

## Teoria dei Sistemi

# Lezione 13 (19 ottobre 2021)

## Criterio di Lyapunov

Abbiamo visto, nella scorsa lezione, che la stabilità del sistema dipende esclusivamente dal segno della parte reale degli autovalori, e abbiamo visto un modo per determinare il segno della parte reale degli autovalori senza calcolare il polinomio caratteristico. Abbiamo preso in considerazione i sistemi non lineari,  $\dot{x} = f(x, u)$ , approssimabili localmente rispetto ai punti di equilibrio  $x_e$  con dei sistemi lineari, dove la matrice  $A$  è la Jacobiana  $J(x) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}$  calcolata nel punto di equilibrio  $x_e$  con ingresso (solitamente) nullo. Abbiamo visto come, se il sistema lineare approssimante è stabile asintoticamente, allora anche il sistema non lineare sarà stabile asintoticamente, e stessa cosa vale per l'instabilità; questo non vale, però, per la stabilità semplice<sup>1</sup>.

Per gli equilibri dei sistemi non lineari esistono dei criteri sullo studio della stabilità che *non* fanno riferimento a sistemi lineari; uno dei più utilizzati è il criterio di Lyapunov. Consideriamo un punto di equilibrio del sistema non lineare  $x_e$ ; prendiamo una funzione scalare  $V(x)$ , con la caratteristica che è nulla per il punto di interesse e positiva nell'intorno di questo punto:

$$V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(x_e) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in I_{x_e}$$

Una funzione con queste caratteristiche è detta *definita positiva* (nell'intorno di  $x_e$ , che è indicato con  $I_{x_e}$ ); se, invece, una funzione è negativa in tutti i punti dell'intorno e nulla in  $x_e$ , si dice *definita negativa*; infine, se nell'intorno può essere anche uguale a zero, si dice *semidefinita positiva* o *semidefinita negativa* a seconda se i punti nell'intorno sono  $\geq 0$  oppure  $\leq 0$ .

Per il criterio di Lyapunov, se si riesce a trovare una funzione *definita positiva*  $V(x) > 0$  tale da avere la funzione derivata *definita negativa*  $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial t} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} < 0$ , allora il punto di equilibrio è *localmente stabile asintoticamente*. Se, invece, data  $V(x)$  *definita positiva*, la sua derivata è *semidefinita negativa*, allora è *semplicemente stabile* localmente.

La logica deriva da una caratteristica fisica: pensando al pendolo, in un punto avrà una certa energia  $V(x)$  (positiva, essendo energia) che, con il passare del tempo e per via dell'attrito, diminuisce nel tempo ( $\dot{V}(x) < 0$ ) fino ad arrivare nel punto di equilibrio in cui non c'è più energia e il pendolo è fermo nell'asse verticale ( $V(x_e) = 0$ ).

Non c'è un criterio universale per trovare  $V(x)$ , per cui la mancanza di questa funzione *non porta a concludere che non ci sia stabilità*: non si può dire nulla.

---

<sup>1</sup> Il motivo è l'approssimazione: quando consideriamo sistemi non lineari come lineari, stiamo trascurando i termini di grado maggiore o uguale al secondo; questo non è rilevante se il sistema diverge o converge perché i termini non sono decisivi per l'andamento. Invece, se un sistema lineare approssimante non converge né diverge (stabilità semplice), il sistema non lineare che stavamo approssimando ha, in realtà, termini in più (che abbiamo trascurato) che potrebbero perturbare il sistema fino a farlo convergere o divergere.

## Esempi di applicazione del criterio

**Esempio 1** – Facciamo un esempio pratico, consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1 x_2^2 + u_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 u_1 u_2 \end{cases}$$

Poniamo l'ingresso uguale a zero, perciò  $u_1 = u_2 = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Si vede facilmente che  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è un punto di equilibrio. Vediamo se possiamo dire qualcosa mediante linearizzazione, costruiamo  $J(x)$ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 - x_2^2 & -2x_1 x_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Big|_{x_e} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Gli autovalori del sistema sono  $-1, -1$ , perciò il sistema *localmente* al punto di equilibrio è *stabile asintoticamente*; perciò, possiamo anche non utilizzare il criterio di Lyapunov.

Se avessimo voluto utilizzarlo, avremmo dovuto cercare una funzione  $V(x)$  tale che  $V(x_e) = 0$  e che è sempre positiva altrimenti; un esempio può essere  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Calcoliamone la derivata<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_1 x_2^2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \\ &= x_1(-x_1 - x_1 x_2^2) - x_2^2 = -x_1^2 - x_1^2 x_2^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

È evidente come sia sempre negativa, a parte per  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , perciò è definita negativa. Conclusione:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è un punto di equilibrio stabile asintoticamente *localmente*<sup>3</sup>.

**Esempio 2** – Ora, modifichiamo il sistema (in particolare, nota che cambia la seconda equazione):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1 x_2^2 + u_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_1 u_1 u_2 \end{cases}$$

Facciamo l'approssimazione lineare:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - x_2^2 & -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix} \Big|_{x_e} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

<sup>2</sup> Si ricorda che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

In questo caso, c'è solo una equazione per la funzione (visto che la funzione è scalare, ovvero ha come codominio  $\mathbb{R}$ ), perciò sarà una matrice  $1 \times 2$ :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial t} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup> Sottolineiamo il fatto che è stabile solo *localmente*; stiamo, infatti, studiando il sistema lineare *nelle vicinanze* del punto di equilibrio.

Gli autovalori sono  $-1$  e  $0$ , perciò il sistema lineare approssimante è stabile semplicemente e *non possiamo dire nulla sul sistema non lineare approssimato*. Perciò, l'unica possibilità qui è usare il criterio di Lyapunov: cerchiamo una funzione  $V(x)$  definita positiva. Prendiamo sempre  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ ; calcoliamo la derivata:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_1 x_2^2 \\ -x_1^2 x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 = -x_1^2(1 + 2x_2^2) \leq 0$$

La funzione ottenuta è *semidefinita negativa*: infatti, è vero che la funzione è nulla nel punto di equilibrio, ma si annulla anche nell'intorno ponendo solo  $x_1 = 0$ , e  $x_2 \neq 0$ . Perciò, per tutti i punti dell'intorno della forma  $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$  la funzione è uguale a zero. Possiamo concludere, allora, che il punto  $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è *almeno* stabile semplicemente; non possiamo dire, però, che *non sia* stabile asintoticamente, perché potremmo trovare un'altra funzione di Lyapunov che ha derivata definita negativa.

In generale, se il punto di equilibrio è  $x_e = \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix}$ , la funzione più semplice da provare, in genere, è  $V(x) = \frac{1}{2}(x - x_{e1})^2 + \frac{1}{2}(x - x_{e2})^2$ , che si annulla in entrambi i punti ed è definita positiva.

Il criterio di Lyapunov si può estendere, e può permettere di stabilire se la stabilità di un punto di equilibrio sia solo *locale* (cioè limitata alle vicinanze di quel punto) oppure *globale* (ovvero valga per tutto lo spazio). In particolare, un punto di equilibrio è stabile *globalmente* se trova una funzione  $V(x)$  che, oltre ad essere tale da garantire la stabilità locale (cioè definita positiva e con derivata definita negativa o semidefinita negativa), è anche *radialmente illimitata*, ovvero tale che quando  $x$  tende all'infinito, anche  $V(x)$  tende all'infinito:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |V(x)| = +\infty$$

Questo è possibile, però, solamente quando il punto di equilibrio  $x_e$  è *unico*, ovvero *non ci sono altri punti di equilibrio*.

## Criterio di Lyapunov per i sistemi lineari

Proviamo ad utilizzare il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Uno dei punti di equilibrio sarà sicuramente  $x_e = 0$  e, se vogliamo studiarne la stabilità asintotica, dev'essere necessariamente *l'unico punto di equilibrio* del sistema. Troviamo allora una funzione  $V(x)$  definita positiva, e il caso più semplice per essere positiva è prenderla quadratica:

$$V(x) = x'Qx$$

Se  $Q$ , che assumiamo *simmetrica* senza perdita di generalità<sup>4</sup>, è *definita positiva*, ovvero i determinanti dei minori principali sono tutti positivi<sup>5</sup> e possiamo indicarlo con  $Q > 0$ , allora  $V(x)$  è definita positiva.

<sup>4</sup> Non si perde di generalità perché, se prendiamo  $M$  non simmetrica, possiamo considerare piuttosto la funzione  $V_s(x) = x'Mx + x'M'x = x'(M + M')x$ , così che la matrice  $Q = M + M'$  è sicuramente simmetrica. Il fatto che sia simmetrica semplifica i calcoli. Il simbolo  $x'$  indica “ $x$  trasposto”, equivalente a  $x^T$ , stessa cosa per  $M'$ .

<sup>5</sup> Se abbiamo una matrice  $n \times n$  del tipo  $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , i minori principali sono le matrici  $(a_{11})$ ,  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , ovvero prendendo via via sottomatrici di ordine sempre maggiore (dall'angolo in alto a sinistra della matrice) fino ad arrivare all'intera matrice  $n \times n$ .

La sua derivata sarà (tenendo presente che  $\dot{x} = Ax$ ):

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Qx + x'Q\dot{x} = (Ax)'Qx + x'QAx = x'A'Qx + x'QAx = x'(A'Q + QA)x$$

Secondo il criterio di Lyapunov, se  $\dot{V}(x)$  è *definita negativa*, allora il punto di equilibrio  $x_e$  è stabile asintoticamente.  $x'(A'Q + QA)x$  è definita negativa se  $A'Q + QA$  è definita negativa, ovvero:

$$A'Q + QA = -P$$

Con  $P$  matrice definita positiva ( $P > 0$ ). Allora possiamo scrivere che:

$$\dot{V}(x) = -x'Px < 0$$

La particolarità del caso lineare è che la condizione per cui esista una  $Q$  che abbia queste condizioni è non solo *sufficiente*, ma anche *necessaria*, il che ci porta a un approccio che darà sicuramente *una soluzione unica*. Allora:

$$\forall P > 0 \text{ simmetrica } \exists Q > 0 \text{ unica, simmetrica} \iff x_e = 0 \text{ è stabile asintoticamente}$$

Possiamo scegliere una matrice  $Q$  fatta in questo modo:

$$Q = \int_0^{+\infty} e^{A't} Pe^{At} dt$$

In questo modo è *definita positiva* perché:

$$x'Qx = x' \int_0^{+\infty} e^{A't} Pe^{At} dt x = \int_0^{+\infty} \underbrace{x'e^{A't}}_{z'} \underbrace{P e^{At} x}_{z} dt > 0$$

Ed è *simmetrica* perché, essendo  $P$  simmetrica:

$$Q' = \int_0^{+\infty} (e^{At})' P' (e^{A't})' dt = \int_0^{+\infty} e^{A't} P' e^{At} dt = \int_0^{+\infty} e^{A't} Pe^{At} dt = Q$$

Ora verifichiamo che è soluzione, ovvero che  $A'Q + QA = -P$ :

$$\begin{aligned} A'Q + QA &= \int_0^{+\infty} A'e^{A't} Pe^{At} dt + \int_0^{+\infty} e^{A't} Pe^{At} A dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (A'e^{A't} Pe^{At} + e^{A't} Pe^{At} A) dt \end{aligned}$$

Consideriamo  $e^{A't}Pe^{At}$ ; facendone la derivata otteniamo<sup>6</sup>  $A'e^{A't}Pe^{At} + e^{A't}Pe^{At}A$ . Possiamo riscrivere, allora, l'integrale come:

$$A'Q + QA = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (e^{A't}Pe^{At}) dt = e^{A't}Pe^{At} \Big|_0^{+\infty} = 0 - P = -P$$

Ecco allora verificato che  $A'Q + QA = -P$ . Il fatto che  $Q$  sia simmetrica è utile perché si andrebbero a calcolare metà delle variabili.

---

<sup>6</sup> La matrice  $P$  è una costante, quindi siamo nel caso  $\frac{d}{dt}(fg) = \dot{f}g + f\dot{g}$ , dove  $f = e^{A't}$  e  $g = e^{At}$ ; ricordiamo, inoltre, che  $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$ , quindi possiamo mettere la matrice  $A$  (o  $A'$ ) dove vogliamo, e abbiamo scelto di mettere  $A'$  davanti a  $A$  in fondo.

## Sistemi non lineari a tempo discreto

In generale, i sistemi a tempo discreto sono descritti dall'equazione:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t))$$

I punti di equilibrio sono tali per cui il sistema è costante e non varia, ovvero che, se lo stato iniziale è  $x_e$ , allora il sistema sarà in  $x_e$  anche “la volta dopo”, cioè  $x(t+1)$ :

$$x_e = f(x_e, 0)$$

Una volta trovati i punti di equilibrio  $x_{e1}, \dots, x_{ek}$ , dobbiamo studiare la stabilità uno per uno, e le condizioni di stabilità sono le stesse di quelle del tempo continuo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } \|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

Se il sistema è lineare, sarà:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

E i punti di equilibrio si trovano ponendo:

$$x_e = Ax_e \iff (A - I)x_e = 0$$

Le soluzioni sono le stesse del caso continuo:  $x_e = 0$  è sempre soluzione e se ve ne sono più di una sono infinite; la differenza è che, invece di  $A$ , va studiata  $A - I$ . Inoltre, come abbiamo fatto nel caso continuo, sappiamo che  $x(t) = \Phi(t)x_0$  e che, se stiamo in  $x_e$ , il sistema resterà sempre in  $x_e$  nel tempo, per cui  $x_e = \Phi(t)x_e$ , e scriviamo:

$$\|x(t) - x_e\| = \|\Phi(t)x_0 - \Phi(t)x_e\| = \|\Phi(t)\| \|x_0 - x_e\| < \varepsilon$$

Procedendo esattamente come nel caso continuo concludiamo che  $\Phi(t)$  è limitata, ovvero che  $\|\Phi(t)\| \leq \Phi_0$ . L'unica differenza è che, nel caso discreto,  $\Phi(t) = A^t$ , e i modi naturali al suo interno seguono leggi del tipo  $\lambda^t$ , nel caso reale, o leggi pseudoperiodiche del tipo  $\rho^t(\dots)$ , nel caso complesso, e affinché il sistema sia stabile deve risultare rispettivamente  $\lambda \leq 1$  e  $\rho \leq 1$ , quindi in generale se  $|\lambda| \leq 1$ . Si ha, infine, stabilità asintotica se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0 \iff |\lambda| < 1$$

Per quanto riguarda la stabilità esterna, un sistema discreto è stabile esternamente quando, esattamente come nel caso continuo, ad ingresso limitato corrisponde uscita limitata, e al posto dell'integrale si fa la somma nell'uscita:

$$\begin{aligned} y(t) &= \Psi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau) \\ \implies \|y(t)\| &\leq \dots \leq \sum_{\tau=0}^{t-1} \|W(t-\tau)\| U \end{aligned}$$

La dimostrazione è la stessa del caso continuo (guarda la lezione 11 del 15 ottobre 2021), e si arriva ad avere stabilità esterna se:

$$\begin{cases} |\Lambda_o| \leq 1 \\ |\Lambda_{e,o}| < 1 \end{cases}$$

La differenza fondamentale con il caso continuo è che non c'è la parte reale ma il modulo, e c'è l'1 al posto dello 0. Risulta evidente allora che il criterio di Routh non è più utilizzabile, perché non ci serve più sapere se la parte reale degli autovalori è negativa, e dobbiamo trovare un altro criterio, se esiste.

## Teoria dei Sistemi

# Lezione 14 (22 ottobre 2021)

## Condizioni necessarie per la stabilità nel tempo discreto

La scorsa lezione abbiamo visto come, nel tempo discreto, la stabilità del sistema si riconducesse al modulo degli autovalori; in particolare, se risulta  $|\lambda_i| \leq 1$  per ogni autovalore, si ha stabilità semplice, mentre se  $|\lambda_i| < 1$  per ogni autovalore si ha stabilità asintotica. Per verificarlo, un modo può essere calcolarli, ma questo spesso è complicato, in più il calcolo si complicherebbe se alcuni coefficienti avessero parametri. Vediamo allora se riusciamo a trovare un algoritmo in grado di semplificare il procedimento.

Iniziamo fattorizzando il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = \\ &= a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Ora supponiamo che tutte le radici abbiano modulo  $|\lambda_i| < 1$ ; in questo caso, calcolando il polinomio in  $\lambda = 1$ , ogni termine del tipo  $\lambda - \lambda_i = 1 - \lambda_i$  sarà sempre positivo, e quindi  $p(1)$  avrà lo stesso segno di  $a_n$ :

$$\operatorname{sign} p(1) = \operatorname{sign} a_n$$

Se calcoliamo  $p$  in  $\lambda = -1$ , tutti i fattori saranno negativi, e quindi ogni volta che si fa un prodotto si cambierà segno. Questo significa che:

$$\operatorname{sign} p(-1) = (-1)^n \operatorname{sign}(a_n)$$

Infine, possiamo vedere il valore di  $p$  in  $\lambda = 0$ :

$$p(0) = a_n (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = a_n \prod_{i=1}^n (-\lambda_i)$$

Se prendiamo il modulo di questa quantità, e ricordando che  $|\lambda_i| < 1$ :

$$|p(0)| = \left| a_n \prod_{i=1}^n (-\lambda_i) \right| = |a_n| \left| \prod_{i=1}^n (-\lambda_i) \right| < |a_n| \cdot \prod_{i=1}^n 1 = |a_n|$$

Visto che  $p(0) = a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \cdots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$ , in definitiva abbiamo che  $|p(0)| = |a_0| < |a_n|$ . Abbiamo quindi trovato tre condizioni necessarie che devono essere verificate perché il modulo delle soluzioni sia minore di uno:

$$\begin{cases} \operatorname{sign} p(1) = \operatorname{sign}(a_n) \\ \operatorname{sign} p(-1) = (-1)^n \operatorname{sign}(a_n) \\ |a_0| < |a_n| \end{cases}$$

Se una di queste non è soddisfatta, sappiamo che le radici non hanno modulo minore di 1. Se invece sono tutte soddisfatte, ancora non possiamo concludere nulla. Ci serve, allora, un algoritmo; quello che andremo a vedere è più semplice di quello del caso continuo.

## Criterio di Jury

Per prima cosa, si elencano prima di tutto tutti i coefficienti del polinomio da 0 a  $n$ :

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-1}$	$a_n$
-------	-------	-------	----------	-----------	-------

E si riscrivono identici invertendo la riga, ovvero stavolta si parte da  $a_n$  e si arriva a  $a_0$ :

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_1$	$a_0$

Ora si inizia a costruire la terza riga:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-1}$	

Dove  $b_0$  è formato dal determinante della matrice che ha per prima colonna i primi elementi delle due righe precedenti, e per seconda colonna gli ultimi due elementi delle due righe precedenti:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$$

$b_1$  è formato sempre dai primi due elementi delle due righe precedenti, ma si prendono i *penultimi* elementi delle righe precedenti:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-1}$	

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

Quindi, in pratica, i primi elementi delle due righe precedenti (indicati in arancione) rimangono fissi nella prima colonna, mentre per la seconda colonna di ogni termine si parte dagli ultimi elementi delle righe precedenti e si procede fino ad arrivare ai secondi elementi delle righe sopra, quindi l'ultimo termine sarà:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-1}$	

$$b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Una volta finita la riga, per la riga successiva si inverte questa riga ottenuta:

$a_0$	$a_1$	$\cdots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$\cdots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\cdots$	$b_1$	$b_0$	
$c_0$	$c_1$	$\cdots$	$c_{n-2}$		

E si procede calcolando i termini successivi. Il procedimento per trovare  $c_0, \dots, c_{n-2}$  è lo stesso che si è usato per trovare  $b_0, \dots, b_{n-1}$ : la prima colonna della matrice di cui fare il determinante sarà  $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$ , e per la seconda colonna si parte dalla fine delle righe precedenti,  $\begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_0 \end{bmatrix}$ , e si va all'indietro.

Si continua così finché non si raggiunge una riga con tre soli elementi:

$a_0$	$a_1$	$\cdots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$\cdots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$\cdots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\cdots$	$b_1$	$b_0$	
$c_0$	$c_1$	$\cdots$	$c_{n-2}$		
$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$\cdots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\mu_0$	$\mu_1$	$\mu_2$			

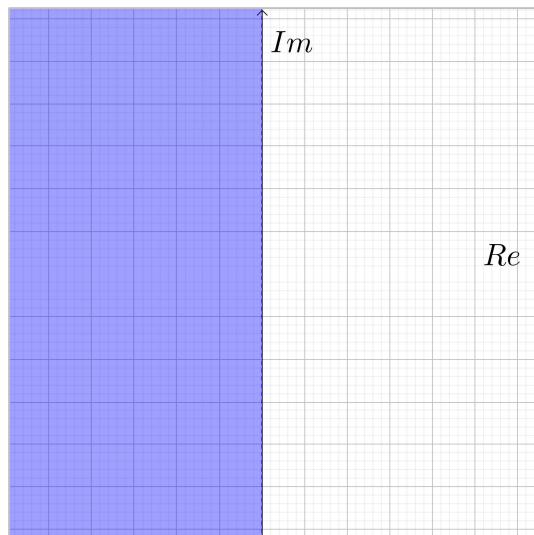
Ora si vede la prima colonna e si contano le righe a due a due; devono valere tutte le relazioni<sup>1</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} |b_{n-1}| < |b_0| \\ |c_{n-2}| < |c_0| \\ |d_{n-3}| < |d_0| \\ \vdots \\ |\mu_2| < |\mu_0| \end{array} \right.$$

Se valgono tutte, allora tutte le soluzioni hanno modulo minore di 1, e il sistema è stabile asintoticamente. Questo sistema, però, esclude a prescindere tutte le soluzioni che hanno modulo uguale ad 1.

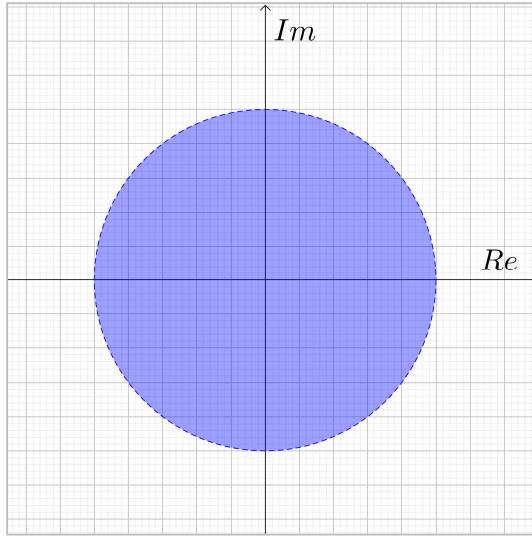
## Passaggio da un criterio all'altro

Nei sistemi a tempo continuo, dove si usa il criterio di Routh, si usa la parte di piano reale-immaginario dove la parte reale delle soluzioni è negativa ( $Re(\lambda_i) < 0$ ):



<sup>1</sup> Attenzione: la condizione necessaria,  $|a_0| < |a_n|$ , è “al contrario” rispetto alle altre relazioni, che invece sono  $|b_{n-1}| < |b_0|$ , ecc.

Nel caso discreto, invece, le soluzioni sono quelle che hanno modulo inferiore a 1, quindi, graficamente, si ha:



Prendendo un qualsiasi punto del cerchio  $z$ , è possibile scrivere una relazione che trasforma la parte del piano delimitata dal cerchio, quindi le soluzioni tali che  $|\lambda_i| < 1$ , nel semipiano in cui  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ , e viceversa. Questo ci può servire per applicare uno dei due criteri anche nell'altro caso. Cioè; se stiamo nel caso tempo continuo, possiamo usare il criterio di Routh per verificare la stabilità del sistema, oppure possiamo *applicare una trasformazione* e associare ad ogni punto del semipiano  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  un punto nel cerchio di raggio 1. Se  $z$  è un punto qualsiasi del cerchio complesso di raggio 1, allora il punto  $s$  del piano  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  associato a  $z$  si trova con:

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Verifichiamolo: per prima cosa, deve risultare che un punto sulla *circonferenza* (ovvero sul “perimetro” del cerchio) viene trasformato in punti sulla retta  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  (che è la retta verticale all’origine). Un qualsiasi punto del cerchio complesso può essere facilmente descritto in forma modulo-fase, perché il raggio è sempre uguale ad 1 e la fase corrisponde all’angolo che forma con l’asse reale:  $z = e^{j\theta}$ . Andiamo quindi a sostituire:

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = \frac{e^{j\theta}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{e^{j\theta}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})} = \frac{j e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{e^{j\theta} + e^{-j\theta}} = \frac{j \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = j \tan \frac{\theta}{2}$$

Poniamo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ; la parte reale di  $j \tan \frac{\theta}{2}$  è 0, perciò si troverà sull’asse immaginario, e per  $\theta \in [-\pi, \pi]$  scorre tutto l’asse immaginario, da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Verifichiamo che tutti i punti interni al cerchio si trasformano nella parte sinistra all’asse immaginario; consideriamo un punto generico nel cerchio unitario immaginario  $z = \alpha + j\omega$ :

$$s = \frac{\alpha + j\omega - 1}{\alpha + j\omega + 1}$$

Razionalizzando:

$$\begin{aligned} s &= \frac{(\alpha - 1) + j\omega}{(\alpha + 1) + j\omega} \cdot \frac{(\alpha + 1) - j\omega}{(\alpha + 1) - j\omega} = \\ &= \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1) + \omega^2}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} + j \frac{\omega(\alpha + 1) - \omega(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

A noi interessa la parte reale; il denominatore è sempre positivo, e il numeratore è positivo solo se  $\alpha^2 + \omega^2 > 1$ , negativo altrimenti; visto che i punti nel cerchio hanno raggio minore di 1, allora:

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} < 1 \implies \alpha^2 + \omega^2 < 1 \implies \frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} = Re(s) < 0$$

Perciò i punti nel cerchio si trasformeranno nella zona di piano con parte reale negativa, quindi quella illustrata nella prima figura<sup>2</sup>.

## Approssimazione di sistemi non lineari a tempo discreto

Preso un sistema discreto non lineare

$$x(t+1) = f(x(t), u(t))$$

E, trovato almeno un equilibrio

$$x_e \text{ tale che } f(x_e, 0) = x_e$$

A questo punto, per studiare la stabilità del sistema, dobbiamo prendere  $f$  e, attraverso lo sviluppo in serie fermato al primo ordine, costruirsi l'approssimazione lineare:

$$\begin{aligned} f(x(t), u(t)) &\approx f(x_e, 0) + \underbrace{\left. \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x(t)} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}}}_{A} (x(t) - x_e) + \underbrace{\left. \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}}}_{B} u \\ &\implies x(t+1) = f(x_e, 0) + A(x(t) - x_e) + Bu(t) \end{aligned}$$

Possiamo anche trascurare l'ingresso  $Bu(t)$ ; tuttavia,  $f(x_e, 0) \neq 0$ , perciò non possiamo cancellarlo e l'espressione di  $x(t+1)$  non è lineare. Però, se chiamiamo  $z(t) = x(t) - x_e$ , otteniamo che  $z(t+1) = x(t+1) - x_e$ , quindi:

$$x(t+1) = z(t+1) + x_e = \underbrace{f(x_e, 0)}_{x_e} + A(x(t) - x_e) \implies z(t+1) = Az(t)$$

In questo caso vale lo stesso risultato del tempo continuo: studiando la stabilità del sistema linearizzato, se questo è stabile asintoticamente allora il sistema non lineare sarà stabile asintoticamente, mentre se il sistema lineare è instabile sarà instabile anche il sistema non lineare; non si può dire nulla per la stabilità semplice.

## Criterio di Lyapunov per tempo discreto

Il criterio è simile a quello per tempo continuo<sup>3</sup>; la differenza è che si prende una funzione  $V(x(t)) > 0$ , e invece di fare la derivata (che non è possibile fare nel caso discreto), si prende in considerazione  $\Delta V(x(t))$ :

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t))$$

Se  $\Delta V(x(t))$  è *definita negativa*, allora il punto di equilibrio avrà stabilità asintotica (locale); se, invece, risulta *semidefinita negativa*, avrà stabilità semplice (locale). Come nel caso continuo, se  $V(x(t))$  è *radialmente*

<sup>2</sup> Il professore ha confessato che «nelle applicazioni non ho mai visto nessuno fare questo procedimento con carta e penna, quindi immagino che non vi capiterà mai di utilizzarlo—anche perché voi ricorderete magnificamente sia Routh che Jury».

<sup>3</sup> Se si riesce a trovare una funzione  $V(x)$  *definita positiva* tale che  $\dot{V}(x)$  è *definita negativa*, allora si avrà stabilità asintotica; se  $\dot{V}(x)$  risulta *semidefinita negativa*, si avrà stabilità semplice.

*illimitata* (cioè tendente a  $+\infty$  per  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ), allora il risultato varrà *globalmente*, cioè per tutto lo spazio. Per come è scritto il sistema, di fatto:

$$\Delta V(x(t)) = V(f(x(t), 0)) - V(x(t))$$

Visto che  $x(t+1) = f(x(t), 0)$ . Si ricorda che, nel caso in cui *non siamo riusciti* a trovare una funzione  $V(x)$  definita positiva tale che  $\Delta V$  è definita negativa, non possiamo concludere nulla.

Nel caso in cui il sistema sia lineare, proviamo a trovare una funzione quadratica semplice:

$$V(x(t)) = x'(t) Q x(t), \quad Q > 0$$

Si ricorda che  $Q > 0$  vuol dire che  $Q$  è *definita positiva*, ovvero che i determinanti dei minori principali sono tutti maggiori di 1. Prendiamo  $Q$  *simmetrica* per semplicità, visto che non si perde di generalità, e applichiamo il criterio di Lyapunov:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) \\ \implies V(x(t+1)) - V(x(t)) &= \\ &= V(Ax(t)) - V(x(t)) = \\ &= (Ax(t))' Q Ax(t) - x'(t) Q x(t) = \\ &= x'(t) A' Q A x(t) - x'(t) Q x(t) = \\ &= x'(t) [A' Q A - Q] x(t) \end{aligned}$$

Questa quantità è *definita negativa* se la matrice  $A' Q A - Q$  è definita negativa, ovvero:

$$A' Q A - Q = -P$$

Con  $P$  definita positiva e simmetrica, visto che  $Q$  è simmetrica. Nel caso lineare, la condizione è necessaria e sufficiente:

$$A' Q A - Q < 0 \iff \text{il punto di equilibrio è stabile}$$

Si può dimostrare che, se è stabile, fissata  $P > 0$  e simmetrica, si trova sempre una  $Q$  che soddisfa l'equazione  $A' Q A - Q = -P$ . La  $Q$  in questione è definita come:

$$Q = \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t P A^t$$

Che è completamente analoga al caso continuo ( $\int \leftrightarrow \sum$ ,  $e^{At} \leftrightarrow A^t$ ); questa è definita positiva perché:

$$z' Q z = \sum_{t=0}^{\infty} (z'(A')^t) P (A^t z) = \sum_{t=0}^{\infty} y' P y > 0$$

Ed è soluzione dell'equazione perché:

$$\begin{aligned}
A'QA - Q &= A' \left( \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t PA^t \right) A - \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t PA^t = \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} (A')^{t+1} PA^{t+1} - \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t PA^t = \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} (A')^{\tau} PA^{\tau} - \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t PA^t = \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} (A')^{\tau} PA^{\tau} - \left[ (A')^0 PA^0 + \sum_{t=1}^{\infty} (A')^t PA^t \right] = \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} (A')^{\tau} PA^{\tau} - \sum_{t=1}^{\infty} (A')^t PA^t - (A')^0 PA^0 = \\
&= -P
\end{aligned}$$

## Semplice modello economico (tempo discreto)

Ora vediamo come tutto quello che abbiamo studiato può aiutarci nell'analisi dei sistemi, e senza fare troppi calcoli metterne in evidenza le caratteristiche generali e qualitative. Proviamo a stilare un modello a tempo discreto molto semplice, un modello economico di base: la relazione tra domanda, offerta e prezzo della merce. In generale, per gli economisti, la domanda  $d$  è composta da una “domanda base”  $d_0$  (la domanda che ci sarebbe se tutti potessero permettersi la merce) *meno* una quantità che dipende dal prezzo  $p$ :

$$d = d_0 - ap$$

La produzione della merce segue una legge simile: la merce prodotta  $m$  è uguale alla quantità di merce necessaria per soddisfare la domanda,  $m_0$ , più una quantità “in eccesso” che dipende, anch’essa, dal prezzo  $p$ :

$$m = m_0 + bp$$

Manca, in questo sistema, la variabile tempo, ma possiamo inserirlo in questo modo: la domanda al ciclo successivo di vendite (che può essere, per esempio, l'anno dopo) è uguale alla domanda base, meno quanto costerà:

$$d(t+1) = d_0 - ap(t+1)$$

Chi produce, invece, si regolerà alla base di quello che vende in questo momento, per sapere quanti ne produrrà in futuro:

$$m(t+1) = m_0 + bp(t)$$

L'economia perfetta di mercato è quando la domanda equivale all'offerta, perciò si ha:

$$d_0 - ap(t+1) = m_0 + bp(t)$$

Questo è un sistema a tempo discreto dove la variabile di stato è il prezzo:

$$p(t+1) = -\frac{b}{a}p(t) + \frac{d_0 - m_0}{a}$$

Possiamo calcolarne i punti di equilibrio:

$$p_e = -\frac{b}{a}p_e + \frac{d_0 - m_0}{a} \implies p_e = \frac{d_0 - m_0}{a + b}$$

Il prezzo dipende, quindi, dalla produzione base  $m_0$ , dalla domanda base  $d_0$ , e dai coefficienti  $a$  e  $b$ . Chi sono, “fisicamente”, questi coefficienti?  $a$  fa diminuire la domanda, potremmo chiamarla la “propensione al risparmio”, ovvero indica quanto l’acquirente è attento al prezzo;  $b$ , invece, è quanto il produttore vuole guadagnarci. Secondo questa interpretazione, si vede che il prezzo diminuisce sia quando aumenta l’“avidità”, sia quando aumenta la propensione al risparmio.

Studiamo la stabilità del punto di equilibrio: la matrice  $A$  è unidimensionale (è un coefficiente reale) che ha, quindi, un solo autovalore:  $\lambda = -\frac{b}{a}$ ; il punto di equilibrio è stabile se risulta:

$$|\lambda| = \left| -\frac{b}{a} \right| < 1 \iff b < a$$

Ciò vuol dire che “la voglia di guadagnare deve essere inferiore di quanto l’acquirente è disposto a spendere”: se il produttore diventa troppo avido, l’equilibrio diventa instabile e il prezzo varia.

## Modello semplice preda-predatore (tempo continuo)

Nel mondo ci sono solo due specie: la specie  $x$  può mangiare quanto vuole e ha tutto quello che serve per prosperare; può riprodursi senza limiti, e la variazione della quantità di specie è data da:

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

Arriva poi una seconda specie  $y$ , che per nutrirsi mangia la specie  $x$ :

$$\dot{y}(t) = mx(t)y(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = ax(t) - nx(t)y(t)$$

Ci sono diversi coefficienti ( $m$  e  $n$ ) perché, magari, un singolo esemplare di  $y$  può mangiare più esemplari di  $x$ . La specie  $y$ , se non mangia  $x$ , morirebbe (con coefficiente, poniamo,  $b$ ). Allora il sistema ha la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - nx(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = mx(t)y(t) - by(t) \end{cases}$$

Il sistema non è lineare; troviamo i punti di equilibrio. Scartiamo, innanzitutto, l’equilibrio banale  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , e poniamo le equazioni uguali a zero:

$$\begin{cases} ax_e - nx_e y_e = 0 \\ mx_e y_e - by_e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_e(a - ny_e) = 0 \\ y_e(mx_e - b) = 0 \end{cases}$$

Una soluzione è, oltre a  $x_e = 0, y_e = 0$ :

$$\begin{cases} y_e = \frac{a}{n} \\ x_e = \frac{b}{m} \end{cases}$$

C’è stata davvero una situazione reale che è possibile descrivere con questo modello: anni fa in America, è stata fatta un’importazione di piante dell’Australia verso la California; però, insieme alle piante, sono stati importati parassiti che, nella nuova terra priva di predatori, prosperavano senza limiti nutrendosi di piante, distruggendole: si tratta della nostra “specie  $x$ ”. Hanno allora pensato di importare anche gli insetti predatori dei parassiti, la “specie  $y$ ”, per cercare di diminuirne il numero. Si è raggiunto quindi l’equilibrio trovato. Anni dopo, hanno pensato di usare sostanze insetticide sulle piante per diminuire il numero della specie  $x$ , causando

quindi la morte sia della specie  $x$  (con un coefficiente  $h$ ), sia della specie  $y$  (con un coefficiente  $k$ ). Il nuovo sistema, allora, sarà:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - nx(t)y(t) - hx(t) \\ \dot{y}(t) = mx(t)y(t) - by(t) - ky(t) \end{cases}$$

Trovando i punti di equilibrio, si ottiene:

$$\begin{cases} ax_e - nx_e y_e - hx_e = 0 \\ mx_e y_e - by_e - ky_e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_e(a - ny_e - h) = 0 \\ y_e(mx_e - b - k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_e = \frac{a - h}{n} \\ x_e = \frac{b + k}{m} \end{cases}$$

E possiamo notare che, in realtà, rispetto al punto di equilibrio precedente, è diminuita la specie  $y$  (che in realtà erano i “buoni”) ed è aumentata la specie  $x$ , che doveva essere diminuita.

## Popolazione studentesca del triennio di ingegneria

Consideriamo un modello semplice: la dinamica della popolazione studentesca del triennio di ingegneria. Chiamiamo  $x_1$  gli studenti del primo anno,  $x_2$  quelli del secondo anno, e  $x_3$  quelli del terzo anno. La dinamica del sistema va di anno in anno, perciò il tempo sarà discreto. L'anno prossimo, l'idea è che  $p$  è la probabilità di uno studente di finire tutti gli esami dell'anno e di passare all'anno successivo; perciò,  $1 - p$  sarà la probabilità opposta, di restare all'anno attuale. Il sistema sarà, quindi:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (1-p)x_1(t) + I(t) \\ x_2(t+1) = px_1(t) + (1-p)x_2(t) \\ x_3(t+1) = px_2(t) + (1-p)x_3(t) \end{cases}$$

Dove  $I(t)$  rappresenta i nuovi immatricolati; se consideriamo che gli anni hanno difficoltà diverse, il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (1-p_1)x_1(t) + I(t) \\ x_2(t+1) = p_1x_1(t) + (1-p_2)x_2(t) \\ x_3(t+1) = p_2x_2(t) + (1-l)x_3(t) \end{cases}$$

$p_1$  e  $p_2$  sono le probabilità di superare, rispettivamente, il primo e il secondo anno; con la stessa logica (ma usando, per qualche motivo, una lettera diversa),  $l$  è la probabilità di laurearsi. Avremo allora:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1-p_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1-p_2 & 0 \\ 0 & p_2 & 1-l \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Ponendo  $u(t) = I(t)$ . Se studiamo l'equilibrio classico, dovremmo prendere la matrice  $A$  e capire il sistema dagli autovalori. Il rango della matrice è pieno, quindi l'unico punto di equilibrio è  $0$ ; essendo triangolare, gli autovalori si vedono facilmente: sono quelli sulla diagonale principale, ovvero  $\lambda_1 = 1 - p_1$ ,  $\lambda_2 = 1 - p_2$ ,  $\lambda_3 = 1 - l$ . Per essere stabile, deve essere  $|\lambda_i| < 1$  per ogni autovalore, e visto che  $p_1, p_2, l$  sono tutte quantità minori di  $1$ , tutti gli autovalori sono minori di  $1$ ; a meno che non capiti che *nessuno studente riesca a passare all'anno successivo o a laurearsi* ( $p_1, p_2$  o  $l$  è nullo).

Il sistema, quindi, in genere, è stabile asintoticamente e tende verso  $0$ , ovvero tende a non avere più studenti; questo, in effetti, sarebbe vero se non ci fossero studenti che si immatricolano, però così non è e va, allora, tenuto conto dell'ingresso. In questo caso, la presenza dell'ingresso è fondamentale: invece di cercare  $x_e = Ax_e$ ,

si cerca  $x_e = Ax_e + Bu_e$ . Per trovare l'equilibrio allora dovremo porre tutte le equazioni uguali, rispettivamente, a  $x_{e1}$ ,  $x_{e2}$  e  $x_{e3}$ :

$$\begin{cases} (1-p_1)x_{e1} + I_e = x_{e1} \\ p_1x_{e1} + (1-p_2)x_{e2} = x_{e2} \\ p_2x_{e2} + (1-l)x_{e3} = x_{e3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{e1} = \frac{I_e}{p_1} \\ x_{e2} = \frac{I_e}{p_2} \\ x_{e3} = \frac{I_e}{l} \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} I_e/p_1 \\ I_e/p_2 \\ I_e/l \end{pmatrix}$$

Bisognerà poi studiare l'equilibrio di  $x$ , tenendo presente sempre che  $u \neq 0$ .

## Teoria dei Sistemi

# Lezione 15 (25 ottobre 2021)

## Ingressi non impulsivi e trasformata di Laplace

Abbiamo visto come si comportano i sistemi lineari con un ingresso  $u(t)$  impulsivo, ovvero  $u(t) = \delta(t)$ , se lo consideriamo unidimensionale. L'equazione in forma esplicita del sistema, come sappiamo, è:

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) d\tau \end{cases}$$

Vorremmo, però, vedere come si comporta il sistema se  $u$  assume un'espressione qualsiasi in  $t$ , per esempio  $u(t) = t^2$ ; effettuare l'integrale può essere semplice se le matrici  $H$  e  $W$  sono unidimensionali, altrimenti andrebbe fatto l'integrale per ogni elemento di  $H$  e  $W$  (che sono funzioni del tempo). L'integrale può essere spesso molto difficile o, comunque, molto lungo e macchinoso da fare; perciò, studieremo un altro modo per gestire ingressi non impulsivi. Possiamo provare, allora, a trovare una *trasformazione* che ci permetta di lavorare sull'ingresso senza passare per l'integrale di convoluzione (e per un teorema chiamato teorema della convoluzione).

Per fare ciò, possiamo *cambiare dominio*, e passare dal dominio del tempo  $t$  a una variabile generica  $s$ , che non ha un vero e proprio significato, ma che può farci semplificare i calcoli. L'idea è che possiamo trasformare l'integrale in "qualcosa di più semplice", così che possiamo calcolare il valore più semplicemente, per poi ritornare alla forma iniziale usando la trasformazione inversa. La relazione, allora, sarà biunivoca

$$t \longleftrightarrow s$$

e ci permetterà di passare da  $f(t)$  a  $F(s)$  e viceversa:

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

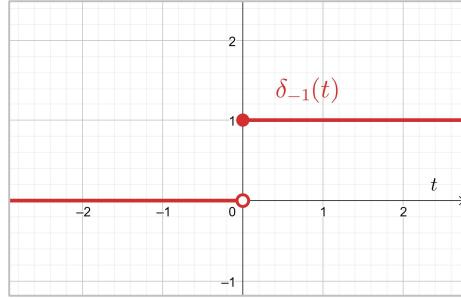
Una simile trasformazione prende il nome di *trasformata di Laplace*, definita quanto segue:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

L'integrale è nella variabile  $t$ , perciò quando viene calcolato, da 0 a  $+\infty$ , rimane solamente la variabile  $s$ . Con questo integrale passiamo da  $f(t)$  a  $F(s)$ , ed è importante notare che  $t \in \mathbb{R}$ , ma  $s \in \mathbb{C}$ ; il passaggio inverso è effettuato tramite un integrale nel dominio complesso, che non vedremo in questo corso in quanto procederemo in altri modi. La  $f(t)$  che compare all'interno dell'integrale, in realtà, è una funzione definita per  $t \in [0, +\infty)$ ,

non vale quindi per valori negativi del tempo. Se così non fosse, potremmo immaginarla moltiplicata alla funzione gradino  $\delta_{-1}(t)$ , ovvero l'integrale dell'impulso<sup>1</sup>  $\delta(t)$ :

$$\delta_{-1}(t) = \int \delta(t) dt$$



In effetti, è facile vedere come

$$f(t)\delta_{-1}(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

È opportuno notare che la trasformata di Laplace è *lineare*; quindi, anche  $F(s)$  si trova nel contesto lineare, infatti vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (\alpha f(t)e^{-st} + \beta g(t)e^{-st}) dt = \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} dt = \\ &= \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned}$$

La struttura del sistema resta, quindi, la stessa, supponendo di saper fare il calcolo (l'integrale della trasformata) e che si possa sempre fare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \implies \begin{cases} \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[Cx(t) + Du(t)] \end{cases}$$

Essendo la trasformata lineare come dimostrato sopra, vale che:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)] = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t)]$$

Inoltre, applicando la definizione della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= \int_0^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-st} dt = \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} [x(t)e^{-st}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-s)x(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

“IPP” indica l’integrazione per parti. Il termine  $[x(t)e^{-st}]_0^{+\infty}$  potrebbe non essere finito;  $s$  è una variabile complessa, come si è detto, della forma  $s = \alpha + j\omega$ , perciò  $e^{-st} = e^{-(\alpha+j\omega)t} = e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}$  converge solamente se

---

<sup>1</sup> In realtà, l’impulso viene spesso chiamato  $\delta_0(t)$ , e ogni volta che ne viene fatto l’integrale, si sottrae di uno l’indice; per esempio, l’integrale di  $\delta_0(t)$  è proprio  $\delta_{-1}(t)$ , e se facessimo di nuovo l’integrale otterremmo  $\delta_{-2}(t)$ , e così via.

$\alpha > 0$ , ovvero se  $Re(s) > 0$  (<sup>2</sup>).  $x(t)$ , invece, ha forma generica e possiamo assumere che non diverga. Allora, posto  $Re(s) > 0$  possiamo continuare:

$$\begin{aligned} \dots &= [x(t)e^{-st}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-s)x(t)e^{-st} dt = \\ &= -x(0) + s \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \\ &= s\mathcal{L}[x(t)] - x(0) \end{aligned}$$

Abbiamo, quindi, due espressioni diverse per  $\mathcal{L}[\dot{x}(t)]$  che possiamo eguagliare:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = A\mathcal{L}[x(t)] + B\mathcal{L}[u(t)] = s\mathcal{L}[x(t)] - x(0)$$

Per semplicità, indichiamo con  $X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$ , e  $U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$ :

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Da adesso in poi, in generale, si invita a far attenzione alla variabile: se la variabile è  $s$ , significa che ci troviamo nel dominio della trasformata di Laplace, e non in quello del tempo  $t$  che conosciamo. Riordinando l'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} sX(s) - AX(s) &= x(0) + BU(s) \\ \Rightarrow (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \\ \Rightarrow X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

Riscrivendo anche l'uscita utilizzando la notazione usata finora, indicando con  $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$ :

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Queste espressioni sono ancora lineari; per esempio, nella prima equazione si ha un coefficiente lineare,  $(sI - A)^{-1}$ , che moltiplica la condizione iniziale  $x(0)$ , e un coefficiente  $(sI - A)^{-1}B$  che moltiplica l'ingresso.

## Trasformate delle matrici della forma esplicita

Questa forma ci ricorda la forma esplicita delle equazioni del sistema; proviamo allora a vedere cosa succede se trasformiamo direttamente la forma esplicita:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t)] &= \mathcal{L}\left[\Phi(t)x(0) + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau\right] \\ \Rightarrow X(s) &= \Phi(s)x(0) + \mathcal{L}\left[\int_0^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau\right] \end{aligned}$$

Indicando con  $\Phi(s) := \mathcal{L}[\Phi(t)]$ . L'integrale  $\int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau$  viene chiamato *integrale di convoluzione*, e viene spesso indicato con  $(H * u)(t)$ , ma per ora non sappiamo calcolarne la trasformata. Però, ora abbiamo due

---

<sup>2</sup> Il termine  $e^{-j\omega t}$  è della forma  $\rho e^{j\theta}$  con  $\rho = 1$ . Questo significa che ha modulo 1 e si trova sulla circonferenza unitaria tra il piano reale e quello immaginario. Quindi, non convergerà mai all'infinito perché continuerà a ruotare sulla circonferenza. Questo è evidente perché possiamo riscrivere  $e^{-j\omega t}$  come somma di seni e coseni.

espressioni di  $X(s)$  che possiamo confrontare; prima abbiamo trovato che il coefficiente di  $x(0)$  è  $(sI - A)^{-1}$ , e ora abbiamo ottenuto che è  $\Phi(s)$ , perciò si ha:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

Inoltre, sappiamo che  $H(t) = \Phi(t)B$ ; allora,  $\mathcal{L}[H(t)] = \mathcal{L}[\Phi(t)B] = \Phi(s)B$ , e possiamo scrivere che:

$$H(s) = \Phi(s)B = (sI - A)^{-1}B$$

che è proprio il coefficiente della  $U(s)$ . Siamo arrivati, allora, a scrivere:

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + H(s)U(s)$$

Dall'integrale siamo passati al prodotto, che è indubbiamente più facile da studiare. La stessa cosa per l'uscita:

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) = \\ &= C\Phi(s)x_0 + CH(s)U(s) + DU(s) = \\ &= \underbrace{C\Phi(s)x_0}_{\Psi(s)} + \underbrace{(CH(s) + D)U(s)}_{W(s)} \end{aligned}$$

$\Psi(s) = \mathcal{L}[\Psi(t)] = \mathcal{L}[C\Phi(t)] = C\Phi(s)$ . Riguardo a  $W(s)$ , invece, non sappiamo se corrisponda esattamente a  $\mathcal{L}[W(t)]$ , visto che quest'ultima è pari a  $\mathcal{L}[CH(t) + D\delta(t)]$ ; per capirlo, dovremmo sapere come calcolare la trasformata dell'impulso  $\delta(t)$ , e in particolare deve valere  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ . Verifichiamolo:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

Infatti, per definizione di impulso:

$$\int_a^b \delta(t-k)f(t) dt = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \in [a, b] \\ 0, & \text{se } k \notin [a, b] \end{cases}$$

In questo caso si ha  $k = 0$ , e risulta che  $k \in [a, b] = [0, +\infty)$ , quindi si ha che l'integrale è  $e^{-st}$  calcolato in  $t = k = 0$ , quindi vale 1. Dimostrato questo, allora, si ha che:

$$\mathcal{L}[W(t)] = \mathcal{L}[C\Phi(t)B + D\delta(t)] = C\mathcal{L}[\Phi(t)]B + D\mathcal{L}[\delta(t)] = C\Phi(s)B + D =: W(s)$$

Ora che abbiamo ottenuto le espressioni trasformate, dobbiamo poter tornare indietro; infatti, volendo possiamo studiare l'ingresso forzato o l'uscita forzata di un certo sistema trasformandole e facendo il prodotto, ma così otteniamo  $X_F(s)$  o  $Y_F(s)$ , quindi dobbiamo poter passare da  $s$  a  $t$  per ottenere le espressioni di  $x_F(t)$  e  $y_F(t)$ . Dobbiamo allora calcolare le *anti-trasformate*, senza passare per l'integrale complesso.

## Trasformate di alcune funzioni

Vediamo il legame tra delle funzioni e le loro trasformate; questo potrà aiutarci a capire come fare le anti-trasformate. In particolare, sarebbe utile vedere le trasformate di funzioni che saranno comuni, come quelle dei modi naturali (esponenziali, seni e coseni). Calcoliamo, allora, la trasformata di  $e^{at}$ :

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[ \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} \stackrel{*}{=} \frac{1}{s-a}$$

\*Anche qui, essendo  $s \in \mathbb{C}$ , deve risultare che  $\operatorname{Re}(s-a) > 0$ , ovvero  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ , per convergere. Questo, in realtà, vale per qualsiasi  $a \in \mathbb{C}$ .

La trasformata del seno si può ricavare da quella dell'esponenziale, perché:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]}{2j} = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Questo, però, vale se rispettiamo la condizione che abbiamo imposto alla trasformata dell'esponenziale, ovvero  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ ; in questo caso  $a = 0$ , perché l'esponenziale ha solo la parte immaginaria, quindi la condizione che deve valere è  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Allo stesso modo, la trasformata del coseno è:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Anche qui vale  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Un'altra funzione che abbiamo visto è la funzione gradino  $\delta_{-1}(t)$ , ovvero l'integrale dell'impulso  $\delta(t)$ :

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \int_0^{+\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} \stackrel{*}{=} \frac{1}{s}$$

\*Abbiamo ancora posto  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Infine, sarebbe utile sapere come trasformare le potenze di  $t$ ; questo può essere usato, ad esempio, per trasformare le *approssimazioni* delle funzioni: per applicare una trasformata ad una funzione, allora, potremmo approssimarla con la sua serie di Taylor e, essendo la trasformata lineare, trasformare tutti gli addendi.

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{+\infty} te^{-st} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{te^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

\*Di nuovo,  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . L'integrale  $\int_0^{+\infty} e^{-st} dt$  lo abbiamo calcolato qui sopra nel calcolo di  $\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)]$ . Possiamo, in realtà, scrivere il generico caso  $\frac{t^k}{k!}$  perché, se continuiamo a integrare per parti, prima o poi ci riconduciamo ai casi precedenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-st} dt = \\ &= \left[ \frac{t^k e^{-st}}{-sk!} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \stackrel{*}{=} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right] \end{aligned}$$

\*Ponendo sempre  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . È facile allora calcolare  $\mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2]$ , perché questa è uguale a  $\frac{1}{s} \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = 1/s^3$ . In generale, allora,  $\mathcal{L}[t^k/k!] = 1/s^{k+1}$ .

Se includiamo i risultati ottenuti in una tabella, otteniamo:

$f(t)$	$F(s)$	<i>Condizioni</i>
$\delta(t)$	1	
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$Re(s) > Re(a)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$Re(s) > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$Re(s) > 0$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{s^{k+1}}$	$Re(s) > 0$

Abbiamo visto la trasformata dell'esponenziale. In particolare, per l'esponenziale vale la proprietà che  $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$ , perché:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\vartheta t} dt = F(\vartheta) = F(s-a)$$

Usando questa proprietà, è facile vedere come il modo pseudoperiodico abbia trasformate:

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

## Cenni sulle anti-trasformate

Guardando la tabella delle trasformate, possiamo osservare che queste sono tutte funzioni razionali *strettamente proprie*, ovvero tali che il denominatore abbia grado strettamente maggiore del numeratore (se non si conta  $\delta(t)$  che, in realtà, non è una vera funzione). Noi, in genere, dovremo trasformare  $\Phi(t)$ :

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \mathcal{L}[\Phi(t)] = \mathcal{L}[e^{At}]$$

Quando saremo in grado di fare le anti-trasformate, potremo direttamente scrivere che:

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = e^{At}$$

Questo potrà essere utile per, ad esempio, calcolare  $e^{At}$  senza passare per la molteplicità: basta calcolare  $sI - A$ , invertirla e calcolarne l'anti-trasformata. La matrice  $sI - A$  è della forma:

$$sI - A = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s - a_{nn} \end{pmatrix}$$

La sua inversa sarà la *matrice aggiunta trasposta* diviso il suo determinante:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{aggiunta} \\ \text{trasposta} \end{pmatrix}}{\det(sI - A)}$$

Ogni elemento della matrice aggiunta trasposta, come sappiamo, è composto da un termine moltiplicato per il determinante di una matrice  $(n - 1) \times (n - 1)$  di elementi; perciò, il grado di ogni elemento sarà minore o uguale di  $n - 1$ . Il determinante di  $sI - A$ , invece, è un polinomio di grado  $n$ , perciò la matrice  $(sI - A)^{-1}$  resta una matrice di polinomi razionali *strettamente propri*, e da questo segue che  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  è una funzione razionale strettamente propria, e anche  $\Psi(s) = C\Phi(s)$  e  $H(s) = \Phi(s)B$  sono funzioni razionali strettamente proprie. Invece,  $W(s) = C\Phi(s)B + D$  è composta da una somma; la prima parte è strettamente propria, ma sommandoci la matrice  $D$  diventa una *funzione razionale propria* (non strettamente).

Teoria dei Sistemi

## Lezione 16 (26 ottobre 2021)

### Riepilogo della scorsa lezione

Abbiamo visto, nella scorsa lezione, come si calcola la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Questa funzione è biunivoca per  $t \geq 0$ , per cui assumeremo per convenzione che  $f(t) = 0$  per  $t < 0$ . Abbiamo visto che spesso la trasformata si può calcolare se  $\operatorname{Re}(s) > k$ , con  $k$  chiamata *ascissa di convergenza*. Introdotta questa funzione, abbiamo visto che è possibile rappresentare *unicamente* il sistema anche nel dominio di  $s$ :

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + H(s)U(s)$$

$$Y(s) = \Psi(s)x_0 + W(s)U(s)$$

Dove  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ ,  $\Psi(s) = C\Phi(s)$ ,  $H(s) = \Phi(s)B$ ,  $W(s) = C\Phi(s)B$ . Trovate  $X_F(s)$  e  $Y_F(s)$ , dovremo saper tornare a  $x_F(s)$  e  $y_F(s)$ . Ci troveremo sempre delle funzioni razionali strettamente proprie, ad eccezione della funzione razionale propria che si ha quando  $D \neq 0$ .

### Anti-trasformate e residui

Vediamo come si fa l'anti-trasformata con funzioni razionali strettamente proprie. Prendiamo in considerazione, per esempio,  $W(s)$  e l'ingresso fatti in questo modo:

$$W(s) = \frac{1}{s+1}, \quad u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Calcoliamo allora  $Y_F(s)$ :

$$Y_F(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Nella tabella che abbiamo visto la scorsa lezione ci sono solamente termini di grado 1 al denominatore, non sappiamo quindi come fare l'anti-trasformata “a occhio” di questo termine di secondo grado. Possiamo, allora, provare a scriverlo come somma di termini del tipo:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1}$$

Scritto in questo modo, risulta facile vedere che:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s} + \frac{b}{s+1}\right] = a\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + b\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = a\delta_{-1}(t) + be^{-t}$$

Non ci resta che calcolare i coefficienti  $a$  e  $b$ ; un modo è calcolare la somma:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + bs}{s(s+1)} = \frac{(a+b)s + a}{s(s+1)} \stackrel{s=0}{=} \frac{1}{s(s+1)}$$

A questo punto i coefficienti di  $s$  devono essere uguali (a destra la  $s$  scompare, quindi il coefficiente è 0) e i termini noti devono essere uguali; perciò,  $a + b = 0$  e  $a = 1$ , da cui segue che  $b = -1$ . Allora:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \delta_{-1}(t) - e^{-t}$$

Questo metodo, però, può diventare oneroso a livello di calcoli se sono presenti molti termini; c'è un altro modo che potrebbe risultare più veloce. Uguagliamo le due quantità:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1}$$

Per isolare  $a$ , possiamo moltiplicare per  $s$  tutti i termini dell'equazione:

$$\frac{s}{s(s+1)} = \frac{sa}{s} + \frac{sb}{s+1}$$

Per trovare  $a$ , devo far scomparire gli altri termini a destra, in questo caso  $\frac{sb}{s+1}$ ; per farlo, posso calcolare  $s$  in  $s = 0$ , o, più rigorosamente, fare il limite per  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{sa}{s} + \frac{sb}{s+1} \right) = a + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sb}{s+1} = a$$

Ma sappiamo che  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{0+1} = 1$ , perciò possiamo dire che  $a = 1$ . Stessa cosa per trovare  $b$ ; moltiplichiamo tutto per  $(s+1)$ :

$$\frac{s+1}{s(s+1)} = \frac{(s+1)a}{s} + \frac{(s+1)b}{s+1}$$

E mandiamo  $s+1$  a 0, ovvero poniamo  $s \rightarrow -1$ :

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+1}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{(s+1)a}{s} + \frac{(s+1)b}{s+1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)a}{s} + b = b$$

Quindi si ha  $b = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s} = -1$ .

I coefficienti  $a$  e  $b$  si chiamano *residui* e le radici dei fattori al denominatore si chiamano *poli* (in questo caso, quindi, i poli sono 0 e  $-1$ ). Invece di  $a, b, \dots$ , indicheremo i coefficienti con  $R_1, R_2, \dots$ .

## Residui con denominatori di grado maggiore di 1

Se il prodotto  $W(s)U(s)$  (o  $H(s)U(s)$ ) è una cosa di questo tipo:

$$\frac{1}{s^2(s+1)}$$

Scomponendolo in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{R_1}{s^2} + \frac{R_2}{s+1}$$

$\frac{1}{s^2(s+1)}$  è una funzione razionale strettamente propria (il grado del numeratore è strettamente minore di quello del denominatore), e quando la si scomponete si ottengono sempre delle funzioni strettamente proprie; ciò significa che il grado di  $R_2$  è strettamente minore del grado di  $s+1$ , che è 1, perciò necessariamente  $R_2$  è di grado 0,

ovvero è una costante. Però, il grado di  $s^2$  è 2, perciò  $R_1$  può essere di grado 1; pertanto, ci troveremo una forma:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{R_{11}s + R_{12}}{s^2} + \frac{R_2}{s+1}$$

Con  $R_{11}, R_{12}$  costanti. Questo approccio, purtroppo, non funziona per trovare i singoli elementi  $R_{11}$  e  $R_{12}$ , perché non possiamo mettere in evidenza un polinomio per poi fare il limite. Un modo alternativo, allora, è scomporlo una volta per ogni grado di molteplicità del denominatore<sup>1</sup>; quindi:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{R_{11}}{s^2} + \frac{R_{12}}{s} + \frac{R_2}{s+1}$$

Si noti che i coefficienti  $R_{11}, R_{12}$  trovati ora sono differenti da quelli trovati prima. A questo punto,  $R_{11}$  può essere calcolato facilmente:

$$R_{11} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

Questo perché si moltiplicherebbe l'equazione per  $s^2$ , e gli altri termini vanno a zero:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^2 R_{11}}{s^2} + \frac{s^2 R_{12}}{s} + \frac{s^2 R_2}{s+1} \right) = R_{11} + \lim_{s \rightarrow 0} \left( s R_{12} + \frac{s^2 R_2}{s+1} \right) = R_{11}$$

Stessa cosa può essere fatta per  $R_2$ . Per  $R_{12}$ , invece, la situazione è diversa; proviamo a isolarlo dividendo per  $s^2$  come abbiamo fatto prima; otteniamo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( R_{11} + s R_{12} + \frac{s^2 R_2}{s+1} \right)$$

A questo punto, potremmo *prendere la derivata*; questo perché, in questo modo,  $R_{11}$  sparirebbe (è una costante) e  $s R_{12}$  diventerebbe semplicemente  $R_{12}$  che cerchiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2(s+1)} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \lim_{s \rightarrow 0} \left( R_{11} + s R_{12} + \frac{s^2 R_2}{s+1} \right) \right) \\ \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^2}{s^2(s+1)} \right] &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ R_{11} + s R_{12} + \frac{s^2 R_2}{s+1} \right] \end{aligned}$$

Ottenendo, sulla destra:

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \left( R_{12} + \frac{2s(s+1) - s^2}{(s+1)^2} R_2 \right) = R_{12}$$

\*\*\*

Facendo un altro esempio:

$$F(s) = \frac{s-10}{s^3(s+2)} = \frac{R_{11}}{s^3} + \frac{R_{12}}{s^2} + \frac{R_{13}}{s} + \frac{R_2}{s+2}$$

<sup>1</sup> Per esempio, se si ha:

$$\frac{1}{s^2(s+1)^3(s-3)}$$

Allora la scomposizione sarà:

$$\frac{R_{11}}{s^2} + \frac{R_{12}}{s} + \frac{R_{21}}{(s+1)^3} + \frac{R_{22}}{(s+1)^2} + \frac{R_{23}}{s+1} + \frac{R_3}{s-3}$$

A questo punto, per trovare  $R_{13}$  è facile, basta moltiplicare per  $s^3$  e fare il limite per  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s-10}{s+2} = -5$$

Per trovare  $R_{12}$ , invece, basta moltiplicare per  $s^3$ , derivare rispetto ad  $s$  e fare il limite per  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s-10}{s+2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{12}{(s+2)^2} = \frac{12}{4} = 3$$

Per trovare  $R_{13}$ , però, non basta derivare ancora; questo risulta chiaro se vediamo cosa succede derivando due volte  $F(s)s^3$ . Deriviamo la prima volta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s)s^3 &= \frac{d}{ds} \frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)} = \\ &= \frac{d}{ds} \left( R_{11} + sR_{12} + s^2R_{13} + \frac{s^3R_2}{s+2} \right) = \\ &= R_{12} + 2sR_{13} + \dots \end{aligned}$$

Trascuriamo l'ultimo termine che andrà a zero con il limite. Prendendo di nuovo la derivata di quello che abbiamo ottenuto:

$$\frac{d^2}{ds^2} F(s)s^3 = \frac{d}{ds} (R_{12} + 2sR_{13} + \dots) = 2R_{13} + \dots$$

Come si può notare, non si ottiene  $R_{13}$ , ma  $2R_{13}$ , per via delle potenze che “scendono” quando si fa la derivata. Allora, per ottenere  $R_{13}$ , dovremo fare la derivata seconda della funzione ma dovremo anche dividere per 2:

$$R_{13} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{12}{(s+2)^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left( -\frac{24}{(s+2)^3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-24}{8} = -\frac{3}{2}$$

Quindi, in generale, se si deriva  $k$  volte, si deve dividere per  $k!$ .

$R_2$  si trova facilmente (come  $R_{11}$ ) moltiplicando per  $s+2$  e facendo il limite per  $s \rightarrow -2$ :

$$\lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+2)(s-10)}{s^3(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s-10)}{s^3} = \frac{-10}{-8} = \frac{3}{2}$$

## Residui complessi

Può succedere che ci siano radici del denominatore che sono complesse coniugate, per esempio:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{10}{(s+1)(s+j)(s-j)}$$

Per applicare il teorema dei residui, per come lo abbiamo descritto, le radici non sono limitate ad essere reali; funziona, perciò, anche con radici complesse. La funzione allora potrà essere scomposta come:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+j)(s-j)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+j} + \frac{R_3}{s-j}$$

Di conseguenza,  $R_2$  sarà un residuo complesso; anche  $R_3$  sarà complesso e, in particolare,  $R_3 = R_2^*$ , visto che i termini al denominatore sono coniugati. Quindi, in realtà, c'è un calcolo in meno da fare.

Di nuovo,  $R_1$  si calcolerà facendo:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{10}{(s+j)(s-j)} = \frac{10}{1+1} = 5$$

$R_2$  si calcolerà in modo completamente analogo, facendo il limite per  $s \rightarrow -j$ , annullando il termine  $s+j$ :

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -j} (s+j)F(s) = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{10}{(s+1)(s-j)} = \frac{10}{(1-j)(-2j)} = \frac{10}{-2j-2} = -\frac{5}{1+j}$$

Anche  $R_3$  si calcolerà allo stesso modo, ma già sappiamo che  $R_3 = R_2^*$ , perciò possiamo subito concludere che:

$$R_3 = R_2^* = -\frac{5}{1-j}$$

Una volta trovati i residui, si procede ad anti-trasformare; per farlo, si va termine a termine e si avrà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_2}{s+j}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_3}{s-j}\right] = \\ &= R_1 e^{-t} + R_2 e^{-jt} + R_2^* e^{jt} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere la somma dei termini complessi in termini reali, indicando con  $R_{2a}$  la parte reale di  $R_2$  e con  $R_{2b}$  la sua parte complessa:

$$\begin{aligned} R_2 e^{-jt} + R_2^* e^{jt} &= (R_{2a} + jR_{2b})e^{-jt} + (R_{2a} - jR_{2b})e^{jt} = \\ &= R_{2a}(e^{-jt} + e^{jt}) + jR_{2b}(e^{-jt} - e^{jt}) = \\ &= 2R_{2a} \underbrace{\left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)}_{\cos t} - 2j^2 R_{2b} \underbrace{\left(\frac{-e^{-jt} + e^{jt}}{2j}\right)}_{\sin t} = \\ &= 2R_{2a} \cos t + 2R_{2b} \sin t \end{aligned}$$

C'è un'alternativa a questo calcolo; si possono sommare direttamente nel dominio di  $s$ :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+j} + \frac{R_2^*}{s-j} = \\ &= \frac{R_1}{s+1} + \frac{(R_2 + R_2^*)s - j(R_2 - R_2^*)}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{R_1}{s+1} + \frac{2R_{2a}s - j(2jR_{2b})}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{R_1}{s+1} + 2R_{2a} \frac{s}{s^2 + 1} + 2R_{2b} \frac{1}{s^2 + 1} \\ \implies \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= R_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + 2R_{2a} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] + 2R_{2b} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \\ &= R_1 e^t + 2R_{2a} \cos t + 2R_{2b} \sin t \end{aligned}$$

Il caso più complicato che possa accadere è se le radici complesse hanno molteplicità maggiore di 1:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+j)^3(s-j)^3}$$

Che andrà sviluppato come visto per il caso reale.

## Esempio di anti-trasformazione

Troviamo l'anti-trasformata della funzione:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_{11}}{(s+1)^2} + \frac{R_{12}}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

Troviamo i residui:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2}{s+2} = 2 \\ R_{12} &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s+1)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{2}{s+2} = \lim_{s \rightarrow -1} \left( -\frac{2}{(s+2)^2} \right) = -2 \\ R_2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2}{(s+1)^2} = 2 \end{aligned}$$

L'anti-trasformata, allora, sarà:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right]$$

Il calcolo di  $\mathcal{L}^{-1}[-\frac{2}{s+1}]$  è semplice, perché è esattamente  $-2e^{-t}$ , stessa cosa per l'ultimo termine  $\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s+2}]$  che vale  $2e^{-2t}$ . Il primo termine non è immediato; noi sappiamo che  $\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2}$ , e qui abbiamo la stessa funzione traslata di 1; sappiamo anche, però, che l'esponenziale ha una proprietà interessante:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

Perciò, possiamo dire che in questo caso  $a = -1$  e, allora, otteniamo:

$$2\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)^2} \right] = 2e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \right] = 2e^{-t} \delta_{-1}(t)$$

Questo vale in generale: se riconosciamo una funzione nel dominio di  $s$  dove, anziché  $s$ , si ha  $s$  traslato, allora basta moltiplicare per l'esponenziale.

## Calcolo di $e^{At}$ con l'anti-trasformata

Consideriamo un sistema fisico semplice composto da una molla  $k$  e uno smorzatore  $b$  che sorreggono una massa  $M$ . Il sistema, che considereremo un'automobile, sarà descritto da:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) x$$

Poniamo  $M = 1, k = 2, b = 3$  così da avere:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Per esercizio: calcolare  $W(s)$ ; calcolare  $y_F(t)$  quando  $u(t) = \delta_{-1}(t)$ , cioè quando la macchina prende una "botta", uno "scalino"; calcolare  $y_F(t)$  quando  $u(t) = \sin 2t$ , che può essere rappresentato dalla macchina che viaggia su un terreno con dei dossetti<sup>2</sup>.

Da quello che abbiamo studiato, sappiamo che:

$$\Phi(s) = \mathcal{L}[\Phi(t)] = \mathcal{L}[e^{At}]$$

Perciò, per calcolare  $e^{At}$ , possiamo fare:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right)^{-1}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)}\right] \end{aligned}$$

La procedura si fa esattamente come quando nel numeratore ci sono numeri; si calcolano i residui:

$$\frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

L'unica differenza è che, avendo una matrice  $2 \times 2$  e non uno scalare, anche i residui  $R_1$  e  $R_2$  verranno matrici  $2 \times 2$ , e non degli scalari; ma questo era prevedibile, perché stiamo trovando  $e^{At}$ , che, in effetti, è una matrice  $2 \times 2$ . Allora:

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+2)} = \frac{\begin{pmatrix} 3-1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ R_2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Continuando il calcolo dell'anti-trasformata per arrivare a  $e^{At}$ , si ha, quindi:

$$\begin{aligned} \dots &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{s+2}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} e^{-2t} \end{aligned}$$

È evidente che il procedimento non cambia se si lavora con scalari o matrici. Non solo: dalla forma di  $e^{At}$  si possono vedere gli autovalori e i modi naturali; sappiamo che  $e^{At}$  ha la forma:

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} u_1 v'_1 + e^{\lambda_2 t} u_2 v'_2$$

Perciò, gli autovalori saranno proprio  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Inoltre, gli  $u_i$  sono vettori  $n \times 1$  e i  $v'_i$  sono  $1 \times n$  ( $n = 2$  in questo esempio); il prodotto  $u_i v'_i$  sarà una matrice  $n \times n$ , e visto che il rango di  $u_i$  e  $v'_i$  è pari a 1

<sup>2</sup> Su Patreon verrà pubblicato prossimamente un post con la risoluzione dell'esercizio.

(perché è il minimo tra le righe e le colonne), allora anche il loro prodotto sarà una matrice di rango 1. E, in effetti, le matrici  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  hanno rango 1 e sono  $2 \times 2$ , in particolare:

$$u_1 v'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 v'_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

## Teoria dei Sistemi

# Lezione 17 (29 ottobre 2021)

## Studio di $\Phi(s)$ nel caso regolare

Dalle scorse lezioni sappiamo che

$$\Phi(s) = \mathcal{L}[\Phi(t)] = \mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \iff e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$$

Se volessimo studiare  $e^{At}$  possiamo procedere in due modi: calcolare  $e^{At}$  in  $t$ , e quindi seguire tutta la geometria che c'è dietro al calcolo, tra cui diagonalizzazione della matrice  $A$ , calcolo di  $e^{At}$  e prodotti di matrice; oppure, possiamo trovarla in  $s$ , calcolando l'inversa della matrice  $sI - A$  e anti-trasformandola. La domanda è: possiamo vedere tutte le informazioni di  $e^{At}$  anche in  $\Phi(s)$ ? Per il momento, abbiamo sempre immaginato che  $A$  fosse regolare, quindi diagonalizzabile:

$$A = (u_1 \ u_2 \ \dots) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ovvero, se anche abbiamo autovalori con molteplicità maggiore di 1, finché riusciamo a trovare autovettori linearmente indipendenti riferiti allo stesso autovalore, possiamo diagonalizzare  $A$ . Studiamo ora le connessioni con  $\Phi(s)$ , cercando anche di studiare il caso che non abbiamo trattato finora, ovvero quello in cui  $A$  non è diagonalizzabile.

Consideriamo una  $\Phi(t)$  con un autovalore  $\lambda$  di molteplicità maggiore di 1 (poniamola uguale a 2 per semplicità, con autovettori  $u_1$  e  $u_2$ ):

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= (u_1 \ u_2 \ \dots) \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & e^{\lambda t} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \\ &= e^{\lambda t} u_1 v'_1 + e^{\lambda t} u_2 v'_2 + \dots = \\ &= e^{\lambda t} (u_1 v'_1 + u_2 v'_2) + \dots = \\ &= e^{\lambda t} (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Come vediamo, siamo riusciti a raccogliere l'esponenziale  $e^{\lambda t}$  perché è comune ad entrambi i termini che si riferiscono allo stesso autovalore. Se calcoliamo in  $s$ , e ponendo  $R_1 = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$ , ci aspettiamo che  $\Phi(s)$  sia qualcosa del tipo:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \mathcal{L}[R_1 e^{\lambda t} + \dots] = \\ &= R_1 \mathcal{L}^{-1}[e^{\lambda t}] + \mathcal{L}^{-1}[\dots] = \\ &= \frac{R_1}{s - \lambda} + \dots \end{aligned}$$

Il termine che troviamo ha il denominatore *di primo grado*, ma sappiamo che, in questo esempio, il residuo  $R_1$  ha rango 2 (perché prodotto di due matrici di rango 2, la prima di dimensione  $n \times 2$ , la seconda  $2 \times n$ ). Quindi, quando calcoliamo  $\Phi(s)$ , ogni volta che vedremo un polo<sup>1</sup>, quello sarà un autovalore, e la sua *molteplicità* sarà

<sup>1</sup> Si ricorda che un polo, in termini del teorema dei residui, è la *radice* del binomio che c'è al denominatore del residuo. Ovvero, se abbiamo  $\Phi(t) = \frac{R_1}{s - \lambda}$ , allora  $R_1$  è il *residuo* e  $\lambda$ , radice di  $(s - \lambda)$ , è detto *polo*.

proprio il *rango* della matrice  $R_1$  (in questo caso è pari a 2). In definitiva, se  $A$  è diagonalizzabile, allora la  $\Phi(s)$  scomposta in fratti semplici avrà termini con il denominatore di grado 1:

$$\Phi(s) = \frac{R_1}{(s - \lambda_1)^1} + \frac{R_2}{(s - \lambda_2)^1} + \dots$$

In realtà, sappiamo che

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{aggiunta} \\ \text{trasposta} \end{pmatrix}}{\det(sI - A)}$$

dove il termine al denominatore,  $\det(sI - A)$ , può essere riscritto come  $-\det(A - sI)$ , che è, in pratica, il polinomio caratteristico. Allora, al denominatore appariranno tutte le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori, con la loro molteplicità:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{aggiunta} \\ \text{trasposta} \end{pmatrix}}{\det(sI - A)} = -\frac{(\dots)}{(s - \lambda_1)^2(s - \lambda_2)^3 \dots}$$

Però, come abbiamo visto, alla fine devono risultare tutti i fattori al denominatore con grado uguale a 1; ciò significa che si andranno a semplificare con i termini della matrice aggiunta trasposta:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{aggiunta} \\ \text{trasposta} \end{pmatrix}}{\det(sI - A)} = \underbrace{\dots}_{\text{semplificazioni}} = \frac{\dots}{(s - \lambda_1)^1(s - \lambda_2)^1 \dots}$$

Se, nel processo di semplificazione, rimangono termini al denominatore di  $\Phi(s)$  con grado superiore a 1, allora è intuibile che ci troviamo nel caso in cui  $A$  non sia diagonalizzabile: il caso non regolare. Ad ogni modo, non è possibile che, quando si semplifica, si cancelli un intero termine del tipo  $(s - \lambda_i)$ ; quindi, se non viene di grado uguale ad 1, al più può venire di grado superiore, ma mai uguale a 0, e nel caso in cui il grado è maggiore di 1 allora  $A$  non era diagonalizzabile.

Per quanto riguarda le altre matrici, nel calcolo di  $\Psi(s)$  troviamo:

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = C \frac{(\dots)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots}$$

Facendo questo calcolo, è possibile che si cancelli uno dei termini  $(s - \lambda_i)$ , perché in  $\Psi(t)$  possono sparire i termini non osservabili. Stessa cosa vale per  $H(s)$  per quanto riguarda i termini non eccitabili e, di conseguenza,  $W(s)$ .

## Caso non regolare e blocchi di Jordan

Consideriamo, adesso, che la matrice  $A$  abbia  $r$  autovalori con molteplicità  $\mu_1, \dots, \mu_r$ . Se  $\sum_{i=1}^r \mu_i = n$ , allora  $A$  è diagonalizzabile e  $\Lambda$  avrà la forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ \hline & \overbrace{\quad\quad\quad}^{\mu_1} & & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_r & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r \\ \hline & & & & \overbrace{\quad\quad\quad}^{\mu_r} & & \end{pmatrix}$$

Nel caso regolare vale sempre, se  $u$  è un autovettore, che

$$(A - \lambda I)u = 0$$

Ovvero, applicando l'operatore  $(A - \lambda I)$  a  $u$ , si va in zero. Quando, invece, la molteplicità geometrica di un certo autovalore è *inferiore* alla sua molteplicità algebrica, questa cosa accade in più “passaggi”:

$$(A - \lambda I)u_2 = u_1 \rightarrow (A - \lambda I)u_1 = 0$$

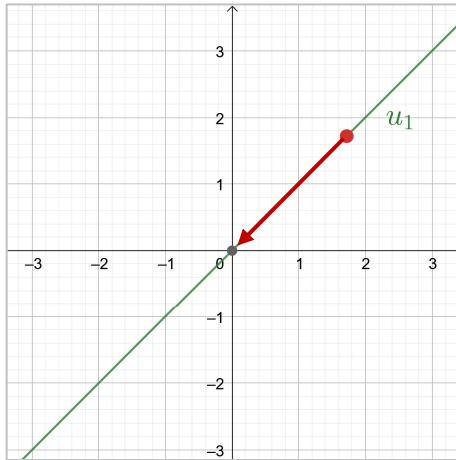
Quindi, applicando l'operatore  $(A - \lambda I)$  ad un autovettore  $u_2$ , *non si va in zero*, ma si ottiene un altro autovettore  $u_1$ ; *se si applica ancora*  $(A - \lambda I)$  a  $u_1$  *si va in zero*. Questo è equivalente a scrivere che

$$(A - \lambda I)^2 u_1 = 0$$

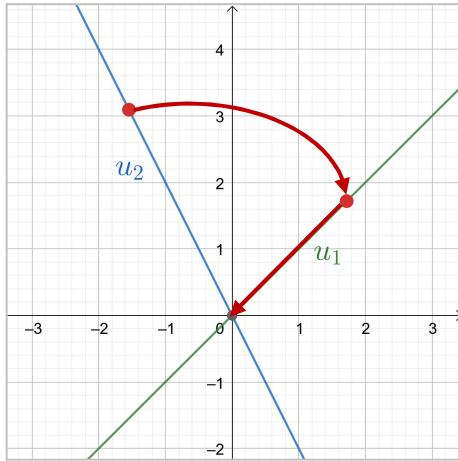
Questo esempio accade quando la molteplicità geometrica è pari a 2; se fosse pari a 3, si farebbe tutto ciò in 3 passaggi:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)u_3 &= u_2 \\ \rightarrow (A - \lambda I)u_2 &= u_1 \iff (A - \lambda I)^3 u_1 = 0 \\ \rightarrow (A - \lambda I)u_1 &= 0 \end{aligned}$$

Graficamente si può interpretare in questo modo: applicando  $(A - \lambda I)$  su  $u_1$ , si va a zero, e questo vale per qualsiasi punto che si trova sul sottospazio individuato da  $u_1$ , ovvero sulla retta verde:



Ora, se la molteplicità geometrica dell'autovalore considerato è, per esempio, 2, allora si andrà comunque in zero, ma “passando” prima per  $u_1$ :



Notiamo che *qualsiasi punto* preso sul sottospazio individuato da  $u_2$  (in questo caso una retta, rappresentata in blu) porta ad un punto sul sottospazio  $u_1$  (la retta verde). Il sottospazio  $u_1$  è *invariante*, perché applicandoci l'operatore  $(A - \lambda I)$  si rimane su  $u_1$  (in particolare, si va in zero).  $u_2$  non è un sottospazio invariante, perché applicando quell'operatore non si rimane su  $u_2$ , ma si va su  $u_1$ ; tuttavia,  $u_1$  e  $u_2$  insieme sono un sottospazio invariante. Gli autovettori  $u_1, u_2, \dots, u_\mu$  sono chiamati *autovettori generalizzati* e queste applicazioni “a catena” dell'operatore  $(A - \lambda I)$  generano *catene di autovettori* (generalizzati). Questo porta la matrice  $\Lambda$  ad assumere una forma particolare; se la molteplicità geometrica è uguale a 1, la matrice sarà:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ovvero, oltre alla diagonale principale dove ci sono i  $\lambda$ , la diagonale subito a destra è composta da 1, che stanno a significare che gli autovettori sono, in qualche modo, “dipendenti” dall'autovettore successivo, fino ad arrivare all'ultimo (tutto il resto della matrice è 0). In generale, se ci sono  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  autovalori, dove  $\lambda_1$  ha molteplicità algebrica  $\mu_1$  e molteplicità geometrica 1, allora la matrice  $\Lambda$  sarà:

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & & \lambda_1 & \\ \hline & \overbrace{\hspace{1cm}}^{\mu_1} & & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r \\ \hline & \overbrace{\hspace{1cm}}^{\mu_r} & & & & & \end{array} \right)$$

Ovvero, nel blocco che ha per diagonale principale  $\lambda_1$ , la diagonale a destra di quella principale si riempie con degli 1. Un esempio rapido in  $n = 3$ , con un solo autovalore  $\lambda$ , se la sua molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica, allora  $A$  è diagonalizzabile e si ha:

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Se, invece, la molteplicità geometrica è pari ad 1:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Per fare un altro esempio, consideriamo una matrice  $A$  dove  $n = 6$ , dove gli autovalori sono  $\lambda_1$  con molteplicità 3,  $\lambda_2$  con molteplicità 1, e  $\lambda_3$  con molteplicità 2. Se la molteplicità geometrica di  $\lambda_3$  è uguale a 1, si avrà:

$$\Lambda = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \boxed{\lambda_2} & \\ & & & & \boxed{\lambda_3 \quad 1} \\ & & & & \hline & & & 0 & \lambda_3 \end{array} \right)$$

Se anche la molteplicità geometrica di  $\lambda_1$  è uguale ad 1, si avrà:

$$\Lambda = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \boxed{\lambda_2} & \\ & & & & \boxed{\lambda_3 \quad 1} \\ & & & & \hline & & & 0 & \lambda_3 \end{array} \right)$$

Questi “blocchetti” di autovalori sulla diagonale e 1 a destra si chiamano *blocchi di Jordan*. Visto che gli autovettori sono sottospazi invarianti, la matrice rimane a blocchi e ciascuno dei blocchi non va ad influenzare gli altri.

## Esponenziale dei blocchi di Jordan

La scrittura a blocchi di Jordan della matrice  $\Lambda$  non crea molti problemi con l'esponenziale  $e^{\Lambda t}$ , che rimane comunque semplice da calcolare. Si dimostra, infatti, che:

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Ovvero, si hanno  $e^{\lambda t}$  sulla diagonale principale, e man mano che ci si sposta sulle diagonali a destra, si moltiplica per  $\frac{t^k}{k!}$ , quindi  $t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}, \dots$ . Quindi, prendendo in considerazione la matrice  $\Lambda$  dell'esempio precedente, avremo:

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \\ & & \boxed{e^{\lambda_2 t}} \\ & & \begin{matrix} e^{\lambda_3 t} & te^{\lambda_3 t} \\ 0 & e^{\lambda_3 t} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

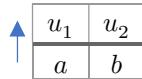
## Catene di autovettori

Finora abbiamo visto il caso limite, ovvero quello in cui la molteplicità geometrica dell'autovalore è 1. Potrebbe, ovviamente, succedere che la molteplicità geometrica sia minore di quella algebrica ma, comunque, maggiore di 1, per esempio se la molteplicità algebrica vale 3 e la geometrica 2. In quel caso, vanno individuate le *catene di autovettori*; si parte studiando quali autovettori vanno a zero direttamente quando si applica  $(A - \lambda I)$ , ovvero tutti gli autovettori  $u$  tali che:

$$(A - \lambda I)u = 0$$

Troveremo tanti vettori indipendenti di questo tipo quanto è la molteplicità geometrica. Prendiamo in considerazione, per semplicità, il caso in cui la molteplicità algebrica di  $\lambda$  è  $\mu = 3$ , e la sua molteplicità geometrica è  $\hat{\mu} = 2$ . Ciò significa che troveremo 2 autovettori  $u_1, u_2$  (relativi allo stesso autovalore  $\lambda$ ), quindi 2 catene distinte relative ad essi, una per ciascuno. Per formare la catena relativa a  $u_1$ , dobbiamo trovare il vettore  $a$  tale che  $(A - \lambda I)a = u_1$ ; a questo punto, avremo la catena  $a \rightarrow u_1$ . Stessa cosa per  $u_2$ : cerchiamo il vettore  $b$  tale che  $(A - \lambda I)b = u_2$  e, se è indipendente dagli altri, possiamo scrivere la catena  $b \rightarrow u_2$ .

Seguendo la notazione del professore, si scrivono gli autovettori in alto e si va “a ritroso” verso il basso:



Per trovare  $a$  si può procedere in due modi: o lo calcoliamo considerando che

$$(A - \lambda I)a = u_1$$

si fa il prodotto considerando  $a$  come un vettore generico, per esempio, per  $n = 3$  (i numeri sono inventati):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{A - \lambda I} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 3 \\ 3a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 4 \\ 4a_1 + 2a_2 + 5a_3 = 2 \end{cases}$$

e si trova  $a$  risolvendo il sistema; oppure, si calcola ponendo:

$$(A - \lambda I)^2 a = 0$$

E quindi va calcolato  $(A - \lambda I)^2$  e poi si trova il vettore  $a$  usando il metodo preferito. Stessa identica cosa, ovviamente, si applica per  $b$ . Ci si ferma quando si trovano tanti vettori indipendenti quanta è la molteplicità

algebrica: se  $\mu = 5$ , si devono trovare 5 vettori indipendenti. Nelle catene si possono trovare anche dei vettori  $a_2, a_3, \dots$  e  $b_2, b_3, \dots$  tali che:

$u_1$	$u_2$
$a$	$b$
$a_2$	$b_2$
$a_3$	$b_3$
$\vdots$	$\vdots$

Ovvvero:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)a_3 &= a_2 & (A - \lambda I)^4 a_3 &= 0 \\ (A - \lambda I)a_2 &= a & \Leftrightarrow & (A - \lambda I)^3 a_2 = 0 \\ (A - \lambda I)a &= u_1 & & (A - \lambda I)^2 a = 0 \end{aligned}$$

Stessa cosa per  $b, b_2, b_3, \dots$

Poniamo caso, per fare un esempio, che un certo autovalore  $\lambda$  è tale che  $\mu = 3$ ,  $\hat{\mu} = 2$ , e che abbiamo trovato, quindi, due catene tali che:

$u_1$	$u_2$
$b$	

Abbiamo tolto  $a$  perché ipotizziamo che i vettori  $a, u_1, u_2$  sono risultati dipendenti<sup>2</sup>. A questo punto, sappiamo che  $u_1$  è sottospazio invariante di per sé, perciò si comporterà come se  $A$  fosse diagonalizzabile; anche  $u_2$  è sottospazio invariante di per sé ma, essendoci  $b$ , compare il blocchetto di Jordan; allora,  $\Lambda$  sarà della forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ \hline & & \ddots \end{pmatrix}$$

*La molteplicità geometrica è pari al numero dei blocchetti di Jordan che compaiono;* in questo caso, infatti,  $\hat{\mu} = 2$  e i blocchi di Jordan sono 2 (uno è il blocco  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , l'altro è il blocco banale  $\boxed{\lambda}$ ). La dimensione del blocco di Jordan più grande è chiamata *indice geometrico* (ovvero, la lunghezza della catena più lunga).

Ricapitolando, la molteplicità algebrica  $\mu$  indica *quanti vettori indipendenti dobbiamo trovare*, la molteplicità geometrica  $\hat{\mu}$  indica *quante catene ci sono* (quindi, quanti sono i blocchetti di Jordan), e l'indice geometrico (I.G.) indica *quanti vettori compaiono nella catena più lunga*.

L'esponenziale viene fatto di conseguenza, per ogni blocchetto. Quindi, in questo caso, avremo:

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{\lambda t}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{\lambda t}} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \\ \hline & & \ddots \end{pmatrix}$$

Si nota che il grado massimo di  $t$  che compare è pari all'indice geometrico meno uno.

---

<sup>2</sup> In realtà, può succedere che siano indipendenti sia i vettori  $a, u_1, u_2$ , sia i vettori  $b, u_1, u_2$ . Il professore non ha specificato quale si debba scegliere in questo caso, perciò si può immaginare che la scelta sia arbitraria.

## Effetti dei blocchi di Jordan in $\Phi(s)$

Prendiamo ancora l'esempio precedente:

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{\lambda t}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{\lambda t}} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad \ddots$$

Calcolando  $\Phi(t)$  si avrà:

$$\Phi(t) = U e^{\Lambda t} U^{-1} = e^{\lambda t} R_1 + (e^{\lambda t} + te^{\lambda t}) R_2 + \dots = \left( \begin{array}{c} \dots \end{array} \right) e^{\lambda t} + \left( \begin{array}{c} \dots \end{array} \right) te^{\lambda t}$$

Ricordando che  $R_1, R_2, \dots$  sono, in realtà, matrici. Con “ $(\dots)$ ” si intende una matrice. Trasformando nel dominio di  $s$  l'espressione ottenuta, otteniamo:

$$\Phi(s) = \left( \begin{array}{c} \dots \end{array} \right) \frac{1}{s - \lambda} + \left( \begin{array}{c} \dots \end{array} \right) \frac{1}{(s - \lambda)^2} + \dots$$

L'effetto dei blocchi di Jordan, allora, è che, nella  $\Phi(t)$  oltre agli esponenziali compaiono anche *polinomi* (potenze di  $t$ , che arrivano fino all'indice geometrico meno 1), e nella  $\Phi(s)$  compaiono *potenze maggiori di 1* al denominatore (che arrivano fino all'indice geometrico stesso).

## Discussione sui modi naturali non regolari

Quando sono presenti anche potenze di  $t$  in  $\Phi(t)$ , cosa chiamiamo “modo naturale”? Possiamo definire, in modo informale, un modo naturale relativo ad un certo autovalore  $\lambda$  come “tutto ciò in cui compare  $e^{\lambda t}$ ”. Potrebbe, però, comunque succedere che, nel calcolo delle altre matrici  $\Psi(t), H(t), W(t)$  scompaiano *solamente alcune parti* di questo modo naturale (cioè, che ne siano osservabili/eccitabili sono alcune parti). In questo caso, ha poco senso parlare di eccitabilità e osservabilità, e parleremo pertanto di *completa eccitabilità* e *completa osservabilità* quando “non scompare nessun pezzo” del modo naturale. Se compare integralmente in  $\Psi(t)$ , diremo che è completamente osservabile, altrimenti diremo che non è completamente osservabile.

\*\*\*

Per esercizio, considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E calcolare  $e^{At}$  separatamente usando i due modi studiati:

1. Calcolando  $e^{\Lambda t}$  e svolgendo il prodotto  $U e^{\Lambda t} U^{-1}$ ;
2. Considerare  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  e calcolare  $e^{At}$  come  $\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$ .

Confrontando i due risultati<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Questo esercizio verrà pubblicato prossimamente come post su Patreon.

Teoria dei Sistemi

# Lezione 18 (2 novembre 2021)

## Esercizio pratico

Consideriamo la matrice  $A$  fatta in questo modo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nelle matrici triangolari, gli autovalori si vedono ad occhio: sono quelli sulla diagonale principale. Quindi, gli autovalori sono  $\lambda_1 = -1$  con molteplicità 1, e  $\lambda_2 = 0$  con molteplicità 2, ovvero:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \lambda_2 = 0 \\ \mu_1 = 1 & \mu_2 = 2 \\ \hat{\mu}_1 = 1 & \hat{\mu}_2 = ? \end{array}$$

Se la molteplicità geometrica  $\hat{\mu}_2$  relativa a  $\lambda_2$  è uguale a  $\mu_2$ , quindi è uguale a 2, si avrà la matrice  $\Lambda$  fatta in questo modo:

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Altrimenti, verrà il blocco di Jordan:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Per trovare la molteplicità geometrica di  $\lambda_2$ , dobbiamo sapere la dimensione del  $\ker(A - \lambda_2 I)$ . Un modo è trovare il sottospazio generato da  $A - \lambda_2 I$  con Gauss, altrimenti possiamo porre:

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Si vede facilmente che il rango di  $A - \lambda_2 I = A$  è pari a 2, perciò il nucleo avrà dimensione 1 ( $\hat{\mu} = 1$ ) e riusciamo a trovare un solo autovettore  $u_2$ . Possiamo scegliere  $a = b = 1$  e otteniamo il vettore

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Visto che la molteplicità algebrica è 2 ma abbiamo trovato un solo autovettore (perché quella geometrica è 1), dobbiamo trovare il vettore  $u_{22}$  tale che:

$$(A - \lambda_2 I)u_{22} = u_2$$

O, in altre parole:

$$(A - \lambda_2 I)^2 u_{22} = 0$$

Calcoliamo  $(A - \lambda_2 I)^2 = A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione del  $\ker(A - \lambda_2 I)^2 = \ker(A^2)$  è 2, perché il rango è 1. Posso quindi trovare due vettori di questo sottospazio, e devo prenderne uno che è *indipendente* da  $u_2$ . Notiamo che possiamo ottenere zero sia sommando le prime due colonne di  $A^2$ , sia sommando le ultime due; perciò, due possibili vettori sono<sup>1</sup>:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Visto che il primo è uguale a  $u_2$ , scegliamo  $u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Allora, avremo che:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \boxed{\lambda_2} & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $U$  conterrà i vettori trovati; troviamo  $u_1$  e costruiamo  $U$ :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)u_1 &= 0 \Rightarrow (A + I)u_1 = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow U = (u_1 \ u_2 \ u_{22}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avremo allora:

$$\begin{aligned} A &= U\Lambda U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ e^{At} &= Ue^{\Lambda t}U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{\lambda_2 t}} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 1e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^{-1} \end{aligned}$$

Continuando il calcolo:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

<sup>1</sup> Un altro modo per trovare i vettori del sottospazio è come ci è stato insegnato nel corso di geometria: fare Gauss e portare la matrice a scalini ridotta, per poi mettere dei parametri nelle colonne dove non ci sono i pivot. In questo caso, la matrice risulta già a scalini ridotta, pertanto ci basta porre la seconda componente uguale a  $x \in \mathbb{R}$  e la terza componente uguale a  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = x - y \\ b = x \\ c = y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \ker A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y$$

E, visto che  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  è  $u_2$ , possiamo scegliere  $u_{22} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Nell'esempio, però, continuiamo con la scelta del professore, ovvero  $u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & 1 & t \\ 0 & 1 & 1+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t}+1 & e^{-t}-1+t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vediamo che compare la prima legge temporale  $e^{-t}$  associata al primo autovalore, e compaiono le leggi temporali del secondo autovalore: il “primo passo” (i termini costanti, ovvero gli 1 che compaiono) e il “secondo passo”, ovvero le  $t$  di primo grado.

Per calcolare l’evoluzione libera del sistema, moltiplichiamo per  $x_0$ :

$$\begin{aligned}
e^{At}x_0 &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 1 & t \\ 0 & 1 & 1+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_c x_0 = \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & 1 & t \\ 0 & 1 & 1+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_{21} + tc_{22} \\ c_{21} + (t+1)c_{22} \\ c_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La forma non è immediatamente comprensibile: possiamo scriverla in un altro modo per evidenziare i modi naturali:

$$\begin{aligned}
e^{At}x_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_c x_0 = \\
&= (u_1 \ u_{21} \ u_{22}) \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= (u_1 \ u_{21} \ u_{22}) \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_{21} + tc_{22} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= c_1 e^{-t} u_1 + (c_{21} + tc_{22}) u_{21} + c_{22} u_{22}
\end{aligned}$$

Vediamo che conosciamo il primo modo naturale: quello aperiodico,  $c e^{-t} u_1$ . Riguardo al resto, non possiamo dire nulla, perché non è chiaro quali siano modi naturali e quali no.

Per quanto riguarda la stabilità del sistema, gli autovalori abbiamo visto che sono  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 0$ , perciò il sistema sarebbe *stabile semplicemente*. Ma se fosse davvero stabile semplicemente, allora l’evoluzione sarebbe *limitata*; così, però, non è: mentre  $e^{-t} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , il termine  $tc_{22}u_{21}$  va all’infinito. Se, invece,  $\lambda_2$  fosse stato minore di zero, allora il termine con la  $t$  avrebbe moltiplicato  $e^{\lambda_2 t}$  e sarebbe andato a zero. Perciò, possiamo dire che, nel caso non regolare ( $A$  non diagonalizzabile), un sistema che sarebbe stabile semplicemente può *divergere*.

Per quanto riguarda la *limitatezza*, allora quando vale  $\operatorname{Re}(\Lambda_{xy}) \leq 0$  nelle condizioni di limitatezza ( $xy$  indica gli osservabili o eccitabili o entrambi, a seconda del caso) sarà, in realtà,  $\operatorname{Re}(\Lambda_{xy}) \leq 0$  se non ci sono blocchi di Jordan (l’indice geometrico è 1), mentre dovrà valere  $\operatorname{Re}(\Lambda_{xy}) < 0$  se compaiono blocchi di Jordan (l’indice

geometrico è maggiore di 1). Si può mettere in evidenza la presenza di blocchi di Jordan usando la notazione con indice geometrico:

$$Re(\Lambda_{xy}^1) \leq 0, \quad Re(\Lambda_{xy}^{>1}) < 0$$

Questo è il procedimento che si userebbe con quello che avevamo studiato in precedenza, ma tutto si può fare, forse più semplicemente, con la trasformata:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}^{-1} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s^2(s+1)} \right] \end{aligned}$$

Abbiamo, come avevamo previsto, una funzione razionale strettamente propria, con un termine al terzo grado al denominatore e termini al più di secondo grado al numeratore. La scorsa lezione avevamo detto che potevano esserci cancellazioni in questo passaggio, ma non potevano “scomparire” termini: l'unico termine che si può semplificare, allora, è  $s$ , ma non  $s^2$ , altrimenti scomparirebbe e non è possibile. Comunque, si può vedere che al numeratore non compare  $s$  ovunque, perciò non verrà semplificata e già sappiamo che comparirà un termine con  $t$ . Ora possiamo procedere all'anti-trasformazione:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s^2(s+1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_{21}}{s^2} + \frac{R_{22}}{s} \right] = R_1 e^{-t} + R_{21} t + R_{22}$$

Il calcolo dei residui è semplice:

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s^2(s+1)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s^2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R_{21} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s^2(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R_{22} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left( \frac{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ 0 & s(s+1) & s+1 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s+1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} \left( \frac{s^2}{s+1} \right) & \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s+1} \right) & \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+1} \right) \\ 0 & \frac{d}{ds}(s) & \frac{d}{ds}(1) \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds}(s) \end{pmatrix} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{s^2 + 2s}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2} & -\frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Questo approccio è, forse, più pulito, ma ancora una volta abbiamo ottenuto un risultato poco interpretabile; non resta, allora, che concentrarci solamente sulla forma.

## Trasformata nel tempo discreto

Nel caso del tempo discreto, l'espressione di  $x(t)$  è:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)$$

La somma forse è più semplice da calcolare dell'integrale, ma rimane comunque il fatto che dobbiamo eseguire il prodotto tra  $H$  e  $u$  per tutti gli elementi della sommatoria; vediamo, allora, se esiste un corrispettivo discreto della trasformata di Laplace  $\mathcal{L}$  del tempo continuo, per riscrivere l'espressione di  $x(t)$  in modo più semplice. Sarebbe anche molto comodo per mantenere il parallelismo dei calcoli con il tempo continuo.

Vorremmo che la trasformata, come quella di Laplace, sia lineare, facile da calcolare e *biunivoca*. Una trasformata che rispetta queste condizioni è la *trasformata zeta*, che effettua la trasformazione  $t \rightarrow z$ :

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \longleftrightarrow & F(z) \\ t \in \mathbb{Z} & & z \in \mathbb{C} \end{array}$$

Che si calcola nel seguente modo:

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

Anche stavolta la trasformata funziona per  $t \geq 0$ . Prendiamo la forma implicita del tempo discreto e calcoliamone la trasformata zeta:

$$\begin{aligned} Z[x(t+1)] &= Z[Ax(t) + Bu(t)] = \\ &= AZ[x(t)] + BZ[u(t)] = \\ &= AX(z) + BU(z) \end{aligned}$$

Come la trasformata della derivata nel caso continuo, nel caso discreto può tornarci utile la trasformata di  $f(t+1)$ :

$$\begin{aligned} Z[f(t+1)] &= \sum_{t=0}^{\infty} f(t+1)z^{-t} = \\ &= \sum_{\tau=1}^{\infty} f(\tau)z^{-(\tau-1)} = \\ &= z \sum_{\tau=1}^{\infty} f(\tau)z^{-\tau} = \\ &= z \left( \underbrace{\sum_{\tau=1}^{\infty} f(\tau)z^{-\tau}}_{Z[f(t)]} + f(0) - f(0) \right) = \\ &= zF(z) - zf(0) \end{aligned}$$

Da cui segue che  $Z[x(t+1)] = zX(z) - zx(0)$ . Otteniamo, allora:

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$zX(z) - AX(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$X(z) = \frac{(zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}BU(z)}{z[\sum_{t=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)]}$$

Allora:

$$Z[\Phi(t)] = \Phi(z) = z(zI - A)^{-1}$$

Calcoliamo ora  $H(t)$ . Ricordiamo che  $\Phi(t) = A^t$ , mentre  $H(t) = A^{t-1}B$ , perciò dovremo calcolare  $Z[A^{t-1}]$  e non  $Z[A^t]$ . La trasformata di una generica  $f(t-1)$  è, analogamente a quella per  $f(t+1)$ :

$$\begin{aligned} Z[f(t-1)] &= \sum_{t=0}^{\infty} f(t-1)z^{-t} = \\ &= \sum_{\tau=-1}^{\infty} f(\tau)z^{-\tau-1} = \\ &= z^{-1} \sum_{\tau=-1}^{\infty} f(\tau)z^{-\tau-1} = \\ &= z^{-1}Z[f(t)] \end{aligned}$$

La sommatoria dopo il cambio di variabile parte da  $\tau = -1$ , ma, come sappiamo, trascuriamo i termini prima di zero e immaginiamo le funzioni moltiplicate per  $\delta_{-1}(t)$ ; perciò, prima di 0 consideriamo che sia tutto nullo.

Allora:

$$Z[H(t)] = Z[A^{t-1}B] = z^{-1}Z[A^t]B = z^{-1}\Phi(z)B = (zI - A)^{-1}B$$

Notiamo come per *anticipare* una funzione di 1, dovremo moltiplicarla per  $z$ , mentre per *ritardare* una funzione di 1, basta moltiplicarla per  $z^{-1}$ . La prossima volta vedremo come anticipare o ritardare una funzione di un numero  $T$  generico di passi.

Teoria dei Sistemi

## Lezione 19 (4 novembre 2021)

### Trasformate Z di funzioni comuni

Abbiamo visto come i sistemi a tempo discreto si possano rappresentare in modi diversi:

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x_0 + \sum_{t=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \Psi(t)x_0 + \sum_{t=0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau) \\ \Downarrow \end{cases} \stackrel{Z}{\Rightarrow} \begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}zx_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = C(zI - A)^{-1}zx_0 + C(zI - A)^{-1}BU(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

La trasformata Z di  $W(t)$  è:

$$Z[W(t)] = \begin{cases} Z[CA^{t-1}B], & t \geq 1 \\ Z[D], & t = 0 \end{cases} = \begin{cases} C(zI - A)^{-1}B, & t \geq 1 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

Come abbiamo fatto per il caso continuo con Laplace, vediamo le trasformate di funzioni comuni che possono comparire nei modi naturali, per poi provare a calcolare le anti-trasformate.

Iniziamo con l'impulso:  $\delta(t)$  è una funzione che vale 1 in  $t = 0$  e 0 altrove, quindi:

$$Z[\delta(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \delta(t)z^{-t} = z^0 = 1$$

Per quanto riguarda la funzione costante, o la funzione gradino  $\delta_{-1}(t)$ , avremo:

$$Z[\delta_{-1}(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_{-1}(t)z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^t = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

La serie è una serie geometrica, che converge alla quantità scritta se  $|\frac{1}{z}| < 1$ , ovvero solo se  $|z| > 1$ . È utile vedere come si trasformeranno gli autovalori, che assumono la forma  $\lambda^t$ : la trasformata di una generica funzione  $a^t$  è:

$$Z[a^t] = \sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^t = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

Anche stavolta, vale la stessa cosa della precedente: la serie converge alla quantità scritta solo se  $|\frac{a}{z}| < 1$ , ovvero se  $|z| > |a|$ . Vediamo i modi periodici e pseudoperiodici:

$$\begin{aligned} Z[\sin \theta t] &= Z \left[ \frac{e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}}{2j} \right] = \\ &= \frac{Z[e^{j\theta t}] - Z[e^{-j\theta t}]}{2j} \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}}}{2j} = \\ &= \frac{z}{2j} \left( \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})} \right) = \\ &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \frac{z}{z^2 - (e^{j\theta} + e^{-j\theta})z + 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \theta \frac{z}{z^2 - 2 \cdot \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} z + 1} = \\
&= \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}
\end{aligned}$$

\*  $e^{j\theta t}$  equivale a  $(e^{j\theta})^t$ , perciò si usa la trasformata di  $a^t$  con  $a = e^{j\theta}$ . Per il coseno, il risultato è analogo:

$$\begin{aligned}
Z[\cos \theta t] &= Z\left[\frac{e^{j\theta t} + e^{-j\theta t}}{2}\right] = \\
&= \frac{Z[e^{j\theta t}] + Z[e^{-j\theta t}]}{2} = \\
&= \frac{\frac{z}{z - e^{j\theta}} + \frac{z}{z - e^{-j\theta}}}{2} = \\
&= \frac{z}{2} \left( \frac{2z - e^{-j\theta} - e^{j\theta}}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})} \right) = \\
&= \frac{z}{2} \left[ \frac{2z - 2 \cdot \frac{e^{-j\theta} + e^{j\theta}}{2}}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} \right] = \\
&= \frac{z^2 - z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}
\end{aligned}$$

Nei modi naturali è comune trovare modi pseudoperiodici, ovvero esponenziali moltiplicati per termini trigonometrici (come nel caso continuo); calcoliamo allora la trasformata della generica funzione  $a^t f(t)$ :

$$Z[a^t f(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} a^t f(t) z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \left(\frac{z}{a}\right)^{-t} = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

Questo perché, se  $\sum f(t) z^{-t} = F(z)$ , allora  $\sum f(t) \left(\frac{z}{a}\right)^{-t} = F\left(\frac{z}{a}\right)$ . Quindi, in particolare per il modo pseudoperiodico:

$$Z[\rho^t \sin(\theta t)] = \frac{\frac{z}{\rho} \sin \theta}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2 \frac{z}{\rho} \cos \theta + 1}$$

Analogamente per il coseno. Possiamo ora costruire una tabella contenente le varie trasformate che abbiamo trovato:

$f(t)$	$F(z)$	<i>Condizioni</i>
$\delta(t)$	1	
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$a^t$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $
$\sin \theta t$	$\frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$	$ z  > 1$
$\cos \theta t$	$\frac{z^2 - z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$	$ z  > 1$
$\rho^t \sin \theta t$	$\frac{\frac{z}{\rho} \sin \theta}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2 \frac{z}{\rho} \cos \theta + 1}$	$ z  >  \rho $

## Anti-trasformazione

A differenza del caso continuo, però, le espressioni ottenute sono tutte delle funzioni razionali *proprie (non strettamente)*. Possono essere strettamente proprie (come nel caso del seno) ma, in generale, non sono proprie *strettamente*. Vediamo allora com'è fatta  $\Phi(z)$ , visto che  $\Phi(s)$  è una funzione razionale strettamente propria:

$$\Phi(z) = z(zI - A)^{-1} = z \frac{\begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{aggiunta} \\ \hline \text{trasposta} \end{pmatrix}}{p(z)}$$

Con  $p(z)$  polinomio caratteristico<sup>1</sup>. La matrice aggiunta trasposta è composta da funzioni razionali strettamente proprie, ma quando viene moltiplicata per  $z$  possono apparire delle funzioni razionali proprie *non strettamente*. In definitiva,  $\Phi(z)$  è una funzione razionale propria non strettamente; per anti-trasformare, allora, è più complicato rispetto ad  $s$ ; per esempio, non possiamo scomporla direttamente in fratti semplici<sup>2</sup>.

Però, tutte le trasformate hanno sempre  $z$  al numeratore, per cui la  $F(z)$  che vogliamo anti-trasformare è una funzione del tipo  $z\bar{F}(z)$ . Allora, prendiamo  $\bar{F}(z)$  (che non è altro che  $F(z)$  divisa per  $z$ ); questa è una funzione *strettamente propria*, che possiamo scomporre in fratti semplici:

$$\bar{F}(z) = \frac{R_1}{z - z_1} + \frac{R_2}{z - z_2} + \dots + \frac{R_n}{z - z_n}$$

Con  $z_1, \dots, z_n$  soluzioni del polinomio caratteristico. Ora, i residui possono essere calcolati usando il teorema dei residui (quello che usavamo nel caso continuo: si moltiplica  $\bar{F}(z)$  per  $(z - z_i)$  e si fa il limite per  $z \rightarrow z_i$  per trovare il residuo  $R_i$ ). Per trovare  $F(z)$ , ora, è semplice:

$$F(z) = z\bar{F}(z) = \frac{z}{z - z_1} R_1 + \frac{z}{z - z_2} R_2 + \dots + \frac{z}{z - z_n} R_n$$

Di conseguenza, troveremo che:

$$\begin{aligned} f(t) &= Z^{-1}[F(z)] = \\ &= Z^{-1}\left[\frac{z}{z - z_1}\right] R_1 + \dots + Z^{-1}\left[\frac{z}{z - z_n}\right] R_n = \\ &= R_1 z_1^t + R_2 z_2^t + \dots + R_n z_n^t \end{aligned}$$

Abbiamo visto, inoltre, che:

$$Z[f(t-1)] = z^{-1} F(z)$$

$$Z[f(t+1)] = zF(z) - zf(0)$$

Quindi, un altro modo per anti-trasformare è considerare le funzioni trasformate nella forma  $z\bar{F}(z)$ , e pensare che, se  $Z^{-1}[\bar{F}(z)] = \bar{f}(t)$ , allora vale che  $Z^{-1}[z\bar{F}(z)] = \bar{f}(t+1)$ . Sono due modi equivalenti di calcolare l'anti-trasformata.

<sup>1</sup> Il determinante di  $(zI - A)$  e il polinomio caratteristico hanno le stesse radici, visto che  $(zI - A) = -(A - zI) = p(z)$ .

<sup>2</sup> Infatti, se  $F(z)$  è una funzione razionale propria non strettamente, per scomporla dobbiamo scrivere:

$$F(z) = \frac{az + b}{z - z_1} + \dots$$

Il denominatore è di grado 1, perciò il numeratore dev'essere anch'esso di grado 1 e compare un polinomio  $(az + b)$ ; questo non accadeva per le funzioni razionali strettamente proprie perché, in quel caso, il numeratore ha grado *strettamente* minore del denominatore e, quindi, se il denominatore ha grado 1, il numeratore ha grado 0 (è una costante).

Prendiamo la funzione trasformata:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)}$$

Per prima cosa consideriamo

$$\bar{F}(z) = \frac{1}{z} F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

e troviamo che  $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$ . Allora, avremo che:

$$\begin{aligned} F(z) &= z\bar{F}(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z+1} \\ \implies Z^{-1}[F(z)] &= \frac{1}{2} Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + \frac{1}{2} Z^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] = \frac{1}{2} 1^t + \frac{1}{2} (-1)^t \end{aligned}$$

Prendiamo, adesso, la seguente  $F(z)$ :

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

In questo caso  $F(z)$  è strettamente propria e possiamo svilupparla in fratti semplici:

$$F(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1}$$

Non sappiamo, però, anti-trasformare le funzioni  $\frac{1}{z-1}$  e  $\frac{1}{z+1}$ . Per risolvere questo, possiamo moltiplicare  $F(z)$  per  $z$ , e anti-trasformarla:

$$\begin{aligned} zF(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z+1} \\ Z^{-1}[zF(z)] &= f(t+1) = \frac{1}{2} 1^t + \frac{1}{2} (-1)^t \end{aligned}$$

Nota che, visto che abbiamo moltiplicato per  $z$ , stiamo calcolando la trasformata della funzione *anticipata*, quindi di  $f(t+1)$  e non di  $f(t)$ . Tuttavia, una volta trovata  $f(t+1)$ , è immediato trovare  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2} 1^{t-1} + \frac{1}{2} (-1)^{t-1}$$

## Anti-trasformare evoluzioni forzate e libere

Per studiare l'evoluzione forzata (o la risposta forzata) del sistema, un modo possibile è scrivere le trasformate di  $H$  (o  $W$ ), calcolare la trasformata di  $u(t)$ , per poi avere che

$$\begin{aligned} x_F(z) &= H(z)U(z) \implies x_F(t) = Z^{-1}[x_F(z)] \\ y_F(z) &= W(z)U(z) \implies y_F(t) = Z^{-1}[y_F(z)] \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le evoluzioni libere, invece, la relazione continuo-discreto è più “diretta”:

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z = Z[\Phi(t)] = Z[A^t]$$

Se  $A$  è regolare, ci aspettiamo, come abbiamo visto, che  $\Phi(z)$  assuma una forma del tipo:

$$\Phi(z) = z(zI - A)^{-1} = z \frac{\begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{aggiunta} \\ \text{trasposta} \end{pmatrix}}{p(z)}$$

Perciò, un modo comune è dividere per  $z$ , svilupparla in fratti semplici, e rimoltiplicarla per  $z$ . Il resto è completamente analogo a quello dei sistemi a tempo continuo. Infatti, se  $A^t$  è della forma:

$$A^t = \lambda_1^t u_1 v'_1 + \lambda_2^t u_2 v'_2 + \dots$$

Allora, si avrà:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{z}{z - \lambda_1} R_1 + \frac{z}{z - \lambda_2} R_2 + \dots \\ Z^{-1}[\Phi(z)] &= A^t = Z^{-1} \left[ \frac{z}{z - \lambda_1} \right] R_1 + Z^{-1} \left[ \frac{z}{z - \lambda_2} \right] R_2 + \dots = \lambda_1^t R_1 + \lambda_2^t R_2 + \dots \end{aligned}$$

E risulta evidente, allora, che  $R_1 = u_1 v'_1, R_2 = u_2 v'_2, \dots, R_n = u_n v'_n$ , proprio come nel caso continuo: il residuo  $R_i$  avrà rango pari alla molteplicità dell'autovalore  $\lambda_i$ .

## Anti-trasformazione di funzioni trigonometriche

Consideriamo il caso in cui:

$$W(t) = 2^t \sin 3t,$$

$$u(t) = \delta_{-1}(t)$$

La risposta forzata  $y_F$  può essere calcolata in questo modo:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z[2^t \sin 3t] = \frac{\frac{z}{2} \sin(3)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 2\frac{z}{2} \cos(3) + 1} = \frac{2z \sin(3)}{z^2 - 4z \cos(3) + 4} \\ U(z) &= Z[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z - 1} \\ \implies y_F(z) &= W(z)U(z) = \frac{2z \sin(3)}{z^2 - 4z \cos(3) + 4} \cdot \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

La funzione risultante è strettamente propria e possiamo svilupparla in fratti semplici, avendo una radice reale data da  $z - 1$  e una coppia di radici complesse coniugate data da  $z^2 - 4z \cos(3) + 4$ , che saranno della forma  $z_{1,2} = \alpha \pm j\omega = \rho e^{\pm j\theta}$ :

$$y_F(z) = \frac{R_1}{z - 1} + \frac{R_2}{z - \rho e^{j\theta}} + \frac{R_2^*}{z - \rho e^{-j\theta}}$$

Non sappiamo anti-trasformare queste funzioni così come sono; allora, moltiplichiamo per  $z$  (anticipiamo la funzione) e calcoliamo l'anti-trasformata che sarà  $y_F(t+1)$ :

$$\begin{aligned} zy_F(z) &= \frac{zR_1}{z - 1} + \frac{zR_2}{z - \rho e^{j\theta}} + \frac{zR_2^*}{z - \rho e^{-j\theta}} \\ \implies y_F(t+1) &= Z^{-1}[zy_F(z)] = R_1 1^t + R_2 (\rho e^{j\theta})^t + R_2^* (\rho e^{-j\theta})^t \end{aligned}$$

Per evitare errori, possiamo sottolineare il fatto—finora rimasto sottinteso—che il tutto, per funzionare, è moltiplicato per  $\delta_{-1}(t)$ :

$$y_F(t+1) = \left( R_1 + R_2 \rho^t e^{j\omega t} + R_2^* \rho^t e^{-j\omega t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Calcolando  $y_F(t)$  si avrà:

$$y_F(t) = \left( R_1 + R_2 \rho^{t-1} e^{j\omega(t-1)} + R_2^* \rho^{t-1} e^{-j\omega(t-1)} \right) \delta_{-1}(t-1)$$

Finora abbiamo sottinteso  $\delta_{-1}$  perché consideriamo l'intervallo di tempo  $t \geq 0$ , e in questo intervallo si ha che  $\delta_{-1}(t) = 1$ ; tuttavia,  $\delta_{-1}(t-1)$  vale 0 in  $t=0$ , e non 1, perciò è utile specificarlo. Una volta ottenuta quest'espressione, va poi portata nel campo reale per poter essere interpretata; quindi, tutti gli esponenziali con  $j$  all'esponente diventeranno termini trigonometrici secondo l'identità di Eulero:  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ .

Un altro modo (sconsigliato) per gestire la coppia coniugata è effettuare la somma direttamente nel dominio di  $z$  e vedere se si riesce a ottenere una funzione trasformata nota della tabella:

$$\begin{aligned} zy_F(z) &= \frac{zR_1}{z-1} + \frac{zR_2}{z-\rho e^{j\theta}} + \frac{zR_2^*}{z-\rho e^{-j\theta}} = \\ &= \frac{zR_1}{z-1} + \frac{zR_2(z-\rho e^{-j\theta}) + zR_2^*(z-\rho e^{j\theta})}{(z-\rho e^{j\theta})(z-\rho e^{-j\theta})} = \\ &= \frac{zR_1}{z-1} + \frac{z(R_a + jR_b)(z-\rho e^{-j\theta}) + z(R_a - jR_b)(z-\rho e^{j\theta})}{(z-\rho e^{j\theta})(z-\rho e^{-j\theta})} = \\ &= \frac{zR_1}{z-1} + z \cdot \frac{2R_a z - \rho R_a(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + j\rho R_b(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{z^2 - \rho z(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + \rho^2} = \\ &= \frac{zR_1}{z-1} + z \cdot \frac{2R_a z - 2\rho R_a \cos \theta - 2\rho R_b \sin \theta}{z^2 - 2\rho z \cos \theta + \rho^2} = \\ &= \frac{zR_1}{z-1} + \frac{z(2R_a z)}{z^2 - 2\rho z \cos \theta + \rho^2} - \frac{z(2\rho R_a \cos \theta + 2\rho R_b \sin \theta)}{z^2 - 2\rho z \cos \theta + \rho^2} \end{aligned}$$

Avendo posto  $R_2 = R_a + jR_b$ , e di conseguenza  $R_2^* = R_a - jR_b$ . Osserviamo che il termine

$$\frac{z(2R_a z)}{z^2 - 2\rho z \cos \theta + \rho^2} = \frac{\frac{z}{\rho} \left( \frac{2R_a}{\rho} \right) \cdot z}{\left( \frac{z}{\rho} \right)^2 - 2 \frac{z}{\rho} \cos \theta + 1}$$

ha (quasi) esattamente la forma della trasformata di  $\rho^t \sin \theta t$ : moltiplicando e dividendo per  $\sin \theta$  al numeratore si ottiene:

$$\frac{\frac{z}{\rho} \left( \frac{2R_a}{\rho} \right) \sin(\theta)}{\left( \frac{z}{\rho} \right)^2 - 2 \frac{z}{\rho} \cos \theta + 1} \cdot z$$

Chiamiamo  $\frac{2R_a}{\rho \sin \theta} = r$  per semplicità di esposizione. A questo punto è proprio la trasformata di  $\rho^t \sin \theta t$ , ma compare una  $z$  di troppo: se pensiamo a quella  $z$  come un anticipo della funzione, è facile vedere come l'anti-trasformata di questa funzione sia:

$$r \rho^{t+1} \sin(\theta(t+1))$$

Ma ricordiamo che all'inizio avevamo moltiplicato per  $z$  perché la funzione era strettamente propria; quindi, si avrà che:

$$\begin{aligned} f(t+1) &= R_1 \delta_{-1}(t) + r\rho^{t+1} \sin(\theta(t+1)) + \dots \\ \implies f(t) &= R_1 \delta_{-1}(t-1) + r\rho^t \sin(\theta t) + \dots \end{aligned}$$

Tralasciando l'ultimo termine. Notiamo che il pezzo che abbiamo trovato,  $r\rho^{t+1} \sin(\theta(t+1))$ , torna "normale" perché la moltiplicazione per  $z$  ha avuto come effetto un anticipo della funzione, ma stiamo trovando l'espressione di  $f(t+1)$ , perciò il termine ridiventa  $r\rho^t \sin(\theta t)$ .

Il procedimento visto in questo modo (il calcolo dei complessi nel dominio di  $z$ ) risulta spesso più lungo e oneroso da svolgere, per cui potrebbe essere più semplice l'altro metodo: lasciare i complessi all'esponente e applicare Eulero per ottenere i termini trigonometrici.