+\frac{s}{10}\right) \cdot 2\left(1+\frac{s}{2}\right) \cdot 3\left(1+\frac{s}{3}\right)} = \\ &= \underbrace{\frac{2 \cdot (-2)}{10 \cdot 2 \cdot 3}}_{K} \cdot \frac{(1+s)\left(1-\frac{s}{2}\right)}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{3}\right)} = \\ &= -\frac{1}{15} \frac{(1+s)\left(1-\frac{s}{2}\right)}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{3}\right)} \end{aligned}$$

Il termine s resta così com'è. La fattorizzazione nella forma di Bode è *unica*.

Calcolare modulo e fase della risposta armonica

Immaginiamo di avere due una funzione $W(s)$ con due fattori:

$$W(s) = \frac{1}{(s+10)(s+2)}$$

calcolare la fase di $W_s(j\omega)$ è molto semplice, perché una volta calcolata la fase di $s + 10$ e la fase di $s + 2$, basta effettuare una somma. Non si può dire la stessa cosa per il modulo; una volta calcolati il modulo di $s + 10$ e il modulo di $s + 2$, dovremmo effettuare un *prodotto* per calcolare il modulo di $W_s(j\omega)$, che in genere è molto più complesso del calcolo di una somma[3].

La soluzione che possiamo adottare è l'utilizzo del *logaritmo*: in una qualsiasi base x, infatti, vale che

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b\,, \quad \log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

inoltre, il logaritmo è una funzione *monotòna*, per cui il grafico, rispetto a quello delle funzioni originali, risulterà più "schiacciato" ma viene preservata la monotonia delle funzioni (cioè, dove f è crescente, $\log_x f$ è anch'esso crescente, e se f presenta un estremo in un punto, anche $\log_x f$ presenterà un estremo in quel punto). Per convenzione, quando si deve calcolare il modulo di $W_s(j\omega)$, si calcola *in decibel*:

$$20 \log_{10} |W_s(j\omega)|$$

ovvero si usa la base 10 per convenzione e il logaritmo viene moltiplicato per il coefficiente 20 (per compensare lo "schiacciamento" del grafico[4]). A differenza di $|W_s(j\omega)|$ che occupa la parte superiore del grafico visto che la quantità è maggiore o uguale a zero, $|W_s(j\omega)|_{\mathrm{dB}}$ occupa *tutto il grafico*, e il logaritmo è negativo quando il modulo è minore di 1. In altre parole, nella parte negativa del grafico logaritmico ci sono tutti i valori in corrispondenza dei quali la sinusoide si attenua, mentre nella parte positiva ci sono quelli per cui la sinusoide si amplifica.

[3] Soprattutto se si considerano solamente i grafici: dati i grafici di due funzioni, è semplice tracciare il grafico della somma, ma non è così facile tracciare quello del prodotto.

[4] La scelta deriva dalla *teoria dei segnali*, dove il calcolo in decibel di una quantità q viene definito come:

$$10 \log_{10} |q|^2$$

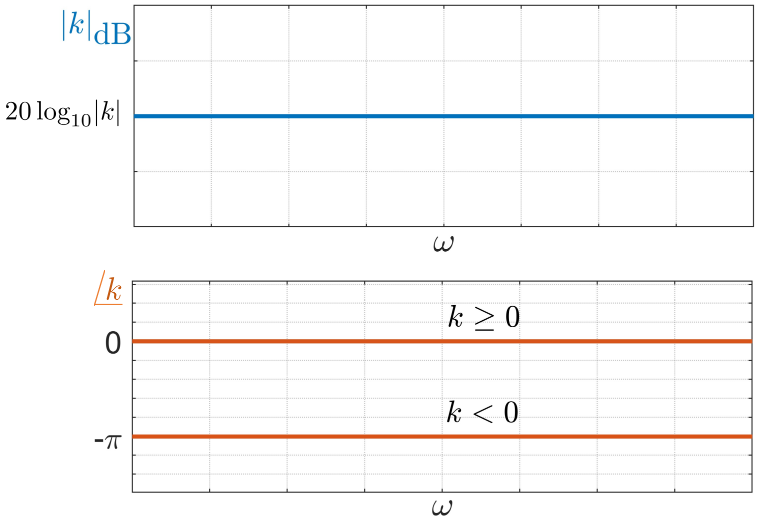
Che equivale esattamente alla quantità $20 \log_{10} |q|$. La parola "decibel" indica, in generale, il logaritmo del rapporto tra due grandezze omogenee. Il modulo scritto in decibel si può anche indicare come $|q|_{\mathrm{dB}}$.

Grafico logaritmico di funzioni base

Abbiamo detto che la funzione $W(s)$ (e quindi anche la risposta armonica), una volta fattorizzata contiene diversi elementi:

- Costanti;
- Termini di tipo s;
- Termini di tipo $(s - s_i)$ dati da radici reali;
- Termini complessi coniugati di tipo $(s - s_i)(s - s_i^*)$.

Vediamo come rappresentare le costanti nel diagramma di Bode. Una costante k avrà modulo $|k|$, perciò andremo a rappresentarla nel grafico del modulo come $20\log_{10}|k|$. Visto che k è una costante reale, allora la sua fase sarà pari a zero se $k \geq 0$, altrimenti la fase sarà pari a π o $-\pi$ (si prende $-\pi$ per convenzione):



Se k vale, per esempio, -10, allora il modulo in decibel sarà $20\log_{10} 10 = 20$, e la fase sarà $\angle{-10} = -\pi$. Il logaritmo del modulo, in quanto tale, non cambia tra k positivo o negativo; cambia solamente la fase.

***

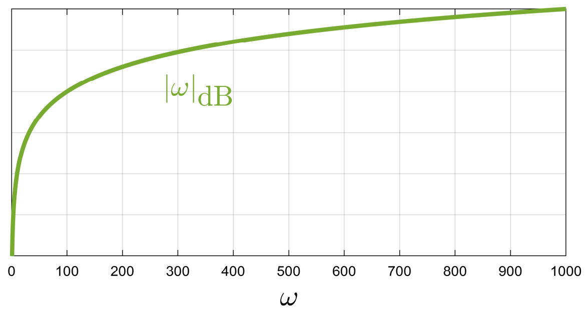
Vediamo ora la rappresentazione di un termine semplice: s. In particolare, se consideriamo la risposta armonica, ci interessa $W(s)|_{s=j\omega}$, perciò stiamo considerando

$$s|_{s=j\omega} = j\omega$$

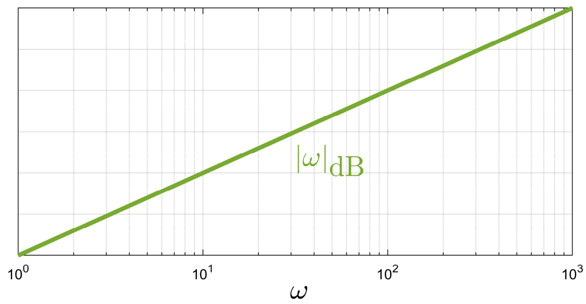
Allora, il modulo di questa quantità sarà $|j\omega| = \sqrt{0^2 + \omega^2} = |\omega|$; in decibel, abbiamo:

$$|\omega|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|\omega|$$

Il grafico di questa quantità è fatto in questo modo:

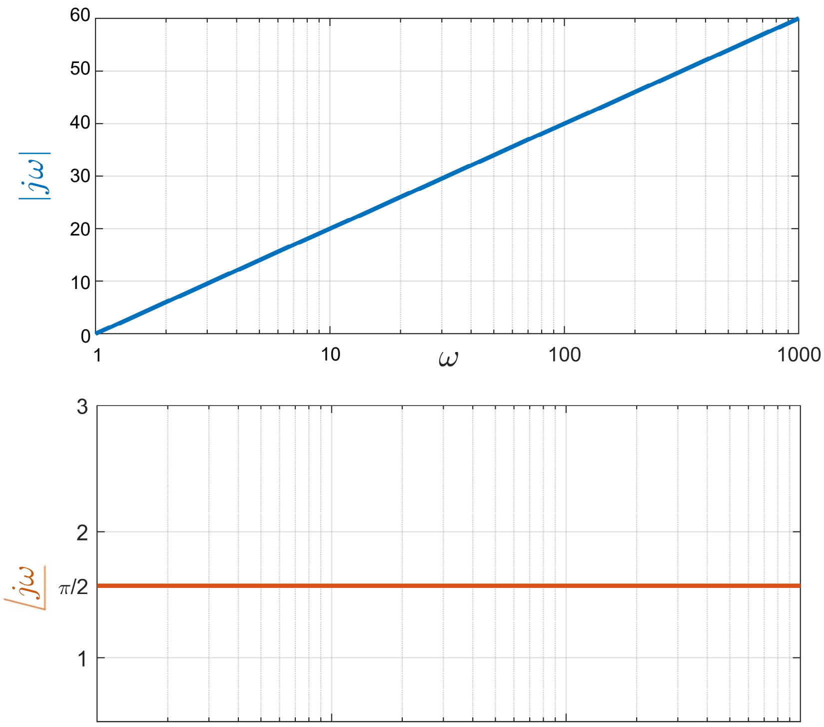


Disegnare il logaritmo, però, non è facilissimo (soprattutto quando ci si dovranno effettuare operazioni sopra), perciò possiamo rendere il tutto più facile se, invece di prendere come ascissa ω, prendiamo come ascissa $\log_{10} \omega$ (ovvero, consideriamo una scala logaritmica); così facendo, il grafico diventa una *retta*:



Come si vede, ogni unità del grafico non è più costante, ma è quella che viene chiamata una *decade*: si passa da 1 a 10, da 10 a 100, da 100 a 1000 e così via, in modo esponenziale (stessa cosa per i termini negativi: si va da 1 a 0.1, da 0.1 a 0.01, ecc.). La scala sarà, allora, lineare *rispetto alle decadi.* L'"asse y", invece, è lineare: per questo si dice che il piano è *semilogaritmico* (ovvero è logaritmico solamente rispetto ad un asse).

Essendo $j\omega$ la variabile che stiamo considerando, con $\omega \geq 0$, la fase è costante a $\frac{\pi}{2}$ (infatti $j\omega$ è un numero immaginario puro che si troverà nel semiasse immaginario positivo, e l'angolo che forma con l'origine è sempre di $\frac{\pi}{2}$). Si ha allora[5]:



[5] Se prendiamo in considerazione il grafico in figura di $|j\omega|$, notiamo che la pendenza della "retta" è fissa e "sale" di 20 unità ad ogni potenza di 10. Si dice, allora, che la pendenza del grafico è di 20 *decibel per decade*, e si indica con 20 dB/dec.

Teoria dei Sistemi

Lezione 23 (11 novembre 2021)

Grafico delle radici reali nella risposta armonica

La scorsa lezione abbiamo visto come rappresentare graficamente i termini costanti e i termini reali semplici s (dati dalla radice 0). Vediamo oggi come disegnare le radici reali. Abbiamo già scritto i termini $(s - s_i)$ nella forma di Bode:

$$s - s_i \quad \longrightarrow \quad -s_i \left(1 - \frac{s}{s_i}\right)$$

dove il fattore $-s_i$ va a far parte del coefficiente K che moltiplica tutta la funzione $W(s)$, come visto la scorsa volta. Concentriamoci sul termine rimanente e scriviamolo in una forma più "standard":

$$1 \pm \frac{s}{s_i} \quad \longrightarrow \quad 1 \pm s\tau$$

ovvero scriviamo $\frac{1}{s_i} = \tau$; questa quantità si chiama *costante di tempo*. Per esempio, se abbiamo il fattore $s + 3$, lo andremo a scrivere nella forma di Bode come $3(1 + \frac{s}{3})$, dove il 3 va a far parte del coefficiente K che moltiplica tutto e $\tau = \frac{1}{3}$.

La risposta armonica di un fattore di questo tipo sarà:

$$[1 \pm s\tau]_{s=j\omega} = 1 \pm j\omega\tau$$

Andiamo a studiarne modulo e fase. Il modulo, in decibel, è:

$$|1 \pm j\omega\tau|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

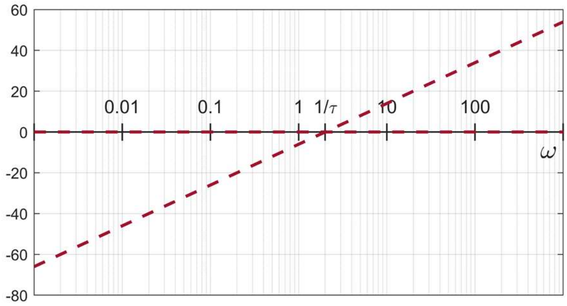
questa non è una funzione facilmente disegnabile, perciò andiamo a studiare approssimativamente il suo andamento. Per $\omega\tau \ll 1$, ovvero per $\omega \ll 1/\tau$, il termine $\omega^2\tau^2$ è trascurabile rispetto all'1, perciò la funzione assumerà approssimativamente il valore

$$20 \log_{10} 1 = 0$$

Analogamente, per $\omega\tau \gg 1$, ovvero per $\omega \gg 1/\tau$, l'1 è trascurabile rispetto a $\omega^2\tau^2$; la funzione, allora, varrà circa

$$20 \log_{10} \omega\tau = 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \tau$$

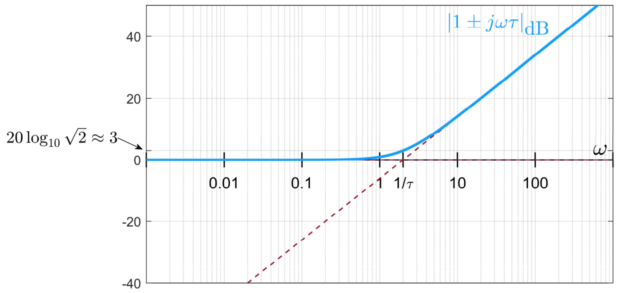
che è nient'altro che la retta $20 \log_{10} \omega$ (la retta con pendenza 20 dB/decade che abbiamo visto per il termine s) *traslata* a destra; in particolare, riscrivendola come $20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10}(1/\tau)$, è più evidente che incroci l'asse logaritmica esattamente su $1/\tau$. Abbiamo quindi i due asintoti della funzione da disegnare:



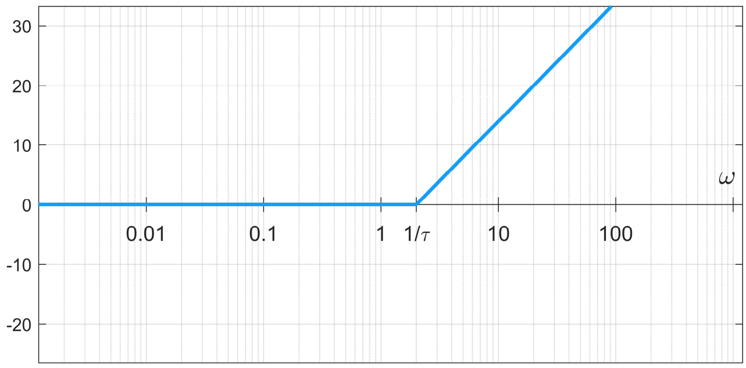
Abbiamo visto come approssimare la funzione dove $\omega \gg 1/\tau$ e dove $\omega \ll 1/\tau$; il punto approssimato in maniera peggiore, quindi, sarà proprio $1/\tau$. Calcoliamo quanto vale la funzione in questo punto:

$$20 \log_{10} \sqrt{1+1} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3$$

Questo è un valore abbastanza trascurabile visti gli elevati valori che assume la funzione nelle vicinanze:



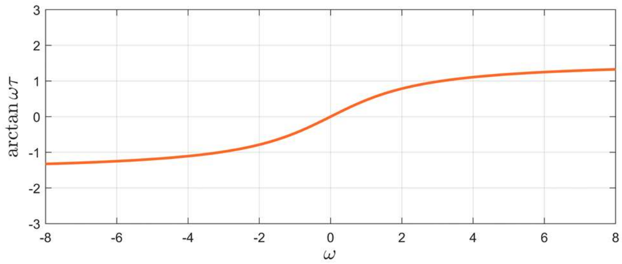
Per semplicità, allora, assumeremo che la funzione $|1 \pm j\omega\tau|_{\mathrm{dB}}$ coincida esattamente con gli asintoti, ovvero per $\omega < 1/\tau$ il modulo sarà pari a 0, e per $\omega > 1/\tau$ il modulo sarà la retta con pendenza 20 dB/dec (la stessa di $|j\omega|_{\mathrm{dB}}$ che c'era per il termine s) traslata di $1/\tau$:



Studiamo, ora, la fase di $1 \pm j\omega\tau$:

$$\underline{/1 \pm j\omega\tau} = \arctan \frac{\pm\omega\tau}{1} = \pm \arctan \omega\tau$$

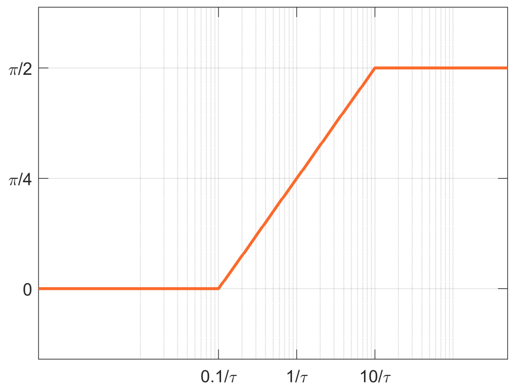
Il grafico di $\arctan \omega\tau$ lo conosciamo ed è:



Sommare moltissime arcotangenti non è immediato; per questo, come abbiamo approssimato il modulo, faremo un'approssimazione anche per l'arcotangente: in $1/\tau$ l'arcotangente vale esattamente

$$\arctan\left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Per ω molto grande, $\arctan \omega\tau = \pi/2$, mentre per ω molto piccolo in modulo ($\omega \to 0^+$) $\arctan \omega\tau = 0$ (lo stiamo considerando in scala logaritmica, quindi stiamo trascurando i valori negativi a sinistra). Quindi, possiamo assumere che l'arcotangente valga 0 prima di un certo valore e $\pi/2$ dopo un certo valore. Poniamo, per convenzione, questi valori a $0.1/\tau$ e $10/\tau$ rispettivamente (ovvero una decade prima e una dopo di $1/\tau$). In mezzo a questi due valori, invece, tracciamo il segmento di retta[1] che congiunge 0 e $\pi/2$ passando per $\pi/4$ in $\omega = 1/\tau$:



Il grafico si riferisce ad $\arctan \omega\tau$; il grafico di $-\arctan \omega\tau$ è lo stesso ma ribaltato rispetto all'"asse x" (ovvero vale 0 per $\omega < 0.1/\tau$; vale $-\pi/2$ per $\omega > 10/\tau$; nell'intervallo rimanente è una retta logaritmica che congiunge 0 a $-\pi/2$, e vale $-\pi/4$ in $\omega = 1/\tau$).

Esempio pratico

Consideriamo una funzione di trasferimento fatta in questo modo:

$$W(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+100)}$$

Notiamo che questa funzione ha un autovalore negativo, -100, e un autovalore nullo, dato da s. Visto che gli autovalori non hanno tutti parte reale *minore di zero*, *non esiste risposta a regime permanente e, quindi, non esiste risposta armonica*. Però, possiamo comunque calcolare $W_s(j\omega)$ (*vedi nota 2*); portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+100)} = \frac{10 \cdot (-1)(1-s)}{s \cdot 100 \cdot \left(1 + \frac{s}{100}\right)} = -\frac{1}{10} \frac{1-s}{s\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$\implies \quad W_s(j\omega) = -\frac{1}{10} \frac{1-j\omega}{j\omega\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}$$

Disegniamo modulo e fase di ognuno dei termini di $W_s(j\omega)$ e facciamo le somme algebriche per ottenere il grafico complessivo di $W_s(j\omega)$. Partiamo dal modulo, che calcoliamo in decibel:

- Iniziamo dal termine costante, $-\frac{1}{10}$; questo avrà modulo in decibel pari a $20 \log_{10} 10^{-1} = -20$. Ricordiamo che il fatto che $-\frac{1}{10}$ è negativo *non influisce* sul modulo (in blu nel grafico successivo).
- Il termine $1 - s$ al numeratore ha $\tau = 1$, e abbiamo visto che la sua rappresentazione grafica è una funzione nulla fino a $1/\tau = 1$ e poi sale con pendenza pari a 20 dB/dec (in arancione).

[1] È vero che dal grafico appare come una retta, ma questo è perché stiamo considerando una scala logaritmica; quando lo andremo a disegnare, perciò, tracceremo segmenti di retta, ma ricorda che in realtà sono curve logaritmiche (N.d.R.).
[2] Nulla ci vieta di calcolare $W(s)$ per $s = j\omega$, e vedremo che questa funzione ci verrà utile in futuro; semplicemente, in questo caso non prende il nome di *risposta armonica* per il motivo sopracitato.

- Il termine s al denominatore si disegna semplicemente come una retta con pendenza con pendenza 20 dB/dec che passa per $\omega = 1$; tuttavia, essendo al denominatore dovremmo *sottrarlo* ai termini al numeratore, perciò lo andremo a considerare come $-s$. Sarà, quindi, una retta con pendenza -20 dB/dec passante per $\omega = 1$ (in giallo).
- Il termine $1 + \frac{s}{100}$ ha $\tau = \frac{1}{100}$ e sarà una funzione nulla fino a $1/\tau = 100$, dopo cui sale con pendenza di 20 dB/dec; però, essendo al *denominatore*, per lo stesso discorso di s, lo disegno ribaltato (quindi dopo $1/\tau$ *scenderà* con pendenza -20 dB/dec, invece di salire con pendenza positiva) (in viola).

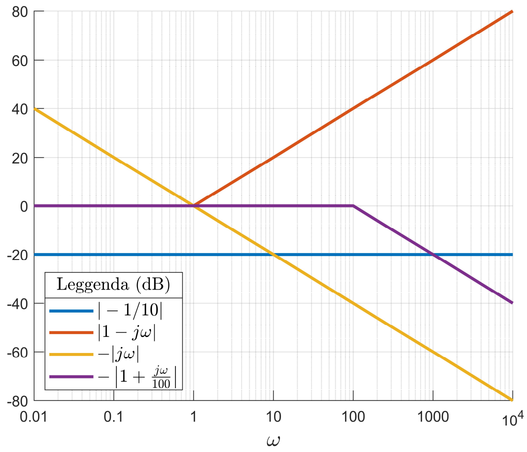


Figura 1

Sommandole tutte insieme si ottiene[3]:

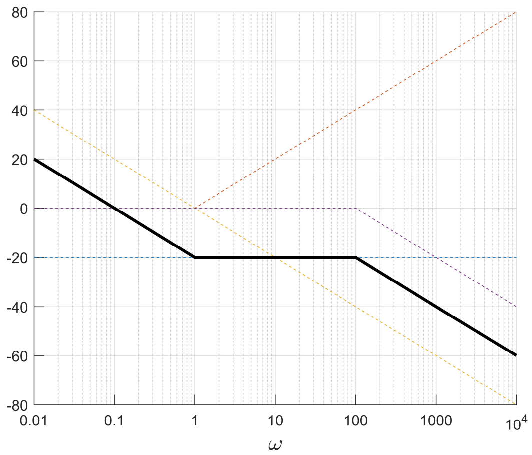
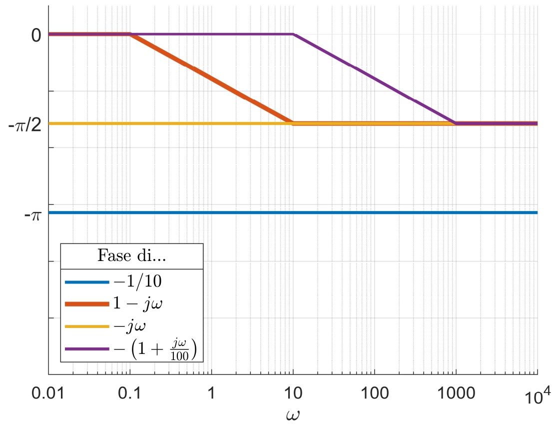


Figura 2

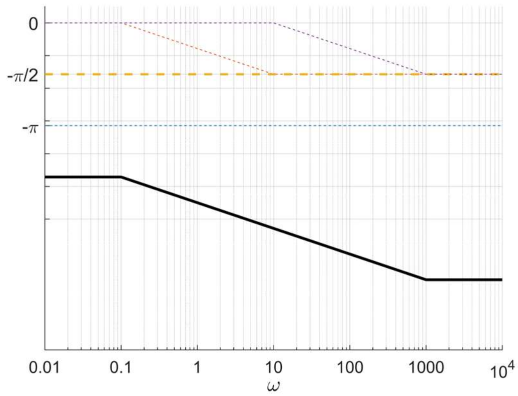
[3] Leggi questa nota se non riesci a fare la somma "ad occhio" delle rette. Prendi la *Figura 1* e considera l'intervallo che va da 0.01 a 1: le rette viola e arancione valgono 0, quindi ci basta sommare la retta blu con quella gialla; perciò, ad ogni punto della retta gialla dobbiamo sottrarre 20, ottenendo una retta con la stessa pendenza di quella gialla (-20 dB/dec), ma spostata sotto di 20 (per riferimento, guarda la retta nera della *Figura 2* nell'intervallo tra 0.01 e 1). Tornando alla *Figura 1*, nell'intervallo da 1 a 100 si aggiunge la retta arancione (che prima valeva zero) con pendenza di 20 dB/dec; per cui, si somma la pendenza che già avevamo prima (-20 dB/dec) con la pendenza della nuova retta (20 dB/dec) ottenendo una retta risultante che è *costante* (vedi la *Figura 2* nell'intervallo tra 1 e 100) che iniziamo a disegnare da dove ci eravamo fermati. Nell'ultimo intervallo, da 100 in poi, si aggiunge anche la retta viola, che prima valeva zero: la pendenza che avevamo finora era nulla, perciò sommandoci la retta viola con pendenza di -20 dB/dec, si ottiene come risultante una retta con pendenza -20 dB/dec (vedi ancora la *Figura 2* come riferimento).

Per quanto riguarda la fase, consideriamo di nuovo termine a termine come abbiamo fatto per il modulo:

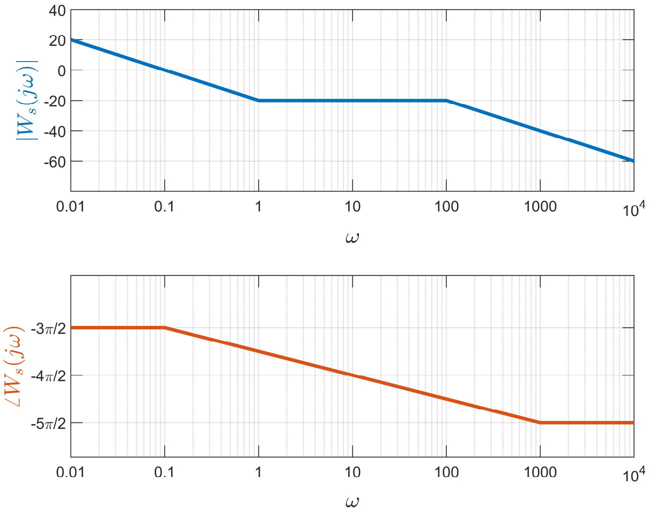
- Il termine costante è negativo, perciò la sua fase sarà $-\pi$ (come visto la scorsa lezione) (in blu nel grafico sotto).
- Il termine $1-s$ ha fase pari a $-\arctan\omega\tau$, con $\tau = 1$. Prima abbiamo visto come approssimare il grafico dell'arcotangente: essendo $\tau = 1$, si avrà che il grafico vale zero prima di 0.1, e vale $-\pi/2$ dopo 10. In mezzo, congiungiamo i due estremi con una linea (in arancione).
- Il termine s ha fase costante a $\pi/2$, ma essendo al denominatore ribaltiamo il grafico e tracciamo la costante a $-\pi/2$ (in giallo).
- Il termine $1+\frac{s}{100}$ ha fase pari a $\arctan\omega\tau$ con $\tau = \frac{1}{100}$; tuttavia, si trova al denominatore, perciò ribalteremo il grafico. Allora, vale zero prima di $0.1/\tau = 10$, e vale $-\pi/2$ dopo $10/\tau = 1000$. In mezzo, come al solito, si traccia la linea che connette i due estremi (in viola).



Si sommano infine le rette ottenute (procedendo allo stesso modo del modulo):



Ricapitolando i risultati ottenuti, si ha un sistema che reagisce alle frequenze, ovvero al valore di ω, in questo modo:



Facendo riferimento al diagramma qui sopra, se volessimo un sistema che amplifichi una sinusoide in ingesso dovremmo avere una pulsazione $\omega < 0.1$, perché in quella parte di grafico il modulo in decibel è positivo e, quindi, il modulo effettivo sarà maggiore di 1. Invece, per qualsiasi valore di ω maggiore di 0.1 si ha una riduzione di ampiezza della sinusoide iniziale; in particolare, più ω è grande, più l'onda in uscita avrà ampiezza tendente a zero. Per cui, se vogliamo che il sistema non oscilli molto, basta scegliere alti valori di ω.

Notiamo che i termini del tipo s generano, in $W_s(j\omega)$, una retta (logaritmica) crescente, e anche i termini del tipo $1 \pm s\tau$ hanno un andamento crescente, o al più nullo fino a un certo valore. Tutti questi termini *hanno la stessa pendenza* di 20 dB/dec; al denominatore, diventano *decrescenti*. $W(s)$, in qualsiasi sistema, è una funzione *strettamente propria*, cioè ha più termini al denominatore che termini al numeratore, il che significa che $W_s(j\omega)$ da un certo punto in poi sarà decrescente; ovvero, *qualsiasi sistema tende a non reagire ad alte frequenze.*

Disegnare potenze dei fattori

Se avessimo una $W(s)$ fatta in questo modo:

$$W(s) = \frac{10(s-1)}{s^2(s+100)} = -\frac{1}{10}\frac{s-1}{s^2\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

ovvero con la potenza di un termine, disegnare il grafico sarebbe comunque banale, come lo scorso esempio. La differenza è che qui c'è un fattore s in più al denominatore, perciò disegneremo $W_s(j\omega)$ considerandola come:

$$W(s) = -\frac{1}{10}\frac{s-1}{s \cdot s \cdot \left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

ovvero, andremo a disegnare *due volte* il termine s. Però, anche se tecnicamente è giusto, è sconsigliato perché dovremmo disegnare delle rette identiche una sopra l'altra; se la potenza è maggiore di 2, poi, è ancora più difficile (se la potenza fosse s^5, immagina disegnare 5 rette uguali una sopra l'altra, diventerebbe difficile tenere il conto). Allora, possiamo disegnare *direttamente* la potenza s^2, ovvero possiamo fare subito la somma di due moduli di $j\omega$ in decibel: se ogni termine è una retta (decrescente, visto che è al denominatore) con pendenza -20 dB/dec passante per $\omega = 1$, allora la loro somma sarà comunque una retta passante per 1 ma con pendenza uguale a -40 dB/dec (e, in generale, se si ha un termine s^k, la retta risultante passerà per 1 e avrà pendenza

$-20k$ dB/dec se si trova al denominatore). Per la fase si fa la stessa cosa: se la fase di s al denominatore è costante a $-\pi/2$, la fase di s^2 sarà $-\pi$ e, in generale, la fase di s^k sarà $-k\pi/2$ (al denominatore).

Lo stesso discorso può essere fatto con qualsiasi altro termine:

$$W(s) = -\frac{1}{10}\frac{s-1}{s\left(1+\frac{s}{100}\right)^2}$$

in questo caso, si disegna due volte il termine $1+\frac{s}{100}$; se disegnarlo una volta significa tracciare una retta nulla fino a 100 e, dopo, decrescente con pendenza -20 dB/dec (visto che sta al denominatore), disegnarlo due volte significa avere una retta nulla fino a 100 e una retta con pendenza -40 dB/dec poi. Allo stesso modo, se la fase va da 0 a $-\pi/2$ con una retta in mezzo che unisce i due estremi, disegnarla due volte significa avere la fase che va da 0 a $-\pi$ con una retta in mezzo che unisce i due estremi, entro lo stesso intervallo.

Radici complesse in $W(s)$

Studiamo il caso in cui compaiono in $W(s)$ termini con radici complesse coniugate, del tipo

$$(s-s_0)(s-s_0^*)$$

con $s_0 = \alpha + j\omega$. Effettuiamo il prodotto dei termini:

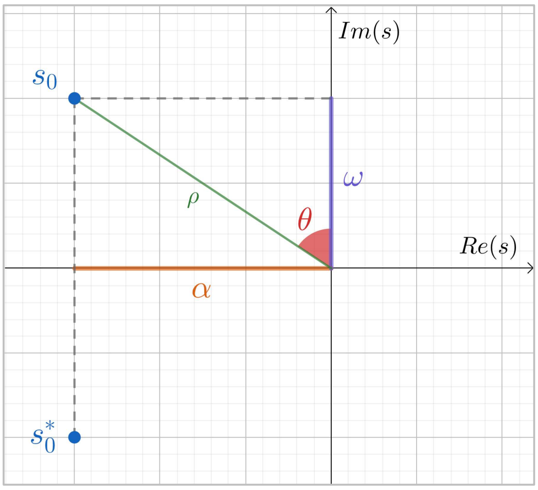
$$\begin{aligned}(s-s_0)(s-s_0^*) &= \big(s-(\alpha+j\omega)\big)\big(s-(\alpha-j\omega)\big) = \\ &= \big((s-\alpha)-j\omega\big)\big((s-\alpha)+j\omega\big) = \\ &= (s-\alpha)^2+\omega^2 = \\ &= s^2-2\alpha s+\underbrace{\alpha^2+\omega^2}_{\rho^2}\end{aligned}$$

dove ρ è il modulo di s_0, ovvero $\rho = \sqrt{\alpha^2+\omega^2}$. Essendo ρ^2 sempre positivo, il segno della parte reale delle radici di questo polinomio dipende dal segno di α: se $\alpha > 0$ si hanno due permanenze di segno e, quindi, due radici a parte reale negativa; altrimenti, si avranno due radici con parte reale positiva o nulla.

Scriviamo il risultato ottenuto in forma di Bode:

$$\rho^2\left(1-\frac{2\alpha s}{\rho^2}+\frac{s^2}{\rho^2}\right)$$

e consideriamo il termine $-2\alpha s/\rho^2$; se andiamo a rappresentare s_0 e s_0^* nel piano reale-immaginario si ha:



Il termine $\frac{\alpha}{\rho}$ ha un significato geometrico; in modulo è uguale, infatti, al modulo del seno di θ in figura:

$$\left|\frac{\alpha}{\rho}\right| = |\sin\theta|$$

Chiamiamo la quantità $\alpha/\rho = z$, che ha lo stesso segno di α; in particolare, se $0 \leq \theta < \pi/2$, risulterà $0 \leq \sin\theta < 1$, perciò $0 \leq |z| < 1$ (*vedi nota 4*). z prende il nome di *smorzamento*. Il modulo ρ rappresenta la *pulsazione naturale* (che vedremo la prossima lezione), perciò lo indicheremo con ω_n. Possiamo allora scrivere il trinomio come:

$$\omega_n^2\left(1 - \frac{2zs}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$$

Per semplicità, chiameremo i fattori s in $W(s)$ come *termini monomi*, i fattori derivati da radici reali come *termini binomi* (visto che sono scrivibili come $1 \pm \tau s$), e i fattori derivati da radici complesse come *termini trinomi* (visto che si forma il trinomio $1 - \frac{2zs}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$).

[4] θ non può essere uguale a $\pi/2$ perché, se così fosse, si avrebbe un numero reale e non si avrebbero le radici complesse e coniugate. Tuttavia, può essere tranquillamente uguale a zero: in quel caso si avrebbero radici complesse coniugate che sono numeri immaginari puri. Di conseguenza, $|z|$ può valere 0 ma non può essere uguale a 1. Inoltre, la lettera usata in questo campo sarebbe la lettera "zeta" greca, ovvero ζ e non z ma, anche se il professore lo ha fatto notare, continuerà ad usare z.

Teoria dei Sistemi

Lezione 24 (12 novembre 2021)

Grafico del modulo del termine trinomio

La scorsa volta abbiamo visto il *termine trinomio*:

$$1 \pm 2z\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

dove $0 \leq z < 1$. Noi andremo a disegnare $W_s(j\omega)$ perciò, in realtà stiamo disegnando il termine:

$$1 \pm 2z\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j\frac{2z\omega}{\omega_n}$$

Il modulo in decibel sarà:

$$|\cdot|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Questo termine non è immediato da disegnare; ragioniamo, perciò, come abbiamo fatto per il termine binomio, ovvero tramite approssimazioni. Analizziamo, anzitutto, il caso in cui $\omega/\omega_n \ll 1$, ovvero $\omega \ll \omega_n$, in cui abbiamo:

$$|\cdot|_{\text{dB}} \approx 20\log_{10}(1) = 0 \qquad \text{per } \omega \ll \omega_n$$

Se $\omega \gg \omega_n$, invece, si ha:

$$|\cdot|_{\text{dB}} \approx 20\log_{10}\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2\omega^2}{\omega_n^2}} \approx 20\log_{10}\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 40\log_{10}\omega - 40\log_{10}\omega_n \qquad \text{per } \omega \gg \omega_n$$

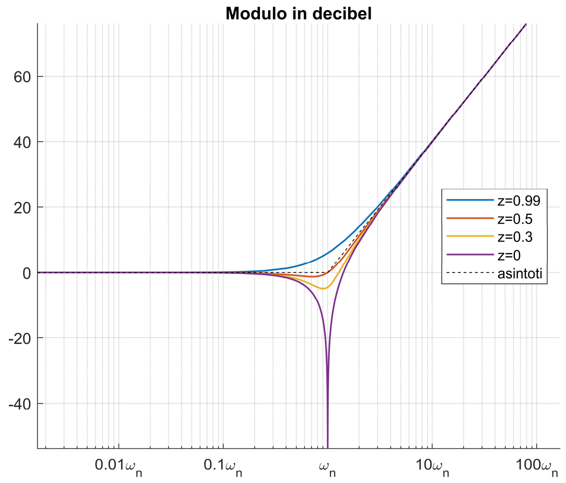
Nell'approssimazione, il termine nella parentesi al quadrato diventa molto più grande dell'altro termine per $\omega \gg \omega_n$, per cui possiamo semplificarlo[1]. L'espressione ottenuta in scala logaritmica corrisponde a una retta con pendenza 40 dB/dec che vale zero quando $\omega = \omega_n$. Notiamo che è il doppio della pendenza rispetto al termine binomio (e monomio); in particolare, più z è vicino a 1, più la parte immaginaria del numero è nulla e più assomiglia a *due* radici reali, perciò per $z \approx 1$ il grafico del trinomio è praticamente uguale al doppio del grafico del binomio.

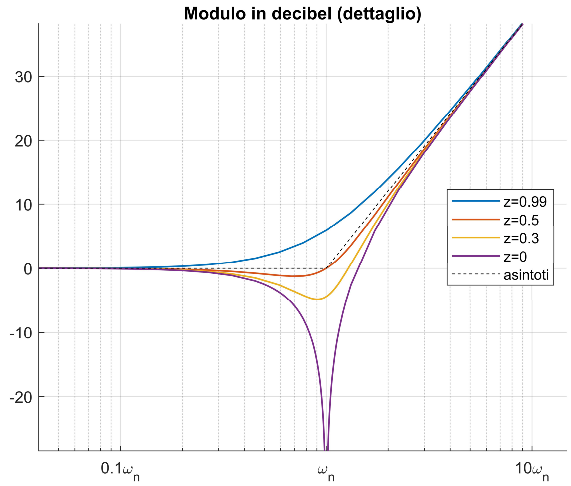
Abbiamo calcolato gli asintoti della funzione che andremo a disegnare; è proprio su ω_n che c'è l'errore massimo, perciò calcoliamo quanto vale la funzione in questo punto:

$$20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2\omega_n^2}{\omega_n^2}} = 20\log_{10}\sqrt{4z^2} = 20\log_{10}2z \qquad \text{con } \omega = \omega_n$$

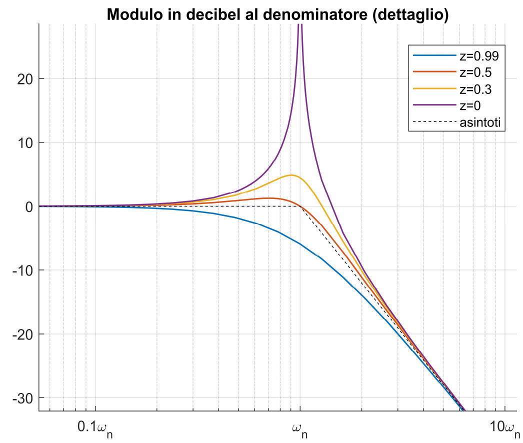
[1] $\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2\omega^2}{\omega_n^2}} = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 4z^2\right)} \approx \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$, visto che $0 \leq z < 1$.

Per valori di z tendenti a 1, si ha che il modulo tende a $20 \log_{10} 2 \approx 6$ (il doppio rispetto al termine binomio); man mano che diminuisce il valore di z, si ha che per $z = \frac{1}{2}$ il logaritmo vale zero, e scende sempre di più per $z \to 0$; quando $z = 0$ il logaritmo "vale" $-\infty$ e si avrà un asintoto verticale:





Come si vede, una decade dopo e una decade prima di ω_n il grafico si trova praticamente sugli asintoti; bisognerà, però, stare attenti ad effettuare le somme quando ci si avvicina a ω_n. Notiamo che, come abbiamo detto, per $z \approx 1$ il grafico assomiglia al doppio del grafico del binomio. Se le radici complesse si trovano al denominatore, il grafico si ribalterà:



Vediamo che la risposta armonica quando $\omega = \omega_n$ ha un valore molto alto; ciò significa che il sistema tende a reagire di più se la pulsazione in ingresso si avvicina alla *pulsazione naturale* ω_n (da cui il nome). È evidente come al variare di z cambia la risposta; per questo, z si chiama *smorzamento*. Fisicamente, è impossibile che lo smorzamento sia esattamente pari a zero.

Effettuare la somma di moduli è semplice se ci troviamo vicino agli asintoti (quindi una decade prima e una dopo di ω_n); tuttavia, per valori di z lontani da 0.5 può risultare difficile sommare il "dosso" nel disegno. Allora, un suggerimento è effettuare la somma considerando il grafico approssimato agli asintoti, e una volta ottenuta la funzione finale "aggiungere" il dosso (la "pancia" della funzione in $\omega = \omega_n$), un po' a occhio.

Grafico della fase del termine trinomio

Dopo aver calcolato il modulo, calcoliamo la fase del termine trinomio:

$$\angle\cdot = \pm \arctan \frac{2z\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Ancora una volta, studiamone il valore per $\omega \ll \omega_n$ e per $\omega \gg \omega_n$. Nel primo caso, il numeratore tende a zero e si ha

$$\pm \arctan(0) = 0 \qquad \text{per } \omega \ll \omega_n$$

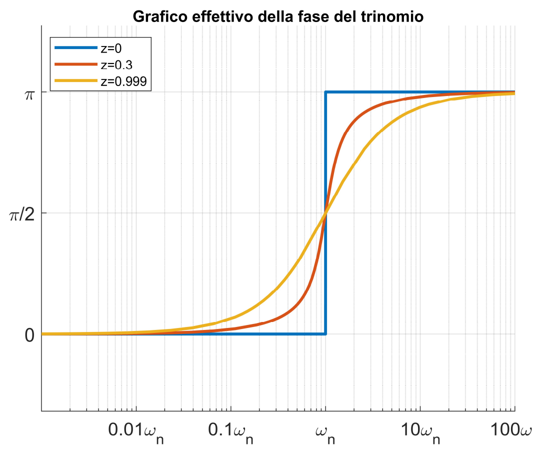
Man mano che ω cresce, ω/ω_n si avvicina a 1, fin quando il denominatore si annulla per $\omega = \omega_n$: in questo punto, allora, la tangente avrà valore

$$\pm \arctan(+\infty) = \pi/2 \qquad \text{per } \omega = \omega_n$$

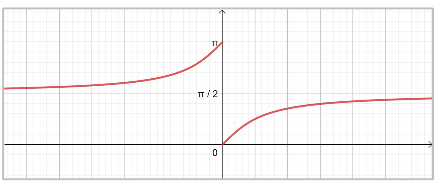
Se ω cresce ancora, l'argomento assumerà valori negativi. Consideriamo che l'arcotangente assuma valori da 0 a π, così che per numeri negativi l'arcotangente assuma valori nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (*vedi nota 2*); allora, man mano che ω cresce, l'argomento va a zero (da sinistra) e l'arcotangente andrà a π:

$$\pm \arctan \frac{2z\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \approx \pi \qquad \text{per } \omega \gg \omega_n$$

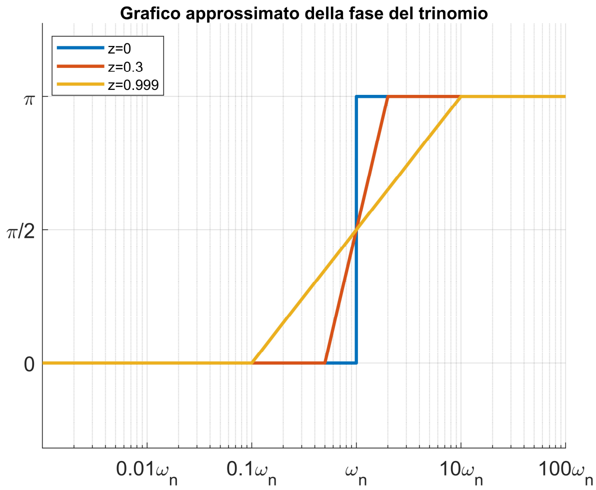
Per $z \approx 1$ il grafico è praticamente il doppio di quello del termine binomio; per $z = 0$, invece, i due estremi coincidono e si ha uno scalino; per valori intermedi di z, il grafico assume intuitivamente valori intermedi:



[2] L'arcotangente è una funzione che può essere definita in due diversi modi, a seconda del contesto. La tangente è una funzione periodica e per essere invertita va *ristretto il dominio*; si può scegliere di restringerlo a $[0, \pi)$ invece che al classico $(-\pi/2, \pi/2)$. Per esempio, la tangente di $-\pi/4$ è uguale alla tangente di $3\pi/4$, perciò la funzione inversa della tangente può essere definita tale che $\tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, oppure tale che $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$. In analisi, di solito, si prende per convenzione la prima variante, ovvero quella che ha immagine in $(-\pi/2, \pi/2)$; questo perché è continua in 0 e anche derivabile. La seconda variante, con immagine in $[0, \pi)$, *non è continua in zero* e quindi non ha nemmeno senso parlare di derivata in questo punto. Tuttavia, in alcuni contesti fisici, come questo, può tornare utile questa seconda variante, che ha il seguente grafico:



Possiamo approssimarlo, allora, a una funzione che vale 0 prima di un certo valore, π dopo un altro valore e in mezzo possiamo tracciare una linea che congiunge i due estremi. Questi saranno $0.1\omega_n$ e $10\omega_n$ nel caso in cui $z \approx 1$, e se $z = 0$ tracceremo il grafico effettivo che è uno scalino. Per valori intermedi di z possiamo tracciare la retta "a occhio", regolandoci sui due casi estremi $z = 0$ e $z \approx 1$:



Dobbiamo fare attenzione: questo è il grafico della fase del trinomio quando è nella forma $1 + 2z\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$. Quando compare un meno, $1 - 2z\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$, l'arcotangente diventa negativa, e il grafico si ribalta; la stessa cosa succede se si trova al denominatore. Inoltre, se compare un meno, *e sta anche al denominatore*, il grafico non si ribalta (si ribalterebbe due volte, il che lo riporterebbe come se non fosse ribaltato).

È semplice fare la somma delle fasi di più trinomi negli asintoti, ma diventa un po' complicato quando ci troviamo nella parte in cui c'è la retta che congiunge gli estremi (visto che ha una pendenza arbitraria ed è presa "a occhio"); allora, ci conviene fare la somma effettiva "punto per punto" nelle parti di grafico più difficili da sommare.

Esempio pratico

Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$W(s) = 10\frac{(s-1)}{(s^2+s+1)(s+10)}$$

Un sistema che ha la $W(s)$ fatta in questo modo ammette risposta a regime permanente? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo guardare i poli del denominatore, e verificare che siano tutti a parte reale negativa. Abbiamo $s + 10$, che ha radice $\lambda_1 = -10$, con parte reale negativa; inoltre, il trinomio $s^2 + s + 1$ avrà una coppia di radici complesse coniugate, ma notiamo che i coefficienti sono tutti positivi, quindi ci sono due permanenze e le radici saranno a parte reale negativa. Per cui, il sistema può ammettere risposta a regime permanente e, di conseguenza, risposta armonica. In realtà, non è sicuro se effettivamente il sistema ammetta o meno risposta a regime permanente perché dovremmo conoscere gli autovalori contenuti in Ψ; tuttavia, se ci viene data una $W(s)$ senza specificare nulla, allora possiamo assumere che non sia stato trascurato niente di importante e che quella $W(s)$ descriva pienamente il sistema.

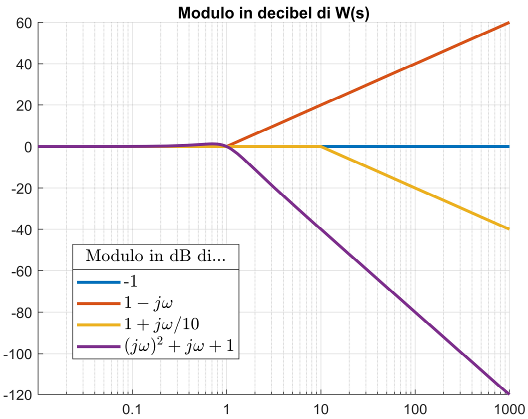
Procediamo scrivendo $W(s)$ in forma di Bode. Per il numeratore e per il termine $s+10$ al denominatore è banale; tuttavia, dobbiamo vedere come scrivere in forma di Bode il termine s^2+s+1. Potremmo calcolare le radici, oppure provare a vedere se il termine è *già scritto* in forma di Bode:

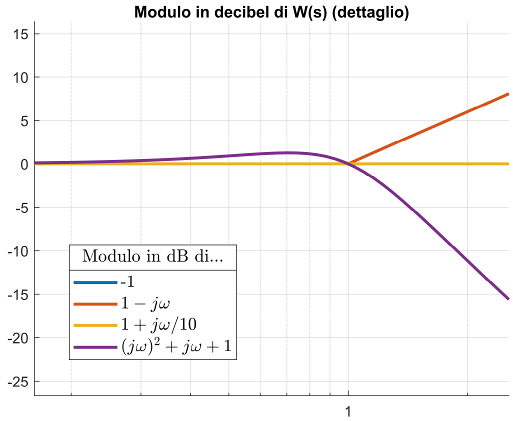
$$1+s+s^2 \quad \longleftrightarrow \quad 1+\frac{2zs}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}$$

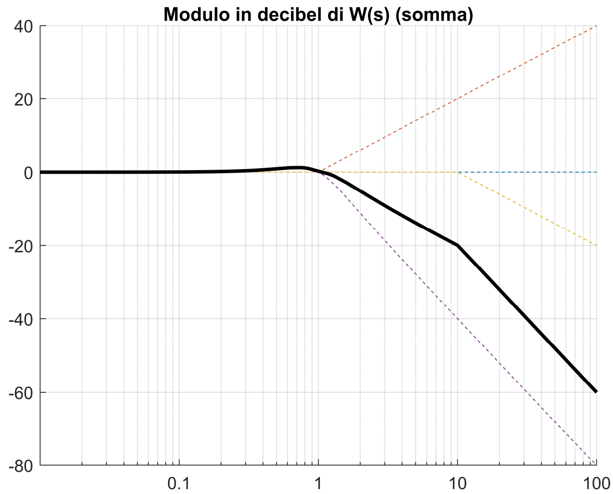
Se così fosse, si avrebbe $\omega_n = 1$; se anche z assume valori ammissibili ($0 \le z < 1$) allora sappiamo per certo che è scritto già in forma di Bode. Se $\omega_n = 1$, si ha $\frac{2z}{\omega_n} = 2z = 1$, quindi $z = \frac{1}{2}$; questo valore è ammissibile per cui abbiamo il trinomio già scritto in forma di Bode. Procediamo:

$$W(s) = 10\frac{(s-1)}{(s^2+s+1)(s+10)} = 10\frac{(-1)(1-s)}{(s^2+s+1)\cdot 10\left(1+\frac{s}{10}\right)} = -\frac{(1-s)}{(s^2+s+1)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

Ricordiamo che stiamo disegnando la risposta armonica, ovvero $W_s(j\omega)$, e non esattamente $W(s)$; non ci serve fare un passaggio in più per scrivere $W(s)|_{s=j\omega}$, ma è importante sapere concettualmente cosa stiamo facendo. Per disegnare la risposta armonica, segniamo i punti d'interesse sull'"asse x": per $1-s$ abbiamo come punto di rottura $1/\tau = 1$; per $1+\frac{s}{10}$ abbiamo $1/\tau = 10$, e per s^2+s+1 abbiamo $\omega_n = 1$. Ricordiamo che, per quest'ultimo termine, vicino a ω_n c'è una "pancia" della funzione, dipendente da z, che andrà poi riportata nel grafico finale. Per effettuare la somma, però, considereremo solamente gli asintoti (senza deformazioni) e aggiungiamo i "dossi" solo alla fine:





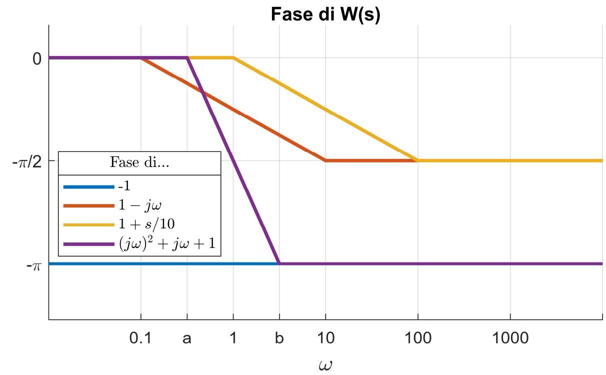


Si vede che nel punto poco prima di 1 c'è la piccola "pancia" della funzione; tra 1 e 10 si sommano la retta viola con pendenza -40 dB/dec e la retta arancione con pendenza 20 dB/dec, per cui il risultato sarà una retta con

-20 dB/dec; infine, dopo $\omega = 10$ si aggiunge una retta con pendenza -20 dB/dec, per cui la retta complessiva avrà pendenza -40 dB/dec.

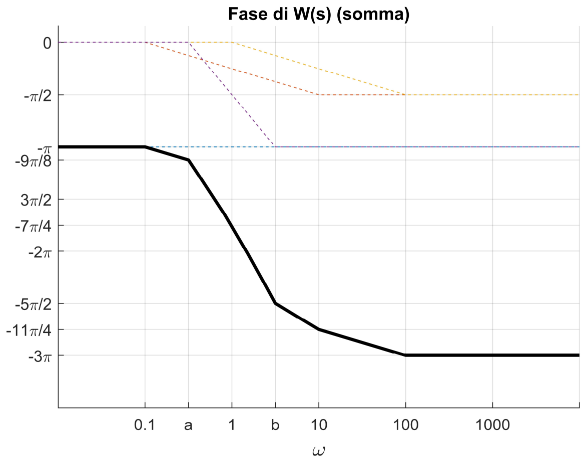
Per quanto riguarda la fase, procediamo come abbiamo sempre fatto:

- -1 ha fase $-\pi$;
- Nel termine binomio al numeratore compare un meno, perciò la fase sarà approssimativamente nulla prima di una decade di $1/\tau$ (quindi vale 0 prima di 0.1) e varrà $-\pi/2$ dopo una decade di $1/\tau$ (quindi dopo 10);
- Il termine binomio al denominatore stessa cosa, ma varrà 0 prima di 1 e $-\pi/2$ (visto che sta al denominatore) dopo 100;
- Infine, per il termine trinomio, se fosse $z \approx 1$ si avrebbe che il grafico approssimato vale 0 prima di $0.1\omega_n$ e $-\pi$ (visto che sta al denominatore) dopo $10\omega_n$; se fosse $z = 0$ ci sarebbe lo scalino in ω_n che va da 0 a $-\pi$; per cui, per $z = 0.5$, prendiamo una "via di mezzo" tra le due.



Per effettuare la somma delle fasi, consideriamo tutte le parti di grafico in cui si aggiungono nuove linee. La somma prima di $\omega = 0.1$ è uguale a $-\pi$; in $\omega = 0.1$ si aggiunge la linea arancione con pendenza -20 dB/dec, per cui anche la risultante avrà questa pendenza. Nel punto $\omega = a$ (a è un punto arbitrario segnato sul grafico, in cui abbiamo fatto partire "a occhio" la retta viola), si aggiunge la retta viola con pendenza non nota; per sommarla, allora, facciamo la somma manuale delle rette in $\omega = 1$, e uniamo i puntini; stessa cosa facciamo per $\omega = b, \omega = 10$ e $\omega = 100$ (*vedi nota 3*). Alla fine del grafico, tutto sarà piatto.

[3] Una volta arrivati al "punto problematico", ovvero quello fatto "ad occhio", quindi da $\omega = a$ a $\omega = b$, possiamo fermarci e fare lo stesso procedimento fatto fino a quel momento *partendo dalla fine*. Ovvero sommiamo i contributi alla fine del grafico ($-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi - \pi = -3\pi$) e, andando a ritroso, si disegnano le rette: per esempio, leggendolo da destra a sinistra, prima è piatto a -3π, poi a $\omega = 100$ si aggiunge la pendenza della retta gialla che sale di $\frac{\pi}{4}$dB/dec, poi a $\omega = 10$ si aggiunge un'altra retta a $\frac{\pi}{4}$dB/dec, così che saliremo (verso sinistra) con pendenza $\frac{\pi}{2}$dB/dec. Fermiamo il disegno quando arriviamo a $\omega = b$; a quel punto, effettuiamo le somme solo nel punto $\omega = 1$ e uniamo i punti.



Altro esempio

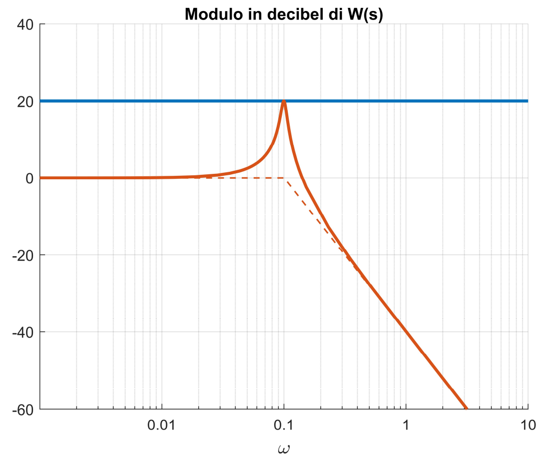
Prendiamo una funzione di trasferimento del tipo:

$$W(s) = \frac{10}{1 + s + 100s^2}$$

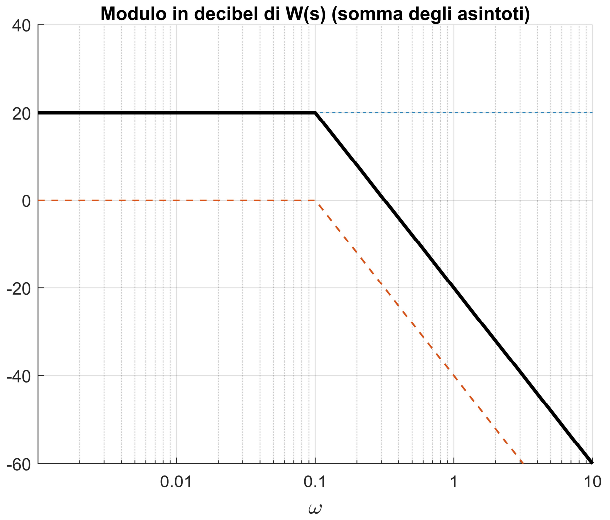
Vediamo se il denominatore è in forma di Bode: $\omega_n^2 = \frac{1}{100} \Longrightarrow \omega_n = \frac{1}{10}$ per cui sarebbe $\frac{2z}{\omega_n} = 20z = 1 \Longrightarrow z = \frac{1}{20}$, che è ammissibile perché compreso tra 0 e 1, perciò è già scritto in forma di Bode. Per disegnare il modulo, visto che $z \not\approx 1$ e $z \neq 0$, calcoliamo il valore effettivo in $\omega = \omega_n = \frac{1}{10}$:

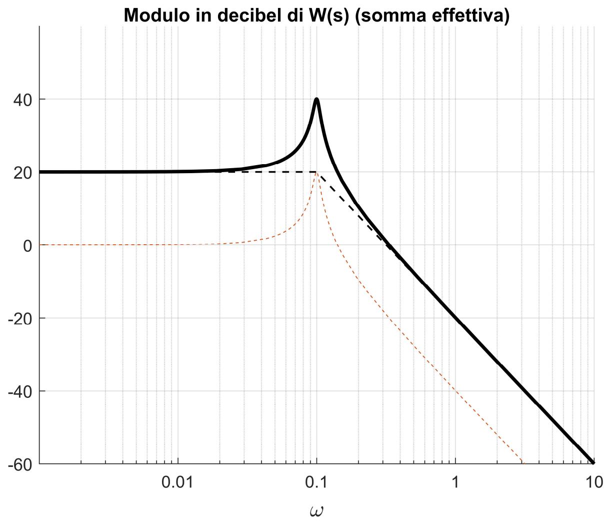
$$|\cdot|_{\mathrm{dB}} = -20 \log_{10} 2z = -20 \log_{10} \frac{1}{10} = 20$$

dove il meno di fronte c'è aggiunto perché sta al denominatore. Avremo allora un modulo del tipo:



Per effettuare la somma dei due moduli, la cosa più semplice è sommare gli asintoti del modulo del trinomio (tratteggiati in figura) con il resto, e solo dopo aggiungerci il "picco":





La prossima volta vedremo come rappresentare $W_s(j\omega)$ nel piano reale-immaginario invece che nel diagramma di Bode, per avere uno schema compatto dei valori di $W(s)$.