

## Teoria dei Sistemi

**Lezione 27 (18 novembre 2021)****Partizione del sistema secondo l'osservabilità**

La scorsa lezione abbiamo visto gli stati inosservabili e indistinguibili. Abbiamo visto che il sottospazio degli stati inosservabili  $\mathcal{I}$  è definito come

$$\mathcal{I} = \text{Sol} \left\{ \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_I = 0 \right\} = \ker\{v_1, \dots, v_m\}$$

La matrice  $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$  la indicheremo con  $O$ ; allora  $\mathcal{I} = \ker(O)$  e  $m = \dim \ker(O)$ . Abbiamo visto che uno stato inosservabile  $x_I$  è esprimibile nel nuovo sistema di coordinate  $z = Tx$  nella forma<sup>1</sup>:

$$z_I = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche visto che  $T^{-1}$  è formata da due parti: le prime  $m$  colonne sono i vettori di base di  $\mathcal{I}$  e l'altra parte è il *completamento* con  $m - n$  vettori indipendenti per arrivare ad avere in tutto  $n$  vettori indipendenti:

$$T^{-1} = \left( \underbrace{\text{vettori di base di } \mathcal{I}}_m \quad \middle| \quad \underbrace{\text{completamento}}_{n-m} \right)$$

Anche le matrici del sistema sono partizionabili in varie parti:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \overset{m}{\tilde{A}_{11}} & \overset{n-m}{\tilde{A}_{12}} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \}_{n-m}^m, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}_{m \times n-m}$$

E il sistema stesso assume la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{T} \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{cases}$$

Per mettere in evidenza le caratteristiche del sistema in questo nuovo riferimento, lo “dividiamo” in due parti: le parti relative agli stati inosservabili e quelle che non lo sono. Allora, partizioniamo il vettore  $z$ :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

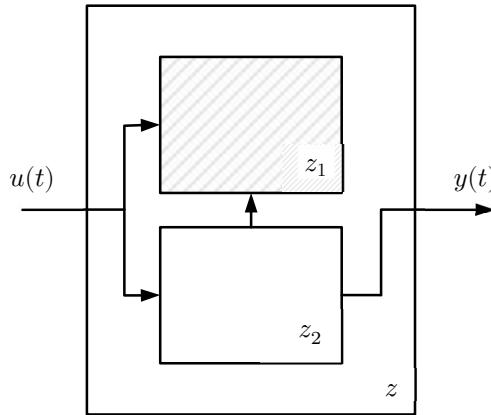
---

<sup>1</sup> D'ora in poi indicheremo  $z$  come  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , dove  $z_1$  è il vettore che contiene le  $m$  componenti legate a  $\mathcal{I}$ , e  $z_2$  tutte quelle che non lo sono.

dove  $z_1$  è il vettore che contiene le  $m$  componenti relative ai vettori della base di  $\mathcal{I}$  (degli stati inosservabili), e  $z_2$  contiene le altre  $n - m$  componenti di completamento, non relative a  $\mathcal{I}$ . Scriviamo il sistema relativamente a  $z_1$  e a  $z_2$ :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \tilde{A}z + \tilde{B}u = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} u \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2u \\ y = \tilde{C}_2z_2 \end{cases}\end{aligned}$$

Disegniamone lo schema:



Si vede chiaramente che, nonostante ci sia dinamica sia in  $z_1$  che in  $z_2$ , esternamente si vede solamente quella di  $z_2$ , mentre non “perviene” quella di  $z_1$ . Con questa partizione del sistema abbiamo una chiara distinzione tra *comportamento interno* e *comportamento esterno*. Internamente c’è tutto  $z$ , mentre esternamente è come se ci fosse solamente  $z_2$ .

Informalmente, si vede calcolando  $\tilde{\Psi}$ :

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{C}e^{\tilde{A}t} = (0 \quad \tilde{C}_2) \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} & * \\ 0 & e^{\tilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} = (0 \quad \tilde{C}e^{\tilde{A}_{22}t})$$

Nell’uscita, quindi, ci saranno non tutti i modi naturali, ma solamente quelli presenti in  $\tilde{A}_{22}$ ; seguendo la definizione, in effetti, gli autovalori che non stanno in  $\Psi$  sono proprio gli autovalori *inosservabili*.

Le definizioni riguardo all’osservabilità sono chiare quando  $A$  è diagonalizzabile, mentre sono più “confuse” quando il caso non è regolare, ovvero quando compaiono i blocchi di Jordan. Per quanto riguarda il caso regolare, possiamo fare chiaramente la distinzione tra modi naturali osservabili e inosservabili, e i modi naturali osservabili sono proprio quelli relativi agli autovalori che compaiono in  $\tilde{A}_{22}$ . Inoltre, se un autovalore  $\lambda_i$  ha molteplicità  $\mu_i > 1$ , potrebbe comparire sia all’interno di  $\tilde{A}_{11}$  che all’interno di  $\tilde{A}_{22}$ ; perciò, limitiamo questa definizione a quando la molteplicità di ciascun autovalore è pari ad 1.

Tutti i ragionamenti che abbiamo fatto finora si sono concentrati soprattutto sulla parte *libera* dell’evoluzione, visto che la parte forzata era praticamente identica in entrambi i sistemi di riferimento. In effetti, si può verificare che vale  $\tilde{W}(t) = \tilde{\Psi}(t)\tilde{B} = W(t)$ .

## Osservabilità nel tempo discreto

Ripartendo dal ragionamento fatto la scorsa volta, scriviamo le relazioni del tempo discreto. Considerando due condizioni iniziali distinte  $x_{0a}$  e  $x_{0b}$ , studiamo quando le relative uscite  $y_a$  e  $y_b$  sono uguali. Queste sono:

$$y_a(t) = \Psi(t)x_{0a} + \sum_{\tau=0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau), \quad y_b(t) = \Psi(t)x_{0b} + \sum_{\tau=0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau)$$

Ponendole uguali  $\forall t \geq 0$  e facendo la differenza tra le due, otteniamo

$$\Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Questo, nel caso del tempo discreto, è vero se e solo se

$$CA^t x_I \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

Ma la condizione non cambia dal tempo continuo: se abbiamo che  $Cx_I = 0, CAx_I = 0, \dots, CA^{n-1}x_I = 0$ , allora varrà anche  $CA^kx_I = 0$  per ogni valore di  $k \geq n$  (teorema di Cayley-Hamilton); unendo i risultati, otteniamo che  $CA^t x_I \equiv 0$  per ogni  $t \geq 0$ . Quindi si ha sempre che:

$$\Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \iff Ox_I = 0$$

Anche il resto è completamente analogo al caso continuo; l'unica differenza è la presenza di  $z(t+1)$  invece di  $\dot{z}(t)$ .

## Esempio pratico

Applichiamo quello che abbiamo trovato finora ad un esempio numerico. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ -1 \ 0)x \end{cases}$$

Studiamone l'osservabilità. Calcoliamo allora  $O$  e troviamo  $\mathcal{I} = \ker(O)$ :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota che ogni riga di  $O$ , a parte la prima che è esattamente  $C$ , è formata dal prodotto della riga precedente per  $A$ . Infatti,  $CA^2 = CA \cdot A = (0 \ 0 \ -1) \cdot A = (0 \ 0 \ 1)$ , e si esegue *senza* calcolare  $A^2$ . Con pochi calcoli, si vede che  $O$  ha rango 2 e che, quindi, il suo nucleo ha dimensione  $m = 1$ . Trovato un vettore di base, possiamo esprimere  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{I} = \ker(O) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Effettuiamo adesso il cambio di coordinate  $z = Tx$ ; calcoliamo allora  $T^{-1}$ . Questa matrice avrà  $m = 1$  vettori della base di  $\mathcal{I}$  e altri 2 vettori indipendenti da questo per arrivare in tutto a  $n = 3$  vettori:

$$T^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

I due vettori a destra sono arbitrari (ma devono essere tali che tutti i 3 vettori sono indipendenti). Invertendo la matrice (con il metodo preferito), si trova che:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora le matrici del sistema, e vedremo che risultano partizionate come avevamo previsto:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad -1 \quad 0) = (0 \quad \tilde{C}_2)$$

Il calcolo di  $\tilde{B}$  lo tralasciamo visto che non è significativo. Gli autovalori del sistema sono tre e distinti (1, 0, -1), perciò la molteplicità di ognuno sarà pari a 1 e possiamo dire che il sistema ha un modo naturale non osservabile corrispondente all'autovalore  $\lambda_1 = 1$ , perché si trova all'interno di  $\tilde{A}_{11}$ ; gli altri due modi naturali sono osservabili e corrispondenti a  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = -1$ .

Inoltre, se il modo naturale  $c_1 e^{\lambda_1 t} u_1$  è inosservabile, allora risulta  $Cu_1 = 0$ ; nelle nuove coordinate, si avrà comunque che  $\tilde{C}\tilde{u}_1 = 0$ , ma essendo  $\tilde{C}$  partizionata e una parte è 0, si avrà:

$$\tilde{C}\tilde{u}_1 = (0 \quad \tilde{C}_{21} \quad \tilde{C}_{22}) \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} \\ \tilde{u}_{12} \\ \tilde{u}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{C}_{21}\tilde{u}_{12} \\ \tilde{C}_{22}\tilde{u}_{13} \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \tilde{u}_{12} = 0, \tilde{u}_{13} = 0$$

Ovvero, il vettore  $\tilde{u}_1$  avrà le ultime  $n - m$  componenti nulle:

$$\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il che significa che  $\tilde{u}_1$  è un vettore contenuto nel sottospazio degli stati inosservabili:

$$\tilde{u}_1 \in \mathcal{I}$$

## Raggiungibilità di uno stato nel tempo discreto

Fissata una certa condizione iniziale  $x_0$ , se mettiamo in un sistema tutti gli ingressi possibili, riusciamo a far assumere a  $x(t)$  qualsiasi valore possibile? In altre parole, è possibile che  $x(t)$  copra tutto lo spazio di stato, o ci sono dei punti che non sono raggiungibili a prescindere dall'ingresso? Definiamo adesso il concetto di *raggiungibilità*. Uno stato  $\hat{x}$  si dice *raggiungibile* all'istante  $T$  partendo dalla condizione iniziale  $x_0$  se esiste un ingresso  $u(t)$  tale che:

$$\hat{x}(T) = \Phi(T)x_0 + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(T-\tau)u(\tau)$$

Se, fissati  $x_0$  e  $T$ , non si riesce a raggiungere  $\hat{x}$  con alcun ingresso, allora lo stato  $\hat{x}$  non è raggiungibile. Una semplificazione importante è che, se  $\hat{x}$  è raggiungibile da  $x_0 = 0$ , allora è raggiungibile da qualsiasi condizione iniziale  $x_0$ .

Prendiamo l'equazione in forma implicita dello stato:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

Poniamo  $t_0 = 0$  e vediamo quali stati riusciamo a raggiungere variando l'ingresso  $u(t)$ . Partiamo da  $t = 0$ ; se poniamo  $x_0 = 0$ , abbiamo:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$$

Guardando quest'espressione, possiamo già dire che ci sono alcuni stati raggiungibili: tutti quelli che si trovano nell'immagine di  $B$  (*vedi nota 2*). Allora, sappiamo che se  $x \in \text{Im}(B)$ , allora  $x$  è sicuramente raggiungibile, e possiamo indicarlo con  $x_R$ . Vediamo ora  $x(2)$ :

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

Quindi, a tutti gli stati raggiungibili contenuti nell'immagine di  $B$  possiamo aggiungere quelli contenuti in  $AB$ ; se scriviamo l'espressione sopra come  $x(2) = (B \ AB) \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$  possiamo dire che  $\text{Im}[(B \ AB)]$  contiene stati tutti raggiungibili. Se continuiamo:

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

Si avrà che  $\text{Im}[(B \ AB \ A^2B)]$  conterrà stati che sono tutti raggiungibili. Possiamo continuare aggiungendo sempre nuovi stati fino ad arrivare a

$$\text{Im}[(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)]$$

Arrivati a questo punto, non ha senso continuare; questo perché  $A^n$  è scrivibile (per il teorema di Cayley-Hamilton che abbiamo usato molto nella scorsa lezione) come combinazione lineare delle potenze precedenti; per cui, una volta che si hanno tutte le potenze di  $A$  fino a  $n-1$ , automaticamente si hanno anche le potenze superiori, e scriverle è superfluo (sono linearmente dipendenti).

La matrice  $R := (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$  è la matrice la cui immagine  $\mathcal{R}$  contiene tutti gli stati raggiungibili:

$$x_R \in \text{Im}(R) = \mathcal{R}$$

Possiamo dire anche *dopo quanti* istanti di tempo un certo stato è raggiungibile: se  $x_R \in (B \ AB \ A^2B)$  ma  $x_R \notin (B \ AB)$ , allora lo stato è raggiungibile per  $t \geq 3$ . Possiamo definire una base di  $\mathcal{R}$  che è formata semplicemente dalle colonne indipendenti di  $R$ .

## Partizione del sistema secondo la raggiungibilità

Come abbiamo fatto per l'osservabilità, sarebbe comodo definire un cambio di coordinate tale da mettere in evidenza la raggiungibilità del sistema, per poter vedere subito come si comporta il sistema per quanto riguarda gli stati raggiungibili.

Prendiamo  $z = Tx \iff x = T^{-1}z$ ; per la stessa logica degli stati inosservabili, avremo che:

$$T^{-1} = (\text{vettori di base di } \mathcal{R} \mid \text{completamento})$$

---

<sup>2</sup>  $B$  è una matrice, cioè un operatore lineare, per cui possiamo immaginarlo come una funzione (e, in effetti, può essere la matrice rappresentativa di una funzione lineare); l'immagine di  $B$  è l'insieme dei valori che può assumere  $Bu$ .

Facendo il cambio di coordinate, si ha

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= TR = (\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) \\ \tilde{\mathcal{R}} &= \text{Im}(\tilde{R})\end{aligned}$$

E vogliamo che un qualsiasi stato in  $z$  abbia due “set” di componenti, quelle legate alla raggiungibilità e quelle che non lo sono, e che un qualsiasi stato raggiungibile  $z_R$  abbia solamente componenti legate alla raggiungibilità, con le altre nulle:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z_R = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui, visto che per ogni  $t \geq 1$  deve essere vero che tutti gli elementi di  $\tilde{\mathcal{R}}$  sono stati raggiungibili, in particolare deve essere vero per  $t = 1$ , dove si ha  $\tilde{R} = (\tilde{B})$ ; quindi, ogni elemento dell’immagine dev’essere un vettore che ha la parte non legata a  $\mathcal{R}$  uguale a zero:

$$\tilde{\mathcal{R}} = \text{Im}(\tilde{B}) \implies \tilde{B}v = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall v$$

Da cui segue che, necessariamente,  $\tilde{B}$  ha la forma<sup>3</sup>:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Invece,  $\tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2)$  può assumere qualsiasi forma. La struttura di  $\tilde{A}$  è la stessa del caso degli stati inosservabili:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Anche nel caso della raggiungibilità, si può trovare che se uno stato  $x$  è raggiungibile, allora anche  $Ax$  è raggiungibile, e la dimostrazione è la stessa degli stati inosservabili; si ha, quindi, che  $\mathcal{R}$  è un sottospazio invariante rispetto ad  $A$ .

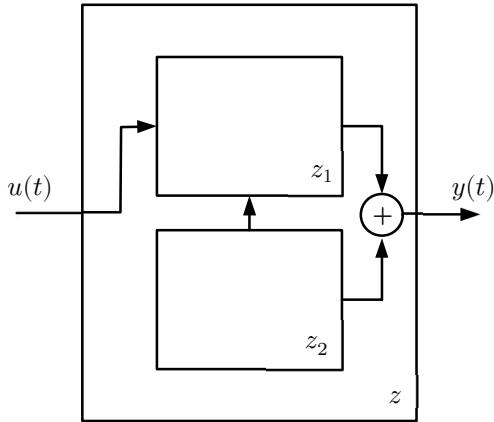
Vediamo la struttura del sistema con questo cambio di coordinate:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{B}_1u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{22}z_2 \\ y = \tilde{C}_1z_1 + \tilde{C}_2z_2 \end{cases}$$

---

<sup>3</sup> Sottolineiamo che  $\tilde{B}_1$  non è (necessariamente) un elemento, ma è un gruppo; la scrittura  $\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  indica che ci saranno delle righe di  $\tilde{B}$  che possono essere qualsiasi cosa (anche zero), mentre le altre righe sono necessariamente nulle. Lo stesso discorso vale per  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  e  $z_R = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Disegnando il diagramma del sistema si ottiene:



Si vede chiaramente che, nonostante nell'uscita contribuiscano sia le parti non raggiungibili sia quelle raggiungibili, e nonostante  $z_2$  abbia la sua influenza su  $z_1$ , l'ingresso riesce ad arrivare solamente alle parti raggiungibili del sistema. Per cui, la parte  $z_2$  non influisce nel rapporto ingresso-stato; se andiamo a vedere  $\tilde{H}$ , in effetti, si ha:

$$\tilde{H} = e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\tilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, in  $\tilde{H}$  si avranno solamente i modi naturali che si originano dagli autovalori presenti in  $\tilde{A}_{11}$ , mentre quelli in  $\tilde{A}_{22}$  si perdono. E, in effetti, in  $\tilde{H}$  ci saranno solamente i modi naturali eccitabili, mentre quelli non eccitabili non compaiono; perciò,  $\tilde{A}_{11}$  conterrà gli autovalori eccitabili, mentre  $\tilde{A}_{22}$  quelli non eccitabili (sempre se  $\mu_i = 1$ ; negli altri casi non è così immediata la distinzione).

Teoria dei Sistemi

# Lezione 28 (19 novembre 2021)

## Raggiungibilità nel caso continuo

La scorsa volta abbiamo visto la raggiungibilità nel caso discreto. Nel caso del tempo continuo, uno stato  $x_R$  è raggiungibile partendo da una condizione iniziale  $x_0$  in un istante  $T$  quando:

$$x_R(T) = \Phi(T)x_0 + \int_0^T H(T-\tau)u(\tau) d\tau$$

Visto che il sistema è lineare, possiamo porre  $x_0 = 0$ , ottenendo:

$$x_R(T) = \int_0^T H(T-\tau)u(\tau) d\tau$$

Consideriamo, prima di tutto,

$$u(t) = B'e^{-A't}M$$

dove  $B'$  è la matrice trasposta di  $B$ ,  $A'$  è la matrice trasposta di  $A$  e  $M$  è una matrice costante. Otteniamo:

$$\begin{aligned} x_R(T) &= \int_0^T H(T-\tau)u(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau) d\tau = \\ &= e^{AT} \underbrace{\int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau} d\tau}_\text{termine costante} M \end{aligned}$$

Visto che l'integrale è definito ed è un termine costante, se l'integrale esiste posso porre

$$M = \left[ \int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau} d\tau \right]^{-1} e^{-AT}x_R$$

Così facendo, si ha

$$x_R(T) = e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau} d\tau M = x_R$$

Un ingresso di questo tipo quindi è valido, a patto che l'integrale sia definito e che, soprattutto, sia definito il suo inverso. Infatti, nell'integrale si ha che  $e^{-At}B$  è una matrice  $n \times p$ , mentre  $B'e^{-A't}$  è una matrice  $n \times p$ ; il loro prodotto è una matrice  $n \times n$  ma il rango di questa matrice è  $p$  (perché è il minimo tra  $n$  e  $p$ ). Queste matrici dipendono dal tempo; se fossero state costanti, sicuramente non avrebbe ammesso inversa. Essendo variabili, possiamo studiare quando la matrice

$$\int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau} d\tau \tag{♠}$$

ha rango  $n$ . Per prima cosa, possiamo scrivere le matrici  $e^{-At}B$  e  $B'e^{-A't}$  sviluppando l'esponenziale in serie:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A^i \tau^i}{i!} B \right) \left( B' \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A'^i \tau^i}{i!} \right) d\tau = \\ &= \int_0^T \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A^i \tau^i}{i!} B \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A'^i \tau^i}{i!} B \right)' d\tau \end{aligned}$$

Prendiamo il primo termine tra parentesi. Possiamo riscriverlo sotto forma di prodotto matriciale:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A^i \tau^i}{i!} B = (B \ AB \ \dots \ A^k B \ \dots) \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ \vdots \\ (-1)^k \tau^k / k! \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La prima matrice è una matrice *costante*, mentre la seconda matrice varia in modo polinomiale. Il rango della matrice  $\sum_i (-1)^i \frac{A^i \tau^i}{i!} B$ , allora, avrà rango pari a quello della matrice  $(B \ AB \ \dots \ A^k B \ \dots)$ . Segue che la matrice data dall'integrale ( $\spadesuit$ ) è invertibile quando ha rango  $n$ , e questo succede quando la matrice della sommatoria ha rango  $n$ , ovvero quando ha rango  $n$  la matrice  $(B \ AB \ \dots \ A^k B \ \dots)$ . Per Cayley-Hamilton sappiamo che questo è equivalente a dire che la matrice

$$R = (B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B)$$

deve avere rango pieno (uguale a  $n$ ). Questo accade quando *tutti gli stati del sistema sono raggiungibili*. Perciò, tempo continuo e discreto sono analoghi.

## Esempio pratico

Consideriamo il sistema a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -5/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & 6/7 & 2/7 \\ -6/7 & 4/7 & -1/7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 5/7 & -1/7 & 2/7 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Studiamone la raggiungibilità. Calcoliamo, allora,  $R$ :

$$R = (B \ AB \ A^2 B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

È immediato vedere che  $\text{rango}(R) = 1$  e che, quindi:

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Tutti gli stati che hanno questa struttura sono, allora, raggiungibili. Mettiamo in evidenza questa struttura; cambiamo base, e vorremmo avere lo stato espresso come  $z = Tx$  tale che, se  $x_R$  è uno stato raggiungibile, allora:

$$z_R = Tx_R = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Completiamo il vettore di  $\mathcal{R}$  con altri 2 vettori indipendenti per formare  $T^{-1}$ :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ci aspettiamo, come al solito, che  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  abbiano la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (\star \ \star \ \star)$$

Calcoliamole:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la raggiungibilità:

$$\tilde{H}(t) = e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} & \star \\ 0 & e^{\tilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di  $\tilde{A}_{11}$  caratterizzano i modi naturali eccitabili, per cui la legge temporale del modo naturale relativa a  $\lambda_1 = -1$  è presente in  $H$ . Per essere sicuri che  $-1$  sia eccitabile, dovremo vedere se compare anche in  $\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ ; in caso affermativo,  $-1$  non è eccitabile, altrimenti lo è. Gli autovalori di  $\tilde{A}_{22}$  sono  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 0$ ; perciò,  $\lambda_1 = -1$  è quindi relativo ad un modo naturale eccitabile.

Sottolineiamo che se un autovalore compare, oltre che in  $\tilde{A}_{11}$ , anche in  $\tilde{A}_{22}$ , non possiamo dire molto sulla natura del modo naturale associato. Dovremmo, allora, studiare l'eccitabilità nel modo classico. La raggiungibilità e la eccitabilità, allora, non sono sempre strettamente collegate.

## Scomposizione di Kalman

Una volta studiati gli stati inosservabili e raggiungibili, troviamo i sottospazi:

$$\mathcal{I} = \text{span}\{v_1, \dots, v_s\}$$

$$\mathcal{R} = \text{span}\{w_1, \dots, w_r\}$$

Vorremmo ora sapere se uno stato appartiene a  $\mathcal{I}$  e se appartiene a  $\mathcal{R}$ . Per prima cosa, vediamo se uno stato  $x$  appartiene ad entrambi; come sappiamo, l'intersezione di due sottospazi è anch'essa un sottospazio, perciò vediamo se  $x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{R}$ , che chiameremo  $\chi_1$  ("χ" si legge "chi"):

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$$

Se uno stato  $x$  non fa parte di  $\chi_1$ , vuol dire che o  $x \notin \mathcal{R}$ , oppure  $x \notin \mathcal{I}$ . Allora, definiamo i sottospazi vettoriali  $\chi_2$  e  $\chi_3$  in questo modo<sup>1</sup>:

$$\chi_2 : \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathcal{R}$$

$$\chi_3 : \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathcal{I}$$

Cioè,  $\chi_2$  sarà il sottospazio "mancante" a  $\chi_1$  per formare  $\mathcal{R}$ , per cui definiamo  $\chi_2$  come il sottospazio che, sommato a  $\chi_1$ , dà  $\mathcal{R}$  (cosa analoga per  $\chi_3$ ). Per completezza, possiamo definire

$$\chi_4 : \chi_4 \oplus \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 = \mathbb{R}^n$$

---

<sup>1</sup> Il simbolo  $\oplus$  sta per "somma diretta", e l'avevamo visto nel corso di geometria. Mentre l'unione di due sottospazi non è sottospazio, la somma + di due sottospazi lo è, ed è uguale al sottospazio formato dall'unione delle basi. In particolare, se questi due sottospazi non hanno nulla in comune, ovvero la loro intersezione è il vettore nullo, allora la somma diventa diretta e si esplicita con il simbolo  $\oplus$ . In pratica, le coppie di sottospazi  $\chi_1, \chi_2$  e  $\chi_1, \chi_3$  sono, per definizione, senza nulla in comune.

Questi sottospazi rappresentano rispettivamente:

- $\chi_1$ : stati raggiungibili e inosservabili
- $\chi_2$ : stati raggiungibili e non inosservabili
- $\chi_3$ : stati non raggiungibili e inosservabili
- $\chi_4$ : stati non raggiungibili e non inosservabili

Questa scomposizione in sottospazi prende il nome di *scomposizione di Kalman*<sup>2</sup>.

L'obiettivo, allora, sarebbe cambiare base e partizionare uno stato  $z$  in *quattro parti*, relative ai quattro sottospazi<sup>3</sup>:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \text{ con } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ blocchi}$$

E questo possiamo farlo costruendo, come abbiamo già fatto,  $T^{-1}$  in questo modo:

$$T^{-1} = (\text{base di } \chi_1 \mid \text{base di } \chi_2 \mid \text{base di } \chi_3 \mid \text{completamento})$$

Per cui, se avessimo, ad esempio:

$$z = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $z$  a blocchi, potremmo dire subito che  $z$  è un elemento di  $\chi_1$ , quindi raggiungibile e inosservabile. Se  $z$  fosse, invece:

$$z = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora è un elemento sia di  $\chi_1$  che di  $\chi_2$ , ma  $\chi_1 \oplus \chi_2 = \mathcal{R}$ , per cui sappiamo che  $z \in \mathcal{R}$ , per cui è raggiungibile (ma non possiamo essere certi sulla inosservabilità) e così via.

<sup>2</sup> La somma diretta  $\oplus$  non può essere “invertita”. Se  $\mathcal{R} = \chi_1 \oplus \chi_2$ , **non è vero che**, ad esempio,  $\chi_2 = \mathcal{R} - \chi_1$ . La “somma” tra spazi vettoriali indica l'unione delle corrispettive basi, e non ha nulla a che vedere con la differenza.  $\chi_2$  si trova aggiungendo dimensioni (quindi, vettori indipendenti alla base) a  $\chi_1$ , fino a completare  $\mathcal{R}$ .

<sup>3</sup> (N.d.R.) Userò la notazione  $\boxed{z}$  per indicare un blocco di nome  $z$ . Questo blocco è formato da un numero specifico di componenti; per esempio, se prendiamo l'esempio pratico sopra, la matrice  $\tilde{A}$  è della forma  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$ , dove  $\tilde{A}_{11} = -1$ ,  $\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$ ,

$$\tilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

## Struttura delle matrici nella scomposizione di Kalman

Vediamo che forma assumono le matrici del sistema con questa scomposizione, che in genere sono partizionate in quattro:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ \tilde{B}_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad \tilde{C}_3 \quad \tilde{C}_4)$$

Poniamo che le dimensioni relative ai vari blocchetti sono rispettivamente  $n_1, n_2, n_3, n_4$  tali che la loro somma è  $n$ .

Per quanto riguarda la raggiungibilità, consideriamo uno stato *raggiungibile*  $z_R$ ; questo è della forma:

$$z_R = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'immagine di  $\tilde{B}$  deve stare dentro lo spazio generato da  $z_R$ , per cui dovremo avere che questa matrice sarà della forma

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il primo blocco è legato agli stati raggiungibili e inosservabili, mentre il secondo agli stati raggiungibili e non inosservabili.

Uno stato raggiungibile moltiplicato per la matrice  $\tilde{A}$  dà come risultato uno stato raggiungibile, perciò:

$$\tilde{A}z_R = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = z'_R \quad \forall z_1, z_2$$

La prima e la seconda riga di  $\tilde{A}$  possono essere qualsiasi cosa, perché possono essere qualsiasi cosa i blocchi  $z'_1$  e  $z'_2$ ; tuttavia, la terza e quarta riga devono essere tali che, moltiplicate per  $z_R$ , diano zeri nella terza e quarta componente di  $z'_R$  per ogni valore di  $z_1$  e  $z_2$ ; per cui, i gruppi  $\tilde{A}_{31}, \tilde{A}_{32}, \tilde{A}_{41}, \tilde{A}_{42}$  devono essere nulli, e  $\tilde{A}$  avrà la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora uno stato *inosservabile*  $z_I$ , che avrà la forma:

$$z_I = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deve risultare  $\tilde{C}z_I = 0$ ,  $\forall z_I$ ; per cui:

$$(\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad \tilde{C}_3 \quad \tilde{C}_4) \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall z_1, z_3$$

Da cui segue che, necessariamente,  $\tilde{C}_1 = 0$  e  $\tilde{C}_3 = 0$ . Allora, la matrice  $\tilde{C}$  sarà:

$$\tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad 0 \quad \tilde{C}_3 \quad 0)$$

Anche  $\mathcal{I}$  è invariante rispetto ad  $\tilde{A}$ , perciò  $Az_I$  darà come risultato uno stato  $z'_I$  anch'esso inosservabile:

$$\tilde{A}z_I = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ 0 \\ z'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = z'_I \quad \forall z_1, z_3$$

Perché  $z'_2$  e  $z'_4$  siano sempre uguali a zero, deve risultare necessariamente che i coefficienti che moltiplicano  $z_1$  e  $z_3$  siano sempre zero, per ogni  $z_1$  e  $z_3$ ; perciò, devono essere nulli i blocchi  $\tilde{A}_{21}, \tilde{A}_{23}, \tilde{A}_{43}$  (oltre a  $\tilde{A}_{41}$  che è già zero per la raggiungibilità).

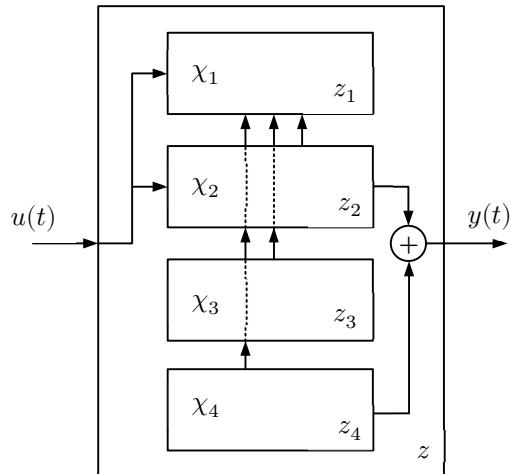
In definitiva, la struttura delle matrici è la seguente:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad 0 \quad \tilde{C}_3 \quad 0)$$

Mentre il sistema sarà espresso come:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}z_1 + \tilde{A}_{12}z_2 + \tilde{A}_{13}z_3 + \tilde{A}_{14}z_4 + \tilde{B}_1 u \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{A}_{24}z_4 + \tilde{B}_2 u \\ \dot{z}_3 = \tilde{A}_{33}z_3 + \tilde{A}_{34}z_4 \\ \dot{z}_4 = \tilde{A}_{44}z_4 \\ y = \tilde{C}_2 z_2 + \tilde{C}_4 z_4 \end{cases}$$

Il diagramma del sistema è il seguente:



Notiamo che  $z_2$  riceve l'ingresso  $u$  e arriva in uscita (visto che è raggiungibile e non inosservabile), mentre  $z_4$  non riceve ingresso e non dipende dalle altre parti, ma arriva comunque in uscita (non inosservabile e non raggiungibile).  $z_3$  è la parte non raggiungibile e inosservabile, e  $z_1$  è inosservabile ma raggiungibile.

## Teoria dei Sistemi

**Lezione 29 (22 novembre 2021)****Primo esercizio**

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ -2 \ -1)x \end{cases}$$

Abbiamo uno stato di dimensione 3 ( $n = 3$ ), con un ingresso ( $p = 1$ ) e un'uscita ( $q = 1$ ).

**Autovalori.** Studiamo innanzitutto la geometria del sistema, quindi gli autovalori di  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & -2 \\ 2 & -4 - \lambda & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)(-4 - \lambda)(-\lambda) - 6 - 4 + 2(4 + \lambda) - 6\lambda + 2(1 - \lambda) = \\ &= \lambda(1 - \lambda)(4 + \lambda) - 6\lambda = \\ &= \lambda((1 - \lambda)(4 + \lambda) - 6) = \\ &= \lambda(-\lambda^2 - 3\lambda - 2) \stackrel{\text{set}}{=} 0 \end{aligned}$$

Da cui troviamo che

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2$$

Il simbolo  $\stackrel{\text{set}}{=}$  significa “poniamo uguale a”.

**Autovettori.** Per trovare gli autovettori, prendiamo ciascun autovalore e calcoliamo  $(A - \lambda_i I)u_i = 0$ . Per  $\lambda_1 = 0$  abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 - \lambda_1 & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} u_1 \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

Notiamo che possiamo ottenere 0 sommando la prima e la seconda colonna, e sottraendo la terza colonna. Perciò, le prime due componenti di  $u_1$  saranno pari a 1 e la terza componente sarà  $-1$  (ci sono molti altri modi per farlo e si possono trovare anche diversi autovettori):

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per  $\lambda_2 = -1$  abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & -3 & -2 \\ 2 & -4 - \lambda_2 & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} u_2 \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

Si vede subito che prendendo la prima colonna e sommandola con l'ultima si ottiene zero; perciò, l'autovettore che cerchiamo sarà:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mentre, per  $\lambda_3 = -2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_3 & -3 & -2 \\ 2 & -4 - \lambda_3 & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} u_2 \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

Di nuovo, possiamo ottenere zero sommando facilmente delle colonne. Stavolta, possiamo sommare le prime due colonne, ottenendo  $u_3$ :

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Autovettori sinistri.** Trovati gli autovettori destri  $u_1, u_2, u_3$ , non resta che costruire la matrice  $U$ :

$$U = (u_1 \ u_2 \ u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Invertendola otteniamo:

$$V = U^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui, gli autovettori sinistri saranno:

$$v'_1 = (1 \ -1 \ -1)$$

$$v'_2 = (1 \ -1 \ 0)$$

$$v'_3 = (-1 \ 2 \ 1)$$

**Evoluzione libera.** Possiamo scrivere l'evoluzione libera del sistema come<sup>1</sup>:

$$x_L(t) = \Phi(t)x_0 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove  $c_i = v'_i x_0$ . Tutti i modi naturali sono aperiodici (perché non compaiono termini complessi o trigonometrici). Le leggi temporali con  $e^{-t}$  ed  $e^{-2t}$  tendono a zero, mentre il primo modo naturale, relativo a  $\lambda_1 = 0$ , è costante. Se volessimo far tendere a zero l'evoluzione libera, il termine costante dev'essere pari a zero, quindi deve risultare  $c_1 = v'_1 x_0 = 0$ ; questo significa che la condizione iniziale dev'essere tale che non ci siano componenti su  $u_1$ . Se la

---

<sup>1</sup> Non è necessario calcolare  $\Phi(t) = e^{At}$  per sapere com'è fatta l'evoluzione libera  $x_L(t) = \Phi(t)x_0$ . Questo perché, nelle prime lezioni, avevamo visto che:

$$\Phi(t)x_0 = e^{At}x_0 = Ue^{\Lambda t}U^{-1}x_0 = \sum_{i=0}^n e^{\lambda_i t} u_i \underbrace{v'_i x_0}_{c_i} = \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

che è proprio la forma in cui stanno scritti sopra.

componente su  $u_1$  dev'essere nulla, significa che  $x_0$  si deve trovare sul sottospazio generato unicamente da  $u_2$  e  $u_3$ , ovvero  $x_0$  dev'essere della forma:

$$x_0 = \alpha u_2 + \beta u_3$$

**Eccitabilità e osservabilità.** Prendiamo il primo modo naturale,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e studiamone l'eccitabilità e l'osservabilità. Per l'eccitabilità, facciamo

$$v'_1 B = (1 \ -1 \ -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Essendo diverso da zero, il modo naturale è *eccitabile*. Per quanto riguarda l'osservabilità abbiamo:

$$Cu_1 = (1 \ -2 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Pertanto, il modo naturale è *non osservabile*. Calcolando anche eccitabilità e osservabilità degli altri due modi naturali (che ometto), si trova che il modo relativo a  $\lambda_2 = -1$  è eccitabile e non osservabile, mentre il modo relativo a  $\lambda_3 = -2$  è non eccitabile e osservabile. Riassumendo, in termini di insiemi:

$$\Lambda_e = \{0, -1\}, \quad \Lambda_o = \{-2\}, \quad \Lambda_{e,o} = \{\}$$

**Stabilità del sistema.** Vedendo gli autovalori, si vede subito che il sistema è *stabile semplicemente*, perché sono a parte reale non positiva, e  $\lambda_1 = 0$  ha molteplicità geometrica pari a 1 (*vedi nota 2*). Per essere stabile esternamente, il sistema deve avere  $\Psi$  limitata e  $W$  convergente; perciò, gli autovalori osservabili devono avere parte reale minore o uguale a zero e gli autovalori sia osservabili che eccitabili con parte reale strettamente negativa:

$$\begin{cases} Re(\Lambda_e) \leq 0 \\ Re(\Lambda_{e,o}) < 0 \end{cases}$$

Queste due condizioni sono soddisfatte perché  $Re(\Lambda_e) = Re(\{-2\}) \leq 0$  e  $Re(\Lambda_{e,o}) = Re(\{\}) < 0$  (se l'insieme è vuoto, la condizione è soddisfatta).

**Raggiungibilità.** Calcoliamo la matrice  $R$ :

$$R = (B \ AB \ A^2 B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La prima colonna di  $R$  è proprio la matrice  $B$ , la seconda è il prodotto  $A \cdot B$  e la terza colonna è data dalla seconda colonna moltiplicata a sinistra per  $A$  ( $A \cdot AB$ ).

Ricordiamo che, se il rango di  $R$  è pieno, tutti gli stati sono raggiungibili, altrimenti soltanto la sua immagine  $Im(R) = \mathcal{R}$  contiene gli stati raggiungibili. Il rango di  $R$  in questo caso è pari a 2 (è evidente che la seconda e

---

<sup>2</sup> Se la molteplicità algebrica fosse stata maggiore di 1 e la molteplicità geometrica minore di quella algebrica, quindi in presenza di blocchi di Jordan, i termini in  $t$  avrebbero fatto divergere il modo naturale, perché, essendo  $\lambda = 0$ :

$$e^{\lambda t} \left( c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \dots \right) \stackrel{\lambda=0}{=} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \dots \quad \text{che diverge al crescere di } t$$

la terza colonna sono proporzionali), perciò il sottospazio degli stati raggiungibili ha dimensione 2, ovvero  $\dim(\mathcal{R}) = 2$ . Per trovare i vettori generatori di  $\mathcal{R}$ , basta prendere due colonne indipendenti di  $R$ :

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Inosservabilità.** Calcoliamo la matrice  $O$ :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

La prima riga è  $C$ , la seconda riga è  $CA$  e la terza riga è la seconda riga moltiplicata ancora per  $A$  ( $CA \cdot A$ ). Notiamo che la seconda riga è dipendente dalla prima, ed è pari esattamente a  $-2$  volte la prima riga; allora, la terza riga anche sarà dipendente e sarà  $-2$  volte la seconda riga. Visto che  $O$  ci serve solamente per sapere quanto è la sua dimensione, e quindi la dimensione del nucleo, ci possiamo anche fermare alla seconda riga senza calcolare affatto la terza.

Il nucleo di  $O$  avrà dimensione 2 ( $\dim \mathcal{I} = 2$ ), visto che  $O$  ha rango 1. Troviamo vettori del nucleo, sommando combinazioni di colonne o righe fino ad ottenere 0:

$$\mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Il primo vettore si trova perché sommando la prima e la terza colonna viene zero, mentre il secondo vettore si trova perché sommando la seconda colonna con  $-2$  volte la terza viene zero.

**Sottospazi di Kalman.** Vediamo ora come sono i sottospazi  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  secondo la scomposizione di Kalman. Calcoliamo  $\chi_1$ :

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$$

L'intersezione di due sottospazi si può calcolare “a occhio”, quando risulta facile farlo, altrimenti in modo algebrico. Si vede subito che il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sta in entrambi i sottospazi, perciò starà anche nell'intersezione; dobbiamo verificare allora se gli altri due vettori sono dipendenti o indipendenti. Per farlo, mettiamo i tre vettori dentro una matrice e calcoliamone il rango:

$$\text{rango}(v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Alternativamente, si può calcolare il determinante, e si vede che è uguale a zero. Perciò, i due vettori rimanenti sono dipendenti e possiamo metterne uno a scelta nell'intersezione. Abbiamo ottenuto:

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Il sottospazio  $\chi_2$  è il sottospazio che, aggiunto a  $\chi_1$ , dà tutto  $\mathcal{R}$ :

$$\chi_2 : \chi_1 \oplus \chi_2 = \mathcal{R}$$

Visto che  $\chi_1$  è già uguale a  $\mathcal{R}$ ,  $\chi_2$  sarà il sottospazio banale:

$$\chi_2 = \text{span}\{0\}$$

Stessa cosa per  $\chi_3$ , perché se

$$\chi_3 : \chi_1 \oplus \chi_3 = \mathcal{I}$$

e  $\chi_1 = \mathcal{R} = \mathcal{I}$ , allora anche  $\chi_3$  sarà

$$\chi_3 = \text{span}\{0\}$$

ovvero il sottospazio banale.

Per quanto riguarda  $\chi_4$ , questo deve essere tale che la somma di tutti i sottospazi  $\chi_i$  faccia  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ :

$$\chi_4 : \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}^3$$

perciò dobbiamo far aumentare il rango di  $\chi_1$  di 1. Un vettore indipendente dai primi due è  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , e aggiungendolo agli altri sottospazi si ottiene tutto  $\mathbb{R}^3$ , perciò:

$$\chi_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Visto che, in questo caso, tutti gli autovalori sono distinti; quindi, deve esistere la corrispondenza fra autovalori eccitabili e stati raggiungibili, come quella tra autovalori osservabili e stati inosservabili. In effetti, gli autovalori eccitabili sono  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = -1$ , e il sottospazio degli stati raggiungibili  $\mathcal{R}$  ha dimensione 2. Stessa cosa per gli inosservabili: se  $\lambda_3 = -2$  è osservabile, gli altri due saranno inosservabili e il sottospazio  $\mathcal{I}$  ha dimensione 2.

La matrice  $T^{-1}$  si forma mettendo, in ordine, le basi di  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

dove le prime due colonne sono i vettori di base di  $\chi_1$ , e la terza colonna è il vettore di base di  $\chi_4$  ( $\chi_2$  e  $\chi_3$  non hanno vettori di base indipendenti, visto che sono sottospazi banali). Calcoliamo l'inversa di  $T^{-1}$ :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Calcolo delle matrici partizionate del sistema.** Sappiamo già la forma che dovranno assumere le matrici del sistema nelle nuove coordinate:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \boxed{\tilde{A}_{12}} & \boxed{\tilde{A}_{13}} & \boxed{\tilde{A}_{14}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{22}} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{33}} & \boxed{\tilde{A}_{34}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{44}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ \boxed{\tilde{B}_2} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (\boxed{\tilde{C}_1} \quad \boxed{0} \quad \boxed{\tilde{C}_3} \quad \boxed{0})$$

dove con  $\boxed{\star}$  si indicano i blocchi. La riga  $i$  e/o la colonna  $i$  sono relative al sottospazio  $\chi_i$ , perciò avremo:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \overset{2}{\boxed{\tilde{A}_{11}}} & \overset{0}{\boxed{\tilde{A}_{12}}} & \overset{0}{\boxed{\tilde{A}_{13}}} & \overset{1}{\boxed{\tilde{A}_{14}}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{22}} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{33}} & \boxed{\tilde{A}_{34}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{44}} \end{pmatrix}_{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ \boxed{\tilde{B}_2} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}_{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}, \quad \tilde{C} = (\overset{2}{\boxed{\tilde{C}_1}} \quad \overset{0}{\boxed{0}} \quad \overset{0}{\boxed{\tilde{C}_3}} \quad \overset{1}{\boxed{0}})$$

Il blocco  $\tilde{A}_{44}$  è di dimensione  $1 \times 1$ , ovvero è un valore singolo. In particolare, essendo la matrice dinamica del sottospazio degli stati né raggiungibili né inosservabili. Perciò, visto che siamo nel caso in cui possiamo associare eccitabilità con raggiungibilità e osservabilità con inosservabilità dello stato, possiamo già sapere a cosa è uguale  $\tilde{A}_{44}$ : all'unico autovalore non eccitabile e osservabile, perciò  $\lambda_3 = -2$ . Allo stesso modo, la matrice  $\tilde{A}_{11}$  avrà come autovalori  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = -1$ .

Visto che non ci sono autovalori sia osservabili che eccitabili, la matrice  $W$  sarà nulla:

$$W(t) \equiv 0$$

## Secondo esercizio

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ 0 \ 0)x \end{cases}$$

**Raggiungibilità e osservabilità.** Stavolta partiamo dalle proprietà strutturali del sistema. Costruiamo la matrice  $R$ :

$$R = (B \ AB \ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di  $R$  è pari a 2, perciò prendendo due colonne indipendenti possiamo dire che

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per quanto riguarda l'osservabilità, abbiamo che

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è pari a 2, perciò il nucleo avrà dimensione a 1:

$$\mathcal{I} = \ker O = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

È stato scelto questo vettore perché sommando la seconda e terza colonna si ottiene zero.

**Scomposizione di Kalman.** Per trovare l'intersezione dei due sottospazi  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{I}$ , dobbiamo prima vedere se i vettori di base sono tutti indipendenti oppure no. Se lo sono, l'intersezione è nulla (perché non hanno vettori in comune). Mettiamo i tre vettori di base in una matrice e vediamo se ha rango pieno, per esempio vedendo se il determinante è diverso da zero:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Perciò il rango della matrice è pieno e non ci sono vettori indipendenti. Segue che

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \text{span}\{0\}$$

Essendo nulla l'intersezione,  $\chi_2$ , che deve essere il sottospazio che completa  $\mathcal{R}$  partendo da  $\chi_1$ , sarà proprio uguale a  $\mathcal{R}$ :

$$\chi_2 = \mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per lo stesso motivo,  $\chi_3$  sarà uguale a  $\mathcal{I}$ :

$$\chi_3 = \mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Visto che  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{R}$  hanno intersezione nulla, quindi la somma diretta di  $\chi_2$  e  $\chi_3$  dà già tutto  $\mathbb{R}^3$ , non abbiamo bisogno di definire  $\chi_4$ .

**Struttura delle matrici partizionate.** Costruiamo allora  $T^{-1}$ , mettendo la base di  $\chi_2$  e  $\chi_3$  (visto che gli altri sottospazi non ci sono o sono banali):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici avranno la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \overset{0}{\boxed{\tilde{A}_{11}}} & \overset{2}{\boxed{\tilde{A}_{12}}} & \overset{1}{\boxed{\tilde{A}_{13}}} & \overset{0}{\boxed{\tilde{A}_{14}}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{22}} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{33}} & \boxed{\tilde{A}_{34}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{44}} \end{pmatrix} \begin{matrix} )_0 \\ )_2 \\ )_1 \\ )_0 \end{matrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ \boxed{\tilde{B}_2} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} )_0 \\ )_2 \\ )_1 \\ )_0 \end{matrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \overset{0}{\boxed{\tilde{C}_1}} & \overset{2}{\boxed{\tilde{C}_2}} & \overset{1}{\boxed{\tilde{C}_3}} & \overset{0}{\boxed{\tilde{C}_4}} \end{pmatrix}$$

La matrice  $\tilde{A}_{33}$  è  $1 \times 1$ , ovvero è composta da un singolo elemento; se gli autovalori fossero distinti, visto che è la matrice dinamica del sottospazio degli stati non raggiungibili e inosservabili, dovrebbe essere uguale all'autovalore non eccitabile e non osservabile.

**Autovalori.** Calcoliamo il polinomio caratteristico di  $A$ :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ 2 & -3 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= -(1 - \lambda)^2(3 + \lambda) - 16 + 4(3 + \lambda) + 8(1 - \lambda) = \\ &= -(1 - \lambda)((1 - \lambda)(3 + \lambda) - 4) = \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \\ &= (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 \end{aligned}$$

Gli autovalori saranno  $\lambda_1 = 1$  con molteplicità  $\mu_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$  con molteplicità algebrica  $\mu_2 = 2$ .

**Autovettori.** Calcoliamo gli autovettori relativi, partendo da  $\lambda_1 = 1$ :

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} u_1 \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

Facendo la somma di tutte le colonne si ottiene 0, perciò un possibile valore di  $u_1$  è

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per il secondo autovalore si ha

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} u_2 \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

In questo caso è davvero molto semplice trovare due autovettori indipendenti che descrivano il sottospazio del nucleo di  $A - \lambda_2 I$ : sommando la prima e seconda colonna si ottiene zero, ma anche sommando la seconda e la terza, perciò:

$$u_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi due vettori rappresentano la base di un sottospazio. Quando abbiamo studiato inosservabilità e raggiungibilità, abbiamo visto le caratteristiche del sistema da una diversa angolazione; per questi due vettori che abbiamo scelto,  $u_{21}$  e  $u_{22}$ , i modi potrebbero essere entrambi eccitabili o entrambi osservabili, però *dentro* il sottospazio generato da questi due potrebbe esserci un sottospazio non osservabile o non raggiungibile. In questo caso, allora, non siamo più sicuri che ci sia corrispondenza tra non osservabilità e inosservabilità, e tra eccitabilità e raggiungibilità.

Calcoliamo  $U^{-1}$ :

$$V = U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v'_1 = (1 \ -1 \ 1), \quad v'_2 = (0 \ 1 \ -1), \quad v'_3 = (-1 \ 1 \ 0)$$

**Eccitabilità e osservabilità.** Calcolando i vari prodotti, si ottiene:

$$\begin{aligned} Cu_1 &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad v'_1 B = (1 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ Cu_2 &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad v'_2 B = (0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \\ Cu_3 &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad v'_3 B = (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Il modo naturale relativo a  $\lambda_1 = 1$  è eccitabile e osservabile, mentre i modi relativi a  $\lambda_2 = -1$  sono uno eccitabile e osservabile, l'altro non eccitabile e non osservabile.

In questo caso, la corrispondenza torna: i modi eccitabili e osservabili hanno autovettori in  $\chi_2$  (lo spazio dei raggiungibili e non inosservabili), mentre il modo naturale non osservabile e non eccitabile ha autovettore in  $\chi_3$  (lo spazio degli stati non raggiungibili e inosservabili). Tuttavia, in generale non è sempre semplice stabilire se è così o meno.

**Stabilità.** Notiamo che il sistema è instabile, perché  $\lambda_1 > 0$ . Se fosse stato a tempo discreto, il sistema sarebbe stato *semplicemente stabile*: tutti gli autovalori hanno modulo minore o uguale a 1.  $\lambda_2 = -1$  ha molteplicità

algebrica pari a 2, ma ha anche molteplicità geometrica pari a 2, perciò l'indice geometrico è 1 e non compaiono termini in  $t$ , perciò il sistema rimane semplicemente stabile e non diverge.

Per leggere tanti altri appunti come questo, iscriviti al piano **Master** sul nostro Patreon! Leggi i dettagli sul sito. Ti aspettiamo sul Patreon!

## Teoria dei Sistemi

**Lezione 30 (23 novembre 2021)****Primo esempio**

Consideriamo un sistema con la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

Facciamo l'ipotesi che il sistema sia tutto raggiungibile e tutto osservabile. In questo modo, possiamo immediatamente dire qualcosa sulla stabilità del sistema: si vede che gli autovalori del sistema sono  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ , perciò il sistema è evidentemente *stabile asintoticamente*. Questo è valido almeno in  $x_0 = 0$ , mentre in generale bisognerebbe guardare  $\Psi$ ; tuttavia, se il sistema è tutto raggiungibile e tutto osservabile, anche  $\Psi$  avrà gli stessi poli e, quindi, sarà stabile asintoticamente anche in generale.

**Risposta forzata.** Calcoliamo la risposta forzata prendendo in considerazione l'ingresso

$$u(t) = t + 1$$

Il calcolo si farà in questo modo:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$$

Per prima cosa, calcoliamo  $y_F(s)$ :

$$\begin{aligned} y_F(s) &= W(s)U(s) = \\ &= W(s) \cdot \mathcal{L}[t+1] = \\ &= W(s) \cdot \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{s+1}{s^2} = \\ &= \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \\ &= \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_{21}}{s^2} + \frac{R_{22}}{s} \end{aligned}$$

Il calcolo dei residui è:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s-1}{s^2} = -\frac{3}{4}$$

$$R_{21} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s-1}{s+2} = -\frac{1}{2}$$

$$R_{22} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ s^2 \frac{s-1}{s^2(s+2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2-s+1}{(s+2)^2} = \frac{3}{4}$$

Perciò, la risposta forzata sarà:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_{21}}{s^2} + \frac{R_{22}}{s} \right] = -\frac{3}{4} e^{-2t} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{4}$$

Vediamo che ci sono *due* tipi di contributi: uno che dipende dal sistema,  $-\frac{3}{4}e^{-2t}$ , e un altro che dipende dall'ingresso,  $-\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$ .

**Risposta a regime permanente.** Il modo migliore di calcolare la risposta a regime permanente è *suddividere* la risposta in due risposte, una relativa a  $u_1(t) = t$  e un'altra relativa a  $u_2(t) = 1$ , così che

$$u(t) = t + 1 = u_1(t) + u_2(t)$$

Allora:

$$\begin{aligned} y_{RP}(t) &= y_{RP,1}(t) + y_{RP,2}(t) = \\ &= \underbrace{W(s)|_{s=0} t + \left[ \frac{d}{ds} W(s) \right]_{s=0}}_{y_{RP,1}(t)} + \underbrace{W(s)|_{s=0}}_{y_{RP,2}(t)} = \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**Risposta armonica.** Visto che il sistema ammette risposta a regime permanente,  $W(s)|_{s=j\omega}$  con  $\omega \in \mathbb{R}$  è una *risposta armonica*. Prima di tutto, mettiamo la  $W(s)$  in forma di Bode:

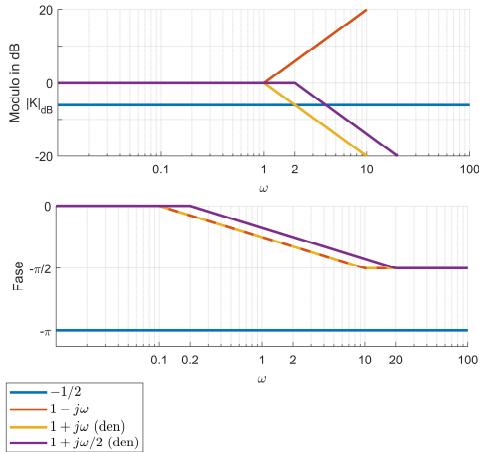
$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{(-1)(1-s)}{(1+s) \cdot 2\left(1+\frac{s}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)} \implies W_s(j\omega) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{j\omega}{2}\right)}$$

Abbiamo allora  $K = -\frac{1}{2}$  e tre termini *binomi*, uno dei quali al numeratore e gli altri al denominatore. Calcoliamo modulo e fase di  $W_s(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$  e disegniamoli. I punti di interesse sono  $1/\tau_1 = 1$ ,  $1/\tau_2 = 1$  e  $1/\tau_3 = 2$ .

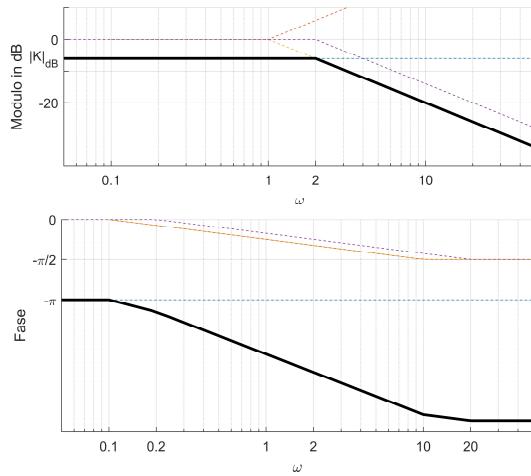
- Il termine costante  $K = -\frac{1}{2}$  avrà modulo in decibel  $|K|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{2}$  e avrà fase  $-\pi$ , visto che è negativo.
- Il termine binomio al numeratore,  $1 - j\omega$ , avrà modulo in decibel che si può approssimare a zero prima di  $\omega = 1/\tau = 1$ , e sarà approssimabile con una retta (logaritmica) che sale con pendenza di 20 dB/dec dopo  $\omega = 1$ . La sua fase può essere approssimata a 0 una decade prima di 1 (quindi circa a 0.1), a  $-\frac{\pi}{2}$  una decade dopo (quindi circa a 10) e sarà interpolata nel mezzo (ovvero, ci sarà una retta che conserverà 0 a  $-\frac{\pi}{2}$ ).
- $1 + j\omega$  avrà modulo come quello di  $1 - j\omega$ , ma essendo al denominatore lo disegniamo ribaltato: varrà 0 fino a 1, e scenderà con una pendenza di  $-20$  dB/dec. La fase, invece, è identica a quella di  $1 - j\omega$  al numeratore<sup>1</sup>.
- $1 + \frac{1}{2}j\omega$  al denominatore avrà modulo 0 fino a  $1/\tau = 2$ , e salirà con pendenza 20 dB/dec dopo 2. Per la fase, fino a 0.2 (una decade prima di  $\omega = 1/\tau = 2$ ) varrà 0, e varrà  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\omega = 20$  (una decade dopo 2).

---

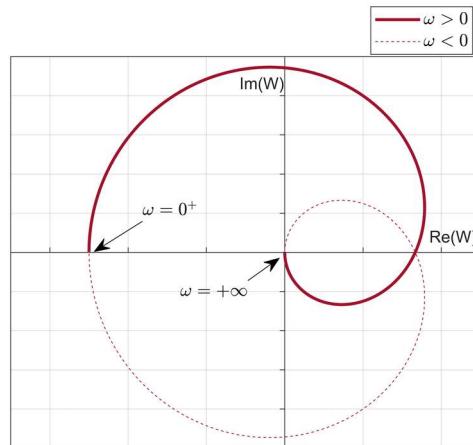
<sup>1</sup> Le fasi di questi due termini sono uguali perché uno,  $1 - j\omega$ , è al numeratore ma compare un segno meno, mentre l'altro,  $1 + j\omega$ , ha un segno + però sta al denominatore.



Andando ad effettuare le somme, si ottiene il seguente diagramma di Bode:



Disegniamo anche il diagramma polare. Per  $\omega \rightarrow 0^+$ , il modulo vale  $\frac{1}{2}$  e la fase vale  $-\pi$ ; al crescere di  $\omega$ , il modulo decresce e tende a zero, mentre la fase decresce da  $-\pi$  a  $-5\pi/2$ . Inoltre, visto che all'infinito la fase tende a  $-5\pi/2$ , la curva sarà *tangente* al semiasse “di arrivo”:



## Secondo esercizio

Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)}$$

**Risposta forzata.** Mettiamo un ingresso semplice,  $u(t) = e^{2t}$ . In questo caso, la risposta forzata in  $s$  è:

$$y_F(s) = W(s)U(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)(s-2)} = \frac{R_{11}}{s^2} + \frac{R_{12}}{s} + \frac{R_2}{s+10} + \frac{R_3}{s-2}$$

Di conseguenza, la risposta forzata in  $t$  viene:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = R_{11}t + R_{12} + R_2e^{-10t} + R_3e^{2t}$$

I residui valgono  $R_{11} = -\frac{1}{20}$ ,  $R_{12} = -\frac{7}{100}$ ,  $R_2 = \frac{3}{400}$ ,  $R_3 = \frac{1}{16}$ . La prima parte della risposta forzata fa parte del sistema, mentre  $R_3e^{2t}$  dipende dall'ingresso.

**Risposta a regime permanente.** Il sistema *non ammette* risposta a regime permanente perché non ammette limite convergente per  $t \rightarrow +\infty$ , visto che ci sono poli non negativi e, in particolare, termini in  $t$  che crescono.

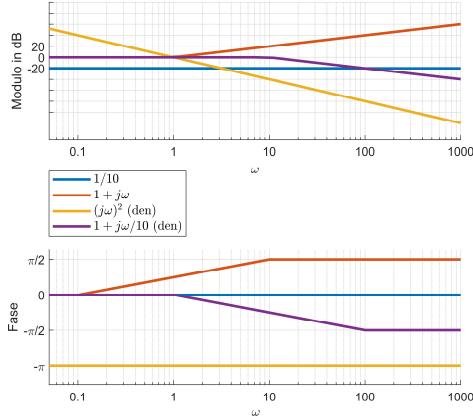
**Diagrammi di Bode.** Disegniamo  $W_s(j\omega)$ , che *non è* la risposta armonica, visto che quest'ultima esiste solo quando esiste la risposta a regime permanente. Mettiamo  $W(s)$  in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1+s}{s^2(1+\frac{s}{10})} \implies W_s(j\omega) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1+j\omega}{(j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}$$

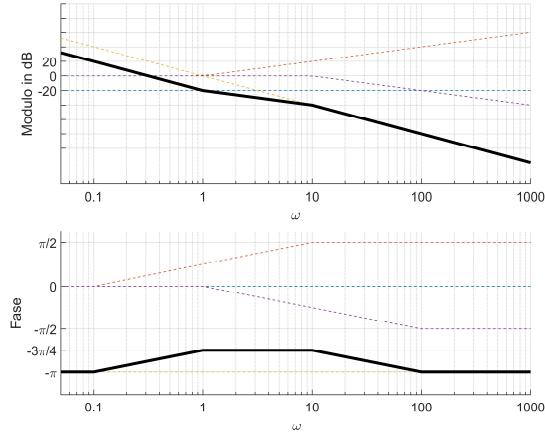
E disegniamo modulo (in decibel) e fase di  $W_s(j\omega)$ .

- $K = \frac{1}{10}$ ; il modulo in decibel sarà  $20 \log_{10} \frac{1}{10} = -20$ ; la fase sarà 0, visto che è positivo.
- $1 + j\omega$  al numeratore avrà modulo che vale 0 fino a  $\omega = 1$ , e poi salirà con pendenza di 20 dB/dec. La fase, invece, varrà 0 fino a  $\omega = 0.1$  (una decade prima di 1) e varrà  $\pi/2$  dopo 10 (una decade dopo 1), mentre in mezzo si uniscono i due punti.
- $(j\omega)^2$  al denominatore è come contare  $j\omega$  due volte: il modulo in decibel sarà una retta decrescente (visto che sta al denominatore) passante per  $\omega = 1$ , e visto che viene contato due volte avrà pendenza  $-40$  dB/dec invece di  $-20$ . La fase sarà  $-\pi/2$  contando due volte, ovvero  $-\pi$  (i conti tornano, perché  $(j\omega)^2 = -\omega^2$ , che è un numero sempre negativo).
- $1 + j\omega/10$  al denominatore avrà modulo in decibel pari a 0 prima di  $\omega = 10$  e scenderà con pendenza  $-20$  dB/dec; la fase vale 0 prima di 1, e  $\pi/2$  dopo 100, mentre in mezzo si uniscono i punti.

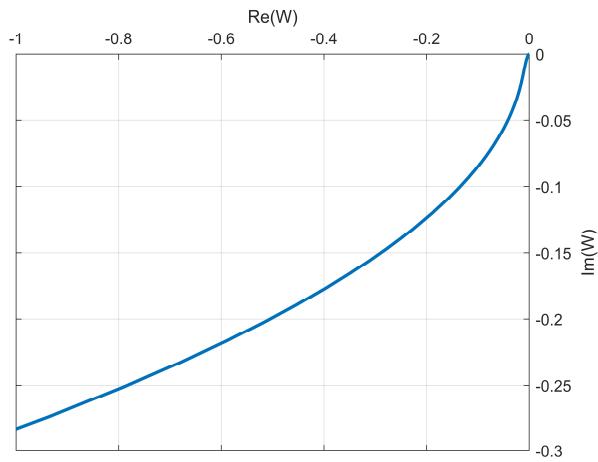
Il grafico, allora, sarà qualcosa di questo genere:



Sommando tutto:



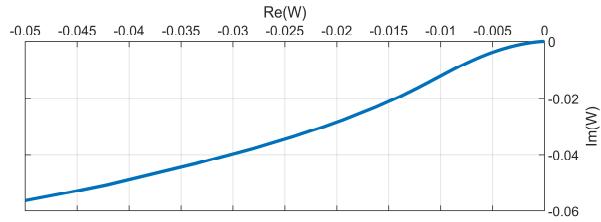
Per quanto riguarda il diagramma polare, per  $\omega \rightarrow 0^+$  vediamo che il modulo tende a  $+\infty$  (perché continua a crescere, per via del termine  $(j\omega)^2$  al denominatore), mentre la fase è fissa a  $-\pi$ ; al crescere di  $\omega$ , il modulo diminuisce sempre mentre la fase aumenta leggermente e torna poi a  $-\pi$ . Il diagramma polare, approssimativamente, avrà per  $\omega > 0$  la forma seguente<sup>2</sup>:




---

<sup>2</sup> Il grafico mostrato è il grafico polare effettivo di  $W_s(j\omega)$ . Per  $\omega \rightarrow 0^+$ , il modulo tende a  $+\infty$  mentre la fase va a  $-\pi$ , quindi dovrebbe adagiarsi sull'asse reale. Così non avviene nel grafico effettivo perché, in realtà, è vero che il modulo aumenta e la fase diminuisce, ma il modulo aumenta molto di più rispetto alla fase, perciò la curva "da lontano" sembra assomigliare ad un arco di parabola. Tuttavia, nel compito d'esame va benissimo anche farlo adagiare sull'asse reale.

Dettaglio per  $\omega \rightarrow +\infty$ :



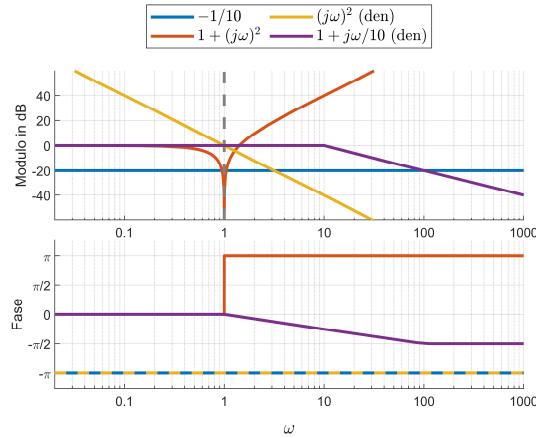
### Terzo esercizio

Modifichiamo “leggermente” la funzione di trasferimento dello scorso esercizio:

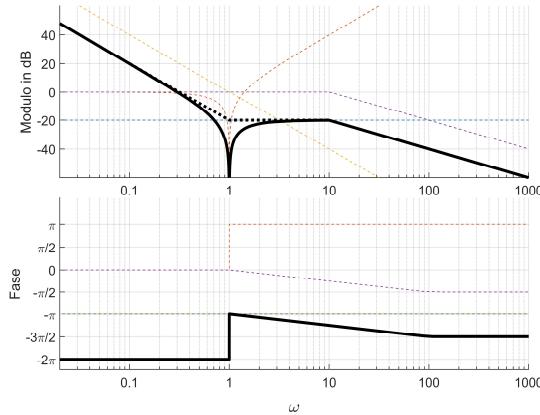
$$W(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 10)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 + s^2}{s^2 \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

Ora, il termine al numeratore è non più binomio, ma è un *termine trinomio*. Questo è evidentemente già scritto in forma di Bode, e si vede che  $z = 0$ , perché non compare il termine con  $s$  alla prima potenza. Inoltre,  $\omega_n = 1$ . Per disegnare l'approssimazione del modulo in decibel di  $W_s(j\omega)$  (ricordiamo che quando disegniamo modulo e fase, questi si riferiscono a  $W_s(j\omega)$  e non a  $W(s)$ ), consideriamo che una decade prima di  $\omega = \omega_n = 1$  vale 0 e una decade dopo cresce o decresce di 40 dB/dec. In questo caso, cresce perché è al numeratore. Invece, la fase vale 0 una decade prima di  $\omega = \omega_n = 1$  e vale  $\pi$  una decade dopo; la pendenza con cui avviene il passaggio dipende da  $z$  e, in particolare, se  $z = 0$  il passaggio è immediato e la fase ha un “salto”.

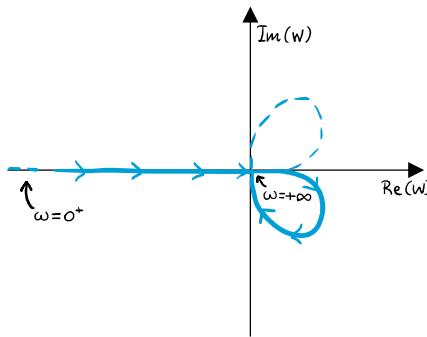
Tutto il resto è identico al precedente esempio.



Si ricorda che, per il modulo, conviene sommare gli asintoti del termine trinomio e *poi* aggiungere le “pance” della funzione (in questo caso la “pancia” è proprio un asintoto verticale). Il grafico sarà allora:



Per il diagramma polare, guardando il grafico si vede che per  $\omega \rightarrow 0^+$  il modulo va all’infinito, con fase  $-\pi$ , quindi sarà all’estrema sinistra dell’asse reale. Inoltre, il modulo *decrece* al crescere di  $\omega$ , e si vede che a  $\omega = 1$  il modulo *in decibel* vale  $-\infty$ . Trattandosi del modulo in decibel, in modulo effettivo varrà, in realtà, zero. Perciò, a  $\omega = 1$  il modulo vale 0 e c’è il salto della fase: stiamo banalmente attraversando l’origine. Superato  $\omega = 1$ , il modulo cresce fino a un certo valore, e poi decresce, mentre la fase decresce fino ad arrivare a  $-\frac{\pi}{2}$ . Possiamo immaginarci il diagramma polare in questo modo:



dove le frecce puntano da  $\omega = 0^+$  a  $\omega = +\infty$ .

## Quarto esercizio

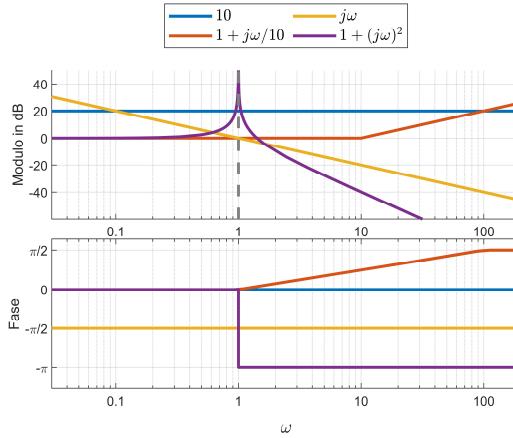
Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s + 10}{s(s^2 + 1)} = 10 \frac{1 + \frac{s}{10}}{s(1 + s^2)}$$

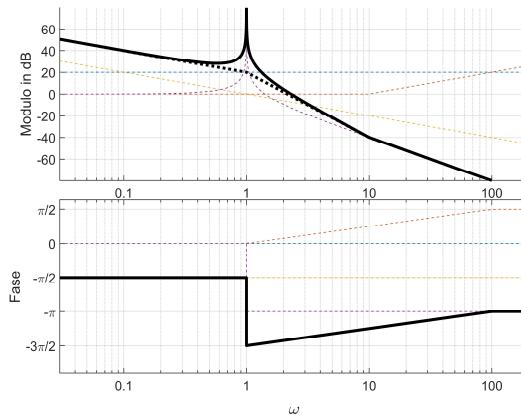
Per disegnare il modulo e la fase della risposta armonica sappiamo ormai come fare:

- $K = 10$  ha modulo in decibel pari a 20. La fase, essendo positivo, è 0.
- $1 + j\omega/10$  al numeratore può essere approssimato come zero fino a  $\omega = 1/\tau = 10$ , e sale con pendenza 20 dB/dec dopo 10. La fase vale 0 prima di 1, vale  $\frac{\pi}{2}$  dopo 100 e in mezzo si uniscono i due estremi.
- $s$  al denominatore ha modulo passante per  $\omega = 1$  e decrescente con pendenza  $-20$  dB/dec (visto che è al denominatore). La fase è fissa a  $\frac{\pi}{2}$ .
- $1 + s^2$  è un *termine trinomio* come quello che abbiamo visto nell’esercizio precedente; l’unica differenza è che, stavolta, sta al denominatore e modulo e fase andranno ribaltati. Allora gli asintoti del modulo in decibel saranno 0 prima di  $\omega = \omega_n = 1$  e scenderanno con pendenza  $-40$  dB/dec dopo 1. La fase, invece, vede un salto a  $\omega = 1$  da 0 a  $-\pi$ .

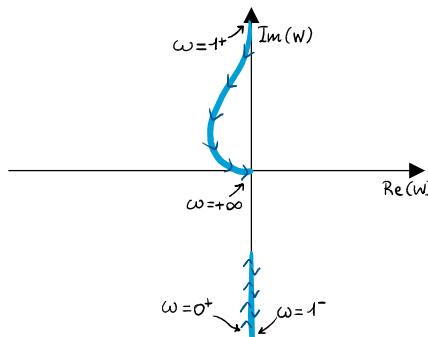
Avremo, allora, il seguente grafico:



Sommmando:



Nel diagramma polare, per  $\omega \rightarrow 0^+$  si ha il modulo all'infinito e la fase che vale  $-\frac{\pi}{2}$ , perciò ci troveremo sull'asse immaginario negativo, all'infinito “verso il basso”. Mentre la fase resta costante (asintoticamente), il modulo decresce fino a un minimo, e poi sale all'infinito (per  $\omega \rightarrow 1^-$ ). A destra di 1, il modulo “torna” dall'infinito e la fase passa da  $-\frac{3\pi}{2}$  a  $-\pi$  (la fase a  $-\frac{3\pi}{2}$  corrisponde con la fase a  $\frac{\pi}{2}$ ), mentre il modulo va a  $-\infty$  in decibel, cioè va a zero. Il grafico allora sarà simile a:



Nel grafico è mostrata solo la parte relativa a  $\omega > 0$ ; per  $\omega < 0$ , ribaltare il grafico rispetto all'asse reale.

## Considerazioni finali

Un sistema con la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+10}{s^2 + 1}$$

ammette risposta a regime permanente? La risposta è no:  $s^2 + 1 = (s + j)(s - j)$  ammette due soluzioni complesse coniugate *con parte reale nulla*; per avere risposta a regime permanente, è necessario che siano a parte reale strettamente negativa. Stessa cosa varrebbe se al denominatore fosse presente anche un termine del tipo  $s$  o  $s^2$ .

## Teoria dei Sistemi

# Lezione 31 (25 novembre 2021)

## Problema della realizzazione

Finora abbiamo visto il collegamento ingresso-uscita tramite lo stato; ora vediamo come, noto il legame ingresso-uscita, si può caratterizzare lo stato. Nel tempo, abbiamo che l'uscita avrà un legame istantaneo con l'ingresso non diretto, visto che l'ingresso viene pesato e modificato: possiamo allora scrivere questa relazione come<sup>1</sup>

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau \iff Y(s) = K(s)U(s)$$

dove la funzione  $k(t)$  (o  $K(s)$ ) viene chiamata *nucleo*. Se ci viene fornito un sistema in questa forma, vediamo se è possibile trovare una rappresentazione dello spazio di stato che abbia lo stesso comportamento ingresso-uscita.

Questo è sicuramente possibile se  $k(t)$  è una *matrice delle risposte impulsive*  $W(t)$  (analogamente, se  $K(s)$  è una funzione di trasferimento  $W(s)$ ). Se questo non accade, non possiamo trovare nessuna rappresentazione dello spazio di stato equivalente a quella fornita. Se  $K(s)$  corrisponde a una funzione di trasferimento, questa sarà una *funzione razionale propria o strettamente propria*, perché:

$$K(s) = W(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}B + D}_{\substack{\text{strett. propria} \\ \text{propria}}}$$

Se  $K(s) = W(s)$ , vediamo se riusciamo ad ottenere proprio  $W(s)$  facendo  $C(sI - A)^{-1}B + D$  per determinati valori di  $A, B, C, D$ . Data  $K(s)$ , se riusciamo a trovare le quattro matrici

$$\begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \quad \begin{matrix} n \times n \\ n \times p \\ q \times n \\ q \times p \end{matrix}$$

che rappresentano uno spazio di stato, allora si dice che abbiamo una *realizzazione*. Questo, infatti, si chiama *problema della realizzazione*, la cui soluzione è costituita dai valori

$$(n, A, B, C, D)$$

Quante realizzazioni possibili ci sono per un determinato sistema? Basti pensare che con un cambio di coordinate si ottengono matrici differenti (come avevamo visto in alcune delle scorse lezioni); sappiamo già, allora, che ci sono *infinite* possibili realizzazioni del sistema. Il problema è che non sempre le matrici che troviamo hanno un significato fisico. Nemmeno  $n$  è unico, e questo è evidente se pensiamo alla scomposizione di Kalman:  $W$  resta uguale anche se aggiungiamo parti del sistema non raggiungibili e inosservabili, per cui la dimensione aumenta anche se  $W$  non cambia. In effetti, aggiungere informazioni a quelle che già abbiamo è una scelta *completamente arbitraria*, visto che partendo solo da  $W$  non possiamo affermare nulla sulle parti del sistema non raggiungibili e inosservabili.

---

<sup>1</sup> L'integrale può anche partire da  $-\infty$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Questo perché non sappiamo "da quando inizia" l'ingresso. Tuttavia, ci stiamo concentrando sulla parte forzata dell'uscita e consideriamo solo l'intervallo da  $t_0 = 0$  a  $t$ .

Per trovare la matrice  $D$  è molto semplice: questa c'è se e solo se  $W(s)$  è *propria* non strettamente, e basta riscriverla come la somma tra una funzione razionale strettamente propria e la matrice  $D$ . Per fare un esempio, data

$$W(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Possiamo riscriverla facendo la divisione tra i polinomi  $s+1$  e  $s-1$ , e scrivere  $W(s)$  esplicitando il quoziente e il resto della divisione:

$$\begin{array}{c|c} s+1 & s-1 \\ -s+1 & 1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

ottenendo

$$W(s) = \frac{s+1}{s-1} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{D}$$

Perciò, il *vero* problema è trovare le tre matrici  $A, B, C$  con dimensione  $n$ .

## Algoritmi di realizzazione

Abbiamo visto che ci sono infinite matrici possibili, per questo *non c'è un procedimento algebrico*. Ci sono, tuttavia, degli *algoritmi di realizzazione* che ci permettono di trovare possibili valori di queste matrici. Scriviamo esplicitamente la funzione di trasferimento quando  $p = q = 1$  (un ingresso e un'uscita):

$$K(s) = W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Se la struttura è questa (notiamo che  $W(s)$  è *strettamente propria*), allora una possibile matrice  $A$  si costruisce partendo dalla matrice che ha tutti zeri, tranne per la diagonale *a destra* di quella principale, che ha degli 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ora, nell'ultima riga di questa matrice, al posto degli zeri scriviamo i coefficienti del denominatore *cambiati di segno*, partendo dal termine noto  $a_0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Questa è la nostra matrice  $A$ . Per  $B$ , la prendiamo con tutti zeri tranne l'ultimo elemento, che sarà 1:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C$ , invece, contiene *tutti i coefficienti del numeratore, non cambiati di segno, da  $b_0$  a  $b_{n-1}$* :

$$C = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1})$$

Ovviamente se manca un qualsiasi termine  $a_i$  o  $b_i$  si mette uno zero (ma, per quanto riguarda  $C$ , si deve arrivare sempre ad avere una matrice con  $n$  elementi).

Per fare un esempio, se abbiamo

$$W(s) = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2}$$

allora, per la matrice  $A$ , partiremo dalla matrice  $2 \times 2$  (visto che  $n$ , il grado massimo del denominatore, è uguale a 2) con tutti zeri; poi, scriviamo gli 1 nella diagonale a destra di quella principale; infine, l'ultima riga la sostituiamo con i coefficienti da  $a_0 = 2$  a  $a_{n-1} = a_1 = 3$  cambiati di segno:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

$B$  sarà la matrice  $2 \times 1$  con tutti zeri tranne l'ultimo elemento che è uguale a 1:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infine,  $C$  sarà la matrice  $1 \times 2$  con i coefficienti del numeratore da  $b_0 = -1$  a  $b_1 = 1$ :

$$C = (-1 \ 1)$$

## Verifica della scelta delle matrici

Almeno per il momento, non dimostriamo il motivo di queste scelte; però, possiamo *verificare* che queste scelte funzionino. Allora, calcoliamo  $C(sI - A)^{-1}B$  e vediamo se otteniamo esattamente  $W(s)$ . Partiamo da  $(sI - A)^{-1}$ :

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 & & & \\ & s & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Il *determinante* di questa matrice, che ci servirà per invertirla, lo calcoliamo col metodo dei minori: prendiamo  $a_0$  che avrà segno  $(-1)^{n+1}$ , e lo moltiplichiamo per il determinante della matrice ottenuta togliendo la riga e la colonna di  $a_0$ ; la matrice che si ottiene, di dimensione  $(n-1) \times (n-1)$ , è *triangolare*, per cui il determinante sarà il prodotto dei termini nella diagonale principale, ovvero  $(-1)^{n-1}$ . Facciamo la stessa cosa per  $a_1$ : avrà segno  $(-1)^{n+2}$  e andrà moltiplicato per la matrice che si ottiene togliendo la riga e la colonna di  $a_1$ , che è la matrice

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Perciò, visto che questa matrice ha dimensione  $n - 1$ , il determinante sarà  $s(-1)^{n-2}$ . Se facciamo la stessa cosa per  $a_2$ , questo ha segno  $(-1)^{n+3}$  e va moltiplicato per il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

che è triangolare, per cui il determinante è  $s^2(-1)^{n-3}$ . Se continuiamo questo procedimento fino all'ultimo elemento dell'ultima riga della matrice, e notiamo che per l'ultimo elemento cambia perché invece di avere  $a_i$  abbiamo  $s + a_{n-1}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta = \det(sI - A) &= a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &\quad + a_1 s(-1)^{n+2}(-1)^{n-2} \\ &\quad + a_2 s^2(-1)^{n+3}(-1)^{n-3} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n-2} s^{n-2}(-1)^{2n-1}(-1) \\ &\quad + (s + a_{n-1}) s^{n-1}(-1)^{2n} \end{aligned}$$

Per ogni riga a parte l'ultima, abbiamo  $(-1)^{n+i}(-1)^{n-i} = (-1)^{2n} = 1$ , perciò, in definitiva:

$$\Delta = \det(sI - A) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

Avendo il determinante, ci manca solo la matrice aggiunta trasposta per completare l'inversa di  $(sI - A)$ :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot M_a$$

Per completare il calcolo, poi, dovremmo pre-moltiplicarla per  $C$  e post-moltiplicarla per  $B$ ; ma se  $B$  è composta da tutti zeri tranne l'ultima riga, facendo il prodotto  $M_a B$  otterremo una matrice composta solamente dall'ultima colonna della matrice  $M_a$ . Perciò, ignoreremo tutte le altre colonne nel calcolo di  $M_a$ , ovvero della matrice aggiunta trasposta di  $(sI - A)$ . Ogni elemento  $m_{ij}$  di  $M_a$  è il determinante della matrice ottenuta togliendo la riga  $i$  e la colonna  $j$  da  $A$ , con segno  $(-1)^{i+j}$ . Allora:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 & & & \\ & s & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} & & (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ & \cdots & (-1)^{n+2}s(-1)^{n-2} \\ & & \vdots \\ & & (-1)^{2n}s^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdots & s \\ & & \vdots \\ & & s^{n-1} \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix}$$

Quando si moltiplica per  $C$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1} B &= \frac{1}{\Delta} (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{\Delta} = \end{aligned}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = W(s)$$

■

## Forma canonica raggiungibile

Questa realizzazione ha un'interessante proprietà strutturale: se calcoliamo la matrice di raggiungibilità e la matrice di osservabilità, si vede che, mentre per quest'ultima non possiamo dire molto, per quanto riguarda la raggiungibilità, questa viene inferita dalla struttura di  $A$  (che è praticamente data) e la struttura di  $B$  (che è nota già a priori).

Allora, se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avremo che:

$$R = (B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Si vede che  $R$  è una matrice *triangolare secondaria*, e il suo determinante sarà

$$\det(R) = (-1)^n \neq 0$$

Per cui non è singolare. Ciò significa che  $R$  ha rango pieno e la rappresentazione scritta in questa forma è una rappresentazione completamente *raggiungibile*. In particolare, la realizzazione che vede queste scelte delle matrici  $A, B, C$  viene chiamata *forma canonica raggiungibile*, e le matrici vengono indicate con

$$A_R, \ B_R, \ C_R$$

Ovviamente, se dovessimo avere un coefficiente  $a_n$  che moltiplica  $s^n$  al denominatore della  $W(s)$ :

$$\frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

allora, prima di fare qualsiasi cosa, dividiamo numeratore e denominatore per  $a_n$ .

## Forma canonica osservabile

Una realizzazione alternativa a quella mostrata prevede di usare una matrice  $A$  della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & & -a_2 \\ & & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Che, a primo impatto, sembrerebbe la trasposta di  $A_R$  che abbiamo visto (e, in effetti, è così per  $p = q = 1$ , ma se questi valori cambiano, non è più vero). Di conseguenza, le matrici  $B$  e  $C$  assumono le forme:

$$C = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1)_{1 \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

La verifica di questa realizzazione è identica a quella mostrata per l'altra realizzazione: il determinante di  $A$  è lo stesso dell'altra (visto che è proprio la trasposta) e nel prodotto

$$C(sI - A)^{-1}$$

si scartano tutte le righe della matrice aggiunta di  $(sI - A)$  a parte l'ultima, che corrisponde all'ultima colonna della matrice dello scorso esempio.

Stavolta, però, la proprietà dello spazio di stato associata è l'*osservabilità*:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ 0 & \cdots & 1 & * & * \\ \ddots & & & & \\ 1 & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è diverso da zero, perciò ha rango pieno e il sistema è *tutto osservabile*. Per denotare questa caratteristica, possiamo indicare le matrici  $A, B, C$  con la notazione

$$A_o, \ B_o, \ C_o$$

## Caso di ingressi e uscite non unidimensionali

Se dovesse accadere che  $p \neq 1$  e/o  $q \neq 1$ , avremmo una  $W(s)$  della forma:

$$W(s) = \frac{B_{n-1}s^{n-1} + \cdots + B_1s + B_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad B_i \Big|_{q \times p}$$

E se la matrice  $A_o$  sarà  $N \times N$ , allora  $B_o$  avrà dimensioni  $N \times p$ , mentre  $C_o$  avrà dimensioni  $q \times N$ . Se  $C_o$  con  $p = q = 1$  aveva la forma:

$$C_o = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1)$$

Allora, con  $q \neq 1$  avrà la forma:

$$C_o = (O_q \ O_q \ \cdots \ O_q \ I_q)$$

Dove  $O_q$  è la matrice  $q \times q$  di zeri, e  $I_q$  è la matrice identità di ordine  $q$ . Per fare un esempio, con  $q = 2$ :

$$C_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo, la matrice  $A$  avrà la forma

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{se } p=q=1} \rightarrow \begin{pmatrix} O & \dots & O & -a_0 I \\ I & \ddots & -a_1 I \\ \ddots & O & \vdots \\ I & -a_{n-1} I \end{pmatrix}$$

dove tutte le  $I$  e le  $O$  hanno dimensione  $q$ ; per cui,  $A$  è una matrice  $N \times N$  con  $N = nq$ . Conseguentemente,  $B$  che contiene i coefficienti del numeratore sarà:

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_i \Big|_{q \times p}$$

Per quanto riguarda la forma raggiungibile, il discorso è completamente analogo; in quel caso,  $N = np$ .

## Esempio pratico e considerazioni

Consideriamo la funzione:

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{s^2 + 1}$$

Questa è una funzione razionale *strettamente propria* (per ogni termine, il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore), per cui può corrispondere alla funzione di trasferimento  $W(s)$  di un sistema. Per cominciare, scriviamo il numeratore in forma polinomiale, esplicitando per ogni potenza di  $s$  i suoi coefficienti:

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{s^2 + 1} = \frac{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{B_0} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{B_1} s}{s^2 + 1}$$

Scriviamo la realizzazione in forma canonica raggiungibile. I coefficienti  $B_i$  sono  $q \times p = 2 \times 3$ , quindi ci sono 2 uscite e 3 ingressi. La matrice  $A_R$  avrà dimensione  $N = np = 2 \cdot 3 = 6$ , e sarà composta a blocchi:

$$A_R = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{-a_0} & \boxed{-a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|ccc|} \hline -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ -1 & & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & & & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_R$  sarà composta così:

$$B_R = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Mentre la  $C$  è molto semplice perché conterrà tutti i coefficienti del numeratore “in fila” da  $B_0$  a  $B_{n-1}$ :

$$C_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per concludere, la soluzione al problema della realizzazione è la realizzazione  $A_R, B_R, C_R$  con  $N = 6$ .

Per quanto riguarda la *forma canonica osservabile*, il sistema si costruisce in questo modo:

$$\begin{aligned} A_O &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-a_0} \\ \boxed{1} & \boxed{-a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-a_0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-a_0} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-a_1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_O &= \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \\ C_O &= (\boxed{0} \quad \boxed{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che la dimensione del sistema cambia:  $N = nq = 2 \cdot 2 = 4$ ; per cui, confrontando le due dimensioni ottenute dalle due realizzazioni, ci rendiamo conto che nella forma canonica raggiungibile aggiungevamo informazioni superflue, che non ci erano date dal sistema. Tuttavia, entrambe le rappresentazioni sono perfettamente valide.

Questo significa che, dipendentemente dall’algoritmo di realizzazione utilizzato, si possono ottenere sistemi che hanno dimensioni diverse; probabilmente, allora, conviene scegliere il sistema che ha dimensione minore<sup>22</sup>.

---

<sup>22</sup> (N.d.R.) Questo, probabilmente, sta a significare che se  $q > p$  (ovvero ci sono più uscite che ingressi), conterrà scegliere la forma canonica *raggiungibile* (dove  $N = np$ ), altrimenti conterrà scegliere la forma canonica *osservabile* (dove  $N = nq$ ).

## Teoria dei Sistemi

# Lezione 32 (26 novembre 2021)

## Realizzazione minima

Sappiamo come il legame ingresso-uscita sia *non istantaneo* e, in particolare, descritto da un integrale di convoluzione (almeno, nel tempo continuo) della forma:

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau \iff Y(s) = K(s)U(s)$$

e la scorsa lezione abbiamo studiato come ricondurci da una  $K(s)$  data a una rappresentazione del sistema nello spazio di stato, ovvero tramite la *realizzazione* (e i problemi di realizzazione):  $K(s)$ , chiamata *nucleo*, ammette una realizzazione se è possibile trovare la dimensione dello spazio di stato e le quattro matrici che descrivono il sistema. Questo problema si può affrontare solo se  $K(s)$  è una funzione razionale propria o strettamente propria, così che valga  $K(s) = W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . Finora abbiamo studiato due possibili realizzazioni, ovvero la forma canonica raggiungibile e la forma canonica osservabile.

Abbiamo visto che con una stessa  $W(s)$  si possono trovare sistemi con *dimensioni differenti*; converrà, pertanto, scegliere la forma canonica raggiungibile se ci sono più uscite che ingressi ( $N = np$ ), mentre converrà prendere la forma canonica osservabile se ci sono più ingressi che uscite ( $N = nq$ ), in questo modo è minore la dimensione del sistema. Non sappiamo se queste forme ci forniscano la forma del sistema più piccola possibile; ovviamente, però, se  $p = 1$  o  $q = 1$  e sceglio l'opportuna forma canonica, sappiamo per certo che la forma è la più piccola in assoluto (visto che non possono esserci ingressi o uscite minori di 1).

Consideriamo  $p > 1$  e  $q > 1$ : come facciamo a sapere *quante informazioni superflue* stiamo aggiungendo al sistema? Prendiamo, ad esempio, la forma canonica osservabile: il sistema con questa realizzazione è completamente osservabile, perciò non ci sono sicuramente parti inosservabili; cioè, nella scomposizione di Kalman, non ci sono  $\chi_1$  e  $\chi_3$ . Invece,  $\chi_2$  è la parte raggiungibile e osservabile del sistema, per cui sicuramente c'è tutto quello che abbiamo derivato dalla  $W(s)$ . Tutte le informazioni superflue allora, se ci sono, fanno sicuramente parte di  $\chi_4$ , la parte che è sì osservabile (quindi inclusa nella forma canonica osservabile), ma *non è raggiungibile*, quindi non è presente in  $W(s)$ . Quindi, per capire se  $N = nq$  è la dimensione più piccola possibile, oppure ci sono delle aggiunte non necessarie, dovremo studiare la *raggiungibilità* del sistema, ovvero l'altra proprietà strutturale che non è garantita dalla forma canonica.

Analogamente vale tutto anche per la forma canonica raggiungibile: se tutto il sistema è raggiungibile, automaticamente non ci sono  $\chi_3$  e  $\chi_4$  che non sono raggiungibili, e la parte non presente in  $W(s)$ , quindi potenzialmente superflua, si trova nella parte inosservabile (in  $\chi_1$ ). Dobbiamo, allora, studiare l'osservabilità, e se scopriamo che c'è una parte non osservabile *effettuiamo il cambio di base rispetto all'inosservabilità* e le matrici diventano:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{C}_2)$$

In particolare, la parte del sistema che riguarda solamente  $\chi_2$ , ovvero la parte raggiungibile e osservabile, ha solamente  $\tilde{A}_{22}$  come matrice dinamica, e conseguentemente vede solamente le matrici  $\tilde{B}_2$  e  $\tilde{C}_2$  nel sistema; tutto il resto è superfluo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Vedi gli appunti della lezione 27 del 18 novembre 2021, capitolo “Partizione del sistema secondo l'inosservabilità”.

La stessa cosa può essere fatta se si sceglie la forma canonica osservabile: in quel caso, si studia la raggiungibilità e, se dovesse esserci una parte del sistema non raggiungibile, si effettua il cambio di base del sistema rispetto alla raggiungibilità.

Il problema può essere anche posto dall'inizio: ci può venir chiesto di trovare la *realizzazione minima*, ovvero la soluzione ad un problema di realizzazione con  $n$  più piccolo possibile. A quel punto, se  $p > 1$  e  $q > 1$ , possiamo trovare la realizzazione minima scegliendo una forma canonica (possibilmente, quella che offre la dimensione minore dello stato) e studiandone l'altra proprietà strutturale per capire quanto si può ridurre la dimensione del sistema. Ovviamente, questa operazione del “scegliere il sistema a dimensione minore” e dello “scartare le parti superflue” possiamo farla solamente perché ci viene dato solo il comportamento *esterno* del sistema (ovvero, ci viene data una  $W$ ), e *partendo da* quella noi dobbiamo *risalire* a un possibile sistema; ovviamente, se ci viene dato un sistema dall'inizio, non possiamo scartare nulla.

## Partizione del sistema lineare

Poniamo caso che un problema di realizzazione abbia come nucleo la funzione:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

Per prima cosa, riscriviamo  $K(s)$  esplicitando i coefficienti al numeratore:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 2(s+1) \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s^2 + s}$$

$n = 2$ , perché questo è il grado massimo del denominatore; inoltre,  $p = q = 2$ , quindi la scelta della forma canonica è indifferente<sup>2</sup>. Potremmo scegliere la rappresentazione raggiungibile:

$$A_R = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{I} \\ \boxed{-a_0 I} & \boxed{-a_1 I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

e studiarne l'osservabilità, per poi scegliere la dimensione minore del sistema.

In questo caso, però, possiamo semplificare il problema. Notiamo che le due righe di  $K(s)$  hanno gli stessi poli: la prima riga ha al denominatore solamente  $s$ , mentre la seconda ha al denominatore solamente  $s + 1$  ( $0 = \frac{0}{s+1}$ ). Allora, possiamo *scomporre* il sistema in questo modo:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(s) \\ K_2(s) \end{pmatrix}$$

con  $K_1(s) = (\frac{1}{s} \quad \frac{2}{s})$  e  $K_2(s) = (0 \quad \frac{1}{s+1})$ . Visto che  $q = 2$ , ci sono due uscite:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \iff Y(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}$$

---

<sup>2</sup>  $p = q = 2$  perché sappiamo che i coefficienti del numeratore sono  $p \times q$ , e in questo esempio sono  $2 \times 2$ , perciò  $p = 2$  e  $q = 2$ .

Perciò, avremo due sistemi separati:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

Dove:

$$Y_1(s) = K_1(s)U(s) \quad \text{e} \quad Y_2(s) = K_2(s)U(s)$$

Allora, studiamo i due sistemi in modo separato: per ognuno c'è una sola uscita, quindi  $q = 1$ , che è il minimo. Alla fine, "ricomponiamo" tutto in un sistema unico che avrà dimensione  $1 + 1 = 2$ , che è necessariamente la minima. Per ricomporre il sistema si considera che

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}}_B u \\ y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 x_1 \\ C_2 x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}}_C x \end{aligned}$$

Con  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Il ragionamento può essere fatto anche per colonne:

$$K(s) = (H_1(s) \quad H_2(s))$$

In questo caso, non si divide l'uscita in due, ma si divide l'ingresso; visto che  $p = 2$ , l'ingresso può essere scritto come

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \iff U(s) = \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

Allora, l'uscita sarà:

$$\begin{aligned} Y(s) &= K(s)U(s) = \\ &= (H_1(s) \quad H_2(s)) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = \\ &= H_1(s)U_1(s) + H_2(s)U_2(s) = \\ &= Y_a(s) + Y_b(s) \end{aligned}$$

E i sistemi corrispondenti saranno:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u_1 \\ y_a = C_a x_a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_b = A_b x_b + B_b u \\ y_b = C_b x_b \end{cases}$$

e dovremo ricomporre il sistema che avrà  $x = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}$ . Notiamo, però, che ci sono due poli in  $H_2(s)$ , perciò la dimensione che otterremo del sistema relativo a  $H_2$  è 2, e l'unione dei due sistemi avrà dimensione  $1 + 2 = 3$ , che *non è minima*, anche perché abbiamo già visto che ragionando per righe sarebbe venuta dimensione 2. Quindi, se la dimensione di ogni sistema nella scomposizione non è pari a 1, non possiamo essere certi che la somma costituisca la dimensione minima del sistema; è opportuno, allora, controllare le dimensioni a priori (ovvero, vedere se ogni riga o ogni colonna contiene solamente un polo).

## Algoritmo di Gilbert

Abbiamo già visto gli algoritmi che producono la forma canonica raggiungibile e la forma canonica osservabile. L'algoritmo che stiamo per vedere, invece, può condurci direttamente alla realizzazione minima del sistema. Purtroppo, non è sempre utilizzabile: la condizione è che il denominatore di  $K(s)$  è composto *solo da termini con molteplicità 1*:

$$K(s) = \frac{n_K(s)}{(s - s_1)^1 + \dots + (s - s_n)^1}, \quad \text{con } s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$$

**Attenzione:** ricordiamo che avere termini con molteplicità 1 nel dominio di Laplace *non vuol dire che gli autovalori abbiano molteplicità 1*, ma che *la matrice A probabilmente è diagonalizzabile*<sup>3</sup> (ovvero, non ci sono blocchi di Jordan).

Abbiamo allora  $n$  radici, ovvero  $n$  autovalori; in una realizzazione minima, per essere tale, non deve contenere altri autovalori oltre a quelli che si trovano in  $K(s)$ , perciò avrà  $n$  autovalori che corrispondono ai poli di  $K(s)$ . In particolare, se  $K(s)$  deve corrispondere a una  $W(s)$ , allora non ci sarà nulla di inosservabile e sarà tutto raggiungibile, quindi quando si effettua il calcolo  $C(sI - A)^{-1}B$  *non si semplifica nulla*; perciò, la matrice  $A$  della realizzazione minima avrà tutti gli  $n$  autovalori, quindi sarà *diagonalizzabile*, ovvero ammette un cambio di coordinate che trasforma  $A$  in una matrice diagonale.

Visto che  $A$  è diagonalizzabile (anzi, la prendiamo proprio diagonale visto che possiamo scegliere), per ogni autovalore  $\lambda_i$  riusciamo a trovare tanti autovettori quanto è la molteplicità di  $\lambda_i$ :

$$A = \dots + \lambda_i u_{i1} v'_{i1} + \lambda_i u_{i2} v'_{i2} + \lambda_i u_{i3} v'_{i3} = \dots + \lambda_i (u_{i1} \quad u_{i2} \quad u_{i3} \quad \dots) \begin{pmatrix} v'_{i1} \\ v'_{i2} \\ v'_{i3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \dots + \lambda_i U_i V'_i$$

Notiamo che  $U_i V'_i$  è una matrice *con rango pari alla molteplicità* di  $\lambda_i$ . Nel calcolo di  $\Phi(t) = e^{At}$  avremo  $\dots + e^{\lambda_i t} U_i V'_i$ , da cui segue che  $W(t) = Ce^{At}B = \dots + e^{\lambda_i t} C U_i V'_i B$ . Quando si trasforma nel dominio di Laplace, si avrà proprio un termine della forma  $\frac{R_i}{s - \lambda_i}$ , dove  $R_i = C U_i V'_i B$ . Perciò, visto che  $U_i V'_i$  ha rango pari alla molteplicità di  $\lambda_i$ , anche  $R_i$  avrà lo stesso rango.

Perciò, possiamo tranquillamente costruire la matrice  $A$  come la matrice diagonale che contiene i diversi autovalori con la loro molteplicità, che vediamo dal rango del corrispettivo residuo quando scomponiamo  $W(s)$  secondo i poli e i residui:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & s_2 & \\ & & & s_3 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

In questo esempio,  $s_2$  ha molteplicità 2; significa che, nella  $W(s)$  scomposta, il residuo relativo al polo  $s_2$  aveva rango 2.

---

<sup>3</sup> “Probabilmente” perché, in realtà, stiamo vedendo la  $W(s)$  e non la  $\Phi(s)$ , quindi qualche termine che avrebbe causato la creazione di blocchi di Jordan potrebbe essersi semplificato e, quindi, non potremmo dire con certezza cosa contenesse la matrice  $A$ , anche se ora vedremo che, invece, possiamo.

Scegliere gli autovettori relativi a ciascun autovalore è semplice: se la matrice  $A$  è quella scritta qui sopra, gli autovettori  $u_{i1}, u_{i2}, \dots$  relativi a un autovalore  $s_i$  saranno proprio i vettori tali che  $(A - s_i I)u = 0$ . Ovvero, se consideriamo  $s_1$ ,abbiamo che

$$A - s_1 I = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & s_2 - s_1 & & & \\ & & s_2 - s_1 & & \\ & & & s_3 - s_1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Basta sommare la prima colonna con coefficiente 1 e le altre con coefficiente zero per ottenere zero<sup>4</sup>, ovvero:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

Se prendiamo  $s_2$ , avremo che

$$A - s_2 I = \begin{pmatrix} s_1 - s_2 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & s_3 - s_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(Ricordiamo che in questo esempio  $s_2$  ha molteplicità 2). Qui possiamo scegliere *due* autovettori: o prendiamo la seconda colonna con coefficiente 1 e le altre con coefficiente zero, oppure prendiamo la terza colonna. Otteniamo allora due autovettori distinti:

$$u_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad u_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_3$$

E così via. Notiamo che gli autovettori sono proprio  $e_i$ , qualsiasi sia la molteplicità di ognuno degli  $s_i$ ; per cui, la matrice  $U$  sarà in realtà la matrice identità:

$$U = (u_1 \ u_{21} \ u_{22} \ u_3 \ \dots) = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ \dots) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = I$$

<sup>4</sup> Dobbiamo trovare i vettori  $u$  tali che  $(A - s_i I)u = 0$ . Per esempio:

$$(A - s_1 I)u = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & s_2 - s_1 & & & \\ & & s_2 - s_1 & & \\ & & & s_3 - s_1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} u \stackrel{\text{set}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo scegliere  $u_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  visto che:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & s_2 - s_1 & & & \\ & & s_2 - s_1 & & \\ & & & s_3 - s_1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ovviamente, non possiamo scegliere direttamente il vettore nullo perché  $u$  dev'essere un autovettore, e 0 *non* è un autovettore.

Segue che anche i rispettivi autovettori sinistri  $v'_{ij}$  saranno  $e'_1, e'_2, \dots$  perché si ottengono da  $U^{-1} = I^{-1} = I$ .

Notiamo, in particolare, che il prodotto  $U_i V'_i$  è una matrice che contiene un blocco uguale a matrice identità di dimensione pari alla molteplicità dell' $i$ -esimo autovettore, e tutti zeri altrimenti. Per fare un esempio, prendiamo  $U_2$  e  $V'_2$  relativi sempre all'esempio di prima:

$$U_2 = (u_{21} \ u_{22}) = (e_2 \ e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V'_2 = \begin{pmatrix} e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies U_2 V'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Come vediamo la matrice  $U_2 V'_2$  è composta da tutti zeri, ma compare un blocco identità nella seconda e terza colonna (perché  $u_{21} = e_2$  e  $u_2 = e_3$ ). Perciò, quando andremo a moltiplicare a sinistra per  $C$  e a destra per  $B$ :

$$C U_2 V'_2 B = (\star \ [C_2] \ \star \ \dots) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star \\ [B_2] \\ \star \\ \vdots \\ \star \end{pmatrix}$$

dove la larghezza del blocco  $[C_2]$  ( $q \times 2$ ) corrisponde all'altezza del blocco identità di  $U_2 V'_2$ , mentre l'altezza del blocco  $[B_2]$  ( $2 \times p$ ) corrisponde alla larghezza del blocco identità. Perciò, effettuando il prodotto

$$(\star \ [C_2] \ \star \ \dots) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star \\ [B_2] \\ \star \\ \vdots \\ \star \end{pmatrix} = (0 \ [C_2] 0 \ \dots) \begin{pmatrix} \star \\ [B_2] \\ \star \\ \vdots \\ \star \end{pmatrix} = C_2 B_2$$

che ha dimensione  $q \times p$ . Il rango di  $C_2 B_2$  è esattamente uguale al rango della matrice  $U_2 V'_2$  in mezzo, che è uguale al rango del residuo  $R_2$ .

Questo algoritmo di realizzazione prende il nome di *algoritmo di Gilbert*.

## Esempio pratico

È data una  $K(s)$  della forma:

$$K(s) = \frac{(s+1 \ 0 \ s-1)}{(s+1)(s-1)}$$

Abbiamo due uscite e tre ingressi:  $q = 2, p = 3$ . Calcoliamone i residui:

$$K(s) = \frac{(s+1 \ 0 \ s-1)}{(s+1)(s-1)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-1}$$

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 0 & s-1 \\ 0 & s+1 & s+1 \\ & s-1 \end{pmatrix}}{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 0 & s-1 \\ 0 & s+1 & s+1 \\ & s+1 \end{pmatrix}}{s-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se  $K(s)$  è una funzione di trasferimento  $W(s)$ , allora il sistema ha due autovalori, 1 e  $-1$ , che corrispondono ai poli di  $K(s)$ . In particolare, l'autovalore  $-1$  ha molteplicità 1, perché il rango del relativo residuo  $R_1$  è uguale ad uno. L'autovalore 1, invece, ha molteplicità 2 perché il rango di  $R_2$  è pari a 2. Possiamo, allora, già scrivere la matrice  $A$  diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ci sono due blocchi (uno per ogni autovalore); perciò, anche le matrici  $B$  e  $C$  seguiranno questa suddivisione:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} \\ \boxed{B_2} \end{pmatrix}, \quad C = (\boxed{C_1} \quad \boxed{C_2})$$

dove il blocco  $B_2$  avrà altezza 2 e il blocco  $C_2$  avrà larghezza 2. A questo punto, possiamo scegliere qualsiasi  $C_1, C_2, B_1, B_2$  tali che  $C_1 B_1 = R_1$  e  $C_2 B_2 = R_2$ . Visto che  $C_1 B_1$  deve avere rango 1,  $C_1$  dovrà avere dimensione  $q \times 1$  e  $B_1$  sarà  $1 \times p$ . Allo stesso modo, se  $C_2 B_2$  deve avere rango 2, allora  $C_2$  sarà  $q \times 2$  e  $B_2$  sarà  $2 \times p$ .

## Teoria dei Sistemi

**Lezione 33 (29 novembre 2021)****Esempio pratico di realizzazione**

Consideriamo la funzione nucleo

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ \frac{1}{s} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo qual è il procedimento migliore che possiamo seguire per una realizzazione minima. Questo sistema ha due uscite e tre ingressi:

$$p = 3, \quad q = 2$$

Scriviamo innanzitutto  $K(s)$  esplicitando il denominatore:

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & s+1 & 1 \\ s+1 & s(s+1) & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)}$$

In questo modo, si vede subito che  $n = 2$ , visto che è il grado massimo del denominatore. Questa funzione *non* è strettamente propria, visto che c'è un termine al numeratore che è dello stesso grado del denominatore:  $s(s+1)$ . Allora, dobbiamo renderla strettamente propria, e per farlo scriviamo la funzione esplicitando divisione e resto:

$$K(s) = \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} s & s+1 & 1 \\ s+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)}}_{K'(s)} + \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{D}}$$

Il termine problematico era  $s(s+1)$  al numeratore, che diviso per il denominatore dà proprio come risultato 1. Ergo, separiamo questo termine dagli altri. La matrice costante ottenuta sarà la matrice  $D$ , mentre quello che rimane della  $K(s)$  è la nostra funzione  $W(s)$  su cui basare la realizzazione, che chiameremo  $K'(s)$ .

Possiamo scegliere fra tre algoritmi diversi di realizzazione, che abbiamo già visto. Scegliendo la forma canonica raggiungibile, si avrebbe una dimensione del sistema pari a  $N = np = 2 \cdot 3 = 6$ , mentre scegliendo la forma osservabile si avrebbe dimensione  $N = nq = 2 \cdot 2 = 4$ . Chiaramente, allora, converrebbe scegliere la seconda; tuttavia, per scopi illustrativi, mostriamo la realizzazione del sistema in entrambe le forme.

**Esempio: Realizzazione in forma canonica raggiungibile**

Iniziamo scrivendo la  $K'(s)$  esplicitando i polinomi al numeratore e al denominatore con i loro coefficienti:

$$K'(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & s+1 & 1 \\ s+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s^2 + s}$$

Costruiamo la  $A_R$  in questo modo (ricordando che ogni blocco è  $3 \times 3$ ):

$$A_R = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{I} \\ \boxed{-a_0 I} & \boxed{-a_1 I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ -a_0 & & & -a_1 & & \\ & -a_0 & & -a_1 & & \\ & & -a_0 & & -a_1 & \\ & & & -a_1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & & & -1 & & \\ 0 & & & & -1 & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

La  $B_R$ , sempre a blocchi  $3 \times 3$ , sarà:

$$B_R = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

La  $C_R$  avrà i coefficienti  $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  messi in ordine:

$$C_R = (B_0 \quad B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per sapere se il sistema presenta una parte inosservabile, dovremmo studiare l'osservabilità. In realtà, abbiamo già visto che la forma canonica osservabile ci avrebbe portato ad un sistema di dimensione 4, e non 6; perciò, in questa rappresentazione ci sono delle parti superflue.

### Esempio: Realizzazione in forma canonica osservabile

Stavolta, la matrice  $A_O$  avrà blocchi di dimensione 2:

$$A_O = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-a_0} \\ \boxed{I} & \boxed{-a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 & \\ 0 & 0 & -a_0 & \\ 1 & -a_1 & -a_0 & \\ & 1 & -a_1 & \\ & & -a_0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & -1 & \end{pmatrix}$$

La matrice  $B_O$  conterrà i coefficienti del numeratore:

$$B_O = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mentre la matrice  $C_O$  sarà semplicemente:

$$C_O = (\boxed{0} \quad \boxed{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo un sistema di dimensione 4; è la dimensione più piccola? *Non possiamo saperlo* finché non studiamo la raggiungibilità, studio che ometteremo.

### Esempio: Realizzazione per righe

Potremmo anche sperare di riuscire a partizionare il sistema dividendolo per righe o colonne. Scomponendo  $K'(s)$  per righe, otterremmo  $K_1(s)$  e  $K_2(s)$  che hanno rispettivamente due poli e un polo per un totale di tre

poli, che è inferiore a 4 ma sempre superiore a 2, il che significa che dovremo comunque verificare la raggiungibilità e l'osservabilità. Iniziamo:

$$K'(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ \frac{1}{s} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(s) \\ K_2(s) \end{pmatrix}$$

Abbiamo due diverse uscite (che individuano due sistemi distinti):

$$Y_1(s) = K_1(s)U(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix} U(s)$$

$$Y_2(s) = K_2(s)U(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \end{pmatrix} U(s)$$

I due sistemi ora hanno una uscita, perciò conviene trovare una realizzazione con la forma canonica osservabile. In questo modo, per il primo sistema si ha:

$$K_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix} = \frac{(1 \ 1 \ 0)s + (0 \ 1 \ 1)}{s(s+1)}$$

$$A_{1O} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{1O} = \begin{pmatrix} B_{1,0} \\ B_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{1O} = (0 \ 1)$$

Per il secondo sistema abbiamo:

$$K_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(1 \ 0 \ 0)}{s}$$

La matrice  $A_{2O}$  è  $1 \times 1$  (quindi uno scalare), e si trova considerando la matrice con tutti zeri (0), mettendo 1 sotto alla diagonale principale e sostituendo l'ultima (e unica) colonna con  $-a_0$ , ottenendo:

$$A_{2O} = -a_0 = 0, \quad B_{2O} = (B_{2,0}) = (1 \ 0 \ 0), \quad C_{2O} = 1$$

Unendo quello che abbiamo ottenuto, si ha:

$$Y(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = K'(s)U(s) \implies y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Lo spazio di stato complessivo è

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e si avrà:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{1O}x_1 + B_{1O}u \\ y_1 = C_{1O}x_1 + Du \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_{2O}x_2 + B_{2O}u \\ y_2 = C_{2O}x_2 + Du \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_{1O} & \\ & A_{2O} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_{1O} \\ B_{2O} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} C_{1O} & \\ & C_{2O} \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Il lato negativo di questo approccio è che, anche se si ha una dimensione del sistema più piccola, si ottiene una forma *non canonica* per quanto riguarda raggiungibilità e osservabilità, per cui vanno studiate *entrambe* queste due proprietà.

Iniziamo con la raggiungibilità:

$$R = (B \ AB \ A^2B)$$

Notiamo che il rango di  $B$  è già pieno, perciò sarà pieno anche il rango di  $R$ :

$$\text{rango}(R) = 3$$

e, di conseguenza, la sua immagine sarà pari a tutto  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

si è scelta la base canonica  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  per indicare una base di  $\mathcal{R}$ , ma può essere scelta qualsiasi base di  $\mathbb{R}^3$  (e, comunque, non è rilevante per i nostri scopi).

Per l'osservabilità, invece, si costruisce  $O$ :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Guardando anche solo le prime tre righe, si vede che il rango di  $O$  è pari a 3, perciò il nucleo sarà lo spazio vuoto:

$$\mathcal{I} = \{0\}$$

Il fatto che non siano venute parti inosservabili significa che non ci sono parti superflue nel sistema studiato, perciò  $N = 3$  è la dimensione minima del sistema (per un approfondimento, leggi l'**Appendice** alla fine del documento).

## Esempio: Realizzazione con l'algoritmo di Gilbert

La condizione per poter applicare l'algoritmo di Gilbert è che la funzione  $K'(s)$  sia compatibile con una matrice  $A$  diagonale, ovvero che tutte le radici del denominatore abbiano molteplicità 1. In questo caso, le radici del denominatore sono  $s_1 = 0$  e  $s_2 = -1$ , entrambe con molteplicità 1, perciò il criterio è applicabile.

Si inizia scrivendo  $K'(s)$  in poli e residui:

$$K'(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & s+1 & 1 \\ s+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1}$$

Calcolando i residui si trova che

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che  $R_1$  ha rango due, mentre  $R_2$  ha rango uno: ciò significa che l'autovalore relativo a  $R_1$ , che sarà  $\lambda_1 = 0$  visto che il polo relativo a  $R_1$  è proprio 0, avrà molteplicità due. Per lo stesso motivo, l'autovalore  $\lambda_2 = -1$  relativo a  $R_2$  avrà molteplicità uno. Allora, la matrice  $A$  diagonale sarà della forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Nelle precedenti lezioni abbiamo visto che la scelta migliore per i vettori  $u_{11}, u_{12}, u_2$  è costituita dai vettori  $e_1, e_2, e_3$ :

$$u_{11} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{12} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cosìabbiamo

$$U = (u_{11} \ u_{12} \ u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \implies U^{-1} = I^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Allora, facendo riferimento a quanto studiato nelle scorse lezioni:

$$\begin{aligned} W(s) &= K(s) = e^{0t}(Cu_{11}v'_{11}B + Cu_{12}v'_{12}B) + e^{-t}Cu_2v'_2B \\ C(u_{11}v'_{11} + u_{12}v'_{12})B &= C_1B_1 = R_1 \\ Cu_2v'_2B &= C_2B_2 = R_2 \end{aligned}$$

Visto che  $R_1$  ha rango 2 ed è una matrice  $2 \times 3$ , allora  $C_1$  e  $B_1$  devono essere rispettivamente  $2 \times r$  e  $r \times 3$ , dove  $r$  è proprio il rango di  $R_1$  (quindi  $r$  sarà 2, e le matrici sono  $C_{1(2 \times 2)}$  e  $B_{1(2 \times 3)}$ ). Analogamente,  $C_2$  e  $B_2$  saranno rispettivamente  $2 \times 1$  e  $1 \times 3$ , perché  $\text{rango}(R_2) = 1$ .

Dovremo allora trovare le matrici  $C_1, B_1, C_2, B_2$  tali che:

$$\underbrace{C_1}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{B_1}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{C_2}_{2 \times 1} \cdot \underbrace{B_2}_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come possiamo scegliere queste matrici? In realtà, come vogliamo. Un consiglio è scegliere la matrice identità quando possiamo (ovvero quando una matrice è quadrata), come nel caso di  $C_1$ : scegliendo  $C_1 = I$ , abbiamo che  $B_1$  può essere posto uguale a  $R_1$  (perché così  $C_1B_1 = IR_1 = R_1$ ). Infatti:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_1=I} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_1}$$

Nel caso di  $R_2$ , visto che ha la seconda riga formata da soli zeri, possiamo scegliere  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $B_2$  uguale alla prima riga di  $R_2$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_2}$$

Di conseguenza, le matrici  $C$  e  $B$  complete saranno:

$$C = (C_1 \quad C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Determinare la dimensione minima di realizzazione tramite $k(t)$

Lo studio di  $K(s)$  nel dominio di Laplace è molto più utile e significativa dello studio della stessa funzione nucleo  $k(t)$  nel dominio di  $t$ . Tuttavia, esiste un algoritmo che si basa su  $k(t)$  che permette, sotto certe condizioni, di determinare la dimensione della realizzazione minima di un sistema.

Questo algoritmo si basa sulla costruzione di una particolare matrice, detta *matrice di Hankel*, indicata con  $H$ , fatta in questo modo:

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & H_3 & \cdots \\ H_1 & H_2 & H_3 & & \\ H_2 & H_3 & \ddots & & \\ H_3 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

dove  $H_i$  è uguale alla derivata  $i$ -esima di  $k(t)$  calcolata in zero:

$$H_i = \left[ \frac{d^i}{dt^i} k(t) \right]_{t=0}$$

La dimensione della realizzazione minima è proprio il rango della matrice  $H$ . Notiamo che, se dovessimo avere  $K(s)$ , non è difficile trovare  $k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$ .

La spiegazione del perché si costruisce  $H$  è semplice: se  $k(t) = W(t) = Ce^{At}B$ , allora

$$\begin{aligned} H_0 &= k(0) = CB, \\ H_1 &= \left[ \frac{d}{dt} k(t) \right]_{t=0} = \left[ \frac{d}{dt} Ce^{At}B \right]_{t=0} = [CAe^{At}B]_{t=0} = CAB \\ H_2 &= \left[ \frac{d^2}{dt^2} k(t) \right]_{t=0} = [CA^2e^{At}B]_{t=0} = CA^2B \end{aligned}$$

e così via. Allora, otterremo la matrice

$$H = \begin{pmatrix} CB & CAB & CA^2B & \cdots \\ CAB & CA^2B & \ddots & \\ CA^2B & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Notiamo che la prima riga della matrice è  $C \cdot R$ , dove  $R$  è la matrice della raggiungibilità della realizzazione in forma canonica raggiungibile. Allo stesso modo, la prima colonna di  $H$  è  $O \cdot B$ , dove  $O$  è la matrice dell'osservabilità della forma canonica osservabile. Allora, questa matrice “combina” le due forme, e ci dà un risultato immediato sulla dimensione minima del sistema. Questo avviene perché la realizzazione minima, provenendo direttamente da una  $W(t)$ , è tutta raggiungibile e tutta osservabile (perciò le parti inosservabili e non raggiungibili non ci sono).

## Realizzazione di un sistema a tempo discreto

Finora abbiamo visto come partire da una funzione nucleo  $k(t) \leftrightarrow K(s)$  nel tempo continuo per realizzare un sistema a tempo continuo. Nel tempo discreto abbiamo:

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^t k(t-\tau)u(\tau) \iff Y(z) = K(z)U(z)$$

L'obiettivo è, data la funzione nucleo

$$k(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B, & t \geq 1 \\ D, & t = 0 \end{cases} \iff K(z) = C(zI - A)^{-1}B$$

trovare una soluzione al problema di realizzazione, che avrà la forma

$$(n, A, B, C, D)$$

*Si trova che è tutto analogo al tempo continuo, per cui gli algoritmi sono gli stessi di quelli del tempo continuo.*

Si può perfino definire la matrice di Hankel fatta in questo modo:

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & H_3 & \cdots \\ H_1 & H_2 & H_3 & & \\ H_2 & H_3 & \ddots & & \\ H_3 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

dove, stavolta:

$$H_i = k(i), \quad \text{dove } k(i) = k(t)|_{t=i}$$

Notiamo che, per  $t \geq 1$ ,  $k(t) = CA^{t-1}B$ , perciò la matrice  $H$  avrà la forma:

$$H = \begin{pmatrix} D & CB & CAB & CA^2B & \cdots \\ CB & CAB & CA^2B & & \\ CAB & CA^2B & \ddots & & \\ CA^2B & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

che, comunque, è simile a quella del tempo continuo.

\*\*\*

## Appendice

Prendi il paragrafo “Esempio: Realizzazione in forma canonica osservabile”. Considera il sistema di quel paragrafo ma con una diversa matrice  $C$ , fatta in questo modo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}u \\ y = (0 \ 1 \ 1)x \end{cases}$$

Il procedimento sarebbe identico a quello del paragrafo sopra, ma la corrispondente matrice  $O$  della forma canonica osservabile sarebbe diversa, in particolare:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La terza riga è un multiplo della seconda, perciò è evidente che il rango sarà pari a 2 e di conseguenza il nucleo avrà dimensione 1; per trovare il vettore generatore del nucleo, basta considerare che si ottiene zero sommando le prime due colonne e sottraendo la terza:

$$\mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Questo è il sottospazio di stato che rappresenta gli stati inosservabili; perciò, essendoci una parte inosservabile (perché  $\mathcal{I}$  non è vuoto), siamo certi che il sistema *non è minimo*, e dobbiamo effettuare il cambio di coordinate in base all'inosservabilità. Si costruisce allora la matrice  $T^{-1}$ , che ha il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  come prima colonna, e ha un completamento arbitrario di vettori indipendenti per raggiungere tre dimensioni:

$$T^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \text{completamento} \\ 1 & \\ -1 & \end{array} \right) \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\* è mostrato un possibile completamento.

Allora, le matrici del sistema in queste coordinate saranno:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{C}_2)$$

Visto che  $\tilde{A}_{11}$  e  $\tilde{A}_{12}$  contengono parti inosservabili (*vedi*, a riguardo, gli appunti della lezione 27 del 18 novembre 2021, capitolo “Partizione del sistema secondo l’osservabilità.”), la matrice dinamica del nuovo sistema che andremo a formare avrà come matrice dinamica esclusivamente  $\tilde{A}_{22}$ , e di conseguenza avrà come altre matrici  $\tilde{B}_2$  e  $\tilde{C}_2$ .