

Teoria dei Sistemi

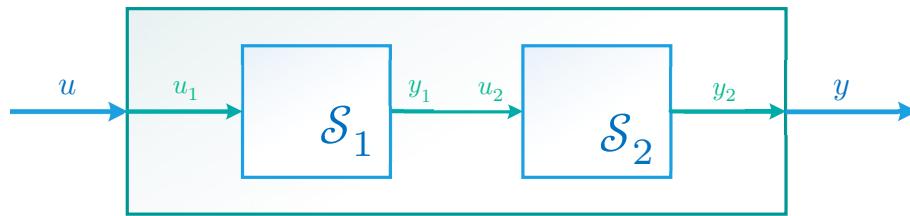
Lezione 34 (30 novembre 2021)

Connessione di sistemi: Introduzione

Immagina un treno, formato da diversi vagoni. Studiare il sistema *treno* può essere molto difficile, perché ogni vagone si muove con determinate leggi (che possono essere diverse da vagone in vagone). Vediamo, allora, se possiamo studiare ogni vagone separatamente per poter poi mettere tutto insieme e vedere il comportamento complessivo del treno. In termini più generali, vediamo cosa succede ad un sistema quando gli connettiamo un altro sistema: come interagiscono, qual è il contributo di un sistema sull'altro, e quale è il sistema complessivo.

Connessione in serie di sistemi (spazio di stato)

Cominciamo allora da due sistemi, che possiamo connettere in vari modi. Un tipo di connessione è quello in cui l'uscita del primo sistema \mathcal{S}_1 rappresenta l'ingresso del secondo sistema \mathcal{S}_2 : questo tipo di connessione si chiama *connessione in serie* (o “*connessione serie*”).



Per studiare il comportamento di questo sistema, dobbiamo avere i sottosistemi rappresentati in una delle due forme: nello spazio di stato nel tempo (il classico sistema con \dot{x} e y) o, alternativamente, in termini di legame ingresso-uscita, ovvero conoscendo le $W(s)$. Nel primo caso, dovremo avere le rappresentazioni nello spazio di stato:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}, \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

Per unire i due sistemi, come sappiamo, consideriamo lo stato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ che è l'aggregato degli stati x_1 e x_2 . Il sistema complessivo \mathcal{S}_{tot} sarà tale da avere un ingresso che coincide con l'ingresso del primo sistema ($u = u_1$) e avrà un'uscita che corrisponderà con l'uscita del secondo sistema ($y = y_2$). Inoltre, come detto, l'ingresso del secondo sistema è uguale all'uscita del primo sistema ($u_2 = y_1$). Avremo allora che

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 \underbrace{(C_1 x_1 + D_1 u)}_{y_1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u \\ B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 + B_2 D_1 u \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

Per l'uscita avremo:

$$\begin{aligned}
y = y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u_2 = \\
&= C_2 x_2 + D_2 \underbrace{(C_1 x_1 + D_1 u)}_{y_1} = \\
&= D_2 C_1 x_1 + C_2 x_2 + D_2 D_1 u = \\
&= (D_2 C_1 - C_2) x + (D_2 D_1) u
\end{aligned}$$

Il sistema complessivo, allora, avrà queste matrici:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix}, \quad C = (D_2 C_1 \quad C_2), \quad D = D_2 D_1$$

È evidente che la dimensione del sistema finale cresce ed è pari alla somma delle dimensioni dei sottosistemi¹. La matrice A è triangolare a blocchi; nelle matrici triangolari, gli autovalori sono quelli che si trovano sulla diagonale principale. Perciò, se sulla diagonale principale di A ci sono A_1 e A_2 , gli autovalori di A saranno quelli di A_1 e quelli di A_2 :

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$$

dove con $\sigma(A)$ si intende lo *spettro* di A , ovvero l'insieme degli autovalori di A . Il sistema complessivo, allora, avrà come autovalori l'unione degli autovalori dei due sistemi². Allora, per quanto riguarda la stabilità, *un sistema connesso è (internamente) stabile quando sono (internamente) stabili i sottosistemi che lo formano*.

Connessione in serie di sistemi (legame ingresso-uscita)

Se avessimo i sistemi nella rappresentazione secondo le loro funzioni di trasferimento:

$$\mathcal{S}_1 : Y_1(s) = W_1(s)U_1(s), \quad \mathcal{S}_2 : Y_2(s) = W_2(s)U_2(s)$$

Il sistema complessivo sarà:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{tot} : Y(s) &= Y_2(s) = \\
&= W_2(s)U_2(s) = \\
&= W_2(s)Y_1(s) = \\
&= W_2(s)W_1(s)U(s)
\end{aligned}$$

Di conseguenza, possiamo dire che $W(s) = W_2(s)W_1(s)$.

Facciamo un esempio. Se abbiamo i sistemi:

$$\mathcal{S}_1 : W_1(s) = \frac{s+1}{s(s+10)}, \quad \mathcal{S}_2 : W_2(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

Allora il sistema complessivo sarà:

$$\mathcal{S}_{tot} : W(s) = W_2(s)W_1(s) = \frac{s+2}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s(s+10)} = \frac{s+2}{s(s+10)}$$

¹ In questi appunti viene sottinteso il fatto che le matrici dei due sistemi devono essere compatibili. Ovvero, in ogni calcolo presente, le matrici devono essere tali da poter permettere di effettuare somme e prodotti.

² La molteplicità di ogni autovalore, però, *viene sommata*. Quindi, se entrambi i sistemi hanno un autovalore λ con molteplicità $\mu = 1$, allora il sistema complessivo avrà autovalore λ con molteplicità algebrica $\mu = 2$. *La molteplicità geometrica non è garantita*.

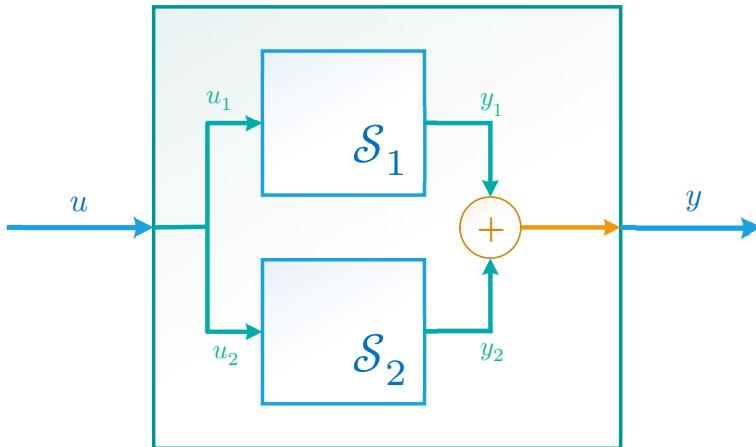
Notiamo che il primo sistema ha due poli, perciò ha due autovalori (0 e -10), e il secondo sistema ha un polo, che è 1; quando effettuiamo il prodotto e otteniamo $W(s)$, scompare l'autovalore 1 e rimangono solamente gli autovalori 0 e -10 . Questo è perché *quando interconnettiamo dei sistemi, le proprietà strutturali possono variare*; in effetti, stiamo vedendo solamente la realizzazione esterna del sistema, e l'autovalore 1 che prima è eccitabile e osservabile, nel secondo sistema perde una o entrambe le proprietà e non viene più visto in uscita. Tuttavia, l'autovalore 1 si trova comunque all'interno del sistema \mathcal{S}_{tot} ; in particolare, notiamo che il sistema con $W_2(s)$ è *instabile esternamente* (per via dell'autovalore +1), mentre il sistema complessivo è *stabile esternamente*, perché l'autovalore a parte reale positiva scompare.

Se volessimo studiare “dove va a finire” l'autovalore 1, ovvero in quale sottospazio di Kalman del sistema complessivo, dovremmo prima trovare la realizzazione del sistema con le matrici A, B, C, D . Ma attenzione: *non dobbiamo trovare la realizzazione minima partendo dalla $W(s)$* di \mathcal{S}_{tot} , perché alcuni autovalori scompaiono (come +1); invece, dobbiamo trovare le realizzazioni minime di \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 separatamente, e poi *metterle insieme* col primo metodo che abbiamo visto. In questo modo, il sistema avrà l'autovalore 1 al suo interno e possiamo studiarlo.

Connessione in parallelo di sistemi (spazio di stato)

Un altro modo di connettere due sistemi è quello in cui si ha un sistema \mathcal{S}_1 che *lavora insieme* ad un altro sistema \mathcal{S}_2 . Per fare ciò, gli ingressi di questi sistemi u_1 e u_2 saranno identici e pari all'ingresso u del sistema complessivo \mathcal{S}_{tot} ; inoltre, l'uscita y del sistema totale sarà la *somma* dei contributi di ciascun sistema³:

$$\begin{cases} u = u_1 = u_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$



Iniziamo dal caso in cui i sistemi sono rappresentati nello spazio di stato:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}, \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

Lo stato è sempre l'aggregazione dei due:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

³ (N.d.R.) Ha senso che la combinazione dei due sistemi sia la somma delle uscite, visto che stiamo parlando di sistemi *lineari*.

Per cui si ha

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y &= y_1 + y_2 = C_1 x_1 + D_1 u_1 + C_2 x_2 + D_2 u_2 = (C_1 \quad C_2) x + (D_1 + D_2) u\end{aligned}$$

Per cui, le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad C_2), \quad D = D_1 + D_2$$

Ancora una volta, la dimensione dello spazio di stato è la somma delle dimensioni. In questo caso, a differenza del collegamento in serie, *l'ordine dei due sistemi è irrilevante*.

Connessione in parallelo di sistemi (legame ingresso-uscita)

Esteriormente, abbiamo le rappresentazioni:

$$\mathcal{S}_1 : Y_1(s) = W_1(s)U_1(s), \quad \mathcal{S}_2 : Y_2(s) = W_2(s)U_2(s)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{tot} : Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) = \\ &= W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s) = \\ &= (W_1(s) + W_2(s))U(s)\end{aligned}$$

E la $W(s)$ del sistema complessivo sarà la somma delle funzioni di trasferimento:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s)$$

Quando si fa la somma delle due funzioni, si effettua il *minimo comune multiplo* del denominatore; cioè, si mantengono tutti i poli, in particolare se un polo è in comune tra i due sistemi, se ne prende solamente uno.

Per fare un esempio, consideriamo:

$$W_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad W_2(s) = \frac{10}{s}$$

La loro somma è:

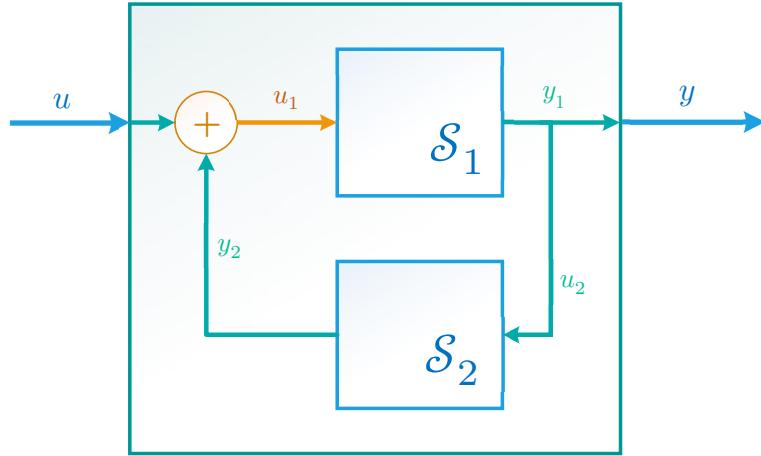
$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{10}{s} = \frac{\dots}{s(s+1)}$$

Dobbiamo stare attenti: i sistemi iniziali hanno entrambi un autovalore in zero; significa che il sistema complessivo avrà *due* autovalori in zero (ovvero, l'autovalore in zero dovrà avere molteplicità due). Però, esternamente ce ne sta solamente uno, perciò anche qui dovremo andare a studiare raggiungibilità e osservabilità⁴. Allora, mentre *internamente* i due sistemi *possono essere* stabili semplicemente, non possiamo essere certi che il sistema in uscita sia internamente stabile; se la molteplicità geometrica di uno degli zeri è minore dell'algebrica, l'indice geometrico non è più uguale ad 1 e si ha instabilità.

⁴ Lo studio del sistema complessivo va fatto, come nel caso in serie, effettuando innanzitutto la realizzazione minima dei sottosistemi \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , e poi unendo i loro spazi di stato come si è visto. Attenzione: a prescindere dall'algoritmo di realizzazione che si usa, quando si uniscono i due sistemi *non è più garantita nessuna caratteristica strutturale del sistema*. Ovvero, anche se uniamo due realizzazioni in forma canonica osservabile, è quasi certo che il risultato *non sarà osservabile*, perciò dovremo studiare daccapo raggiungibilità e inosservabilità.

Connessione in retroazione di sistemi (spazio di stato)

Il terzo tipo di connessione tra sistemi che andiamo a vedere è il caso in cui l'uscita y_1 di un sistema \mathcal{S}_1 è anche l'ingresso di un sistema \mathcal{S}_2 , e l'uscita di \mathcal{S}_2 si va a sommare all'ingresso di \mathcal{S}_1 (vedi lo schema seguente).



Questo tipo di connessione si chiama *connessione in retroazione* (o *feedback*). Di nuovo, la rappresentazione nello spazio di stato è:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}, \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

Il sistema interconnesso avrà $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ come stato. L'ingresso u è l'ingresso esterno del sistema totale \mathcal{S}_{tot} ; l'ingresso u_1 è la somma di u e di y_2 . L'uscita di \mathcal{S}_{tot} è $y = y_1$ e questa è anche uguale a u_2 . Si ha allora:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1(y_2 + u) \\ A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1(C_2 x_2 + D_2 u_2) + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1(C_2 x_2 + D_2(C_1 x_1 + D_1 u_1)) + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{pmatrix} = \dots \end{aligned}$$

Notiamo che compaiono in continuazione u_1 e u_2 , e quindi ci troviamo a sostituire senza fermarci mai. Chiaramente è impossibile studiare il sistema in questo modo. Un modo per “fermare” la ricorsione è porre a zero uno dei due collegamenti diretti ingresso-uscita (ovvero, porre a zero una matrice tra D_1 e D_2). Per ora, poniamo $D_1 = 0$; in questo modo abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1(y_2 + u) \\ A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1(C_2x_2 + D_2u_2) + B_1u \\ A_2x_2 + B_2y_1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1C_2x_2 + B_1D_2C_1x_1 + B_1u \\ A_2x_2 + B_2C_1x_1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A_1 + B_1D_2C_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u
\end{aligned}$$

L'uscita è, banalmente:

$$y = y_1 = C_1x_1 = (C_1 \quad 0)x$$

Le matrici del sistema, allora, saranno:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + B_1D_2C_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad 0), \quad D = 0$$

Gli autovalori del sistema complessivo non si vedono facilmente dalla struttura di A , perciò andranno calcolati normalmente. Possiamo dire, allora, che cambia la dinamica del sistema; perciò, anche conoscendo (ad esempio) la stabilità dei sistemi di partenza, non possiamo concludere nulla sul sistema complessivo.

Connessione in retroazione di sistemi (legame ingresso-uscita)

Abbiamo i sistemi rappresentati in questo modo:

$$\mathcal{S}_1 : Y_1(s) = W_1(s)U_1(s), \quad \mathcal{S}_2 : Y_2(s) = W_2(s)U_2(s)$$

Avremo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{tot} : Y(s) &= Y_1(s) = \\
&= W_1(s)U_1(s) = \\
&= W_1(s)(U(s) + Y_2(s)) = \\
&= W_1(s)\left(U(s) + W_2(s)U_2(s)\right) = \\
&= W_1(s)U(s) + W_1(s)W_2(s)Y(s) \\
\implies Y(s) - W_1(s)W_2(s)Y(s) &= W_1(s)U(s) \\
\implies Y(s) &= \left(I - W_1(s)W_2(s)\right)^{-1}W_1(s)U(s)
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$W(s) = \left(I - W_1(s)W_2(s)\right)^{-1}W_1(s)$$

Connessione in contoreazione e semplificazioni

C'è da dire che, nella maggioranza dei casi, avremo a che fare con i sistemi interconnessi in questo modo quando \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono ad un ingresso e un'uscita (o riconducibili a tali); con questa semplificazione, allora, si ha:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}, \quad \text{se } p = q = 1$$

Inoltre, raramente troviamo sistemi connessi in questo modo; molto più spesso, \mathcal{S}_2 non è un sistema completo ma c'è solamente un legame diretto ingresso-uscita, ovvero è come se \mathcal{S}_2 fosse solamente formato da D_2 . In genere, $D_2 = 1$.

Spesso, l'uscita del sistema \mathcal{S}_2 viene sottratta all'ingresso di \mathcal{S}_1 : in questo caso si parla di *connessione in controreazione*.

Nel caso di \mathcal{S}_2 : $\begin{cases} \dot{x}_2 = 0 \\ y_2 = D_2 u_2 \end{cases}$ e della connessione in *controreazione*, si ha che $x = x_1$ (visto che $x_2 = 0$) e si avrà

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_1 = \\ &= A_1 x_1 + B_1 u_1 = \\ &= A_1 x_1 + B_1(u - D_2 y_1) = \\ &= A_1 x_1 + B_1 u - B_1 D_2 C_1 x_1 = \\ &= (A_1 - B_1 D_2 C_1)x + B_1 u \end{aligned}$$

Mentre l'uscita:

$$y = y_1 = C_1 x$$

Quindi, le matrici del sistema saranno:

$$A = A_1 - B_1 D_2 C_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1, \quad D = 0$$

Il sistema ottenuto è quasi uguale al sistema di partenza (ha la stessa B e la stessa C), ma cambia la matrice dinamica A e i suoi autovalori.

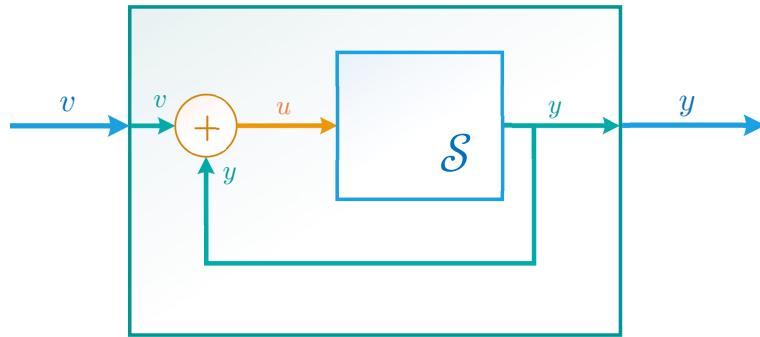
Nel dominio di Laplace è molto semplice e si ha:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) = \\ &= W_1(s)U_1(s) = \\ &= W_1(s)(U(s) - D_2 Y(s)) = \\ &= W_1(s)U(s) - W_1(s)D_2 Y(s) \\ \implies Y(s) &= \frac{W_1(s)U(s)}{1 + W_1(s)D_2} \end{aligned}$$

Teoria dei Sistemi

Lezione 35 (2 dicembre 2021)**Studio della controllazione elementare**

Prendiamo un sistema in *controllazione elementare*, ovvero dove l'ingresso del sistema è costituito da un ingresso esterno v a cui viene sommata l'uscita y del sistema stesso:



Considerando il sistema

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \iff \mathcal{S} : Y(s) = W(s)U(s)$$

se andiamo a sommare la sua uscita all'ingresso, il sistema complessivo diventa, come visto nella scorsa lezione:

$$\mathcal{S}_{tot} : \begin{cases} \dot{x} = (A - BC)x + Bv \\ y = Cx \end{cases} \iff \mathcal{S}_{tot} : Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}V(s)$$

Il primo sistema, \mathcal{S} , lo chiamiamo *sistema aperto* perché rappresenta il sistema stesso prima che si sommasse la sua uscita al suo ingresso; perciò, lo indicheremo con \mathcal{S}_{ap} e avrà matrice dinamica A_{ap} e funzione di trasferimento $W_{ap}(s)$. Di conseguenza, diremo che il secondo sistema è il sistema *chiuso*, e avrà matrice dinamica $A_{ch} = (A_{ap} - BC)$ e funzione di trasferimento $W_{ch}(s) = \frac{W_{ap}(s)}{1 + W_{ap}(s)}$. Le matrici B e C restano invariate e sono uguali per i due sistemi.

Il problema del passaggio dal sistema aperto al sistema chiuso è che *cambia la sua stabilità*. Sarebbe utile capire, allora, se e come possiamo, dal sistema aperto, dedurre qualche informazione riguardo al sistema chiuso. Ovviamente, si potrebbe trattare il sistema chiuso come un generico sistema e studiarne autovalori, proprietà, stabilità, ecc. Tuttavia, questo approccio è molto dipendente dai dati e se ci dovesse essere un cambiamento nelle informazioni del sistema aperto, ci porterebbe a effettuare daccapo tutti i calcoli.

Stabilità del sistema chiuso per $p = q = 1$

Iniziamo dal considerare il legame dei due sistemi considerando la correlazione ingresso-uscita con $p = q = 1$. Ci chiediamo com'è fatta, in pratica, la funzione $W_{ch}(s)$ conoscendo la $W_{ap}(s)$. Già sappiamo che, numericamente:

$$W_{ch}(s) = \frac{W_{ap}(s)}{1 + W_{ap}(s)} \quad p = q = 1$$

Explicitiamo, ora, numeratore e denominatore di $W_{ap}(s)$ come $n_{ap}(s)$ e $d_{ap}(s)$:

$$W_{ap}(s) = \frac{n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)}$$

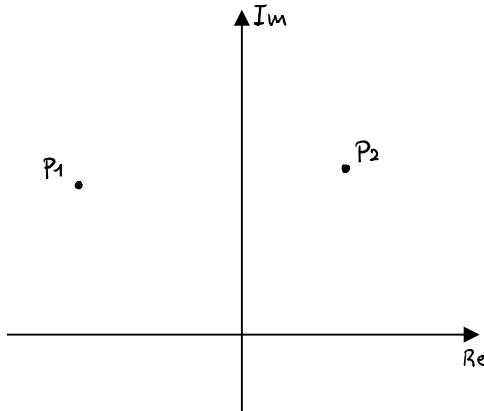
$$\Rightarrow W_{ch}(s) = \frac{W_{ap}(s)}{1 + W_{ap}(s)} = \frac{\frac{n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)}}{1 + \frac{n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)}} = \frac{\frac{n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)}}{\frac{d_{ap}(s) + n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)}} = \frac{n_{ap}(s)}{d_{ap}(s) + n_{ap}(s)}$$

Notiamo che, nella costruzione di $W_{ch}(s)$ da $W_{ap}(s)$, non ci possono essere cancellazioni, perché altrimenti sarebbero state già fatte in $W_{ap}(s)$ (vedi nota 1). Ovvero, la dimensione del sistema chiuso è uguale alla dimensione del sistema aperto.

Consideriamo, adesso, il rapporto tra i denominatori dei due sistemi:

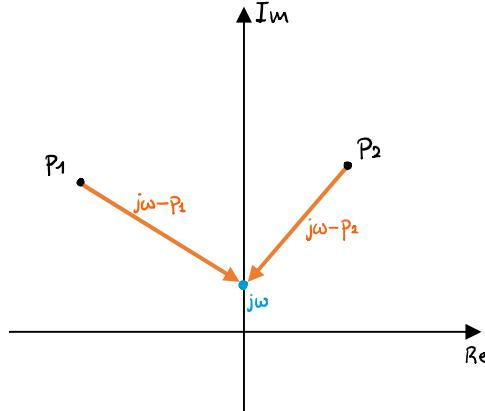
$$\frac{d_{ch}(s)}{d_{ap}(s)} = \frac{d_{ap}(s) + n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)} = 1 + \frac{n_{ap}(s)}{d_{ap}(s)} = 1 + W_{ap}(s) \quad (\clubsuit)$$

Studiando questo rapporto, riusciamo a capire come si comporta il sistema chiuso a partire dal sistema aperto in modo abbastanza semplice, come vedremo. Vogliamo innanzitutto sapere se le radici del polinomio caratteristico del secondo sistema sono a parte reale negativa; facciamo l'ipotesi che $W_{ap}(s)$ non abbia radici a parte reale nulla. Consideriamo una radice p_1 a parte reale negativa, e una radice p_2 a parte reale positiva. Sul piano reale-immaginario sono rappresentabili come:

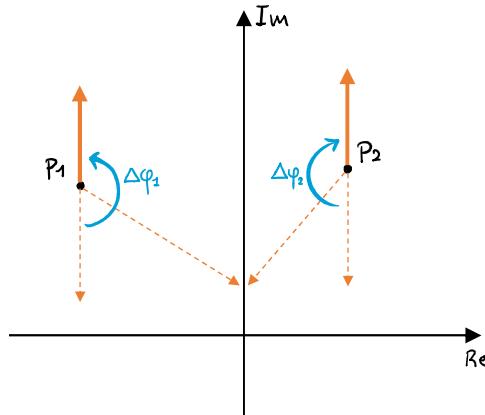


¹ Se ci sono cancellazioni, significa che il numeratore e il denominatore di $W_{ch}(s)$ hanno termini in comune, ma visto che il numeratore è $n_{ap}(s)$ e questo compare anche al denominatore, allora l'unico modo perché questi condividano dei termini è che $d_{ap}(s)$ abbia termini in comune con $n_{ap}(s)$. Ma questo significa che il termine può essere semplificato già in $W_{ap}(s)$, quindi non viene cancellato nella formazione di $W_{ch}(s)$.

Consideriamo un punto sull'asse immaginario, $j\omega$; la quantità $j\omega - p_1$ è rappresentata dal vettore che punta da p_1 al punto $j\omega$, e la stessa cosa è per $j\omega - p_2$:



Ora, facciamo “scorrere” $\omega \in \mathbb{R}$ da $-\infty$ a $+\infty$, così che il punto $j\omega$ scorra sull'asse immaginario da $-\infty$ a $+\infty$, e osserviamo la variazione di fase dei due vettori:



Si vede che il vettore della radice a parte reale negativa ha una variazione di fase $\Delta\varphi_1$ che vale π , mentre il vettore della radice a parte reale positiva ha una variazione di $-\pi$. Possiamo estendere questo ragionamento a qualsiasi radice, per capire se è a parte reale positiva o negativa.

Se consideriamo un generico polinomio $p(s)$ di grado n , se questo ha P radici a parte reale positiva, la variazione di fase di $p(j\omega)$ sarà data da:

$$\Delta\varphi(p(j\omega)) = -\pi P + \pi(n - P) = \pi n - 2\pi P$$

Per cui, se studiamo la variazione di fase del rapporto (\clubsuit), e indichiamo con Z_p il numero di radici a parte reale positiva di $d_{ch}(s)$ e con P_p il numero di radici a parte reale positiva di $d_{ap}(s)$, allora avremo che²:

$$\Delta\varphi(d_{ch}(j\omega)) = n\pi - 2\pi Z_p$$

$$\Delta\varphi(d_{ap}(j\omega)) = n\pi - 2\pi P_p$$

² Le lettere P e Z provengono rispettivamente da “poli” e “zeri”, e sono indicatori mnemonici del fatto che d_{ap} è al denominatore (e al denominatore ci sono i poli, perciò gli è associata la lettera P) e d_{ch} è al numeratore (e al numeratore ci sono gli zeri, perciò gli è associata la lettera Z).

Di conseguenza, la variazione di fase del rapporto è:

$$\Delta\varphi\left(\frac{d_{ch}(j\omega)}{d_{ap}(j\omega)}\right) = \Delta\varphi(d_{ch}(j\omega)) - \Delta\varphi(d_{ap}(j\omega)) = 2\pi(P_p - Z_p)$$

Dall'espressione ottenuta, si vede che la variazione di fase del rapporto (♣) è sempre multiplo di 2π , in particolare sono tanti "giri" quanto è la differenza $P_p - Z_p$. Il sistema chiuso è stabile se non aggiunge dei termini a parte reale positiva, ovvero se $Z_p = 0$.

Studio della stabilità dal diagramma polare di $W_{ap}(s) + 1$

Il risultato si può verificare considerando il diagramma polare della funzione $1 + W_{ap}(j\omega)$, che è uguale al diagramma polare di $W_{ap}(j\omega)$ (che diamo per noto, visto che W_{ap} è la funzione di trasferimento del sistema prima della chiusura) *traslato di 1 verso destra* nel piano reale-immaginario³. Oppure, più facilmente, possiamo immaginare di "spostare" l'asse immaginario verso sinistra di 1, e consideriamo il punto -1 sull'asse reale:

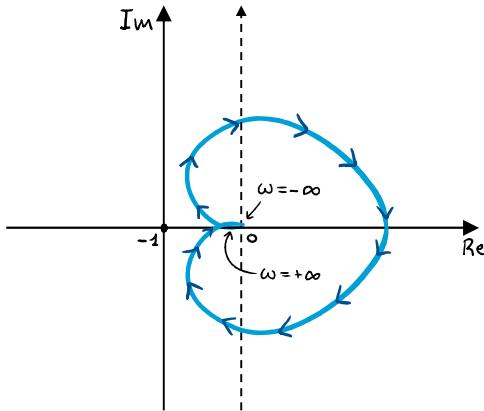
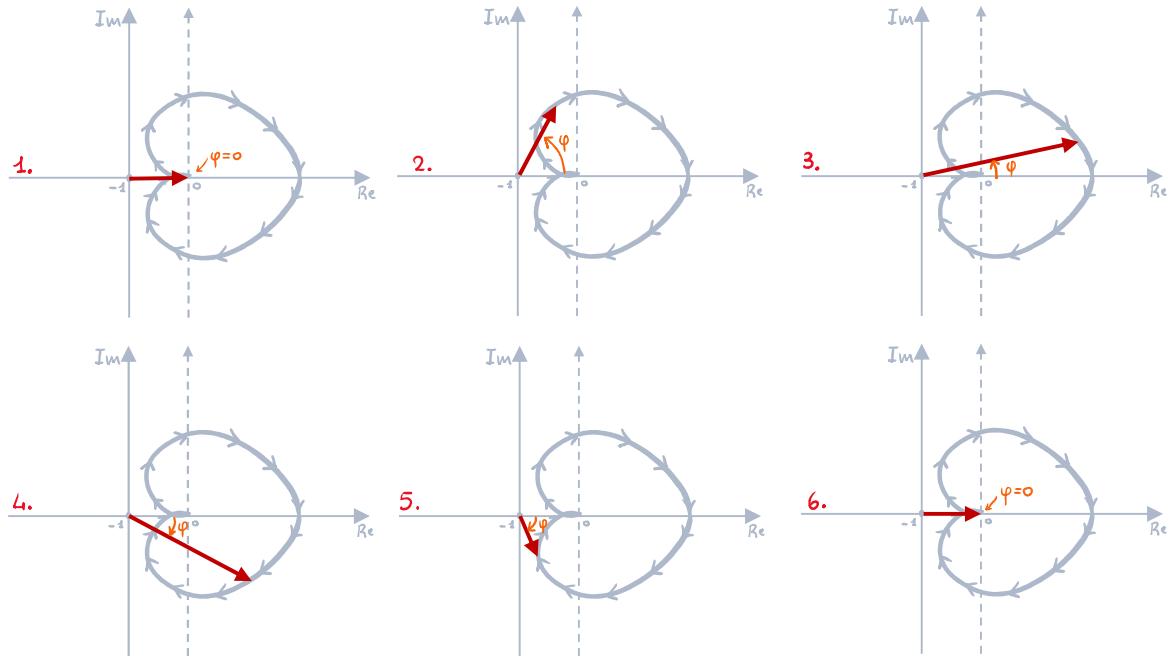


Figura 1

Le frecce indicano la direzione da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$. Immaginiamo di tracciare il vettore che va da -1 al punto sul diagramma polare che corrisponde a un certo ω , e vediamo la variazione di fase durante il suo percorso per $\omega = (-\infty \rightarrow +\infty)$:

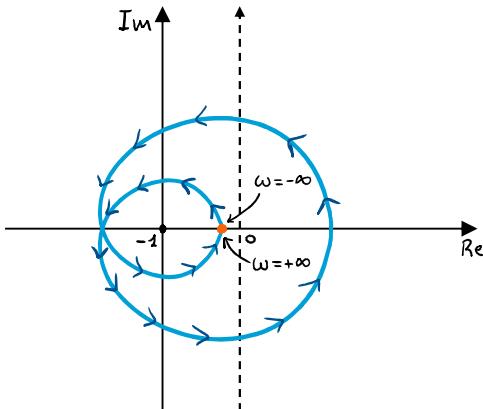
(vedi pagina seguente)

³ Basta, in effetti, aggiungere 1 a tutti i punti del diagramma polare della funzione $W_{ap}(j\omega)$. Il risultato, nel piano reale-immaginario, è che la curva si sposta di 1 verso destra.



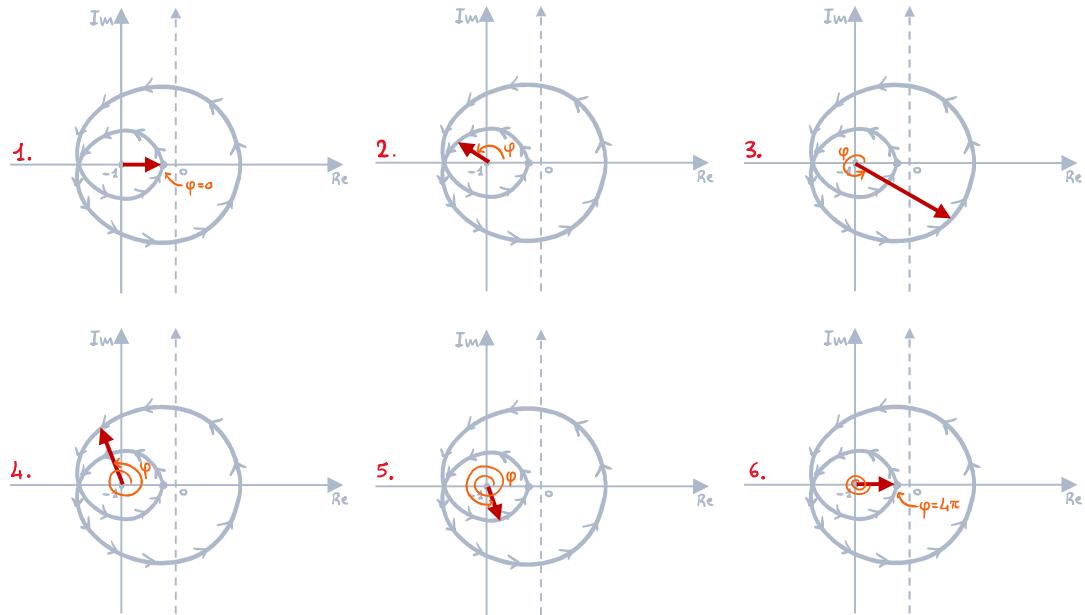
In questo caso, il vettore ha una differenza di fase pari a $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = 0$, perché il vettore non ha compiuto giri, ma si è limitato ad aumentare e diminuire.

Invece, se il diagramma polare fosse stato:



Allora, il vettore avrebbe seguito il seguente percorso:

(vedi pagina seguente)



In questo caso si vede che il vettore ha girato *due volte* seguendo la curva, cioè ha una differenza di fase di $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = 4\pi$. La curva polare è sempre *chiusa*, perciò i giri sono sempre multipli di 2π (0 incluso). Se indichiamo con N^+ il numero di giri nel verso positivo che fa il vettore da -1 intorno al diagramma polare di $1 + W_{ap}(j\omega)$, allora si ha che

$$2\pi(P_p - Z_p) = 2\pi N^+ \implies P_p - Z_p = N^+$$

La condizione affinché il sistema sia stabile è che $Z_p = 0$, ovvero che il numero di giri in senso positivo del vettore intorno alla funzione sia uguale al numero di radici a parte reale positiva di $d_{ap}(s)$. Questo è un teorema chiamato *teorema di Nyquist*. Nota che N^+ può assumere valori negativi, se i giri che vengono fatti sono in senso negativo; per esempio, se una funzione fa due giri nel senso negativo, allora $N^+ = -2$.

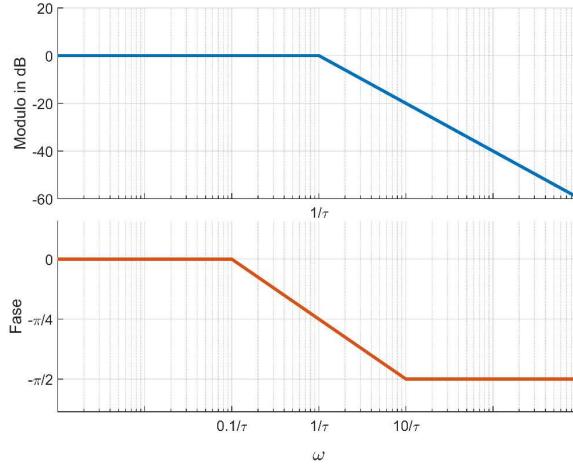
Stabilità di sistemi comuni

Facciamo un esempio. Consideriamo un sistema aperto stabile con un polo:

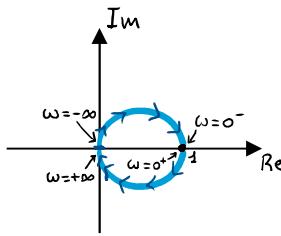
$$W_{ap}(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

Visto che è stabile, abbiamo che $P_p = 0$. Per verificare se il sistema *chiuso* sarà stabile, dobbiamo disegnare il diagramma polare. Per farlo, disegniamo prima il diagramma di Bode.

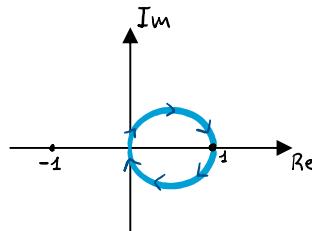
(*vedi pagina seguente*)



Dal diagramma di Bode, possiamo ricavare (approssimativamente) il suo diagramma polare; per $\omega \rightarrow 0^+$ il modulo è 0 in dB, ovvero vale 1, e la fase è 0, perciò sarà il punto $(1, 0)$ sull'asse reale-immaginario. Per ω crescenti, la fase diminuisce fino a $-\pi/2$, mentre il modulo diminuisce fino a 0 ($-\infty$ in dB). Perciò, sarà un arco che parte da $(1, 0)$ e passando sotto l'asse reale finisce in $(0, 0)$. Disegnando anche la parte per $\omega < 0$ si ha:



Perciò, se prendiamo in considerazione i giri che fa la funzione intorno a -1 , ci accorgiamo che non ne fa alcuno, visto che il punto -1 non è “contenuto” all'interno della curva delimitata dalla funzione:



Perciò, $N^+ = 0$, da cui sappiamo che $Z_p = 0$ e, quindi, che il sistema chiuso continuerà ad essere stabile.

Se la funzione studiata ha due poli:

$$W_{ap}(s) = \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

Si vede che il diagramma polare tracciato è molto simile a quello della *Figura 1* a pagina 4; il numero di giri sarà allora pari a $N^+ = 0$ e il sistema rimarrà stabile.

Se la funzione studiata ha tre poli:

$$W_{ap}(s) = \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$

Il diagramma di Bode assomiglia al seguente:

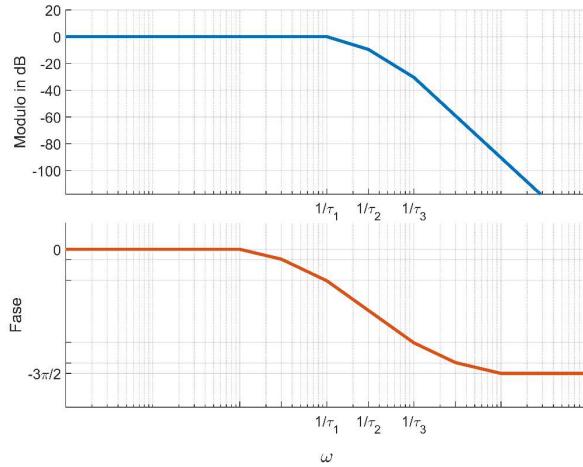
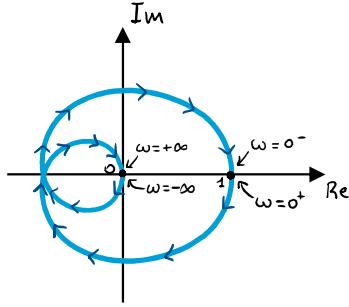


Figura 2

Per $\omega \rightarrow 0^+$ siamo sempre nel punto $(1, 0)$. All'aumentare di ω , la fase e il modulo scendono finché la fase non arriva a $-\frac{3}{2}\pi$. Perciò, da $(1, 0)$ la funzione “gira intorno” rispetto all'origine e finisce per adagiarsi sull'asse immaginario a -180° . Se contiamo la parte negativa, la funzione ha un diagramma polare simile a questo:



Notiamo che il modulo è sempre *decrecente*, per cui se la funzione nel tratto positivo parte nel punto $(1, 0)$, non potrà toccare di nuovo l'asse reale (a sinistra) nel punto -1 , ma lo passerà sicuramente più a destra. Ciò vuol dire che il punto -1 sta a sinistra della curva:

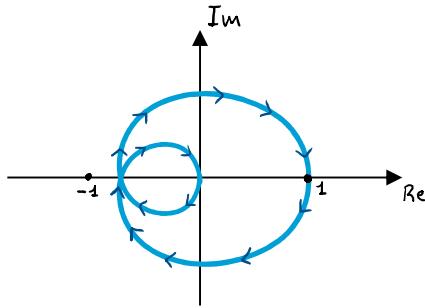


Figura 3

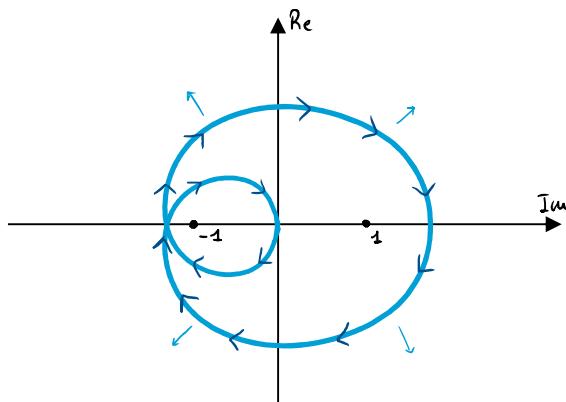
Di conseguenza, i giri che fa la funzione intorno a -1 sono sempre zero, e il sistema continua ad essere stabile.

Studio della stabilità in presenza di un fattore K

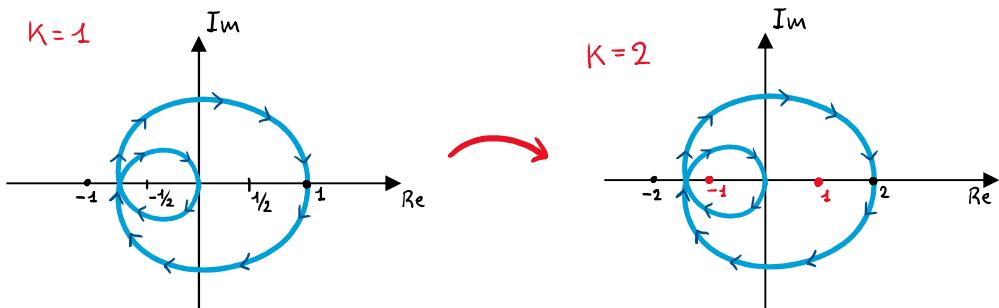
Se appare un coefficiente $K > 0$ nella $W_{ap}(s)$:

$$W_{ap}(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\tau_3)}$$

Allora la fase non cambia (perché $K > 0$), ma il modulo nel diagramma di Bode (*Figura 2*) viene *traslato* in alto o in basso a seconda se $K > 1$ o $K < 1$. Traslare il grafico del modulo di una certa quantità K significa che il diagramma polare stesso (*Figura 3*), in ogni punto, ha modulo K volte maggiore; quindi, il grafico si “gonfia” ed è possibile che, da un certo valore di K in poi, comprenda effettivamente il punto -1 :



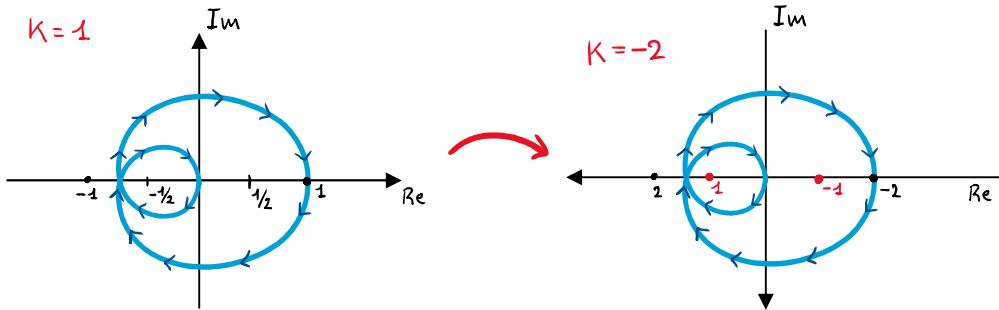
Per comodità, invece di aumentare la dimensione del grafico, è più semplice ridurre la scala del grafico di K volte. Ovvero, se $K = 2$, posizioniamo il punto 1 in $\frac{1}{2}$, e così il punto -1 sarà in $-\frac{1}{2}$, ecc., così da avere:



In generale, il punto -1 va a finire in $-\frac{1}{K}$; a questo punto, basta vedere se il *nuovo* -1 si trova all'interno o all'esterno del grafico. Per farlo, andremo a vedere, nel diagramma di Bode, quand'è che la fase vale $-\pi$, e in corrispondenza di quel punto vedremo quanto vale il modulo in dB. Se questo è negativo, già sappiamo che il modulo effettivo sarà minore di 1. Approfondiremo questo punto nella prossima lezione.

Nel caso in cui $K < 0$, oltre al fatto che il grafico si scala a seconda del modulo di K , si ha che la fase è uguale non a zero, ma a $-\pi$. Perciò, al diagramma di Bode della *Figura 2* si trasla la fase in basso di $-\pi$. Questo si

traduce, nel diagramma polare, a una rotazione di $-\pi$ del grafico stesso. Di nuovo, invece di ruotare il grafico, ruotiamo il sistema di riferimento, quindi gli assi. Vedi questo esempio con $K = -2$:



Nota che il punto che prima corrispondeva a 1 non corrisponde a 2, ma a -2 , perciò il nuovo punto -1 è quello che prima corrispondeva a $+\frac{1}{2}$. Inoltre, nota che il verso di “percorrenza” del grafico *non varia* perché si tratta di una rotazione, e non una riflessione.

È facile vedere come, al variare del valore di K , il punto -1 si “sposta” allontanandosi o avvicinandosi al grafico. Ci sarà un valore particolare di K , \bar{K} , dopo il quale il -1 “entra” all’interno della curva del grafico e il sistema diventa instabile. Ci può venir chiesto di trovare il valore di \bar{K} .

Per contare facilmente il numero di giri di una funzione intorno a -1 , si prende il punto -1 , si traccia una semiretta in qualsiasi direzione, e si contano il numero di intersezioni con la curva del grafico *con segno*; ovvero, se dove interseca la curva, la funzione “entra” nella semiretta “da destra” (guardando la semiretta da -1), allora si conta $+1$, altrimenti, se entra “da sinistra”, si conta -1 . Per esempio:

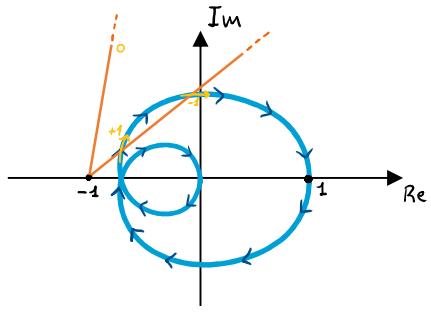


Figura 4

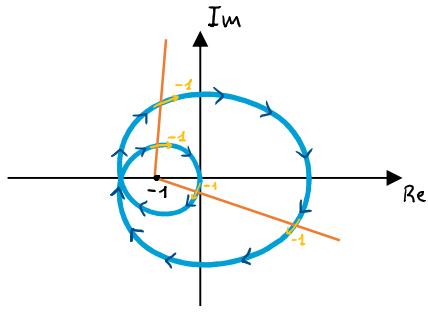


Figura 5

Nella *Figura 4*, si vede che tracciando la semiretta da -1 rimanendo all'esterno della figura, si ottengono zero intersezioni, perciò $N^+ = 0$; alternativamente, possiamo tracciare la semiretta verso la curva: la prima intersezione conta $+1$ (la curva incrocia la semiretta da destra), la seconda -1 (la curva incrocia la semiretta da sinistra), e sommando si ottiene 0. Nella *Figura 5*, invece, entrambi gli incroci della curva con la semiretta avvengono da sinistra, perciò si conta entrambe le volte -1 e si ha $N^+ = -1 - 1 = -2$.

Ricordiamo che tutto questo vale per le ipotesi che abbiamo fatto, ovvero che il sistema sia a un ingresso e un’uscita ($p = q = 1$), e immaginiamo che non ci siano radici sull’asse immaginario nel polinomio, ovvero nessuna radice a parte reale nulla. Non è un problema la prima ipotesi, perché la stragrande maggioranza delle volte lavoreremo con sistemi a un ingresso e un’uscita; vedremo però come trattare la seconda ipotesi, visto che può succedere spesso che ci siano radici a parte reale nulla.

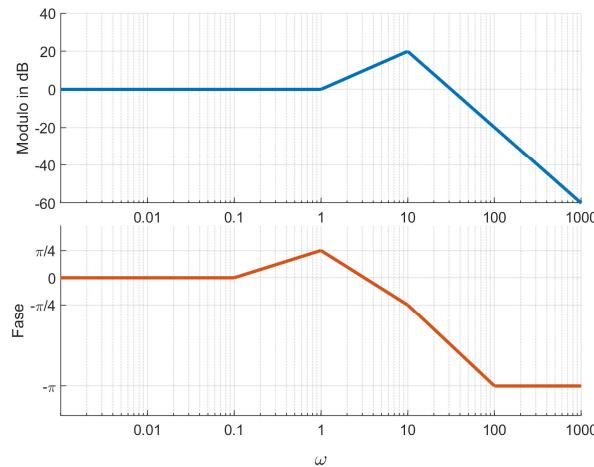
Teoria dei Sistemi

Lezione 36 (3 dicembre 2021)**Studio della stabilità di un sistema chiuso**

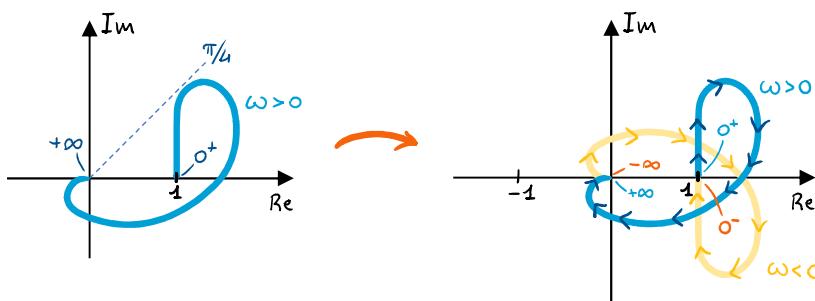
Prendiamo la funzione di trasferimento di un sistema ad anello aperto¹:

$$W_{ap}(s) = k \frac{s+1}{(s+10)^3} = \underbrace{\left[\frac{k}{10^3} \right]}_K \frac{1+s}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^3}$$

Studiamo il sistema chiuso in controreazione. Innanzitutto, notiamo che non ci sono poli a parte reale positiva, quindi $P_p = 0$. Disegniamo il diagramma di bode di $W_{ap}(s)$, considerando $K = 1$ (andremo dopo a scalare il grafico polare rispetto a K):



Disegnando il diagramma polare otteniamo qualcosa simile a questo:



Ora, cominciamo a scalare il grafico in base a $K > 0$; il punto -1 andrà a finire in $-\frac{1}{K}$, e questo punto si allontanerà dal grafico se $K < 1$ e si avvicinerà se $K > 1$. Notiamo che, per via del fatto che la funzione è

¹ I sistemi aperti sono anche chiamati “sistemi ad anello aperto”, così come i sistemi chiusi sono anche chiamati “sistemi ad anello chiuso”.

tangente all'asse reale per $\omega = +\infty$, il punto $-\frac{1}{K}$ può essere arbitrariamente grande e comunque non entrare all'interno della curva:

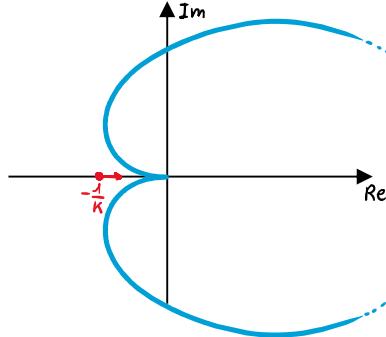
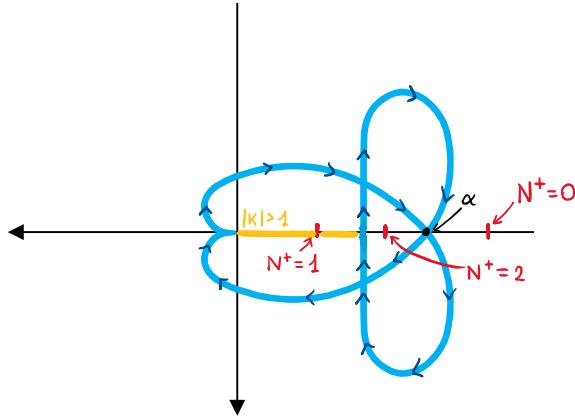


Figura 1. Dettaglio della funzione

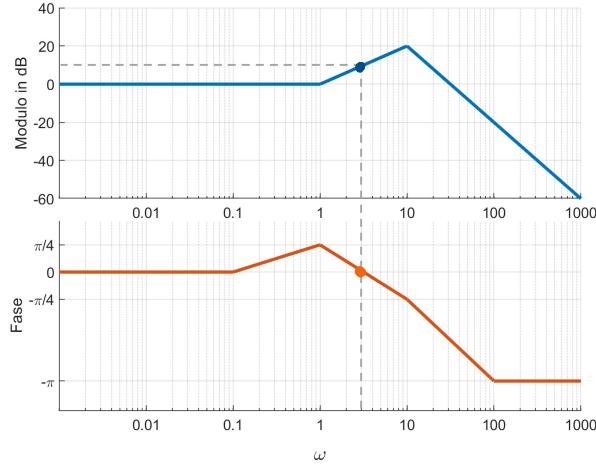
Per cui, il sistema resta stabile per qualsiasi valore di $K > 0$, ovvero per qualsiasi guadagno del sistema. Ricordiamo che, per trovare i valori del k di partenza, basta fare $k = K \cdot 10^3$. In questo caso, comunque, il risultato è lo stesso.

Per $K < 0$, invece, si ribaltano gli assi e il punto di riferimento $-\frac{1}{K}$, a seconda del valore di K , può finire dentro la curva. Nel grafico qui sotto è segnata in giallo la zona in cui cade il punto se $|K| > 1$; si vede che $N^+ = 1$ all'interno di quella zona. Se K aumenta in modulo, invece, finché rimane all'interno della curva si ha $N^+ = 2$, mentre al di là di un certo limite il punto esce dalla curva, dove $N^+ = 0$.



Allora, per $K < 0$, il sistema sarà stabile se $K > \bar{K}$ ($|K| < |\bar{K}|$) per un certo valore di \bar{K} . In definitiva, il sistema sarà stabile se $K > 0$, quindi se $k > 0$, o se $\bar{K} < K < 0$, quindi se $\bar{k} < k < 0$ (dove $\bar{k} = 10^3 \bar{K}$). Come

facciamo a trovare il valore di \bar{K} ? Dobbiamo tornare sul diagramma di Bode di questa funzione, e vedere quanto vale il modulo quando la fase vale 0:



Sembra che il modulo in quel punto valga approssimativamente 10 dB, ovvero circa 3.16. Questo è il valore della parte reale della curva quando interseca l'asse immaginario, che nel grafico sopra è segnato con α ; noi dobbiamo trovare il valore di K , che sarà proprio \bar{K} , tale che il numero -1 vada proprio a finire nel punto α . Ovvero:

$$\frac{-1}{\bar{K}} = \alpha \approx 3.16 \implies \bar{K} \approx -\frac{1}{3.16} \approx -0.316$$

In realtà, se avessimo un grafico più preciso, si vedrebbe che il valore effettivo di α è -3.625 , perciò il valore effettivo di \bar{K} è circa -0.276 . Questo è il valore di \bar{K} , ma è semplice trovare il valore \bar{k} nel caso in cui ci venisse chiesto; visto che $K = k/1000$:

$$\bar{k} = 1000\bar{K} \approx 276$$

Verifica della stabilità con Routh

Calcoliamo il denominatore di $W_{ch}(s)$:

$$\begin{aligned} d_{ch}(s) &= d_{ap}(s) + n_{ap}(s) = \\ &= (s+10)^3 + k(s+1) = \\ &= s^3 + 30s^2 + 300s + 1000 + ks + k = \\ &= s^3 + 30s^2 + (300+k)s + (1000+k) \end{aligned}$$

Se vogliamo verificare che le radici di questo polinomio siano tutte negative, dobbiamo applicare il criterio di Routh. La condizione necessaria è che tutti i coefficienti del polinomio siano positivi, per cui già abbiamo le condizioni

$$\begin{cases} 300 + k > 0 \\ 1000 + k > 0 \end{cases} \implies k > -300$$

Costruiamo la tabella per utilizzare il criterio:

3	1	$k + 300$
2	30	$k + 1000$
1	★	
0		

L'elemento segnato con \star si calcola facendo

$$\star = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+300 \\ 30 & k+1000 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{k+1000 - 30k - 9000}{-30} = \frac{29k + 8000}{30}$$

La tabella finale sarà:

3	1	$k+300$
2	30	$k+1000$
1	$\frac{29k+8000}{30}$	
0	$k+1000$	

Per il criterio, si hanno tutte radici a parte reale negativa se si hanno tutte permanenze di segno nella prima colonna. Allora, deve risultare che:

$$\begin{cases} \frac{29k+8000}{30} > 0 \\ k+1000 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -\frac{8000}{29} \\ k > -1000 \end{cases} \Rightarrow k > -\frac{8000}{29} = \bar{k} \approx -276$$

Che è il valore che abbiamo ottenuto precedentemente².

Nomenclatura delle $W(s)$

Quando si studiano sistemi complessi, è utile non indicare i sistemi con $W_1(s), W_2(s), \dots$ ma indicarli con un nome significativo; per esempio, se un sistema è formato da un motore e un treno, invece di indicare le loro funzioni di trasferimento con $W_1(s)$ e $W_2(s)$, è più utile e facile da comprendere se li indichiamo piuttosto con $M(s)$ e $T(s)$. Possiamo sempre chiamare $W(s)$ la funzione di trasferimento complessiva del sistema motore-treno.

In particolare, quando si parla di sistemi ad anello aperto e chiuso, è usanza indicare il sistema aperto con $F(s)$ e il sistema chiuso, ovvero il sistema complessivo, con $W(s)$. Insieme a questo, sarà più facile segnare solo gli elementi del sistema aperto con il pedice F , e quelli del sistema complessivo senza pedice.

Caso in cui una radice di $F(s)$ è nulla

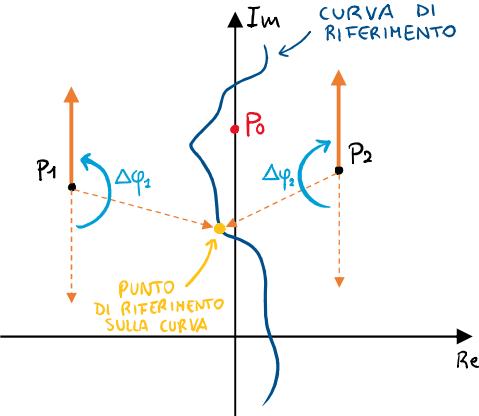
Nella scorsa lezione abbiamo visto come capire il segno delle radici del rapporto tra i denominatori

$$\frac{d(s)}{d_F(s)} = 1 + F(s) \quad (\clubsuit)$$

nel caso in cui non ci siano radici nulle; ora vediamo cosa fare proprio in quel caso. Infatti, il metodo che abbiamo usato finora *non funziona*, così com'è stato pronunciato, per le radici nulle, perché la fase vale $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega = -\infty$, ma per $\omega = 0$, quanto vale la fase? Anche se ponessimo che valga zero, quanto varrà per $\omega > 0$? $\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{3\pi}{2}$? È evidente che dobbiamo trovare una soluzione a questo problema.

² Di certo, questo metodo permette di ottenere il valore preciso di \bar{k} , mentre con il primo metodo risulta spesso molto approssimativo. Tuttavia, se il sistema di partenza dovesse venire modificato, con Routh andrebbe fatto l'intero calcolo daccapo, mentre graficamente basterebbe scalare di nuovo il grafico, e ottenere un nuovo valore approssimato di \bar{k} quasi immediatamente. Questo diventa ancora più evidente quando il grado del polinomio è molto alto.

Prendiamo un punto $j\omega$ sull'asse immaginario dove $\omega \in \mathbb{R}$. Se, invece dell'asse immaginario, scegliessimo un'altra curva, il risultato non cambierebbe, purché tutte le radici siano mantenute nella parte giusta (ovvero, se delle radici sono a parte reale *negativa*, non importa se come riferimento si prende l'asse immaginario o una curva qualsiasi, l'importante è che si trovino comunque *a sinistra* di quella curva):



Nota che nella figura le radici a parte reale negativa si trovano comunque *a sinistra* della curva, e quelle a parte reale positiva sono *a destra* della curva. Ovviamente una curva del genere non è facile da studiare; prendiamo allora una curva più semplice, che vale $j\omega$ ovunque ma che “gira intorno” alla radice con parte reale nulla p_0 :

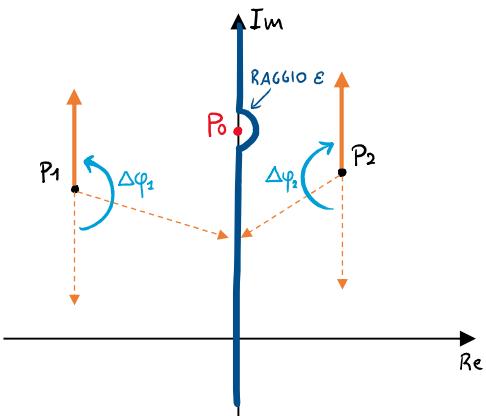


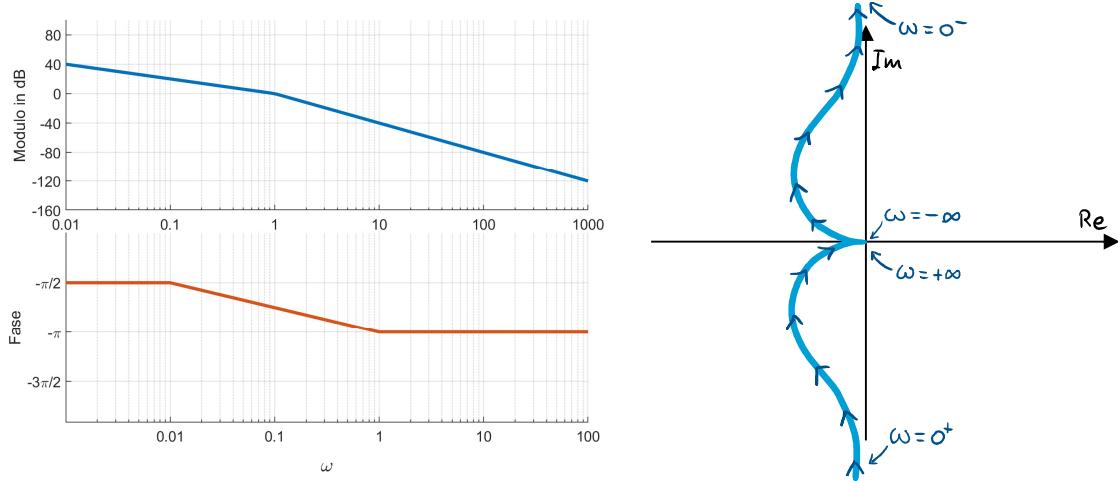
Figura 2. Radici sull'asse immaginario

Il “raggiramento” avviene con un raggio ε sufficientemente piccolo da non comprendere radici positive al suo interno; perciò, consideriamo $\varepsilon \rightarrow 0$. Vediamo le conseguenze di questa scelta.

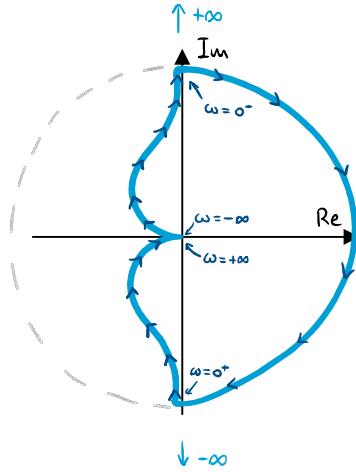
Nella pagina seguente è riportato il grafico del diagramma di Bode e del diagramma polare della funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Che chiaramente ha un polo in -1 e un polo in zero, perciò una radice con parte reale nulla.



Nel diagramma polare quello che succede quando disegniamo è che ci “fermiamo” poco prima della radice p_0 , e poi riprendiamo a disegnare poco dopo. Quello che abbiamo fatto noi prima è unire il punto poco prima di p_0 con il punto poco dopo, con un raggio ε ; questo fa sì che il diagramma polare della funzione, in questo modo, avrà un collegamento esplicito da $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$:



Un altro possibile percorso da $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$ sarebbe stato quello tratteggiato; tuttavia, se consideriamo la Figura 2, noi stiamo aggirando il punto tenendocelo sulla sinistra. Ciò significa che anche l’immagine della funzione dovrà avere l’immagine del punto sulla sinistra. L’immagine di p_0 è infinito, perciò dovremo scegliere il percorso che “vede l’infinito a sinistra”; percorrendo la linea tratteggiata, si ha l’infinito sulla destra, perciò sceglieremo l’altro.

Se scegliessimo ε più piccolo, il “giro” della funzione sarebbe ancora più ampio. In generale, più ε è piccolo, più la curva si avvicina a p_0 e più l’immagine va all’infinito, risultando in un giro sempre più ampio. Se immaginiamo $\varepsilon \rightarrow 0$, allora il giro diventa infinitamente grande, e la possibile intersezione con l’asse reale si sposta infinitamente a destra, fino a non essere più considerata.

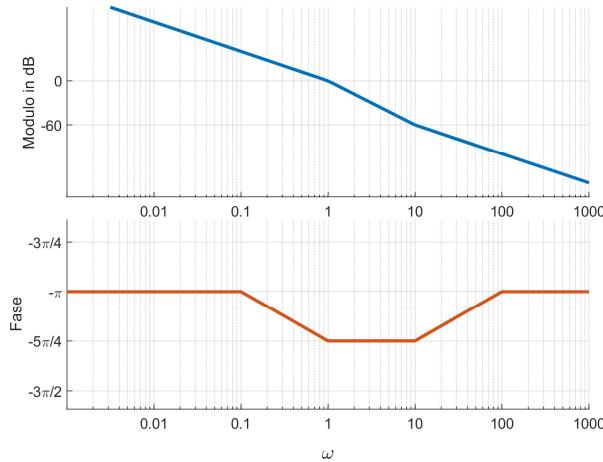
In generale, il giro avviene sempre in *sensu orario*. Possiamo studiare ora la stabilità come se fosse una curva qualsiasi: se $K > 0$, il punto $-\frac{1}{K}$ si trova sempre sulla sinistra della curva e il numero di giri intorno alla funzione è nullo; quindi, per K positivi il sistema rimane sempre stabile. Se $K < 0$, per qualsiasi valore di K negativo si hanno $N^+ = 1$ giri; infatti, visto che il “giro” della curva è infinitamente distante, non ci sarà un punto in cui $-\frac{1}{K}$ esce dalla curva. Perciò, per K negativi sarà sempre instabile.

Chiusura con doppio polo in zero

Prendiamo la funzione di trasferimento

$$F(s) = k \frac{s+10}{s^2(s+1)} = 10k \frac{1 + \frac{s}{10}}{s^2(1+s)}$$

Consideriamo $K = 10k$, e disegniamo il diagramma di bode con $K = 1$:



Per $\omega \rightarrow 0^+$, il modulo è infinito e la fase è $-\pi$, perciò il grafico proviene dall'estrema sinistra del piano. Quando cresce ω , il modulo decresce e la fase prima decresce leggermente, poi risale fino a tornare a $-\pi$. Considerando anche la parte per $\omega < 0$, il diagramma polare è approssimativamente:

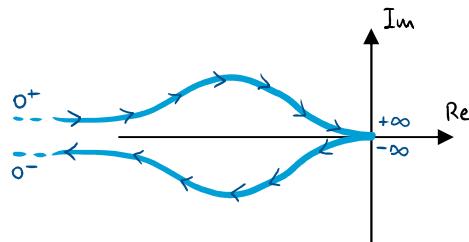
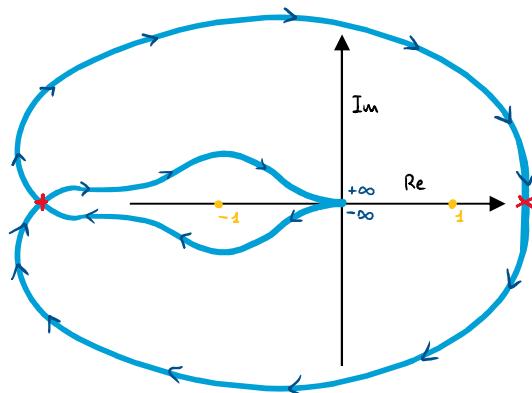


Figura 3. Diagramma polare

Dobbiamo chiudere il diagramma polare; stavolta, ci sono due poli in zero (perché abbiamo s^2 e non solo s), perciò la variazione di fase complessiva dei vettori in quel polo facendo variare ω (come abbiamo fatto precedentemente) non dovrà essere π , ma 2π . Questo significa che, nella chiusura della curva polare, dovremo fare *due giri* in senso orario, e non uno semplice:



I punti segnati in rosso dobbiamo immaginarceli, come abbiamo fatto prima, infinitamente lontani. Perciò, sul punto -1 la funzione fa due giri, entrambi in senso negativo, perciò $N^+ = -2$. Per valori di K più grandi, il punto si avvicina all'origine ma non esce dalla curva; per valori di K più piccoli (ma sempre maggiori di zero) il punto si sposta sulla sinistra, ma non uscirà mai dalla curva perché abbiamo detto che il punto segnato in rosso è infinitamente lontano; perciò, per qualsiasi valore di $K < 0$ si avrà $N^+ = -2$.

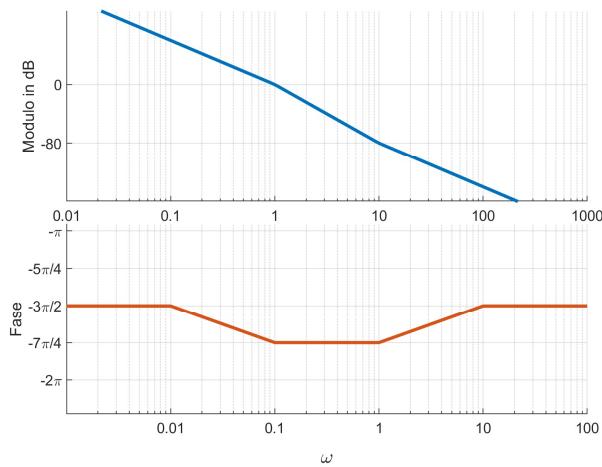
Se $K < 0$, prendiamo in considerazione sul grafico il punto segnato con 1: lì ci andrà a finire $-1/K$ quando $K = -1$. In quel punto, la funzione fa un giro in senso negativo, perciò $N^+ = -1$; per lo stesso motivo di prima, al variare di $K < 0$ il punto non può “uscire” dalla funzione e rimane $N^+ = -1$. Da quello che abbiamo trovato, sappiamo che il sistema chiuso è instabile per ogni K , perché $N^+ \neq 0$.

Chiusura con triplo polo in zero

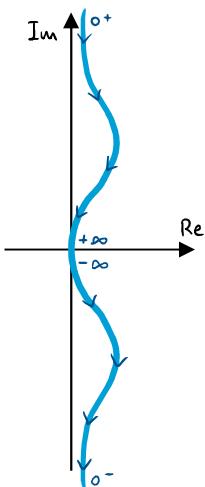
Se, nella $F(s)$, invece di s^2 ci fosse stato s^3 :

$$F(s) = K \frac{1 + \frac{s}{10}}{s^3(1 + s)}$$

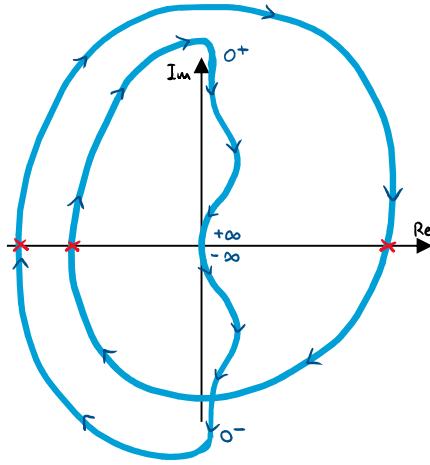
Allora il diagramma di Bode sarebbe stato:



La fase scende di un altro $-\frac{\pi}{2}$, perciò per $\omega \rightarrow 0^+$ il modulo è infinito e la fase è $-\frac{3}{2}\pi$. Il diagramma polare per $\omega > 0$ è simile a quello della Figura 3, ma ruotato di $-\frac{\pi}{2}$; la parte per $\omega < 0$ ha lo stesso grafico ma, come al solito, ribaltato:



Dobbiamo chiudere la curva, ma essendoci tre poli in zero (perché c'è s^3), dobbiamo fare un giro di 3π ; perciò, dovremo partire da $\omega = 0^-$ e fare un giro e mezzo ($2\pi + \pi$) fino ad arrivare a $\omega = 0^+$. Allora il diagramma sarà simile a questo:



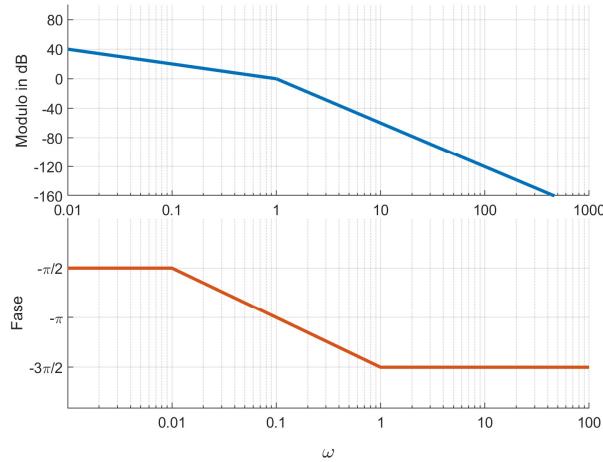
Ovviamente, i punti segnati rosso, come sappiamo, si trovano all'infinito.

Altro esempio con polo in zero

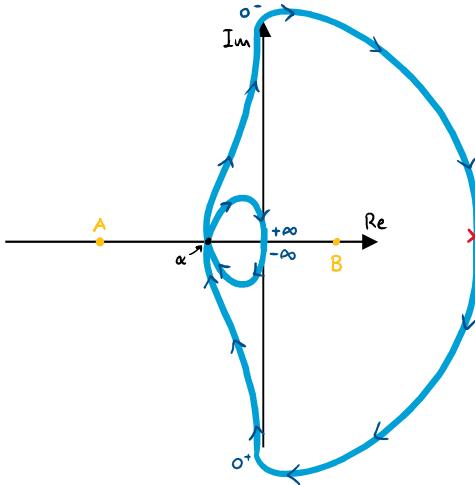
Consideriamo adesso

$$F(s) = K \frac{1}{s(1+s)^2}$$

Il diagramma di Bode è il seguente:



Per $\omega \rightarrow 0^+$ si ha fase $-\frac{\pi}{2}$ e modulo infinito, perciò si parte dal basso del piano reale-immaginario. Successivamente, il modulo decresce e la fase si sposta da $-\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{3\pi}{2}$. Il diagramma polare, se ci includiamo la chiusura, avrà una forma simile alla seguente:

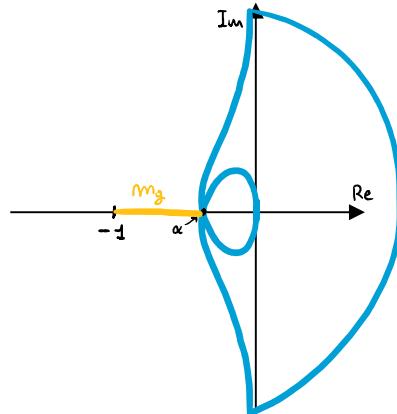


Per valori di K positivi e minori di un certo \bar{K} , ci troviamo nella zona dove è segnato il punto A in giallo sul grafico. \bar{K} corrisponde al valore di K per cui ci troviamo esattamente nel punto α ; se $K > \bar{K}$, il punto “entra” all’interno della zona a destra di α (e a sinistra dell’origine), dove $N^+ = -2$. Per valori negativi di K , invece, ci troviamo nella zona dove è segnato il punto B e per qualsiasi valore di $K < 0$ si ha $N^+ = -1$. Il sistema, allora, è stabile finché $0 < K < \bar{K}$.

Se dovesse succedere che $K = \bar{K}$, allora il procedimento è simile a quello che abbiamo usato per le radici nulle: facciamo “girare intorno” la curva polare al punto α , di modo che se ci troviamo esattamente in quel punto, conta come se stessimo alla sua sinistra, e quindi $N^+ = 0$. Tuttavia, non possiamo dire che il sistema è stabile, ma dobbiamo “segnarci” che è al più *semplicemente stabile*.

Margine di guadagno

Da adesso in poi, ci riferiremo al punto $-\frac{1}{K}$ come -1 , lasciando intendere che, a seconda del valore di K , questo punto si può spostare. Prendiamo il grafico precedente e consideriamo il punto -1 :

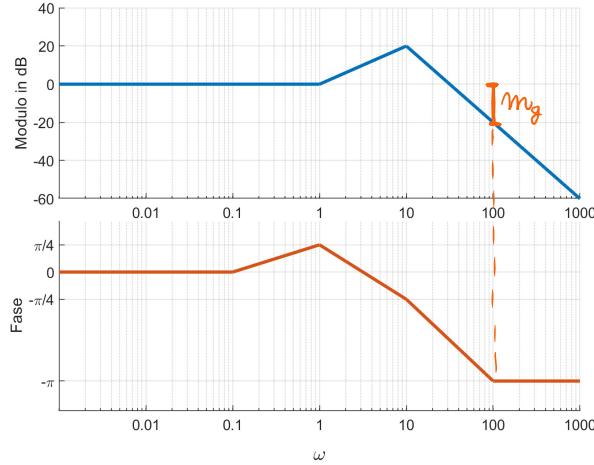


La quantità segnata con m_g è chiamata *margine di guadagno* ed è una misura che indica quanta “perturbazione” riesce a sopportare il sistema prima di diventare instabile. Ovvero, se K diventa troppo grande,

il punto -1 entra all'interno della curva e il sistema diventa instabile; la grandezza m_g indica quanto può variare K prima che il punto entri all'interno della curva.

Questa grandezza si può vedere nel diagramma di Bode: quando la fase vale (in questo caso) $-\pi$, il modulo varrà esattamente α (che nel grafico è espresso in decibel). La grandezza m_g è la distanza del valore in decibel del modulo da 0 dB. Ovvero, se vediamo che quando la fase è $-\pi$ il modulo vale -6 dB, allora il margine di guadagno sarà

$$(m_g)_{\text{dB}} = 0 - (-6 \text{ dB}) = 6 \text{ dB}$$



Il diagramma è relativo ad un'altra funzione, per accentuare la differenza di margine. Notiamo che, se il valore del modulo in decibel è positivo, allora il margine di guadagno sarà negativo e ciò significa che il sistema è già instabile. Il valore effettivo, non espresso in decibel, è pari al reciproco di α del grafico:

$$m_g = \frac{1}{\alpha}$$

Margine di fase

Non è solo il modulo a variare; anche la fase potrebbe variare in un modo tale da fare entrare il punto -1 all'interno della curva. In particolare, se consideriamo il grafico:

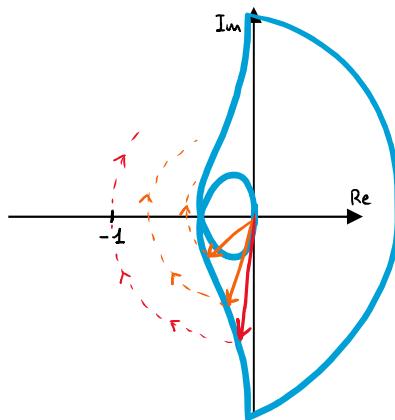


Figura 4. Margine di fase

Si vede che non c'è problema con i vettori arancioni, visto che restano sempre lontano dal punto critico -1 . Tuttavia, il vettore rosso passa esattamente sopra a -1 (perché il vettore ha modulo 1), perciò tutti i punti al di sotto del punto indicato dal vettore rosso, se ruotati opportunamente, possono far diventare instabile il sistema.

Anche in questo caso, allora, possiamo definire un *margine di fase*, m_φ , definito come il valore massimo della fase per cui il sistema resta stabile. Per trovare la fase limite, dobbiamo prendere in considerazione tutti i vettori di raggio 1 che riusciamo a trovare ed escludere tutti i vettori di raggio maggiore. Graficamente, tracciamo la circonferenza di raggio 1 con centro nel punto -1 , così da intersecare la curva polare nei punti in cui il vettore varrebbe 1. Nel diagramma di Bode, questo si traduce nel trovare i punti in cui il modulo vale 1, ovvero 0 dB, e vediamo la rispettiva fase; m_φ indica quanto può variare la fase prima che arrivi a $-\pi$ (*vedi nota 3*), quindi si fa la differenza tra la fase nel punto in cui il modulo è 0 dB e $-\pi$.

³ Considera la *Figura 4*. Finché il vettore rosso non arriva al punto -1 , ovvero non ruota di quanto necessario per arrivare a $-\pi$, il sistema rimane stabile. In effetti, diventa instabile quando arriva (o sorpassa) -1 , ovvero quando la fase è pari o superiore a $-\pi$. Di conseguenza, m_φ indica quanto può ruotare il grafico prima che il vettore di raggio 1 tocchi il punto -1 . Tutto ciò avviene quando il vettore ruota di quel tanto che basta per raggiungere $-\pi$; perciò, se indichiamo con ω_0 la pulsazione per cui risulta $|F(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 0$, avremo che

$$m_\varphi = \angle F(j\omega_0) - (-\pi) = \angle F(j\omega_0) + \pi$$

Teoria dei Sistemi

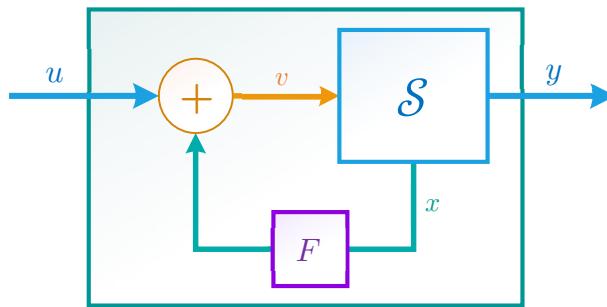
Lezione 37 (6 dicembre 2021)

Modificare la dinamica di un sistema

Un sistema, in generale, è sempre formato da sistemi più “piccoli” interconnessi al suo interno, e non è mai atomico. Quello che ci interessa adesso è cercare di *modificare alcune caratteristiche del sistema*, come per esempio i modi naturali, con un certo fine. Prendiamo un sistema rappresentato nello spazio di stato:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Una prima idea è quella di provare a modificare la dinamica del sistema. Nella connessione a contoreazione abbiamo visto che il sistema al di là della dinamica rimane pressoché lo stesso: le matrici B e C non cambiano, cambia solamente la matrice A . Ora, invece di connettere l’uscita del sistema all’ingresso, leggiamo il suo stato x e cerchiamo di modificare direttamente quello:



In questo modo, avremo che $u = Fx + v$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BFx + Bv \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

Secondo questo approccio, la matrice dinamica del nuovo sistema è

$$\bar{A} = A + BF$$

F non è uno scalare, ma una matrice che ha tante righe quanta è la dimensione dell’ingresso, e tante colonne quanto è quella dello stato ($p \times n$). Se ci poniamo, come sempre, nel caso in cui $p = q = 1$, F sarà $1 \times n$.

Modificare un sistema non raggiungibile

C’è un problema con questo approccio: stiamo leggendo lo stato e stiamo cercando di modificare il sistema attraverso l’ingresso. Questo significa che stiamo assumendo che il sistema sia tutto *raggiungibile*; se ci dovesse essere una parte non raggiungibile, potremmo non riuscire a modificare completamente il sistema. Allora, verifichiamo se, in presenza di una parte non raggiungibile, la matrice F ci permette di modificare la dinamica.

Facciamo l’ipotesi che il sistema \mathcal{S} *non sia* tutto raggiungibile. Sappiamo quindi che la matrice di raggiungibilità $R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ ha rango *non pieno*:

$$\text{rango}(R) = m < n$$

Costruiamo la matrice T^{-1} con i vettori di base di $\mathcal{R} = \text{Im}(R)$ e il completamento per arrivare a n :

$$T^{-1} = (\text{base di } \mathcal{R} \quad \text{completamento})$$

Le matrici del sistema iniziale (non connesso in retroazione) diventano

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora, proviamo a vedere, a parità di matrice T^{-1} , che forma assume il sistema quando viene chiuso in retroazione:

$$\begin{aligned} T\bar{A}T^{-1} &= T(A + BF)T^{-1} = \\ &= \underbrace{TAT^{-1}}_{\bar{A}} + \underbrace{TBFT^{-1}}_{\tilde{B}} = \\ &= \tilde{A} + \tilde{B} \underbrace{FT^{-1}}_{\tilde{F}} \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} (\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2) = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \tilde{F}_1 & \tilde{B}_1 \tilde{F}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 \tilde{F}_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{F}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

* Dividiamo arbitrariamente \tilde{F} in due parti corrispondenti ai blocchi della \tilde{B} . Notiamo che, se questa è la matrice dinamica del secondo sistema (nella forma raggiungibile), allora gli autovalori del sistema chiuso saranno quelli sulla diagonale principale, ovvero saranno gli autovalori di \tilde{A}_{22} e di $\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 \tilde{F}_1$. Allora, visto che \tilde{A}_{22} è la parte di dinamica non raggiungibile, possiamo concludere che, in effetti, il nostro approccio riesce a “manipolare” solamente la parte raggiungibile del sistema.

Non sempre questo è un problema: se il nostro obiettivo è avere tutti gli autovalori a parte reale negativa per avere un sistema asintoticamente stabile, e gli autovalori di \tilde{A}_{22} sono già a parte reale negativa, allora non ci interessa di modificare questa parte del sistema. Tuttavia, è importante prendere atto del fatto che *non possiamo fare nulla* sulla parte non raggiungibile del sistema, ovvero su \tilde{A}_{22} .

Modificare un sistema in forma canonica raggiungibile

Poniamo caso che il sistema sia completamente raggiungibile (in caso contrario, ci concentriamo sulla parte raggiungibile del sistema) e vediamo se è davvero possibile modificarlo arbitrariamente. Supponiamo allora che la coppia di matrici $(\underset{n \times n}{A}, \underset{n \times p}{B})$ sia raggiungibile; di conseguenza, la matrice $R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ avrà rango pieno:

$$\text{rango}(R) = n$$

Partiamo dall'ipotesi che il sistema sia nella forma canonica raggiungibile. Le matrici saranno allora:

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che, per questa coppia di matrici, il polinomio caratteristico ha i coefficienti:

$$p_{A_R}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Mettendo questo sistema in retroazione secondo lo stato, moltiplicandolo per F , otteniamo:

$$\begin{aligned} A_R + B_R F &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (f_1 \quad \cdots \quad f_n) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ -a_0 + f_1 & -a_1 + f_2 & \cdots & -a_{n-1} + f_n & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se l'ultima riga contiene i coefficienti del polinomio caratteristico, questo sarà:

$$p_{\bar{A}}(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - f_n)\lambda^{n-1} + (a_{n-2} - f_{n-1})\lambda^{n-2} + \cdots + (a_1 - f_2)\lambda + (a_0 - f_1)$$

Notiamo che sono cambiati di segno. A questo punto, se vogliamo modificare gli autovalori del sistema, ovvero le radici del polinomio caratteristico, e avere autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ arbitrari, allora il polinomio caratteristico desiderato sarà:

$$\begin{aligned} p^*(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \\ &= \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0 \end{aligned}$$

Basta porre $\beta_i = a_i - f_{i+1}$ per ottenere il relativo valore di f_i :

$$f_i = a_{i-1} - \beta_{i-1}$$

Questo vuol dire che, se abbiamo un sistema tutto raggiungibile e in forma canonica raggiungibile, con coefficienti del polinomio caratteristico a_1, \dots, a_n , e lo mettiamo in retroazione con una matrice F della forma

$$F = (f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n) = (a_0 - \beta_0 \quad a_1 - \beta_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} - \beta_{n-1})$$

Allora, con opportuni β_i , è possibile modificare in modo completamente arbitrario la dinamica del sistema iniziale.

Portare un sistema in forma canonica raggiungibile

Se abbiamo un sistema raggiungibile, e riusciamo a portarlo in forma canonica raggiungibile, allora possiamo modificare la sua dinamica, applicando quanto visto nel capitolo precedente. Per farlo, dobbiamo trovare un opportuno cambio di coordinate T che ponga un sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

nella forma canonica raggiungibile.

Iniziamo con il considerare la nuova matrice degli ingressi $\tilde{B} = TB$. Questa, per essere rappresentativa della forma canonica raggiungibile, dovrà avere la forma

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Costruzione di T . Per trovare la T che fa al caso nostro, consideriamo innanzitutto la matrice

$$R = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$$

Questa matrice, essendo il sistema completamente raggiungibile per ipotesi, ha rango pieno ed è quindi invertibile. La sua inversa avrà una forma non notevole, di cui ci interessa solamente l'ultima riga, che chiameremo γ' :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

Il motivo è che il prodotto $R^{-1}R$ è uguale alla matrice identità, e in particolare:

$$\begin{aligned} R^{-1}R &= \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \gamma' \end{pmatrix} (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = \\ &= \begin{pmatrix} * & & & \\ \gamma'B & \gamma'AB & \dots & \gamma'A^{n-1}B \end{pmatrix} = \\ &= I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se le matrici sono uguali, in particolare sarà uguale l'ultima riga, per cui:

$$(\gamma'B \ \gamma'AB \ \dots \ \gamma'A^{n-1}B) = (0 \ \dots \ 0 \ 1)$$

Ovviamente, essendo uguali termine a termine, la relazione rimane vera anche trasponendoli:

$$\begin{pmatrix} \gamma'B \\ \gamma'AB \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'AB \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\spadesuit)$$

Per cui è evidente che la matrice che moltiplica B è proprio la matrice del cambio di base T .

Invertibilità di T . Verifichiamo ora che la matrice

$$T = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix}$$

Sia proprio la matrice che ci interessa. Innanzitutto, verifichiamo che sia *invertibile* (altrimenti non esisterebbe T^{-1} e non potremmo fare il cambio di base). Sappiamo che una matrice è invertibile se e solo se è non singolare, ovvero basta dimostrare che il determinante di T è diverso da 0. Equivalentemente, possiamo prendere una matrice che *sappiamo* essere non singolare, moltiplicarla per T e verificare che la matrice ottenuta sia non singolare.

Visto che T è stata costruita a partire dall'inversa di R , ci aspettiamo che il prodotto TR sia ragionevolmente facile da trattare (perché se $RR^{-1} = I$, allora RT sarà in parte uguale a I). Vediamo allora se è non singolare il prodotto

$$\begin{aligned} TR &= \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \star \\ 0 & \dots & 1 & \star & \star \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \star & \dots & \star & \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

* I termini $\gamma'B, \gamma'AB, \dots$ sono tutti nulli, per via di (♣). L'ultimo elemento della seconda riga, segnato con \star , è in realtà $\gamma'A^nB$, come tutti gli altri in quella diagonale secondaria. L'ultimo elemento della terza riga, sempre segnato con \star , è $\gamma'A^{n+1}B$, e così via; il motivo per cui sono segnati con \star è che non ci interessa davvero il loro valore, ma la struttura di questa matrice. Infatti, si vede che è triangolare rispetto alla diagonale secondaria e il determinante sarà pari a¹

$$\det(TR) = (-1)^n \neq 0$$

Essendo non singolare, concludiamo che anche T è non singolare, quindi *invertibile*.

Verifica di T . Ora che sappiamo che esiste l'inversa di T , dobbiamo verificare che il relativo cambio di base ci dà la forma canonica raggiungibile. Ovvero, deve essere vero che

$$TAT^{-1} = A_R$$

Tuttavia, è più semplice verificare l'espressione equivalente

$$TA = A_R T$$

¹ Se una matrice è triangolare nella diagonale principale, si vede che il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Se, invece, è triangolare rispetto alla diagonale secondaria, il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale secondaria, ognuno cambiato di segno. È come se si facesse il prodotto degli elementi sulla diagonale secondaria, ma venisse moltiplicato per $(-1)^n$. In questo caso, sulla diagonale secondaria ci sono solo 1, perciò il determinante è proprio $(-1)^n$.

Riscrivendo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} & & & & \\ & A_R & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} & & & & \\ & A_R & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \gamma'A^3 \\ \vdots \\ \gamma'A^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ora, ragioniamo “al contrario” e vediamo come dev’essere la matrice A_R perché sia vera l’uguaglianza. Per ottenere $\gamma'A$ (primo elemento di TA nel secondo membro), vediamo subito che basta “scegliere” da T il suo secondo elemento. Perciò, la prima riga della A_R sarà composta da tutti zeri, tranne il secondo elemento che sarà pari a 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & ? & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \gamma'A^3 \\ \vdots \\ \gamma'A^n \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\gamma'A$ non può essere ottenuto in un altro modo, ovvero non esiste una combinazione lineare degli elementi di T (quindi $\gamma', \gamma'A, \dots, \gamma'A^{n-1}$) tale da dare $\gamma'A$, se non $\gamma'A$ stesso. Questo è perché gli elementi di T sono tutti *linearmente indipendenti* (perché se non è singolare, il rango è pieno).

Allo stesso modo, per avere $\gamma'A^2$, possiamo scegliere solo il terzo elemento di T , perché questo è proprio $\gamma'A^2$. Continuando in questo modo fino alla penultima riga, otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & ? & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \vdots \\ \gamma'A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'A \\ \gamma'A^2 \\ \gamma'A^3 \\ \vdots \\ \gamma'A^n \end{pmatrix}$$

Arrivati all’ultima riga, vediamo che non c’è un termine in T che ci permetta di ottenere direttamente $\gamma'A^n$. Tuttavia, per il teorema di Cayley-Hamilton, abbiamo che

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0 = 0$$

Da cui

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_2A^2 - a_1A - a_0$$

Basta moltiplicare tutto a sinistra per γ' e otteniamo che

$$\gamma'A^n = -a_{n-1}\gamma'A^{n-1} - \cdots - a_2\gamma'A^2 - a_1\gamma'A - a_0\gamma'$$

Ovvero, il termine $\gamma' A^n$ può essere, effettivamente, ottenuto da una combinazione lineare degli altri, e possiamo allora completare la relazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' A \\ \gamma' A^2 \\ \vdots \\ \gamma' A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' A \\ \gamma' A^2 \\ \gamma' A^3 \\ \vdots \\ \gamma' A^n \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta corrisponde esattamente ad A_R , per cui siamo sicuri che la matrice T trovata sia proprio quella giusta.

Modificare un sistema raggiungibile qualsiasi

In definitiva, se abbiamo un sistema completamente raggiungibile, ma non in forma canonica raggiungibile, possiamo comunque modificarne la dinamica. Per prima cosa, dobbiamo effettuare il cambio di coordinate T , con

$$T = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' A \\ \gamma' A^2 \\ \vdots \\ \gamma' A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \gamma' \text{ ultima riga di } R^{-1}$$

In questo modo, otteniamo un sistema in forma canonica raggiungibile:

$$A_R = TAT^{-1}, \quad B_R = TB, \quad z = Tx$$

Ora, non ci resta che trovare la matrice F_R seguendo il procedimento illustrato nel capitolo “*Modificare un sistema in forma canonica raggiungibile*”. Così facendo, otteniamo che la nuova matrice dinamica del sistema è

$$\bar{A} = A_R + B_R F_R$$

Calcolata la F_R , dobbiamo tornare indietro fino al sistema originario. Applichiamo il cambio di base al contrario:

$$\begin{aligned} T^{-1} \bar{A} T &= T^{-1} (A_R + B_R F_R) T = \\ &= T^{-1} A_R T + T^{-1} B_R F_R T = \\ &= T^{-1} (TAT^{-1}) T + T^{-1} (TB) F_R T = \\ &= A + BF_R T \end{aligned}$$

Da cui si vede che la F cercata in partenza è

$$F = F_R T$$

Nella prossima lezione vedremo come trovare direttamente la matrice F senza fare tutti i passaggi.

Teoria dei Sistemi

Lezione 38 (7 dicembre 2021)**Formula di Ackermann**

Riprendendo direttamente dalla scorsa lezione, vediamo come calcolare direttamente la matrice F senza calcolare F_R ed effettuare il prodotto $F = F_R T$. Abbiamo visto che la F_R assume la forma:

$$F_R = (a_0 - \beta_0 \quad a_1 - \beta_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} - \beta_{n-1})$$

Dove gli a_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico del sistema di partenza e β_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico che vogliamo che il sistema finale abbia. La matrice T , invece, è fatta in questo modo:

$$T = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' A \\ \gamma' A^2 \\ \vdots \\ \gamma' A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \gamma' \text{ ultima riga di } R^{-1}$$

Vediamo che forma assume la matrice F che ci interessa, partendo da F_R :

$$\begin{aligned} F = F_R T &= (a_0 - \beta_0 \quad a_1 - \beta_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} - \beta_{n-1}) \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' A \\ \gamma' A^2 \\ \vdots \\ \gamma' A^{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= (a_0 - \beta_0)\gamma' + (a_1 - \beta_1)\gamma' A + \cdots + (a_{n-1} - \beta_{n-1})\gamma' A^{n-1} = \\ &= (a_0\gamma' + a_1\gamma' A + \cdots + a_{n-1}\gamma' A^{n-1}) - (\beta_0\gamma' + \beta_1\gamma' A + \cdots + \beta_{n-1}\gamma' A^{n-1}) = \\ &= \gamma'(a_0 + a_1A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}) - \gamma'(\beta_0 + \beta_1A + \cdots + \beta_{n-1}A^{n-1}) \end{aligned}$$

Riconosciamo la struttura: il primo termine sembra proprio il polinomio caratteristico di A calcolato in A ($p_A(A)$). Non è completo però: manca il termine relativo a λ^n , quindi $\gamma' A^n$. Possiamo aggiungerlo e toglierlo dall'espressione. In particolare, il termine che togliamo lo andiamo a includere dentro l'altra parentesi che contiene i termini β_i :

$$\begin{aligned} F &= \gamma'(a_0 + a_1A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}) - \gamma'(\beta_0 + \beta_1A + \cdots + \beta_{n-1}A^{n-1}) + \color{blue}{\gamma' A^n} - \color{purple}{\gamma' A^n} = \\ &= \gamma'(a_0 + a_1A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + \color{blue}{A^n}) - \gamma'(\beta_0 + \beta_1A + \cdots + \beta_{n-1}A^{n-1} + \color{purple}{A^n}) = \\ &= \gamma' p_A(A) - \gamma' p^*(A) = \\ &\stackrel{\text{CH}}{=} -\gamma' p^*(A) \end{aligned}$$

dove p^* è il polinomio caratteristico del sistema desiderato, ovvero il polinomio caratteristico di $A + BF$. Nella relazione segnata con CH si è usato il teorema di Cayley-Hamilton, ovvero $p_A(A) = 0$.

L'espressione

$$F = -\gamma' p^*(A)$$

viene chiamata *formula di Ackermann*. Ricordiamo che questa si basa sul fatto che la coppia di matrici (A, B) sia *raggiungibile*, visto che γ' deriva dall'inversa della matrice di raggiungibilità R , che non potrebbe essere invertibile se non fosse a rango pieno.

Se il sistema originario ha parti non raggiungibili, allora ci riferiamo solo alla parte raggiungibile del sistema, ovvero si effettua il cambio di base T che individua le matrici

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = (\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2)$$

Tali da far avere al sistema chiuso la matrice dinamica

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{F}_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{F}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

La parte di sistema che concerne gli autovalori si trova esclusivamente in \tilde{A}_{11} e \tilde{A}_{22} , perché sono sulla diagonale; \tilde{A}_{22} , che si riferisce alla parte non raggiungibile del sistema, non può essere modificata, perciò possiamo agire solamente su \tilde{A}_{11} . Inoltre, è solo la prima parte di \tilde{F} , cioè \tilde{F}_1 , ad avere un ruolo nella modifica di \tilde{A}_{11} . Se, come in questo caso, \tilde{A}_{11} è la matrice dinamica della parte raggiungibile del sistema, allora anche la formula di Ackermann si riferirà solamente a quella parte, dando la parte \tilde{F}_1 come risultato:

$$\tilde{F}_1 = -\gamma' p^*(\tilde{A}_{11})$$

Per avere una \tilde{F} completa, basta scegliere la \tilde{F}_2 e mettere le due parti insieme. La \tilde{F}_2 può essere scelta in modo *completamente* arbitrario, perciò la scelta più semplice potrebbe essere una \tilde{F}_2 formata da tutti zeri. Infine, per ottenere la F del sistema originale, basta effettuare al contrario il cambio di coordinate:

$$F = \tilde{F}T$$

Esempio pratico

Dobbiamo rendere stabile tramite connessione a retroazione il sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}u$$

Autovalori. Il polinomio caratteristico è dato da

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -(3+\lambda)(1-\lambda)^2 - 8 - 8 + 4(3+\lambda) + 4(1-\lambda) + 4(1-\lambda) = \\ &= -(3+\lambda)(1-\lambda)^2 + 4 - 4\lambda = \\ &= -(3+\lambda)(1-\lambda)^2 + 4(1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)[-(3+\lambda)(1-\lambda) + 4] = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \\ &= (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{aligned}$$

Perciò gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità uno, e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica uguale a due. Perciò, il sistema per ora è instabile, visto che $Re(\lambda_1) > 0$.

Raggiungibilità. Costruiamo la matrice R :

$$R = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si vede che il rango della matrice non è pieno, perciò c'è una parte del sistema non raggiungibile; se questa, che corrisponde alla \tilde{A}_{22} della forma canonica raggiungibile, contiene l'autovalore $\lambda_1 = +1$, allora non possiamo fare nulla per modificare la stabilità del sistema.

Per verificarlo, dobbiamo costruire la matrice del cambio di base T^{-1} dalle colonne linearmente indipendenti di R a cui si aggiunge un completamento arbitrario; in questo caso si è scelto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice \tilde{A} del sistema:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \boxed{\tilde{A}_{22}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si vede che \tilde{A}_{22} ha come singolo autovalore -1 , perciò l'autovalore a parte reale positiva, 1 , che è responsabile dell'instabilità del sistema, si troverà in \tilde{A}_{11} . Calcoliamo la matrice \tilde{B} :

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= TB = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Modifica della parte raggiungibile. Ora che conosciamo il sottosistema raggiungibile, ovvero la parte raggiungibile del sistema iniziale, cerchiamo di modificarla come abbiamo visto. Per prima cosa, costruiamo la nuova matrice R , che chiameremo \tilde{R} , e prendiamo γ' :

$$\tilde{R} = (\tilde{B}_1 \quad \tilde{A}_{11} \tilde{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \gamma' = (0 \quad 1)$$

Visto che la matrice \tilde{A}_{11} ha dimensione 2, il sottosistema raggiungibile avrà 2 autovalori, che in retroazione possiamo modificare a piacimento. Supponiamo che vogliamo un sistema con autovalori $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -3$ (ovviamente, nel sistema totale, c'è anche $\lambda_1 = -1$ che non possiamo modificare); allora il polinomio caratteristico del sistema desiderato è

$$p^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

5 e 6 sono proprio β_1 e β_0 . Per applicare la formula di Ackermann, ci serve $p^*(\tilde{A}_{11})$, che calcoliamo:

$$\begin{aligned} p^*(\tilde{A}_{11}) &= (\tilde{A}_{11})^2 + 5\tilde{A}_{11} + 6I = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per cui, \tilde{F}_1 sarà

$$\tilde{F}_1 = -\gamma' p^*(\tilde{A}_{11}) = -(0 \ 1) \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = (-5 \ -7)$$

Lo stato del sistema di partenza ha dimensione 3, perciò per costruire la \tilde{F} completa ci serve \tilde{F}_2 scelta arbitrariamente di modo tale che $\tilde{F} = (\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2)$ abbia tre colonne. Se \tilde{F}_1 ne ha due, allora la \tilde{F}_2 sarà una matrice 1×1 , ovvero uno scalare, che possiamo scegliere uguale a zero. Allora abbiamo

$$\tilde{F} = (-5 \ -7 \ 0)$$

Ritorno al sistema originario. Ora che abbiamo trovato \tilde{F} , dobbiamo calcolare la F del sistema iniziale, facendo il cambio di coordinate inverso. Perciò, avremo che

$$F = \tilde{F}T = (-5 \ -7 \ 0) \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \ -5 \ 0)$$

Gli autovalori di $A + BF$ saranno allora:

$$\sigma(A + BF) = \{-1, -2, -3\}$$

Il nuovo sistema è stabile asintoticamente perché tutti gli autovalori sono a parte reale negativa. In un certo esercizio può accadere che non sia possibile trovare una F che faccia assumere al sistema autovalori tutti a parte reale negativa.

Teoria dei Sistemi

Lezione 39 (9 dicembre 2021)**Stimare lo stato di un sistema**

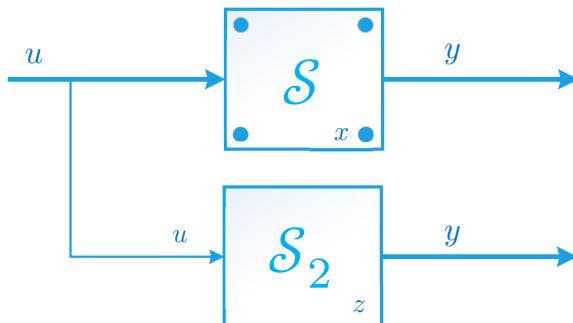
Non sempre è possibile prendere informazioni sullo stato di un sistema direttamente dal sistema stesso; in altre parole, non sempre possiamo accedere alla ‘ x ’ del sistema per effettuare una retroazione e modificare la sua dinamica. Vediamo allora come possiamo fare per cercare di risalire allo stato (alla ‘ x ’) senza “guardare” all’interno del sistema.

Del sistema conosciamo la descrizione; sappiamo che è descritto da

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Come abbiamo detto, questo sistema è “chiuso”, nel senso che non possiamo conoscere x in ogni istante o x_0 . Un’idea è prendere un secondo sistema \mathcal{S}_2 , che ha la stessa rappresentazione del sistema di partenza:

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz \end{cases}$$



La domanda è: potremmo dire, in questo caso, che lo stato tra i due sistemi coincida—ovvero che $z(t) = x(t)$ per ogni $t \geq 0$? Date le due rappresentazioni in forma esplicita

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Le due $\Phi(t)$ sono uguali perché sono uguali le A e per lo stesso motivo sono uguali le H ; perciò, si avrà che

$$z(t) - x(t) = \Phi(t)(z_0 - x_0)$$

Si vede facilmente che basta che risulti $z_0 = x_0$ perché la quantità sia nulla; il problema è che, visto che \mathcal{S} è chiuso, non possiamo vedere lo stato e non sappiamo quanto vale x_0 , il che è necessario per creare un altro sistema che si comporti in modo identico al primo. Perciò, dobbiamo escludere la possibilità di trovare un altro sistema aperto che si comporti come il sistema chiuso di partenza¹.

¹ E anche se riuscissimo a trovarlo, non potremmo mai essere sicuri che sia *davvero* identico, perché non possiamo verificarlo.

Tuttavia, se indichiamo con $e(t)$ l'errore che c'è nella differenza tra z e x , allora abbiamo che

$$z(t) - x(t) = e(t) = \Phi(t)e_0$$

Questo definisce un intero nuovo sistema, trattando la $e(t)$ come stato:

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{x} = Az + Bu - Ax - Bu = A(z - x) = Ae$$

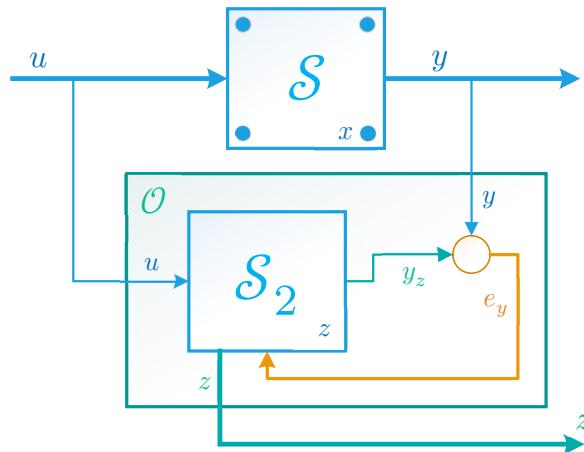
D'altronde, se l'errore è prossimo allo zero, abbiamo che la differenza tra i due sistemi è minima; ciò significa che, se il sistema che ha $e(t)$ come stato è *stabile asintoticamente*, cioè $e(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, allora possiamo dire che per un tempo t molto elevato, l'errore è molto piccolo, ergo i valori dei sistemi x e z sono praticamente uguali:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t) - x(t)\| = 0$$

In questo caso, allora, potrebbe avere senso costruire un sistema aperto in z sulla base del sistema chiuso di partenza in x .

Il problema persiste se il sistema iniziale non è stabile; in quel caso, non possiamo utilizzare questo approccio. C'è un secondo problema: ovviamente, per applicazioni pratiche non possiamo aspettare un tempo infinito per avere il valore dei sistemi uguali; quindi, dovremmo aspettare un tempo arbitrariamente grande. Ma quanto grande? Questo dipende molto dalla rapidità con cui vanno a zero i modi naturali, ovvero, in ultima analisi, dipende dal valore assoluto degli autovalori (almeno per i modi naturali aperiodici). Approfondiremo questo aspetto poco più avanti.

Un modo per risolvere questo problema è includere, nello stato del secondo sistema, l'errore stesso in modo proporzionale; così facendo, potremmo riuscire a "far comportare" il sistema \mathcal{S}_2 in modo molto simile al sistema chiuso \mathcal{S} , basandosi sull'errore tra i due sistemi.



Se y_z è l'uscita del secondo sistema \mathcal{S}_2 , e indichiamo con

$$e_y = y - y_z$$

l'errore delle uscite, allora possiamo introdurre nello stato in z il termine Ke_y :

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + Ke_y \\ y_z = Cz \end{cases}$$

Riscrivendo:

$$\dot{z} = Az + Bu + K(y - y_z) =$$

$$= Az + Bu + K(Cx - Cz) = \\ = (A - KC)z + Bu + KCx$$

Questo è il nuovo sistema ottenuto, in cui in ingresso entrano u , in comune tra i sistemi, e y , l'uscita del primo sistema. Verifichiamo se un sistema siffatto riesce ad avere lo stato che, almeno asintoticamente, riesca ad avere in uscita valori simili al sistema di partenza (a prescindere dalla stabilità di quest'ultimo).

Calcoliamo allora l'errore tra il sistema chiuso \mathcal{S} e il nuovo sistema ottenuto:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{z} - \dot{x} = \\ &= (A - KC)z + Bu + KCx - Ax - Bu = \\ &= (A - KC)z - (A - KC)x = \\ &= (A - KC)(z - x) = \\ &= (A - KC)e\end{aligned}$$

Questo sistema, che rappresenta l'errore, dovrà tendere a zero e quindi essere stabile asintoticamente; dovremo allora, tramite la matrice K , modificare la dinamica di questo sistema per far sì che sia stabile asintoticamente. Ovvero, gli autovalori di $A - KC$ dovranno avere tutta parte reale negativa.

Condizioni di osservabilità

Verifichiamo innanzitutto se, e quando, quanto detto è possibile. Risulta evidente, innanzitutto, che se z non fosse tutto osservabile, allora in uscita potrebbero non esserci delle informazioni; questo ricade su e_y , che rientra nello stato, perciò non saremmo in grado di modificare come si vorrebbe lo stato del sistema. Un problema è, quindi, l'osservabilità.

Per continuare, allora, effettuiamo il cambio di base per portare il sistema nella forma canonica inosservabile. La matrice T^{-1} da costruire è formata per prima cosa dai vettori di base di \mathcal{I} (nucleo della matrice di osservabilità O), e poi da un completamento arbitrario:

$$T^{-1} = (\text{base di } \mathcal{I} \mid \text{completamento})$$

Le matrici, in questa nuova base, risultano essere:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{C}_2)$$

La matrice dinamica che riguarda la parte osservabile è \tilde{A}_{22} (\tilde{A}_{11} si riferisce alla dinamica inosservabile, visto che la forma canonica è quella basata sull'*inosservabilità*). Se scomponiamo K in base alle stesse dimensioni di \tilde{A} , abbiamo che

$$\begin{aligned}\tilde{A} - K\tilde{C} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} (0 \quad \tilde{C}_2) = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & K_1\tilde{C}_2 \\ 0 & K_2\tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} - K_1\tilde{C}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} - K_2\tilde{C}_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da questo segue che gli autovalori di $\tilde{A} - K\tilde{C}$ sono l'unione degli autovalori di \tilde{A}_{11} e $\tilde{A}_{22} - K_2\tilde{C}_2$. Il risultato è che possiamo modificare solamente gli autovalori che si trovano in quest'ultima parte; perciò, analogamente al

caso della raggiungibilità e i sistemi in retroazione, la dinamica di \tilde{A}_{11} deve essere accettabile, altrimenti non possiamo fare nulla.

Per trovare la K si usa lo stesso metodo usato nelle scorse lezioni per calcolare la matrice F ; ovvero, si considera dapprima che \tilde{A}_{22} abbia una struttura in forma canonica osservabile, così che risulti

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{22} - K_2 \tilde{C}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 - k_1 \\ 1 & 0 & -a_1 - k_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-1} - k_{n-1} \\ & & & 1 & -a_{n-1} - k_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Questa è la forma canonica osservabile di un sistema con polinomio caratteristico di coefficienti $a_0 + k_1, \dots, a_{n-1} + k_n$; se vogliamo un polinomio caratteristico p^* con coefficienti $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$, basta che si trovino i k_i tali che:

$$\beta_i = a_i + k_{i+1} \iff k_i = \beta_{i-1} - a_{i-1}$$

Trovare K da un sistema generico

Una volta gestito il caso in cui \tilde{A}_{22} ha forma canonica osservabile, dobbiamo pensare al caso più generale in cui \tilde{A}_{22} ha forma generica; come abbiamo visto per la forma canonica raggiungibile, per quella osservabile il procedimento è del tutto analogo: si trova un cambio di coordinate tale da far portare un sistema nella forma canonica osservabile, lì si trovano i valori di K , e poi si torna indietro nel sistema di partenza.

In realtà, tenendo presente quello che abbiamo fatto con F quando abbiamo messo il sistema in retroazione dallo stato, possiamo direttamente trovare il suo analogo in questa rappresentazione. Abbiamo visto che, in retroazione dallo stato, si ha²

$$\sigma(A + BF) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^-$$

per una coppia di matrici A, B raggiungibile; invece, in retroazione dall'uscita si ha che

$$\sigma(A - KC) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^-$$

per una coppia di matrici A, C osservabile. Notiamo che possiamo passare indifferentemente da un caso all'altro: se consideriamo

$$\bar{A} = A^T, \quad \bar{B} = C^T, \quad \bar{F} = -K^T$$

² Con \mathbb{C}^- si intende l'insieme di tutti i numeri complessi con parte reale negativa. Notiamo che $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{C}^-$.

Allora, visto che gli autovalori di una matrice e quelli della sua trasposta sono, ovviamente, uguali, si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned}\sigma(A - KC) &= \sigma(A - KC)^T = \\ &= \sigma(A^T - (KC)^T) = \\ &= \sigma(A^T - C^T K^T) = \\ &= \sigma(\bar{A} + \bar{B}\bar{F})\end{aligned}$$

Che è identica alla forma raggiungibile. A questo punto, dobbiamo solo vedere che \bar{A}, \bar{B} sia una coppia raggiungibile. Costruiamo allora \bar{R} :

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}) = \\ &= (C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^T C^T)\end{aligned}$$

Se questa ha rango pieno, allora \bar{A}, \bar{B} è una coppia raggiungibile. Essendo $\text{rango}(\bar{R}) = \text{rango}(\bar{R}^T)$, trasponendola otteniamo (si devono trasporre anche tutti gli elementi che contiene):

$$\bar{R}^T = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = O$$

Questo significa che il rango di \bar{R} è uguale al rango di O , ovvero per essere massimo il primo, la coppia A, C dev'essere osservabile, e lo è, visto che siamo partiti proprio da questa ipotesi.

Ora, se $p^*(\lambda)$ è il polinomio caratteristico desiderato, per la formula di Ackermann abbiamo che

$$\bar{F} = -\gamma' p^*(\bar{A})$$

Dove γ' è l'ultima riga di \bar{R}^{-1} , ma essendo $\bar{R}^{-1} = (O^T)^{-1} = (O^{-1})^T$, allora equivale all'ultima colonna di O^{-1} , che chiameremo ρ , *trasposta* (perché γ' è una riga mentre ρ è una colonna). Allora,abbiamo che

$$\bar{F} = -\rho^T p^*(\bar{A})$$

Ma sappiamo che $\bar{F} = -K^T$, perciò:

$$-K^T = -\rho^T p^*(\bar{A}) \implies K = [p^*(\bar{A})]^T \rho$$

Ora, visto che

$$\begin{aligned}p^*(\bar{A}) &= (\bar{A})^n + \beta_{n-1}(\bar{A})^{n-1} + \dots + \beta_1 \bar{A} + \beta_0 I = \\ &= (A^T)^n + \beta_{n-1}(A^T)^{n-1} + \dots + \beta_1 A^T + \beta_0 I = \\ &= (A^n)^T + \beta_{n-1}(A^{n-1})^T + \dots + \beta_1 A^T + \beta_0 I \\ \implies [p^*(\bar{A})]^T &= A^n + \beta_{n-1} A^{n-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 I = p^*(A)\end{aligned}$$

Allora, in definitiva:

$$K = p^*(A)\rho$$

Osservatore asintotico dello stato

Ricapitolando, se ci interessa di conoscere lo stato di un sistema chiuso che possiamo solo osservare, allora dobbiamo creare un secondo sistema (o immaginare di farlo) a partire dalle matrici del sistema di partenza, e che garantisca che lo stato, asintoticamente, sia uguale allo stato del primo sistema. Un sistema tale si chiama *osservatore asintotico dello stato*.

Nella scelta degli autovalori dell'osservatore, dobbiamo tener conto che, se consideriamo un modo naturale

$$e^{\lambda t}$$

Allora sarà λ a determinare quanto “velocemente” andrà a zero al crescere di t . In particolare, se mettiamo in correlazione un autovalore col suo corrispettivo polo nella funzione di trasferimento:

$$(s - \lambda) = -\lambda \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right) = -\lambda(1 + s\tau)$$

Abbiamo che

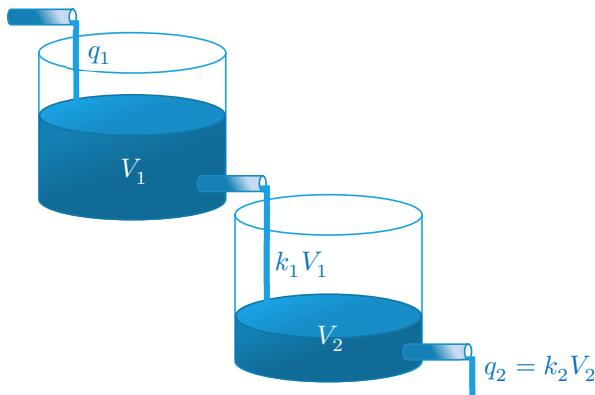
$$\begin{aligned} \lambda &\leftrightarrow -\frac{1}{\tau} \\ e^{\lambda t} &\leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

La quantità $|\tau|$ viene chiamata *costante di tempo* e risultano più o meno costanti i rapporti con t ; per esempio, per $t \geq 3\tau$, a prescindere da quale sia il valore di τ , l'esponenziale sarà quasi zero. In generale, è utile per dare una misura alla “rapidità” con cui un esponenziale va a zero.

Esempio pratico

Consideriamo il seguente esempio:

Si consideri un contenitore S_1 , che contiene un volume di liquido in ogni istante pari a $V_1(t)$. C'è un versamento di liquido tra questo contenitore ed un altro contenitore S_2 , che in ogni istante ha volume d'acqua $V_2(t)$. In S_1 entra ogni istante, esternamente, un volume d'acqua $q_1(t)$, mentre dal secondo, S_2 , esce un volume d'acqua $q_2(t)$. Si vuole conoscere quanto vale $V_1(t)$ sapendo quanto vale $V_2(t)$.



Possiamo stimare asintoticamente il valore di $V_1(t)$ costruendo un osservatore asintotico dello stato. La quantità di liquido versata dal primo al secondo contenitore è proporzionale al volume del liquido del contenitore stesso; questo vale per entrambi i contenitori. Allora si ha:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = q_1 - k_1 V_1 \\ \dot{V}_2 = k_1 V_1 - k_2 V_2 \end{cases}$$

L'uscita del secondo sistema è $q_2(t) = k_2 V_2$, mentre l'ingresso del sistema è $q_1(t)$. Il sistema, allora, è:

$$\begin{cases} \dot{V} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (0 \ 1) V \end{cases}$$

A noi serve il valore di V_1 ; per questo, costruiamo un osservatore asintotico con la forma che abbiamo visto:

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{z} = (A - KC)z + Ky + Bu \\ y = Cz \end{cases}$$

La matrice d'osservabilità del sistema è

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

Possiamo dire qualcosa del sistema originale solo quando questa matrice ha rango pieno (così la dimensione del nucleo è zero e non c'è nulla di inosservabile), ovvero quando

$$\det(O) = -k_1 \neq 0$$

Notiamo che questa è una condizione banalmente vera, perché se k_1 fosse zero, allora sarebbe zero $k_1 V_1$ e non ci sarebbe passaggio d'acqua dal primo contenitore al secondo. Calcoliamo O^{-1} :

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k_2}{k_1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se vogliamo un esponenziale che vada a zero, per esempio, dieci volte più velocemente di k_1 e k_2 , allora

$$p^*(\lambda) = (\lambda - 10k_1)(\lambda - 10k_2) = \lambda^2 + (-10k_1 - 10k_2)\lambda + 100k_1k_2$$

E quindi:

$$\begin{aligned} K &= [A^2 + \beta_1 A + \beta_0 I] \rho = \\ &= [A^2 + (-10k_1 - 10k_2)A + 100k_1k_2 I] \rho = \\ &= \left[\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ -k_1^2 - k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} + (-10k_1 - 10k_2) \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix} + 100k_1k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \rho = \\ &= \left[\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ -k_1^2 - k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10k_1^2 + 10k_1 k_2 & 0 \\ -10k_1^2 - 10k_1 k_2 & 10k_1 k_2 + 10k_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100k_1 k_2 & 0 \\ 0 & 100k_1 k_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11k_1^2 + 110k_1 k_2 & 0 \\ -11k_1^2 - 11k_1 k_2 & 110k_1 k_2 + 11k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11k_1 + 110k_2 \\ -11k_1 - 11k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teoria dei Sistemi

Lezione 40 (10 dicembre 2021)**Esempio pratico**

Costruire un osservatore asintotico del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 5 & -7 & -4 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y = (2 & -2 & -2)x \end{cases}$$

Cambio di coordinate. Sappiamo che possiamo costruire un osservatore asintotico con gli autovalori scelti se il sistema di partenza risulta osservabile (altrimenti dobbiamo verificare se questo è comunque possibile o meno). La matrice dell'osservabilità è

$$O = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 8 & 24 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{matrix}$$

Ci sono due colonne uguali, perciò il rango di questa matrice è 2, e il suo nucleo avrà dimensione 1 e ci sarà una parte inosservabile. Un vettore di base del nucleo è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ perché aggiungiamo e sottraiamo le due colonne uguali, la seconda e la terza.

$$\mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

A questo punto, dobbiamo costruire la matrice T^{-1} con un completamento arbitrario ed effettuare il cambio di base:

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 5 & -7 & -4 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -7 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \color{red}{-3} & 5 & -4 \\ 0 & \color{red}{-2} & \color{red}{-4} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\tilde{A}_{11} è la matrice dinamica della parte inosservabile del sistema, che ha come unico autovalore $\lambda_1 = -3$, perciò il sistema è stabile. Gli altri due autovalori del sistema si vedono ad occhio nella \tilde{A}_{22} (perché è triangolare e sono quelli sulla diagonale principale), entrambi sono $\lambda_2 = -2$, perciò avremo che questo autovalore ha molteplicità 2.

Essendoci una parte inosservabile, non possiamo creare un osservatore *esattamente come vorremmo*, tuttavia possiamo comunque costruirne uno. In realtà, non c'è nemmeno bisogno di costruirne uno diverso dal sistema di partenza, perché tutti gli autovalori sono già a parte reale negativa.

Costruzione dell'osservatore. In questo esercizio, però, ci poniamo come obiettivo quello di avere che gli altri autovalori all'infuori di -3 (ovvero, -2) abbiano modi naturali che vanno a zero esattamente come -3 , o più velocemente. In pratica, vogliamo avere autovalori del sistema tali che:

$$\lambda \in (-\infty, -3]$$

Per procedere, dobbiamo sapere quanto vale \tilde{C}_2 :

$$\tilde{C} = CT^{-1} = (2 \quad -2 \quad -2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}$$

In questo modo, ora sappiamo che

$$\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = (2 \quad -2)$$

A questo punto, dobbiamo trovare

$$\tilde{K}_2 \text{ t.c. } \sigma(\tilde{A}_{22} - \tilde{K}_2 \tilde{C}_2) \in \mathcal{D}$$

Visto che $\tilde{K}_2 = p^*(\tilde{A}_{22})\rho$, troviamo prima ρ , che è l'ultima colonna di \tilde{O}_2^{-1} , dove \tilde{O}_2 è la matrice d'osservabilità del sottosistema osservabile che ha come matrici \tilde{A}_{22} e \tilde{C}_2 :

$$\tilde{O}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_2 \tilde{A}_{22} \end{matrix} \implies \tilde{O}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ -1/4 & -1/8 \end{pmatrix}$$

Scegliamo come autovalori, per esempio, -3 e -4 , e scriviamo il nostro polinomio caratteristico desiderato:

$$p^*(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

e abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2 &= p^*(\tilde{A}_{22})\rho = \\ &= [\tilde{A}_{22}^2 + 7\tilde{A}_{22} + 12I]\rho = \\ &= [(4 \quad 16) + 7(-2 \quad -4) + 12(1 \quad 0)] \begin{pmatrix} -1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 14 + 12 & 16 - 28 \\ 0 & 4 - 14 + 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice dinamica complessiva, nelle nuove coordinate, sarà

$$\begin{aligned} \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{K}_2 \end{pmatrix} (0 \quad \tilde{C}_2) = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} (0 \quad 2 \quad -2) = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & -9/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ritorno nelle coordinate iniziali. Perciò, nel sistema iniziale la nuova matrice dinamica sarà:

$$\begin{aligned} A - KC &= T^{-1}(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C})T = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & -9/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -9/2 & -3/2 & -3/2 \\ 5 & -7 & -4 \\ -9/2 & 9/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativamente, possiamo anche considerare che

$$\tilde{K} = TK \iff K = T^{-1}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

Da cui segue che:

$$\begin{aligned} A - KC &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 5 & -7 & -4 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix} (2 & -2 & -2) = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 5 & -7 & -4 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/2 & -5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -9/2 & -3/2 & -3/2 \\ 5 & -7 & -4 \\ -9/2 & 9/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Principio di separazione

Abbiamo visto come modificare la dinamica di un sistema a partire dal suo stato: se sommiamo, all'ingresso esterno v del sistema, una quantità proporzionale al suo stato, Fx , siamo in grado di poter impostare gli autovalori della parte eccitabile del sistema a nostro piacimento. Inoltre, abbiamo visto come poter stimare lo stato di un sistema di cui non si può leggere lo stato, tramite la sua uscita grazie ad un osservatore asintotico (se gli autovalori non osservabili sono a parte reale negativa). Ora, potremmo mettere insieme i due risultati per modificare la dinamica di un sistema di cui non è possibile leggere lo stato: invece dello stato del sistema, utilizziamo la sua stima asintotica dataci dall'osservatore.

Costruzione del sistema totale. Preso un sistema

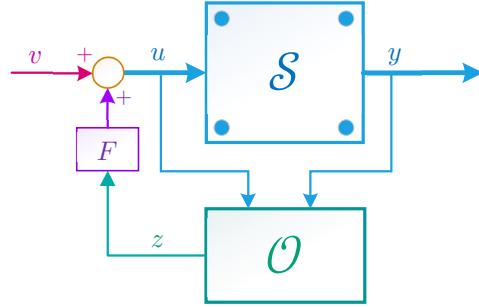
$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Con il suo osservatore asintotico

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{z} = (A - KC)z + Bu + Ky_z \\ y_z = Cz \end{cases}$$

Colleghiamo ora lo stato dell'osservatore al sistema di partenza. L'ingresso totale in \mathcal{S} diventerà $v + Fz$, ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv + BFz \\ \dot{z} = (A - KC)z + Bv + BFz + KCx \end{cases}$$



Il sistema complessivo ha come stato l'aggregato degli stati, per cui lo stato complessivo sarà $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ e avremo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v$$

Ci interessano gli autovalori della matrice

$$A_{tot} = \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{pmatrix}$$

In questa forma, non è per nulla immediato vedere quali sono gli autovalori A_{tot} . Perciò, potremmo provare ad effettuare un cambio di coordinate particolare che metta in evidenza la struttura di A e i suoi autovalori. Oltre allo stato z dell'osservatore, noi conosciamo bene l'evoluzione dell'errore $e = z - x$; perciò, possiamo tentare di passare dallo stato attuale a quello che evidenzia e :

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z - x \end{pmatrix}$$

Per farlo, dobbiamo effettuare un cambio di coordinate M tale da avere

$$M \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z - x \end{pmatrix}$$

È facile vedere come M sia uguale a

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}$$

infatti, risulta banalmente che

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ix + 0z \\ -Ix + Iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z - x \end{pmatrix}$$

L'inversa di M è la matrice

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}$$

Ora non ci resta che trovare la nuova matrice dinamica

$$\begin{aligned} MA_{tot}M^{-1} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A & BF \\ KC - A & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In questa forma, visto che è triangolare, risulta evidente che gli autovalori di A_{tot} siano quelli presenti nelle matrici $(A + BF)$ e $(A - KC)$, ovvero:

$$\sigma(A_{tot}) = \sigma(A + BF) \cup \sigma(A - KC)$$

Da qui notiamo che, essendo presenti gli autovalori di $A + BF$, è come se stessimo effettivamente mettendo in input, al sistema iniziale, il suo stato; perciò, possiamo comunque riuscire a modificare la sua dinamica pur avendo solo una stima del suo stato effettivo. Questo risultato si chiama *principio di separazione*, che vale per i sistemi lineari, che in pratica ci dice che i due problemi, quello in cui mettiamo in ingresso a \mathcal{S} il suo stato, e quello in cui osserviamo tramite \mathcal{O} lo stato di \mathcal{S} , possono essere trattati come problemi separati e possono tranquillamente essere connessi insieme.

Nelle nuove coordinate, abbiamo che

$$\bar{B}_{tot} = MB_{tot} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'uscita del sistema complessivo rimane invariata dall'inizio, ed è uguale a $y = Cx$, quindi sarà così anche nel sistema finale e avremo

$$y = Cx = C_{tot} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = (C \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

Nelle nuove coordinate:

$$\bar{C}_{tot} = CM^{-1} = (C \quad 0) \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} = (C \quad 0)$$

Osservatore nel legame ingresso-uscita

Ricapitolando, le matrici del sistema complessivo nelle nuove coordinate sono

$$\bar{A}_{tot} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_{tot} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_{tot} = (C \quad 0)$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo è

$$\begin{aligned} W_{tot}(s) &= C\Phi(s)B = \\ &= C(sI - A)^{-1}B = \\ &= (C \quad 0) \begin{pmatrix} sI - (A + BF) & -BF \\ 0 & sI - (A - KC) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (C \quad 0) \begin{pmatrix} (sI - (A + BF))^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (C(sI - (A + BF))^{-1} \quad *) \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= C(sI - (A + BF))^{-1}B \end{aligned}$$

Questa funzione di trasferimento è esattamente uguale alla funzione di trasferimento che otterremmo se mettessimo in ingresso lo stato del sistema, ovvero è come se non ci fosse l'osservatore. Infatti, in quel caso la matrice dinamica sarebbe $A + BF$ e la funzione di trasferimento sarebbe proprio $C(sI - (A + BF))^{-1}B$. Possiamo allora dire che la funzione di trasferimento, quindi il legame ingresso-uscita, non contiene alcuna informazione sull'osservatore. Per cui, la parte dell'osservatore si trova nella parte non raggiungibile o non osservabile del sistema.

Teoria dei Sistemi

Lezione 41 (13 dicembre 2021)

Introduzione

Questa lezione è rivolta completamente allo svolgimento di esercizi, tre in tutto. I primi due esercizi propongono sistemi rappresentati nello spazio di stato, di cui dovremo effettuare l'analisi modale (ovvero lo studio dei modi naturali) e lo studio dello spazio di stato. Il terzo esercizio, lasciato per la maggior parte al lettore (purtroppo) dal professore, offre un sistema rappresentato secondo la sua funzione di trasferimento.

Primo esercizio

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ 1 \ 2)x \end{cases}$$

Modi naturali. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 & -4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 1 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)[-(3 - \lambda)(3 + \lambda) + 8] = \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 9 + 8) = \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Nel calcolo del determinante si è usato il metodo di Laplace considerando la seconda riga, perché contiene due zeri e il calcolo risulta più immediato. Gli autovalori del sistema allora sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, & \mu_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Essendoci un autovalore con molteplicità 2, dobbiamo calcolare gli autovettori del sistema per verificare se A è diagonalizzabile o meno. Per λ_2 sappiamo già di trovare un autovettore:

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I &= \begin{pmatrix} 3 - \lambda_2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 + 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo ottenere zero sommando la prima e terza colonna, visto che sono uguali e opposte, perciò

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per λ_1 speriamo di trovare due autovettori:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I &= \begin{pmatrix} 3 - \lambda_1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 - \lambda_1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 - 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si vede subito che le colonne sono tutte proporzionali, perciò riusciamo sicuramente a trovare due vettori indipendenti che riescono a farci ottenere zero, per esempio:

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trovati gli autovettori, possiamo diagonalizzare; la matrice del cambio di base U si forma mettendo gli autovettori in fila:

$$\begin{aligned} U &= (u_{11} \quad u_{12} \quad u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ V &= U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice diagonale Λ conterrà sulla diagonale gli autovettori nell'ordine in cui li abbiamo messi in U :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera del sistema è

$$\begin{aligned} x_L(t) &= e^{\lambda_1 t} u_{11} v'_{11} x_0 + e^{\lambda_1 t} u_{12} v'_{12} x_0 + e^{\lambda_2 t} u_2 v'_2 x_0 = \\ &= c_{11} e^t u_{11} + c_{12} e^t u_{12} + c_2 e^{-t} u_2 \end{aligned}$$

Per cui abbiamo tre modi naturali, due dei quali (i primi due) si muovono con la stessa legge temporale, visto che si riferiscono allo stesso autovalore.

Eccitabilità e osservabilità. Verifichiamo la loro eccitabilità, ovvero se $v'_i B = 0$:

$$\begin{aligned} v'_{11} B &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ v'_{12} B &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ v'_2 B &= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \end{aligned}$$

Solo un modo naturale relativo a λ_1 non è eccitabile.

Per verificare la loro osservabilità, vediamo se $Cu_i = 0$:

$$Cu_{11} = (-1 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$Cu_{12} = (-1 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Cu_2 = (-1 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Concludiamo che il primo modo naturale è osservabile ma non eccitabile, il secondo modo naturale è eccitabile ma non osservabile, e il terzo modo naturale, relativo a $\lambda_2 = -1$, è sia osservabile che eccitabile. Ciò significa che nella $H(t)$ ci saranno solo leggi temporali relative al secondo e il terzo modo naturale, mentre in $\Psi(t)$ ci saranno solo quelle relative al primo e al terzo. Di fatto, compaiono sia termini in e^t , sia in e^{-t} , in entrambe le funzioni, perché il primo e il secondo modo naturale hanno la stessa legge.

Suddivisione dello spazio di stato. Studiamo la parte puramente geometrica del problema: il suo spazio di stato. Vediamo quali parti dello stato sono raggiungibili e quali inosservabili. Per comodità, riporto il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ 1 \ 2)x \end{cases}$$

Iniziamo con la raggiungibilità. Costruiamo la matrice

$$R = (B \ AB \ A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha due colonne uguali, perciò il suo rango sarà pari a due; i vettori di base dell'immagine sono formati da colonne indipendenti di R :

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Per studiare l'inosservabilità, costruiamo la matrice O :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le colonne prima e terza sono dipendenti, perciò il rango di questa matrice è 2; i vettori generatori di \mathcal{I} saranno i vettori di base del nucleo di O , quindi per scriverli dobbiamo trovare combinazioni delle colonne che diano zero. Se il rango di O è 2, il nucleo avrà dimensione 1, perciò basta trovare un vettore di base. Uno di questi è banale, se consideriamo la prima e terza colonna:

$$\mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per effettuare la scomposizione di Kalman, dobbiamo dapprima trovare l'intersezione dei due sottospazi

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$$

Visto che il sottospazio \mathcal{I} ha dimensione 1 e \mathcal{R} ha dimensione 2, verifichiamo se \mathcal{I} è contenuto in \mathcal{R} ; in quel caso, l'intersezione tra i due è proprio \mathcal{I} . Tutti i vettori di \mathcal{R} e di \mathcal{I} hanno la seconda componente nulla, perciò è evidente che, mettendoli insieme, il rango non aumenti:

$$\text{rango} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Perciò, \mathcal{I} è contenuto in \mathcal{R} e

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per comporre

$$\chi_2 : \chi_1 \oplus \chi_2 = \mathcal{R}$$

ci basta trovare un vettore di base di \mathcal{R} che non stia in χ_1 per arrivare a formare tutto \mathcal{R} ; perciò, possiamo scegliere il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\chi_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

χ_3 , invece, è definito come

$$\chi_3 : \chi_1 \oplus \chi_3 = \mathcal{I}$$

Visto che $\chi_1 = \mathcal{I}$, allora χ_3 è vuoto, ovvero è il sottospazio banale:

$$\chi_3 = \text{span}\{0\}$$

χ_4 è il completamento di χ_1 , χ_2 e χ_3 per arrivare a tutto lo spazio in \mathbb{R}^3 , perciò basta scegliere un qualsiasi vettore indipendente da quelli di \mathcal{R} e \mathcal{I} :

$$\chi_4 : \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}^3$$

$$\chi_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

In questo modo, risulta

$$\begin{aligned} \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{rango} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} &= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Cambio di coordinate. Ora che abbiamo tutti i sottospazi, possiamo costruire il cambio di base che permette di separare lo spazio di stato secondo la scomposizione di Kalman, ovvero secondo i sottospazi χ_i . La T^{-1} è banalmente costruita mettendo in ordine le basi di χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici che ci aspettiamo dal cambio di base hanno la seguente struttura:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{c}_1 \quad 0 \quad \tilde{c}_2)$$

Ricordiamo che tutti questi sono *blocchi*, e non elementi. Quindi, la prima riga e la prima colonna in \tilde{A} potrebbero, per esempio, essere formate da blocchi 2×2 (questo accade quando χ_1 ha dimensione 2). In generale, la riga e colonna i di \tilde{A} hanno dimensione pari a quella del sottospazio χ_i . Stessa cosa vale per l' i -esimo elemento di \tilde{B} e di \tilde{C} .

Ovvero, visto che χ_1 nel nostro caso ha dimensione 1, la prima riga e prima colonna di \tilde{A} avrà blocchi di dimensione 1, così come avrà dimensione 1 il blocco \tilde{B}_1 e il blocco di zeri del primo elemento della \tilde{C} . Per χ_2 e χ_4 , avendo anch'essi entrambi dimensione 1, vale la stessa identica cosa. Il discorso è diverso, invece, per χ_3 , che è vuoto e, dunque, ha dimensione 0: i blocchi relativi a χ_3 , allora, quindi la terza riga e colonna di \tilde{A} , e gli elementi in terza posizione sia di \tilde{B} che di \tilde{C} , non ci saranno. La forma delle matrici, in definitiva, sarà

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{14} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2)$$

Dove i vari \tilde{a}_{ij} , \tilde{b}_j , \tilde{c}_i , e 0 sono elementi, non blocchi.

Riporto ancora una volta il sistema per comodità:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \quad 1 \quad 2)x \end{cases}$$

Effettuando i calcoli:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = (-1 \quad 1 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad -1 \quad 1) \end{aligned}$$

Dalla struttura di \tilde{A} , essendo triangolare, si vedono tutti gli autovalori sulla diagonale e possiamo capire quale autovalore appartiene a quale sottospazio. Il primo elemento di \tilde{A} è il primo autovalore, 1, e fa parte del blocco \tilde{A}_{11} . Questa è la matrice del sottospazio raggiungibile e inosservabile, e prima avevamo trovato un modo naturale relativo a $\lambda_1 = 1$ eccitabile ma non osservabile. Stessa cosa per l'1 nel blocco \tilde{A}_{44} , che è la matrice dello spazio

di stato non raggiungibile e non inosservabile (quindi osservabile), a cui corrisponde il modo naturale osservabile e non eccitabile che avevamo trovato. Il -1 si trova, come prevedibile, nella parte dello stato raggiungibile e non inosservabile; in effetti, il suo modo naturale era eccitabile e osservabile.

Se volessimo scrivere la $W(t)$, sarebbe molto semplice; infatti, visto che vi compaiono solo i modi naturali sia eccitabili sia osservabili (ovvero, rappresenta solamente la parte di stato raggiungibile e non inosservabile), la matrice responsabile dei modi naturali in $W(t)$ è solo la \tilde{A}_{22} :

$$\begin{aligned} W(t) &= \tilde{C} e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = \\ &= \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}_{22}t} \tilde{B}_2 = \\ &= -1 \cdot e^{-t} \cdot 1 = \\ &= -e^{-t} \end{aligned}$$

Allo stesso modo, la $W(s)$ sarà:

$$\begin{aligned} W(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = \\ &= \tilde{C}_2(sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \tilde{B}_2 = \\ &= -1 \cdot (s + 1)^{-1} \cdot 1 = \\ &= -\frac{1}{s + 1} \end{aligned}$$

Secondo esercizio

Consideriamo una variante del primo sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & \textcolor{red}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ 1 \ 2)x \end{cases}$$

Nota che è cambiato solamente il secondo elemento della A .

Modi naturali. Dallo studio del polinomio caratteristico, si vede che gli autovalori sono gli stessi del primo esercizio (perché con Laplace il secondo elemento non viene proprio considerato):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \quad \mu_1 = 2 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Per gli autovettori, partiamo dallo studio di quello relativo a λ_2 :

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I &= \begin{pmatrix} 3 - \lambda_2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 + 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 + 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le colonne prima e terza sono uguali e opposte, perciò prendiamo

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda λ_1 , invece:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I &= \begin{pmatrix} 3-1 & 2 & -4 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 2 & 1 & -3-1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riusciamo a trovare un solo autovalore

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perciò la matrice A non è diagonalizzabile e avremo un blocco di Jordan. Visto che la molteplicità algebrica di λ_1 è 2 e la sua molteplicità geometrica $\hat{\mu}$ è uguale a 1, dovremo trovare un vettore nel nucleo di $(A - \lambda_1 I)^2$ (*vedi nota 1*). Ovvero dobbiamo trovare u_{12} tale che:

$$(A - \lambda_1 I)^2 u_{12} = 0$$

Calcoliamo innanzitutto il quadrato della matrice:

$$(A - \lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 1, perciò il nucleo avrà dimensione 2. Un vettore generatore del nucleo sarà u_{11} , perciò l'altro dovrà essere u_{12} . Visto che la seconda colonna è formata da zeri, una scelta ragionevole potrebbe essere

$$u_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che Λ avrà la forma seguente:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ 0 & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la U^{-1} :

$$U = (u_{11} \ u_{12} \ u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Nell'analisi dei modi naturali possiamo concludere sicuramente qualcosa su $\lambda_2 = -1$, mentre la situazione è più complicata per λ_1 ; infatti, essendoci blocchi di Jordan, le leggi temporali vedono, oltre che gli esponenziali, anche dei termini polinomiali, perciò l'eccitabilità o l'osservabilità potrebbero non essere ben definite.

Calcoliamo l'evoluzione libera:

$$\begin{aligned} x_L(t) &= U e^{\Lambda t} U^{-1} x_0 = \\ &= (u_{11} \ u_{12} \ u_2) \begin{pmatrix} e^t & te^t & \\ 0 & e^t & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_2 \end{pmatrix} x_0 = \end{aligned}$$

¹ Per chiarimenti e spiegazioni sui blocchi di Jordan e le catene di autovettori, vedi gli appunti della lezione 17 del 29 ottobre 2021. Trovi il link nella descrizione del post su Patreon relativo a questi appunti.

$$\begin{aligned}
&= (u_{11} \quad u_{12} \quad u_2) \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_2 \end{pmatrix} = \\
&= (u_{11} \quad u_{12} \quad u_2) \begin{pmatrix} c_{11}e^t + c_{12}te^t \\ c_{12}t \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix} = \\
&= (c_{11}e^t + c_{12}te^t)u_{11} + c_{12}tu_{12} + c_2e^{-t}u_2
\end{aligned}$$

Come si vede, in presenza di blocchi di Jordan i modi naturali si “mischiano” e non si riescono a dedurre molte informazioni riguardo l'eccitabilità o l'osservabilità.

Suddisione dello spazio di stato. Riporto il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \quad 1 \quad 2)x \end{cases}$$

Per la raggiungibilità abbiamo:

$$\begin{aligned}
R &= (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rango}(R) = 2 \\
&\implies \mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Per l'osservabilità, invece:

$$\begin{aligned}
O &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{rango}(O) = 2 \\
&\implies \mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Notiamo che abbiamo trovato gli stessi sottospazi del primo esercizio. Con Kalman, che saltiamo, otterremmo la stessa struttura delle matrici del primo esercizio (anche se con elementi diversi).

Terzo esercizio

Come esercizio, considerare la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s^2 + 100}{(s+1)(s+10)(s+100)}$$

- 1) Calcolare la risposta forzata $y_F(t)$ con i seguenti ingressi:
 - $u(t) = \delta_{-1}(t)$
 - $u(t) = t - 2$
 - $u(t) = (t - 2) \cdot \delta(t - 2)$
- 2) Calcolare la risposta a regime permanente $y_{RP}(t)$, se esiste, con i seguenti ingressi:
 - $u(t) = \delta_{-1}(t)$
 - $u(t) = \sin 2t$
- 3) Disegnare il diagramma di Bode di $W(j\omega)$;
- 4) Trovare una realizzazione minima.

Per il punto 1), la risposta forzata $y_F(t)$ esiste sempre e si trova facendo

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$$

Prima calcoliamo la risposta forzata in s :

$$\begin{aligned} Y_F(s) &= \frac{s^2 + 100}{(s+1)(s+10)(s+100)} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \\ &= \frac{s^2 + 100}{(s+1)(s+10)(s+100)} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s+10} + \frac{R_4}{s+100} \end{aligned}$$

Per cui avremo che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = R_1 + R_2 e^{-t} + R_3 e^{-10t} + R_4 e^{-100t}$$

dove i residui valgono

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 100}{(s+1)(s+10)(s+100)} = \frac{1}{10} \\ R_2 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2 + 100}{s(s+10)(s+100)} = -\frac{101}{99 \cdot 9} = \frac{101}{891} \\ R_3 &= \lim_{s \rightarrow -10} \frac{s^2 + 100}{s(s+1)(s+100)} = \frac{2}{81} \\ R_4 &= \lim_{s \rightarrow -100} \frac{s^2 + 100}{s(s+1)(s+10)} = \frac{1}{110} \end{aligned}$$

Gli altri punti della richiesta 1) non sono trattati dal professore.

Per il punto 2), la risposta a regime permanente *esiste* perché i poli della $W(s)$ sono tutti a parte reale negativa. La risposta a regime permanente quando l'ingresso è un gradino è pari a

$$y_{RP}(t) = |W(s)|_{s=0} \cdot \delta_{-1}(t) = \frac{1}{10} \delta_{-1}(t) \quad \text{quando } u(t) = \delta_{-1}(t)$$

Quando, invece, si ha un ingresso sinusoidale, per calcolare la risposta a regime permanente dobbiamo calcolare modulo e fase di $W(j\omega)$ in $\omega = 2$ (visto che l'ingresso è $u(t) = \sin \omega t = \sin 2t$) e, a quel punto, abbiamo che

$$y_{RP}(t) = |W(j\omega)|_{\omega=2} \cdot \sin(2t + \angle W(j\omega)|_{\omega=2}) \quad \text{quando } u(t) = \sin(\omega t)$$