

Teoria dei sistemi

Lezione 4 (1° ottobre 2021)

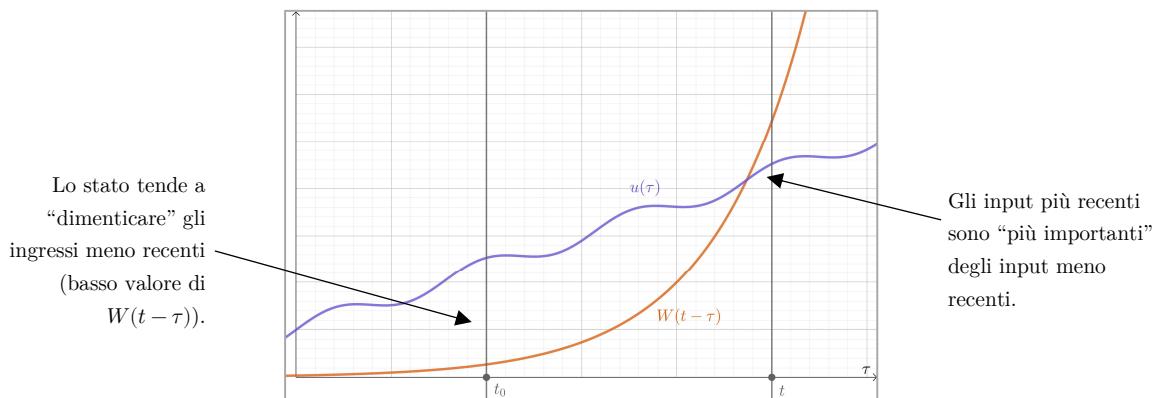
Questi appunti saranno esclusivi per gli utenti Patreon sottoscritti al piano **Master**: gli appunti delle lezioni successive saranno pertanto pubblicati solo su Patreon e saranno disponibili anteprime pubbliche.

Uscite forzate

La componente dell'uscita $y(t)$ dipendente solamente dall'ingresso viene chiamata *uscita forzata* $y_F(t)$, e corrisponde al valore:

$$y_F(t) = \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

La matrice W l'abbiamo chiamata *matrice delle risposte impulsive in uscita* (o semplicemente *risposta impulsiva*), le cui colonne possono essere interpretate come risposte forzate ad ingressi impulsivi. Possiamo considerare l'integrale sopra come una “media pesata” di $u(\tau)$ dove $W(t - \tau)$ rappresenta il peso. Usando un'espressione informale del professore, la matrice W ci dice quanto è “importante” l'ingresso ad un certo istante; perciò, più il valore di $W(t - \tau)$ è alto, più l'ingresso è “importante”, mentre più è basso e più il sistema tende a “dimenticare” quello specifico ingresso. Questa è una possibile rappresentazione (si sono posti $p = 1$ e $q = 1$):



Quando si hanno più ingressi (ovvero il vettore $u(t)$ ha dimensione maggiore di 1, cioè $p > 1$), si ha che non tutti gli ingressi contribuiscono al sistema allo stesso modo: se ci sono due ingressi, ad esempio, $W(t)$ sarà nella forma:

$$W(t) = (W_1(t) \quad W_2(t))$$

Dove $W_1(t)$ sarà il peso del primo ingresso (la prima componente di $u(t)$, ovvero $u_1(t)$), mentre $W_2(t)$ sarà il peso del secondo ingresso.

Sistemi stazionari e arbitrarietà dell'istante iniziale

Noi studiamo sistemi lineari di dimensione finita *stazionari*, che hanno forma esplicita:

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1)$$

Stazionario significa che non c'è niente che dipende *direttamente* dal tempo. Detto informalmente, se facciamo un esperimento in questo momento e domani facciamo lo stesso esperimento (con le stesse condizioni) otterremo che entrambi gli esperimenti avranno dato gli stessi risultati. Per esempio, se oggi facciamo bollire l'acqua in una pentola e questa ci mette 10 minuti per arrivare a ebollizione, domani, facendo la stessa cosa, otterremo lo stesso risultato: ci metterà sempre 10 minuti. Se un sistema non fosse stazionario, questo potrebbe non accadere, e conta effettivamente *quando* un esperimento viene fatto. Questo vuol dire che, rispettando tutte le condizioni, l'istante iniziale di un esperimento può essere *arbitrario*.

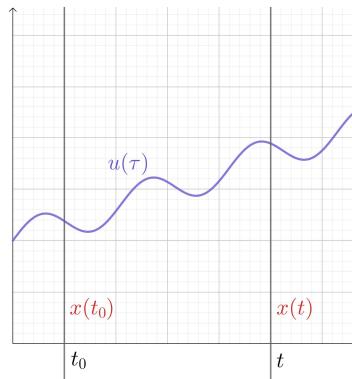
Nel sistema (1), $x(t_0)$ rappresenta lo *stato iniziale*. Se, facendo un esperimento, troviamo che $x(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora, se vogliamo fare lo stesso esperimento e ottenere gli stessi risultati, partendo da un altro istante iniziale t'_0 , dobbiamo considerare sempre $x(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come stato iniziale, e non lo stato in quel momento, $x(t'_0)$, in quanto facendo così potremmo ottenere un altro risultato¹. Per sottolineare questo, si può indicare $x(t_0)$ come x_0 , in questo modo è chiaro che se un esperimento ha stato iniziale x_0 , per ottenere gli stessi risultati da un altro esperimento, anche questo deve avere x_0 come stato iniziale. Inoltre, gli esperimenti dovranno avere gli *stessi ingressi*, altrimenti, di nuovo, si otterranno risultati diversi.

Fatte queste considerazioni, è facile vedere come in sistemi stazionari è possibile fare, per semplicità, l'assunzione:

$$t_0 = 0$$

Informazione nello stato iniziale

Tutti i risultati che abbiamo ottenuto finora si basano sull'assunzione che lo stato iniziale, $x(t_0) = x_0$, abbia tutte le informazioni necessarie per sapere cosa succede dopo. Verifichiamo ora che questa sia, effettivamente, un'assunzione valida. Facciamo un esperimento: partiamo da un certo istante t_0 , applichiamo un certo ingresso e arriviamo all'istante t . Lo stato in questi istanti sarà, quindi, $x(t_0)$ e $x(t)$ rispettivamente.

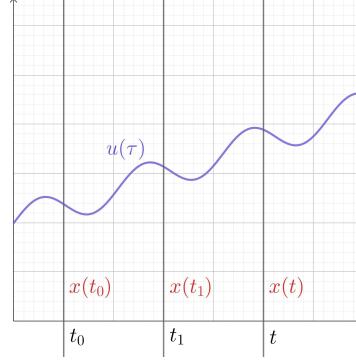


¹ Il concetto potrebbe essere banale e intuitivo per alcuni, mentre per altri potrebbe generare confusione. Non abbiamo detto che, essendo stazionario, non conta l'istante iniziale? Non esattamente: se vai a rileggere, abbiamo scritto che, *a parità di condizioni iniziali*, l'istante iniziale è arbitrario. Se faccio partire un carrello da fermo, dopo qualche secondo si starà muovendo: se ora faccio partire un altro esperimento, otterrò risultati diversi, perché nel primo esperimento il carrello era fermo, mentre ora si sta muovendo.

Lo stato alla fine dell'esperimento da t_0 a t sarà, come sempre:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \quad (2)$$

Ora facciamo di nuovo l'esperimento, ma ci fermiamo ad un istante t_1 :



Per trovare $x(t_1)$ dobbiamo considerare l'evoluzione da t_0 a t_1 dello stato (basta sostituire t_1 a t nella solita equazione, visto che stavolta arriviamo fino a t_1 e non fino a t):

$$x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau) d\tau \quad (3)$$

La nostra assunzione (che vogliamo verificare) è che, partendo da $x(t_1)$ e considerando lo stesso ingresso, si può arrivare allo stesso stato finale, ovvero che la $x(t)$ ottenuta prima (equazione 2) sia uguale alla $x(t)$ che otterremmo se partissimo da t_1 come istante iniziale, invece che da t_0 , considerando come stato iniziale $x(t_1)$. La $x(t)$ che otteniamo partendo da t_1 è proprio:

$$x(t) = \Phi(t - t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \quad (4)$$

Nota: le prossime scritte in blu non sono altro che un lungo calcolo fatto di sostituzioni, niente di difficile, è solo molto lungo.

L'obiettivo è prendere l'equazione (4) provare che sia uguale all'equazione (2). Iniziamo col sostituire nella (4), al posto di $x(t_1)$, il suo valore nell'equazione (3):

$$x(t) = \Phi(t - t_1) \underbrace{\left[\Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau) d\tau \right]}_{x(t_1)} + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

Espandiamo il prodotto:

$$x(t) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)x(t_0) + \Phi(t - t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1 - \tau)u(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

Perché le due equazioni siano uguali, i termini relativi agli stessi coefficienti devono essere uguali. Ovvero, il coefficiente di $x(t_0)$ nella (2) dev'essere uguale al coefficiente di $x(t_0)$ dell'equazione trovata. Quindi:

$$\Phi(t - t_0)x(t_0) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)x(t_0) \iff \Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

Abbiamo allora trovato una proprietà della matrice Φ . Ed effettivamente, questa proprietà è vera, in particolare, per la matrice $\Phi(t) = e^{At}$ che avevamo trovato, infatti, banalmente: $e^{A(t-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} = e^{A(t-t_1+t_1-t_0)} = e^{A(t-t_0)}$.

La stessa cosa che abbiamo fatto per lo stato possiamo farla per l'ingresso: i termini con l'integrale nella (2) devono corrispondere a quelli della (4). E allora:

$$\int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau = \Phi(t-t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau)u(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

Notiamo subito che possiamo applicare la linearità dell'integrale a sinistra; perciò, lo spezzo in t_1 e semplifichiamo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} H(t-\tau)u(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau &= \Phi(t-t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau)u(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} H(t-\tau)u(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau)u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Abbiamo anche portato dentro l'integrale il termine $\Phi(t-t_1)$, visto che non dipende da τ . A questo punto abbiamo due integrali dipendenti da τ che hanno gli stessi estremi di integrazione; pertanto, saranno uguali se e solo se sono uguali gli integrandi:

$$H(t-\tau)u(\tau) = \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau)u(\tau) \iff H(t-\tau) = \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau)$$

Il risultato del calcolo è che le matrici della forma esplicita $\Phi(t)$ e $H(t)$, affinché le assunzioni fatte siano vere, devono essere tali che:

$$\begin{cases} \Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_1)\Phi(t_1-t_0) \\ H(t-\tau) = \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau) \end{cases} \quad (5)$$

Ora andiamo a derivare la prima equazione del sistema in forma esplicita (1) per vedere se otteniamo esattamente la forma implicita di partenza. Allora²:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \Phi(t-t_0)}{\partial t} x(t_0) + H(0)u(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial H(t-\tau)}{\partial t} u(\tau) d\tau$$

Ora sostituiamo $H(t-\tau)$ nell'integrale con quello che abbiamo trovato prima nel sistema (5), così da separare la derivata dall'integrale, e facciamo la stessa cosa con $\Phi(t-t_0)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi(t-t_1)\Phi(t_1-t_0) \right) x(t_0) + H(0)u(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi(t-t_1)H(t_1-\tau) \right) u(\tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} \cdot \Phi(t_1-t_0)x(t_0) + H(0)u(t) + \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t_1-\tau)u(\tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} \left(\Phi(t_1-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t_1-\tau)u(\tau) d\tau \right) + H(0)u(t) \end{aligned}$$

Questa espressione vale $\forall t_1 \in [t_0, t]$. Ma noi non vogliamo un'espressione dipendente da un terzo istante t_1 , perciò andiamo a prendere il limite per $t_1 \rightarrow t$:

$$\dot{x}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(t-t_1)}{\partial t} \left(\Phi(t_1-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t_1-\tau)u(\tau) d\tau \right) + H(0)u(t)$$

² La notazione $\dot{x}(t)$ indica la derivata rispetto al tempo di $x(t)$.

Il termine tra parentesi è $x(t_1)$, ma per $t_1 \rightarrow t$ tenderà proprio a $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow t} \left(\frac{\partial \Phi(t - t_1)}{\partial t} \right) \cdot x(t) + H(0)u(t)$$

Ora consideriamo $\Phi(t)$: è una matrice $n \times n$ di *funzioni del tempo*. Avrà, quindi, una forma come questa:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \dots & \phi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Prendendo la derivata di $\Phi(t)$ otteniamo la matrice formata dalle derivate delle sue componenti:

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{11}(t)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial \phi_{1n}(t)}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n1}(t)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial \phi_{nn}(t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Facendo il limite (quindi l'argomento tende a zero), si ottiene una matrice $n \times n$ di valori *costanti*, quindi non più dipendenti dal tempo. Diamo un nome a questa matrice: chiamiamola A . Abbiamo ottenuto allora:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + H(0)u(t)$$

Ora risulta evidente che la matrice $H(0)$ può essere chiamata B ; siamo così arrivati alla forma implicita:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Abbiamo quindi definito le matrici A e B come:

$$A = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(t - t_1)}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Phi(t)}{dt} \stackrel{*}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} e^{At} = A'$$

*È stata sostituita a $\Phi(t)$ l'espressione da cui siamo partiti quando avevamo la forma implicita, ovvero e^{At} . Si è indicato con A' la matrice A della forma implicita, e siamo arrivati che $A = A'$, ovvero che la A che abbiamo imposto noi è, in effetti, la stessa A della forma implicita. Stessa cosa si può provare per la B :

$$B = H(0) = [e^{A't} \cdot B']_{t=0} = B'$$

Per quanto riguarda la $y(t)$, in realtà, non dobbiamo fare nulla; la forma che assume nel sistema (1) è una nostra costrizione, perché in realtà la forma esplicita può essere scritta benissimo in questo modo:

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

L'altra forma di $y(t)$, come detto, è una forzatura che abbiamo fatto qualche lezione fa per evidenziare la corrispondenza di $x(t)$ e $y(t)$.

Dalla prossima lezione si vedrà come calcolare la matrice e^{At} .

Teoria dei Sistemi

Lezione 5 (5 ottobre 2021)

Calcolo di e^{At}

La scorsa lezione ci siamo lasciati col calcolo di e^{At} che dovevamo svolgere. Ovviamente una matrice all'esponente non ha senso (se non viene definito); tuttavia, possiamo ricondurci alla definizione di e^x in termini di serie:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Quindi, in modo analogo, possiamo definire e^{At} come:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (1)$$

Ora non ci resta che capire come si calcola; d'altronde, potremmo trovarci di fronte a qualcosa tipo:

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}(t-\tau)}$$

Procediamo per gradi. e^{At} è un'espressione formale, mentre il calcolo reale è la parte destra della (1), ovvero le somme dei vari termini. Se la matrice A fosse una qualsiasi matrice, sicuramente questo sarebbe un problema. Se noi, però, riscriviamo la matrice A nella sua *forma di Jordan* (ovvero la matrice A diagonalizzata), allora il calcolo sarà molto più semplice; infatti, in una matrice diagonale qualsiasi D vale la formula:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{pmatrix}, \quad d_i \in \mathbb{R}$$

Nota che nella notazione sono omessi gli zeri. Allora, se A fosse diagonale, la formula sarebbe molto più semplice perché:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & & \\ & \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, in pratica, fare e^{At} equivale a una matrice dove al posto di ogni elemento λ_i di A c'è $e^{\lambda_i t}$. Se A non fosse diagonale, possiamo cercare di diagonalizzarla (si applica il criterio sulla diagonalizzazione studiato in geometria, che riporto qui di seguito).

Criterio di diagonalizzabilità¹ – Consideriamo il caso di \mathbb{R}^n e sia A una matrice $n \times n$; A è *diagonalizzabile se e solo se* una di queste condizioni è verificata:

- Esiste una base di \mathbb{R}^n formata da autovettori di A .
- La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale ad n e, per ogni autovalore, la sua molteplicità geometrica è uguale alla sua molteplicità algebrica.
- La somma delle molteplicità geometriche è proprio uguale ad n .

Si ricorda che la molteplicità geometrica è la dimensione del nucleo del sottospazio generato dall'equazione caratteristica $A - \lambda I = 0$; in simboli $\dim \ker(A - \lambda I)$.

Caso in cui A abbia n autovalori distinti

Supponiamo che la matrice A non sia diagonale, ma che abbia n autovalori tutti distinti. Vuol dire che ciascun autovalore ha necessariamente molteplicità algebrica μ che vale 1, e anche molteplicità geometrica 1 (visto che la molteplicità geometrica è sempre minore uguale alla molteplicità algebrica). Presi u_1, \dots, u_n autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, abbiamo che questi sono linearmente indipendenti per costruzione (si dimostra in geometria); la matrice A può essere scritta in *forma spettrale semplice*, ovvero come:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v'_i \quad (2)$$

Dove $v'_i u_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ e, in particolare²:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Definendo quindi U e U^{-1} in questo modo, l'espressione (2) può essere scritta anche come:

$$A = U \Lambda U^{-1}$$

Dove Λ è la matrice diagonale che contiene gli autovalori di A , ovvero:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Indicando, allora, la matrice A in questo modo, anche se A non è diagonale di per sé, scrivere le potenze di A diventa molto semplice:

$$A^2 = U \Lambda U^{-1} U \Lambda U^{-1} = U \Lambda^2 U^{-1}$$

¹ Il criterio da noi studiato in geometria si riferiva agli *endomorfismi*, e non alle matrici, ma c'è corrispondenza biunivoca tra questi due, e a noi interessano solo le matrici. Inoltre, questo criterio è valido su ogni spazio vettoriale di dimensione finita, ma a noi interesserà prevalentemente il caso di \mathbb{R}^n o, al limite, \mathbb{C}^n .

² Nota che l'apice su un vettore indica che è trasposto, ovvero le scritture v^T e v' sono equivalenti.

O, in alternativa, se si preferisce la scrittura a sommatorie³:

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v'_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j v'_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j u_i v'_i u_j v'_j$$

Ricordando che $v'_i u_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, allora nel prodotto tutti i termini con indici diversi si annullano, perciò la sommatoria può essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 u_i v'_i$$

Questa scrittura mette in evidenza il fatto che elevare ad una potenza la matrice A risulterà ad elevare a quella potenza gli autovalori nella matrice Λ , ovvero:

$$A^k = (U\Lambda U^{-1})^k = U\Lambda^k U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} U^{-1}$$

Ecco allora che:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} U\Lambda^k U^{-1} \frac{t^k}{k!} \stackrel{*}{=} U \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} \right) U^{-1} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} U^{-1}$$

*Possiamo portare fuori dalla sommatoria U e U^{-1} visto che non dipendono da k , ma è importante che lo si faccia rispettando l'ordine: U deve moltiplicare a *sinistra*, mentre U^{-1} a *destra*.

Considerazioni sul cambio di coordinate in un sistema

Avevamo visto nelle lezioni precedenti che potevamo cambiare coordinate nel sistema in forma implicita

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Ponendo il cambio di variabile $z = Tx$ con T operatore lineare (matrice):

$$\begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1}z + TBu \\ y = CT^{-1}z + Du \end{cases}$$

Le matrici A e TAT^{-1} sono *simili*, e hanno perciò gli stessi autovalori. Chiamiamo $\tilde{A} = TAT^{-1}$, ovvero $A = T^{-1}\tilde{A}T$, e confrontando con quello che abbiamo visto finora in questa lezione, notiamo che la matrice in forma spettrale, $U\Lambda U^{-1}$, corrisponde ad un *particolare cambio di coordinate*, ovvero quello in cui $T = U^{-1}$. Posso allora porre $z = U^{-1}x \Leftrightarrow x = Uz$. Il sistema che viene fuori avrà Λ come matrice dinamica:

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + U^{-1}Bu \\ y = CUz + Du \end{cases}$$

Con il sistema in questa forma, possiamo facilmente calcolare l'esponenziale $e^{\Lambda t}$, per poi tornare al sistema di partenza con il cambio di coordinate inverso, infatti $e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1}$.

³ Quando si moltiplicano dei vettori (o, in generale, delle matrici), dev'essere rispettato l'ordine: gli scalari possono essere spostati a piacimento, i vettori no.

Evoluzione libera dello stato

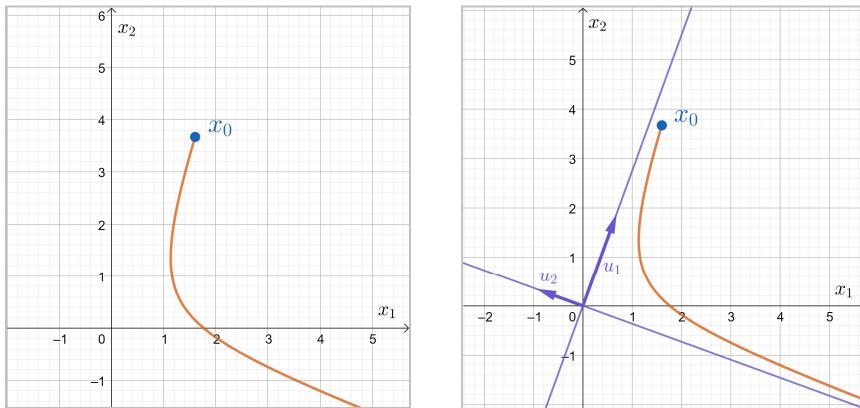
L'evoluzione libera dello stato $x_L(t)$ è espressa come:

$$x_L(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i x_0$$

u_i è un vettore $n \times 1$, v'_i è un vettore $1 \times n$, e x_0 è un vettore $n \times 1$; il prodotto $v'_i x_0$ darà allora uno scalare che chiameremo c_i :

$$x_L(t) = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Interpretiamo questo risultato: consideriamo \mathbb{R}^2 , per cui $x_L(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Dato un piano e una condizione iniziale x_0 , l'evoluzione rispetto ad x_1 ed x_2 è una combinazione di esponenziali che può essere abbastanza complessa. Se però, invece di usare la base di x_1 e x_2 , utilizziamo la base (u_1, u_2) facendo il cambio di coordinate, ogni componente si muove secondo una banale legge esponenziale, pertanto può essere molto più semplice studiarlo:



Quindi, tramite questa nuova base, non solo abbiamo lo strumento di calcolo per sapere quanto vale e^{At} , ma l'espressione che otteniamo ci agevola nell'analisi del sistema, perché ci permette di vedere più facilmente ciò che succede.

Caso in cui A non abbia n autovalori distinti

Supponiamo che ci siano autovalori di A con molteplicità algebrica maggiore di 1; non saranno più, quindi, n distinti, ma saranno μ autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, ciascuno con molteplicità algebrica r_1, \dots, r_μ . Noi però abbiamo comunque bisogno di n vettori per il cambio di base, quindi n autovettori distinti. Se abbiamo meno di n autovalori, quando andiamo a calcolare gli autovettori relativi ad un certo autovalore, non possiamo trovare un autovettore per ogni autovalore, altrimenti avremmo μ autovettori e non basterebbero per il cambio di base; invece, dobbiamo trovare che, per ogni autovalore λ_i , ci sono r_i autovettori indipendenti. Questo succede quando lo spazio delle soluzioni dell'equazione caratteristica, $(A - \lambda_i I)u_i = 0$, ha dimensione r_i , ovvero che $\dim \ker(A - \lambda_i I) = r_i$ e quindi che ogni autovalore deve avere molteplicità geometrica uguale a r_i , ovvero alla relativa molteplicità algebrica (come indicato dal criterio di diagonalizzabilità riportato sopra).

Indicando con u_{ij} il j -esimo autovettore relativo all'autovalore λ_i , possiamo scrivere la matrice U come:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r_1} & u_{21} & \cdots & u_{2r_2} & \cdots & u_{\mu 1} & \cdots & u_{\mu r_\mu} \end{pmatrix}$$

La matrice Λ dovrà far corrispondere ad ogni autovettore il relativo autovalore, quindi ci saranno autovalori ripetuti ordinatamente:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_\mu & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_\mu \end{pmatrix}$$

Dove ci sono r_1 autovalori λ_1 , r_2 autovalori λ_2 , ecc. ovvero ogni autovalore λ_i si ripete r_i volte, ovvero tante volte quanto è la molteplicità. Finché ci troviamo nel campo dei reali, e riusciamo a diagonalizzare facilmente la matrice A trovando una matrice diagonale Λ in cui ogni autovalore si ripete quanto la sua molteplicità, si dice che la matrice dinamica Λ è *regolare*, e si indica con Λ_R .

L'evoluzione libera dello stato si indicherà in questo modo:

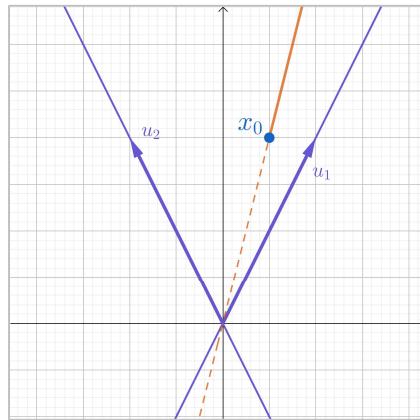
$$x_L(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} e^{\lambda_i t} u_{ij} v'_{ij} x_0 = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} c_{ij} e^{\lambda_i t} u_{ij}$$

La differenza dalla precedente notazione (quella del capitoletto “Evoluzione libera dello stato”) è che, in questa notazione, è evidenziato il fatto che alcuni autovalori sono effettivamente uguali, quindi andranno ripetuti. Sostanzialmente le due notazioni sono equivalenti.

Facciamo un esempio pratico. Ci troviamo in \mathbb{R}^2 , e abbiamo che c'è un singolo autovalore λ della matrice A , con molteplicità $r = 2$; perciò, avremo che $\dim \ker(A - \lambda I) = 2$ e che, quindi, dall'equazione caratteristica $(A - \lambda I)u = 0$ troviamo due vettori indipendenti, u_1 e u_2 , che formano la base dello spazio delle soluzioni. Quindi ci sarà un autovettore u_1 relativo all'autovalore λ , e un autovettore u_2 relativo anch'esso all'autovalore λ . Avremo quindi:

$$e^{At} = \sum_{j=1}^2 e^{\lambda t} u_j v'_j, \quad x_L(t) = \sum_{j=1}^2 e^{\lambda t} u_j v'_j x_0 = \sum_{j=1}^2 c_j e^{\lambda t} u_j$$

Se andiamo a disegnarlo, otterremo che l'unica differenza tra il caso con molteplicità 1 e il caso con molteplicità maggiore di 1 è che, in questo caso, entrambi i vettori si muovono seguendo la stessa legge e della stessa quantità, quindi il grafico sarà, in fin dei conti, una retta:



Teoria dei Sistemi

Lezione 6 (7 ottobre 2021)

Modi naturali

La scorsa lezione abbiamo visto come calcolare e^{At} e come comportarci nel caso in cui A fosse diagonale o diagonalizzabile. Abbiamo visto come l'evoluzione libera dello stato può essere espressa come:

$$x_L(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

Ciascuno dei termini della sommatoria, $c_i e^{\lambda_i t} u_i$, proprio per la sua struttura che rappresenta il modo intrinseco del sistema di evolvere, prende il nome di *modo naturale*. Il modo naturale possiamo vederlo definito da una legge temporale ($c_i e^{\lambda_i t}$) che definisce l'ampiezza del vettore di base, e un vettore u_i che rappresenta il sottospazio (la direzione) lungo cui questa evoluzione avviene. Siccome i vettori di base sono indipendenti, il moto che si ha lungo un autovettore è indipendente da quello che succede rispetto agli altri; per sapere che succede lungo u_i mi basta conoscere λ_i e la condizione iniziale c_i .

Nell'evoluzione libera, in generale si hanno n modi naturali, ma in pratica possono anche essere di meno, se $c_i = 0$ per qualche i .

Considerazioni sulla matrice A

Abbiamo visto la scorsa lezione che la matrice A può essere scritta nella forma:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v'_i$$

Il prodotto $u_i v'_i$ è una matrice $n \times n$ di rango 1 (u_i e v'_i hanno rango 1, pertanto la matrice data dal loro prodotto avrà anch'essa rango 1), e posso chiamarla R_i . In pratica, A è data dalla somma di un coefficiente λ_1 per una matrice R_1 , più un altro coefficiente λ_2 per un'altra matrice R_2 , e così via. Se A è diagonalizzabile ma si hanno autovalori con molteplicità maggiore di 1:

$$A = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_i} \lambda_i u_{ij} v'_{ij} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{j=1}^{\mu_i} u_{ij} v'_{ij}$$

Il discorso è analogo, il prodotto $u_{ij} v'_{ij}$ genera una matrice $n \times n$ di rango 1 che possiamo chiamare R_{ij} . In questo caso, però, ogni autovalore λ_i moltiplica una matrice creata dalla somma di più matrici:

$$R_i := \sum_{j=1}^{\mu_i} u_{ij} v'_{ij} = \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij}$$

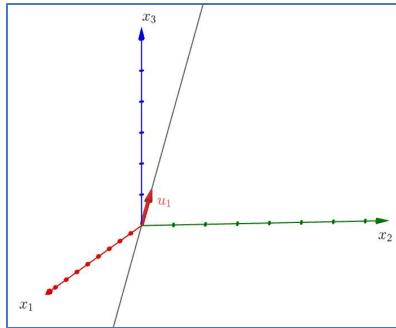
Questa matrice R_i , essendo formata da μ_i matrici R_{ij} di rango 1, avrà rango μ_i . Questo è utile, perché se, ad esempio, sappiamo che A è una matrice 3×3 e che:

$$A_{3 \times 3} = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$$

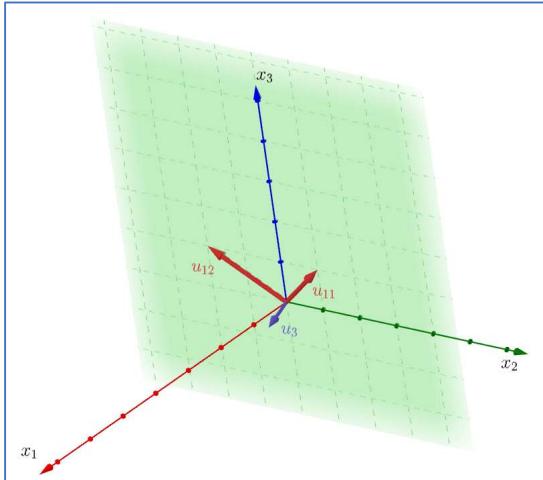
La matrice A , essendo 3×3 , deve avere 3 autovalori, ma qui ce ne sono solamente 2: uno dei due autovalori ha quindi molteplicità 2, e per sapere quale dei due è, basta vedere quale matrice tra R_1 e R_2 ha rango 2.

Scelta degli autovettori

Immaginiamo un sistema di dimensione 3, $x \in \mathbb{R}^3$. Risolvendo il problema (che è una matrice $A_{3 \times 3}$), si ottiene che, nel caso di autovalori distinti, abbiamo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e abbiamo u_1, u_2, u_3 . Questi autovettori sono univocamente definiti a meno del modulo, ovvero possono venire soluzioni diverse per uno stesso autovettore ma tutte ricadono sulla stessa retta.



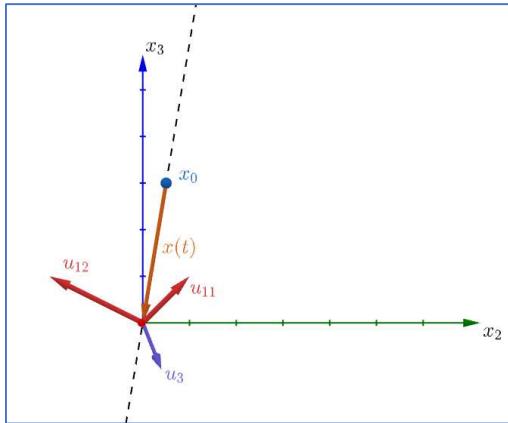
Se, invece, ci sono due autovalori, λ_1 con molteplicità 2 e λ_2 con molteplicità 1, λ_1 individuerà due autovettori u_{11} e u_{12} , e l'altro autovettore u_3 è relativo all'autovalore λ_2 . I primi due autovettori identificano un piano e l'autovettore u_3 esce da quel piano. Se ci vengono soluzioni diverse, possiamo ottenere lo stesso risultato, a meno di fattori di scala? No, perché, mentre per u_3 identifichiamo una *direzione*, gli autovettori u_{11} e u_{12} (relativi allo stesso autovalore λ_1) identificano un *piano*; perciò, si potrebbero trovare due vettori indipendenti diversi da u_{11} e u_{12} , ma che *identificano lo stesso piano*.



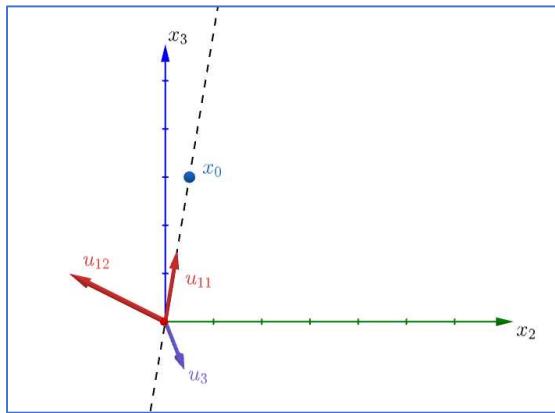
Quindi, diverse soluzioni si riferiscono non per forza sempre alla stessa retta; tuttavia, sono sempre vettori indipendenti che identificano il sottospazio dato da $\ker(A - \lambda_i I)$.

Continuando l'esempio, abbiamo un modo naturale lungo ognuno degli autovettori: $c_{11}e^{\lambda_1 t}$ dice come si muove u_{11} , $c_{12}e^{\lambda_1 t}$ dice come si muove u_{12} e $c_2e^{\lambda_2 t}$ dice come si muove u_3 . Se la condizione iniziale dello stato, x_0 , si trova sul piano (u_{11}, u_{12}) , quindi avrà componenti $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$ con qualsiasi numero *, il suo movimento sarà

una retta (perché questi due autovettori sono relativi allo stesso autovalore e si muoveranno secondo la stessa legge temporale):



Visto che la scelta degli autovettori che identificano il piano (\$u_{11}, u_{12}\$) è arbitraria, poteva essere scelto come autovettore un vettore giacente sulla traiettoria \$x(t)\$:



In questo modo, l'\$u_{11}\$ scelto in questo modo è un *sottospazio invariante*, perché il moto di \$x(t)\$ ricade sempre sulla retta generata da \$u_{11}\$. Il fatto che la scelta degli autovettori che identificano un sottospazio è arbitraria è molto importante, e può tornare utile per vedere più facilmente delle proprietà che con altri autovettori potrebbero essere difficili da individuare.

Modi naturali non osservabili

Possiamo fare un “passo in più” dopo aver studiato \$e^{At}\$: l’evoluzione libera in uscita. La sintassi è la stessa di \$x_L(t)\$, infatti mentre \$x_L(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0\$, l’equazione di \$y_L(t)\$ sarà:

$$y_L(t) = \Psi(t)x_0 = Ce^{At}x_0$$

Sviluppiamo questa notazione¹:

$$Ce^{At}x_0 = C \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i \underbrace{v'_i x_0}_{c_i} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} Cu_i$$

¹ Con questa notazione, per compattezza, ci riferiamo in generale anche alle matrici \$A\$ diagonalizzate, quindi con autovalori con molteplicità che può essere maggiore di 1.

Nota che la matrice C può “entrare” nella sommatoria e “scavalcare” tutti i termini scalari, come c_i ed $e^{\lambda_i t}$, ma non i vettori; perciò, si “ferma” a sinistra di u_i . Notiamo che, mentre nell’evoluzione libera dello stato $x_L(t)$ ci sono tutti i modi naturali (a meno che $c_i = 0$ per qualche i , e allora non si vede, ma potenzialmente c’è, basta cambiare condizione iniziale), nell’evoluzione libera in uscita il prodotto Cu_i potrebbe essere nullo per qualche i , quindi in $y_L(t)$ scompaiono i modi naturali dove $Cu_i = 0$. Questa è una proprietà intrinseca del sistema, che deriva dalla sua struttura. Se succede questo per un certo indice i , diremo che l’ i -esimo modo naturale è *non osservabile*. Si definiscono, quindi, *osservabili* tutti i modi naturali presenti in $y_L(t)$, che è composta *al più* dai modi naturali dello stato.

Modi naturali non eccitabili

Vediamo ora la matrice delle risposte impulsive dello stato $H(t) = e^{At}B$. Di nuovo, studiamola:

$$e^{At}B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i B$$

Il termine $v'_i B$ è un prodotto vettore-matrice, entrambi i fattori dipendono dal sistema, e anche qui succede che se $v'_i B = 0$, allora l’ i -esimo modo naturale non compare nella risposta impulsiva dello stato. Allora, quella legge temporale non contribuirà a “pesare” l’ingresso come visto qualche lezione fa. Allora, se $v'_i B = 0$ per qualche i , si dice che l’ i -esimo modo naturale è *non eccitabile*. Si dice *eccitabile*, quindi, un modo naturale per cui vale $v'_i B \neq 0$, dunque presenti in $H(t)$.

Consideriamo, adesso, la risposta impulsiva in uscita $W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$; prendiamo solo la sua parte legata alla dinamica, quindi con $D = 0$, abbiamo:

$$Ce^{At}B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Cu_i v'_i B$$

Notiamo facilmente che qui è presente sia il prodotto Cu_i , sia $v'_i B$, perciò stavolta scompariranno sia i modi naturali non osservabili, sia i non eccitabili. Ovvero, dentro la matrice delle risposte impulsive in uscita $W(t)$ ci saranno solamente i modi naturali che sono contemporaneamente osservabili ed eccitabili.

Teoria dei Sistemi

Lezione 7 (8 ottobre 2021)

Completa osservabilità e completa eccitabilità

Se gli autovalori sono tutti distinti, possiamo dire facilmente se un modo naturale associato ad un certo autovalore è osservabile o eccitabile, basta vedere se compare in $y_L(t)$ o in $H(t)$. Questa cosa, però, non funziona così bene quando gli autovalori non sono tutti distinti, e ci sono alcuni con molteplicità maggiori di 1. L'evoluzione libera dello stato è indicata, in questo caso, come:

$$x_L(t) = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_i} e^{\lambda_i t} u_{ij} v'_{ij}$$

In queste condizioni, la legge temporale $e^{\lambda_i t}$ può comparire più volte, quindi è difficile dire se, effettivamente, un modo naturale risulti osservabile o eccitabile. Ricordiamo che gli autovettori scelti individuano sempre e univocamente un sottospazio, ma i vettori effettivi che formano questo sottospazio possono essere arbitrari e cambiare da soluzione a soluzione; perciò, non è corretto parlare di “modo naturale osservabile” (o eccitabile) se ci riferiamo alla parte all'interno della seconda sommatoria, $e^{\lambda_i t} u_{ij} v'_{ij}$.

Facciamo un esempio: mettiamoci nel caso bidimensionale, con un autovalore λ con molteplicità 2. Questo individua due autovettori u_{11} e u_{12} scelti dentro uno spazio bidimensionale; ora, può succedere che, calcolando Cu_{11} e Cu_{12} , solo uno di questi sia effettivamente nullo (nel caso dell'osservabilità). Per altre scelte dei due autovettori potremmo ottenere risultati diversi. Definiamo un modo naturale come *completamente osservabile* (rispettivamente *eccitabile*), quando è osservabile (risp. eccitabile) *per ogni* scelta di autovettori che lo compongono.

Autovalori complessi coniugati

Finora abbiamo trattato il caso *regolare*, ovvero in cui la matrice A è diagonale o diagonalizzabile. Ci manca di trattare il caso in cui gli autovalori non sono reali e il caso non regolare. Per quanto abbiamo visto, sembra che i sistemi lineari seguano leggi temporali esponenziali; ma questa è una visione molto limitata, visto che ci sono molti sistemi che non hanno questo andamento (come l'oscillatore armonico). Rimuoviamo allora l'ipotesi che i λ siano reali, dunque che possa esserci una coppia (o più) di autovalori complessi coniugati. Allora avremo¹:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_k^*, \dots, \lambda_n \text{ per qualche } k$$

Questo vale per ogni coppia che dovesse essere presente. Rimaniamo nell'ipotesi che sia diagonalizzabile, ovvero regolare. Possiamo sempre risolvere il sistema per trovare gli autovettori:

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_k^*, \dots, u_n \text{ per qualche } k$$

Dove tutti i vettori sono appartenenti a \mathbb{R}^n a parte u_k e u_k^* , che fanno parte di \mathbb{C}^n . Posso costruire la matrice U senza troppi problemi:

$$U = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_k \quad u_k^* \quad \cdots \quad u_n)$$

¹ Il simbolo * sopra ad una variabile complessa indica il suo coniugato. Il coniugato di λ è un numero complesso che ha la stessa parte reale di λ ma la parte immaginaria è opposta. Ovvero, se $\lambda = \alpha + j\omega$, allora $\lambda^* = \alpha - j\omega$.

Possiamo ancora scrivere, quindi:

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i$$

Questa scrittura ancora regge: quando raggiungiamo il k -esimo termine, sappiamo che si tratta di u_k , e il $(k+1)$ -esimo termine sarà proprio u_k^* . A livello matematico non è cambiato nulla; anche per l'evoluzione libera rimane la formula:

$$x_L(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

Mettiamoci adesso nel caso $n = 2$ e poniamo di voler disegnare la coppia coniugata. Abbiamo u_k e u_k^* , ma sono vettori complessi aventi parte reale e immaginaria, pertanto ci servirebbero quattro dimensioni (siamo, in pratica, in \mathbb{R}^4). Ma anche se potessimo disegnarla, $x_L(t)$ ha espressione complessa, visto che ci sono autovalori complessi; inoltre, se $x_L(t)$ è una funzione, come possiamo disegnare un termine del tipo $e^{(a+bj)t}$?² C'è un modo per "togliere" i termini complessi, perché vogliamo espressioni reali e non complesse.

Immaginiamo sempre $n = 2$, e che il sistema abbia solo una coppia di autovalori complessi coniugati; questa supposizione non è un problema perché, anche se il sistema dovesse averne altri, tutto quello che succede negli altri sottospazi non influenzerebbe questa coppia e viceversa. Abbiamo quindi due autovalori λ e λ^* e i due autovettori u, u^* . Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} U &= (u \quad u^*), \quad V = (u \quad u^*)^{-1} \\ A &= \lambda u v' + \lambda^* u^* v'^* = (u \quad u^*) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} (u \quad u^*)^{-1} \end{aligned}$$

Gli autovettori u e u^* individuano un sottospazio; proviamo a cercare una base di questo sottospazio che abbia vettori reali, e se questi vettori esistono saranno combinazioni indipendenti di u e u^* e viceversa. Ovvero cerchiamo di trovare due vettori w_1 e w_2 reali tali che:

$$(u \quad u^*) = (w_1 \quad w_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare, possiamo effettuare senza problemi il cambio di base, visto che potremo invertirla. Se u, u^* sono complessi e w_1, w_2 sono reali, necessariamente la matrice deve contenere termini complessi. Per semplificare, scriviamo $u = u_a + j u_b$, con $u_a, u_b \in \mathbb{R}^2$; allora, u_a sarà la parte reale di u e u_b sarà la sua parte immaginaria. Il coniugato sarà allora $u^* = u_b - j u_a$. Sostituiamo w_1 e w_2 con u_a e u_b e completiamo la matrice per ottenere le combinazioni lineari che ci interessano:

$$(u_a \quad u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a + j u_b \\ u_a - j u_b \end{pmatrix} = (u \quad u^*)$$

Vediamo che il calcolo funziona, e che la matrice trovata è non singolare, come volevamo. Cambiando base è evidente che, in realtà, gli autovettori u e u^* delimitano un piano, e non uno spazio su \mathbb{R}^4 . Andiamo a sostituire il risultato in A :

$$A = (u \quad u^*) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} (u \quad u^*)^{-1} = (u_a \quad u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} (u \quad u^*)^{-1}$$

² Usiamo la lettera j per indicare l'unità immaginaria, invece della lettera i .

Riscriviamo $(u - u^*)^{-1}$ come $\left[(u_a - u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} (u_a - u_b)^{-1}$ (quando si invertono le matrici si inverte anche l'ordine del prodotto):

$$A = (u_a - u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} (u_a - u_b)^{-1}$$

Il nostro obiettivo, però, è riuscire a fare l'esponenziale della matrice Λ con autovalori complessi. Prendiamo in considerazione, allora, solo una parte di A e sviluppiamo i prodotti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^* \\ j\lambda & -j\lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + \lambda^*}{2} & \frac{\lambda - \lambda^*}{2j} \\ j\frac{\lambda - \lambda^*}{2} & \frac{\lambda + \lambda^*}{2} \end{pmatrix}$$

Se $\lambda = \alpha + j\omega$, quindi $\lambda^* = \alpha - j\omega$, avremo che $\lambda + \lambda^* = \alpha + j\omega + \alpha - j\omega = 2\alpha$, e $\lambda - \lambda^* = \alpha + j\omega - \alpha + j\omega = 2j\omega$. Otterremo che la matrice vale, allora:

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda + \lambda^*}{2} & \frac{\lambda - \lambda^*}{2j} \\ j\frac{\lambda - \lambda^*}{2} & \frac{\lambda + \lambda^*}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Andiamo quindi a riscrivere la matrice A con questa notazione:

$$A = (u_a - u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} (u_a - u_b)^{-1}$$

Calcolo di e^{At} con autovalori complessi

La formula di e^{At} sarà la seguente:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = (u_a - u_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^k t^k}{k!} (u_a - u_b)^{-1}$$

Il motivo per cui $(u_a - u_b)$ e $(u_a - u_b)^{-1}$ escono dalla sommatoria perché:

$$\begin{aligned} A^k &= \left[(u_a - u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} (u_a - u_b)^{-1} \right]^k = \\ &= (u_a - u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} (u_a - u_b)^{-1} \cdot (u_a - u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} (u_a - u_b)^{-1} \cdots = \\ &= (u_a - u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^k (u_a - u_b)^{-1} \end{aligned}$$

E non dipendono da k . La sommatoria ottenuta non è banale, quindi ci conviene rifare il calcolo partendo dalla matrice A come abbiamo fatto prima:

$$e^{At} = (u - u^*) \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^* t} \end{pmatrix} (u - u^*)^{-1}$$

Di nuovo, sostituiamo:

$$e^{At} = (u_a - u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^* t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} (u_a - u_b)^{-1}$$

Concentriamoci sulla parte centrale. Riscriviamo λ come $\alpha + j\omega$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(\alpha+j\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-j\omega)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} = \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{j\omega t} & e^{-j\omega t} \\ je^{j\omega t} & -je^{-j\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} & \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \\ \frac{j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2} & \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sono state utilizzate delle identità trigonometriche³. Abbiamo allora ottenuto che:

$$e^{At} = (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \omega t & e^{\alpha t} \sin \omega t \\ -e^{\alpha t} \sin \omega t & e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix} (u_a \ u_b)^{-1}$$

Caso complesso con $n > 2$ autovalori

Nel caso in cui ci sono degli autovalori oltre alla coppia coniugata, in partenza abbiamo comunque una matrice A che si può scrivere in forma spettrale nel dominio complesso:

$$U = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u \ u^* \ \cdots \ u_n)$$

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \lambda^* & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1}$$

Con λ, λ^* complessi e u, u^* autovettori complessi relativi agli autovalori complessi. Visto che, come detto, vogliamo avere autovalori e autovettori reali, al posto di u e u^* ci sostituiamo, rispettivamente, u_a e u_b . Questo cambio può essere fatto senza problemi perché, essendo tutti gli autovettori della base *indipendenti*, non influiscono l'uno sull'altro; inoltre, le coppie di vettori u, u^* e u_a, u_b generano lo stesso sottospazio (ovvero, lo stesso piano). Succede allora, che gli autovalori all'infuori dei complessi restano invariati—quindi, tutto quello fuori dal rettangolo:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice Λ diventa quindi una matrice diagonale “a blocchi”. Questo funziona anche se ci sono più coppie coniugate; per ogni coppia di autovalori complessi coniugati, il blocco formato dalla coppia nella matrice Λ “esplode” nella sottomatrice $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$.

³ $\frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}) = \sin z, \quad \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) = \cos z.$

Approfondimento sul cambio degli autovettori

Verifichiamo ulteriormente se il cambio $u, u^* \rightarrow u_a, u_b$ funziona. Ovvero, deve rimanere vero che

$$U^{-1}U = I$$

anche dopo il cambio dei vettori. La scrittura sopra significa che, come anche detto in precedenza, il prodotto $v'_i u_j$ fa 1 solo se $i = j$, mentre è 0 per tutti gli altri. Quindi, $v'_1 u_1 = 1$, mentre $v'_1 u_2 = 0, \dots, v'_1 u = 0$, $v'_1 u^* = 0, \dots$. Allora deve anche essere vero che $v'_1 u_a = 0$ e $v'_1 u_b = 0$ (e deve valere per tutti vettori diversi da v'_a e v'_b). E, in effetti, prima valevano:

$$\begin{aligned} v'_i u &= v'_i(\alpha + j\omega) = 0 & \forall v'_i \neq v' \\ v'_i u^* &= v'_i(\alpha - j\omega) = 0 & \forall v'_i \neq v^{*'} \end{aligned}$$

e se valgono contemporaneamente $\begin{cases} v'_i \alpha + jv'_i \omega = 0 \\ v'_i \alpha - jv'_i \omega = 0 \end{cases}$, allora necessariamente $v'_i \alpha = jv'_i \omega = 0$; dunque, visto che $u_a = \alpha$ e $u_b = \omega$:

$$\begin{aligned} v'_i u_a &= 0 & \forall v'_i \neq v'_a \\ v'_i u_b &= 0 & \forall v'_i \neq v'_b \end{aligned}$$

L'unica cosa che si perde è l'*invarianza* rispetto a u e u^* ; infatti, $Au = \lambda u$ e $Au^* = \lambda^* u^*$, ma la stessa cosa non si verifica per u_a e u_b . Resta comunque il fatto che è *invariante il sottospazio* bidimensionale generato dai due vettori.

Teoria dei Sistemi

Lezione 8 (11 ottobre 2021)

Modi naturali aperiodici e pseudoperiodici

Calcoliamo l'evoluzione libera dello stato con autovalori complessi:

$$\begin{aligned}
 x_L(t) &= e^{\alpha t} (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \end{pmatrix} x_0 = \\
 &= e^{\alpha t} (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} = \\
 &= e^{\alpha t} (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} c_a \cos \omega t + c_b \sin \omega t \\ -c_a \sin \omega t + c_b \cos \omega t \end{pmatrix} = \\
 &= e^{\alpha t} \left[(c_a \cos \omega t + c_b \sin \omega t) u_a + (-c_a \sin \omega t + c_b \cos \omega t) u_b \right]
 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora di semplificare questa scrittura; dentro le parentesi tonde ci sono somme di seni e coseni. Se fosse $c_a = \sin \phi$ e $c_b = \cos \phi$, risulterebbe $\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t = \sin(\omega t + \phi)$; ma questa assunzione non è giustificata, perché dovrebbe valere necessariamente $c_a^2 + c_b^2 = 1$, e non avviene per tutte le coppie (c_a, c_b) . Quello che possiamo fare, è dividerli per un fattore comune $m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$ tale che $c_a^2/m^2 + c_b^2/m^2 = 1$; a questo punto:

$$\frac{c_a}{m} := \sin \varphi, \quad \frac{c_b}{m} := \cos \varphi$$

Dunque, possiamo moltiplicare e dividere l'espressione ottenuta prima per m :

$$\begin{aligned}
 me^{\alpha t} \left[\left(\frac{c_a}{m} \cos \omega t + \frac{c_b}{m} \sin \omega t \right) u_a + \left(-\frac{c_a}{m} \sin \omega t + \frac{c_b}{m} \cos \omega t \right) u_b \right] &= \\
 = me^{\alpha t} \left[(\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) u_a + (-\sin \varphi \sin \omega t + \cos \varphi \cos \omega t) u_b \right] &= \\
 = me^{\alpha t} \left[\sin(\omega t + \varphi) u_a + \cos(\omega t + \varphi) u_b \right]
 \end{aligned}$$

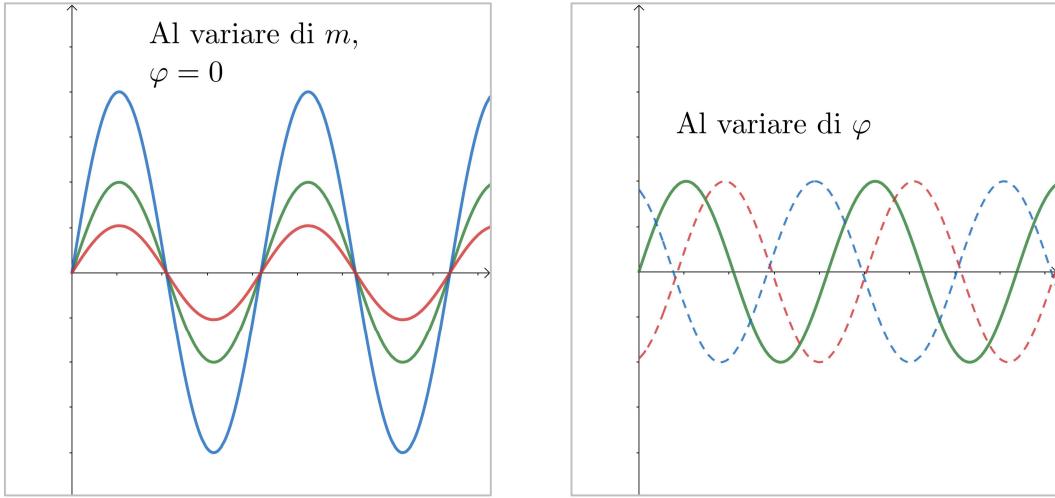
Questa è l'espressione dell'evoluzione libera dello stato quando si ha una coppia di autovalori complessi coniugati; tutta l'espressione sarà quindi un *modo naturale*. Essendo il movimento associato a questo modo naturale molto diverso da quelli di natura esponenziale, per distinguerli si dice che quelli di natura esponenziale sono *aperiodici*, mentre questi di natura "oscillatoria" sono *pseudoperiodici*. Ovvero:

$$\begin{aligned}
 c_i e^{\lambda_i t} u_i &\text{ modo naturale aperiodico} \\
 me^{\alpha t} \left[\sin(\omega t + \varphi) u_a + \cos(\omega t + \varphi) u_b \right] &\text{ modo naturale pseudoperiodico}
 \end{aligned}$$

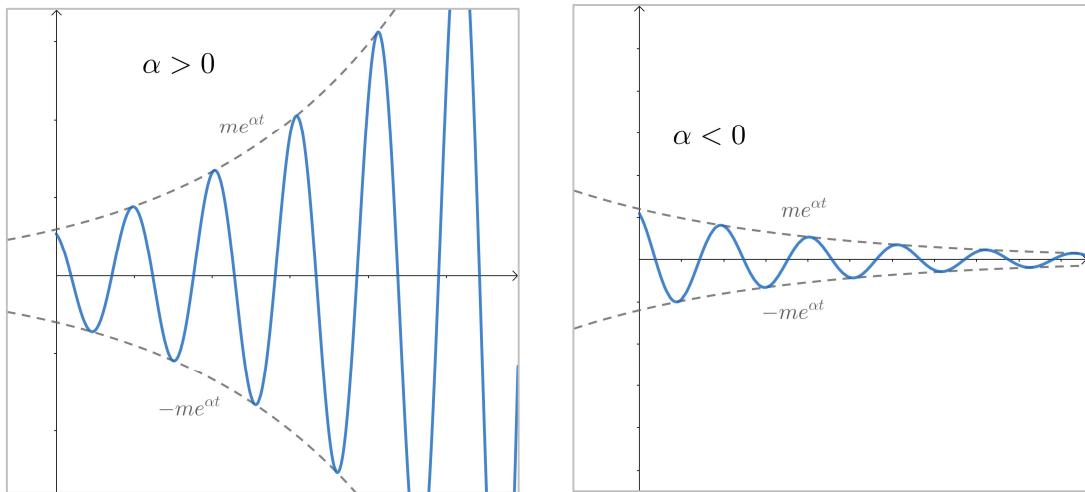
Segue che il numero di modi naturali non corrisponde più alla dimensione del sistema; se la dimensione del sistema è n abbiamo n autovalori, ma ogni autovalore reale dà un modo naturale e due autovalori complessi danno solo un modo naturale. Non sappiamo, quindi, in anticipo il numero di modi naturali del sistema conoscendo solo la dimensione di esso.

Andamento del moto pseudoperiodico

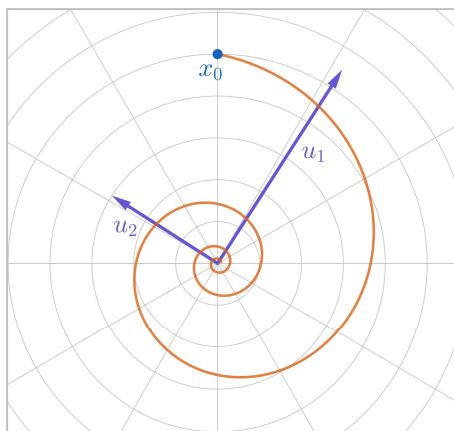
Vediamo com'è l'andamento del moto relativo ai modi naturali pseudoperiodici. Tracciamo innanzitutto il grafico di $m \sin(\omega t + \varphi)$:



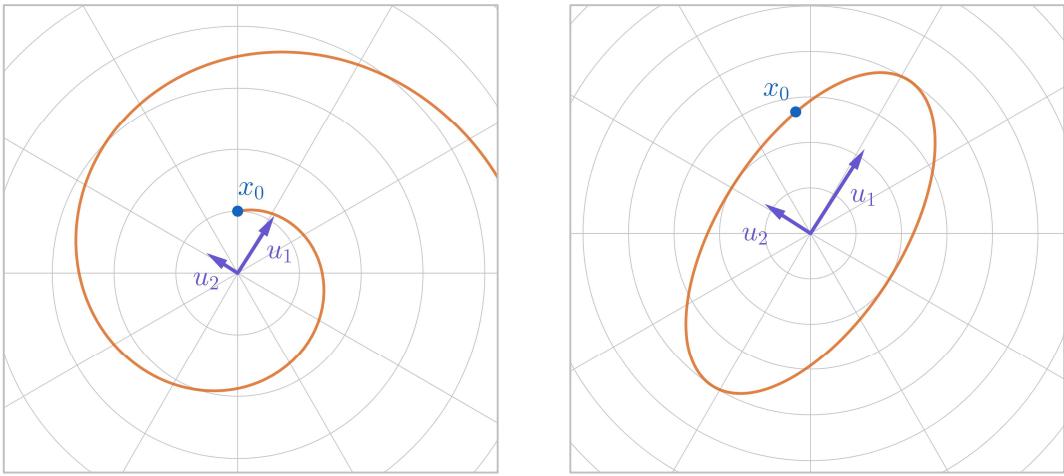
La sinusoide che segue u_a , però, non ha ampiezza fissa m , ma $me^{\alpha t}$, perciò nel passare del tempo l'ampiezza varia; l'andamento può essere quindi *divergente* (se $\alpha > 0$), *convergente* (se $\alpha < 0$) o *costante* (se $\alpha = 0$):



Solo se $\alpha = 0$ si ha moto sinusoidale puro. Per disegnare il coseno invece che il seno, basta prendere il grafico della sinusoide e spostarlo di $\pi/2$. Se vogliamo disegnare il moto rispetto a u_1 e u_2 avremo una spirale che decresce esponenzialmente (se $\alpha < 0$):



Se $\alpha > 0$ la spirale è esponenzialmente crescente e se $\alpha = 0$ il moto è un'ellisse:



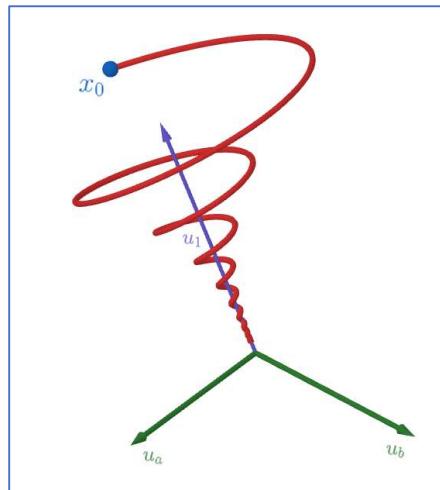
Evoluzione libera generale

Finora abbiamo visto i casi regolari in cui gli autovalori sono reali o complessi. La formula totale dell'evoluzione libera metterà insieme i risultati ottenuti finora, quindi considererà tutti i modi naturali, sia quelli esponenziali (aperiodici) sia quelli pseudoperiodici:

$$x_L(t) = \sum_{i=1}^r c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{i=1}^c m_i e^{\alpha_i t} (\sin(\omega_i t + \varphi_i) u_{ia} + \cos(\omega_i t + \varphi_i) u_{ib})$$

Nota che nella prima somma si scorre per tutti gli r autovalori reali, mentre nella seconda somma si scorre tra le *coppie* di autovalori complessi; ci sono c coppie, quindi $2c$ autovalori. Il numero degli autovalori sarà $n = r + 2c$.

Per fare un esempio del moto, consideriamo un sistema con un autovalore reale $\lambda_1 < 0$ con autovettore u_1 e due autovalori complessi coniugati λ, λ^* con autovettori u, u^* , con $u = u_a + ju_b$. Presa una condizione iniziale x_0 , se risulta $\alpha < 0$ allora il moto è il seguente:



Studio di e^{At} e delle varie matrici nel caso complesso

La matrice $\Phi(t) = e^{At}$ ha la forma:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\alpha t} (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \end{pmatrix} = \\ &= e^{\alpha t} (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) v'_a + \sin(\omega t) v'_b \\ -\sin(\omega t) v'_a + \cos(\omega t) v'_b \end{pmatrix} = \\ &= e^{\alpha t} \left[\cos(\omega t) u_a v'_a + \sin(\omega t) u_a v'_b - \sin(\omega t) u_b v'_a + \cos(\omega t) u_b v'_b \right] \end{aligned}$$

Andiamo a vedere la forma delle altre matrici. Iniziamo da $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = e^{\alpha t} \left[\cos(\omega t) Cu_a v'_a + \sin(\omega t) Cu_a v'_b - \sin(\omega t) Cu_b v'_a + \cos(\omega t) Cu_b v'_b \right]$$

Se accade che $Cu_a = 0$ e $Cu_b = 0$ contemporaneamente, allora questo modo naturale non compare dentro $\Psi(t)$. Quindi, anche nel caso complesso, se entrambi i prodotti sono nulli c'è inosservabilità.

Vediamo ora $H(t)$:

$$H(t) = e^{At} B = e^{\alpha t} \left[\cos(\omega t) u_a v'_a B + \sin(\omega t) u_a v'_b B - \sin(\omega t) u_b v'_a B + \cos(\omega t) u_b v'_b B \right]$$

Si applica lo stesso discorso di $\Psi(t)$: anche qui, quando i prodotti $v'_a B$ e $v'_b B$ sono nulli *contemporaneamente*, allora il modo naturale non è eccitabile. Se anche solo uno dei due prodotti non è uguale a zero, allora il modo naturale risulta eccitabile.

Per quanto riguarda la matrice $W(t)$, avendo le caratteristiche sia di $\Psi(t)$, sia di $H(t)$, al suo interno non compaiono modi ineccitabili o inosservabili quando i rispettivi prodotti sono nulli:

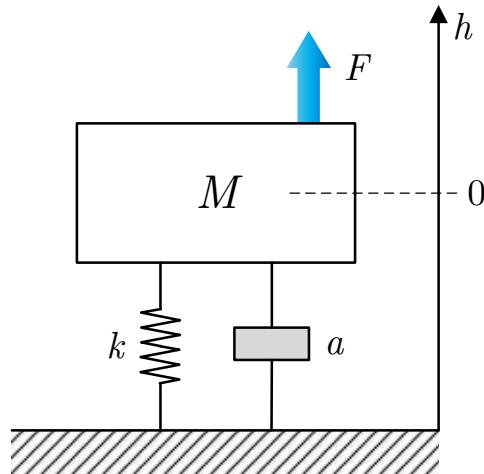
$$W(t) = Ce^{At} B = e^{\alpha t} \left[\cos(\omega t) Cu_a v'_a B + \sin(\omega t) Cu_a v'_b B - \sin(\omega t) Cu_b v'_a B + \cos(\omega t) Cu_b v'_b B \right]$$

Teoria dei Sistemi

Lezione 9 (12 ottobre 2021)

Esempio fisico di applicazione

Consideriamo un sistema fisico con una massa M sostenuta da una molla di costante elastica k e uno smorzatore di costante a . Applichiamo una forza F verso l'alto sulla massa:



Prendiamo come $h = 0$ l'altezza della massa in equilibrio. L'equazione del moto sarà:

$$M\ddot{h}(t) = -kh(t) - a\dot{h}(t) + F(t)$$

Sappiamo che è lineare, perché i termini sono tutti di grado 1, ed è stazionario perché nessun coefficiente dipende direttamente dal tempo. Poniamo, come di solito si fa, x_1 e x_2 uguali, rispettivamente, a $h(t)$ e $\dot{h}(t)$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{pmatrix}$$

Scriviamo allora il sistema in forma compatta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{a}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \end{cases} \implies \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -a/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix} u$$

Risultano allora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -a/M \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix}$$

Se la matrice A ha autovalori reali, allora il moto sarà esponenziale, quindi aperiodico; se, invece, presenta una coppia di autovalori complessi coniugati, il moto sarà pseudoperiodico. Poniamo $M = 1$ per semplicità di calcolo e vediamo quali sono le condizioni per cui si ha moto oscillatorio o esponenziale. Calcoliamo il polinomio caratteristico¹:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -a - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + k \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

¹ In questi appunti utilizziamo la notazione $\stackrel{\text{set}}{=}$ per dire “deve essere imposto uguale a”. In questo caso, il polinomio caratteristico dev’essere posto uguale a zero per trovare gli autovalori.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4k}}{2}$$

Tutto dipende dal termine sotto radice: se $a^2 - 4k \geq 0$ si avranno autovalori reali, altrimenti si avrà una coppia di complessi coniugati con $\alpha = -\frac{a}{2}$ e $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4k}$. Ovvero:

$$a^2 - 4k > 0 \implies \text{moto esponenziale decrescente}$$

$$a^2 - 4k < 0 \implies \text{moto pseudoperiodico decrescente}$$

Il moto esponenziale è decrescente perché possiamo notare come entrambe le soluzioni sono negative (il termine sotto radice sarà sempre più piccolo, in valore assoluto, di a , perciò non è possibile ottenere una soluzione positiva), perciò il moto $e^{\lambda_i t}$ sarà necessariamente decrescente. Per quanto riguarda il caso complesso, si ha $e^{\alpha t}$ che regola l'ampiezza delle oscillazioni, e anche in questo caso $\alpha = -a/2 < 0$.

Possiamo pensare al sistema preso in considerazione come un'automobile; degli ammortizzatori di qualità avrebbero una costante elastica k e una costante di smorzamento a tali da assicurare un moto esponenziale (decrescente); quindi, la relazione tra i due sarà proprio $a^2 - 4k > 0$. Se fosse $a^2 - 4k = 0$, dipenderebbe tutto dalla molteplicità geometrica; visto che la molteplicità algebrica è 2, se anche la geometrica fosse 2 allora sarebbe diagonalizzabile e si comporterebbe come il moto reale, altrimenti non è diagonalizzabile, il caso non è regolare e non abbiamo ancora studiato come trattarlo.

Possiamo andare oltre e studiare come cambia il moto al variare di k e di a . L'equazione del moto è del tipo $e^{\lambda_i t}$, perciò al variare dei parametri cambia "quanto velocemente va a zero". Stessa cosa può essere detta per le radici complesse, ma stavolta "quanto va velocemente a zero" è determinato solo dal valore di α —l'equazione del moto, infatti, è del tipo $e^{\alpha t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$.

Sistemi a tempo discreto

Finora abbiamo visto i sistemi lineari stazionari a tempo continuo; nel tempo discreto, la variazione Δx , che nel tempo continuo indicava la derivata \dot{x} , nel tempo discreto sta ad indicare l'istante al tempo successivo $x(t+1)$. Il sistema in forma implicita a tempo discreto, come anche visto in precedenza, ha la forma:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Il caso discreto è totalmente analogo al caso continuo: $y(t)$ indica l'uscita al tempo t , mentre non conosciamo lo stato nell'istante t , sappiamo solamente come sarà nel prossimo istante $t+1$ dato lo stato nell'istante t . Proviamo a passare alla forma esplicita scrivendo "passo per passo" l'equazione隐式的, ovvero partendo da un generico istante t_0 per arrivare, usando quella stessa formula, al tempo t . Dato t_0 e $x(t_0)$, sappiamo che

$$x(t_0 + 1) = Ax(t_0) + Bu(t_0)$$

Ora, andiamo avanti e vediamo quanto vale lo stato nell'istante $t_0 + 2$, e sostituiamo con l'equazione trovata:

$$\begin{aligned} x(t_0 + 2) &= Ax(t_0 + 1) + Bu(t_0 + 1) = \\ &= A[Ax(t_0) + Bu(t_0)] + Bu(t_0 + 1) = \\ &= A^2x(t_0) + ABu(t_0) + Bu(t_0 + 1) \end{aligned}$$

Proseguiamo ancora:

$$\begin{aligned} x(t_0 + 3) &= Ax(t_0 + 2) + Bu(t_0 + 2) = \\ &= A[A^2x(t_0) + ABu(t_0) + Bu(t_0 + 1)] + Bu(t_0 + 2) = \end{aligned}$$

$$= A^3x(t_0) + A^2Bu(t_0) + ABu(t_0 + 1) + Bu(t_0 + 2)$$

Notiamo il ripetersi di un *pattern*; possiamo allora provare a generalizzare l'equazione del sistema scrivendola per un tempo generico $x(t_0 + k)$:

$$x(t_0 + k) = A^kx(t_0) + A^{k-1}Bu(t_0) + A^{k-2}B(t_0 + 1) + \dots + B(t_0 + k - 1)$$

Scriviamolo sotto forma di sommatoria:

$$x(t_0 + k) = A^kx(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{k+t_0-1} A^{k+t_0-1-\tau}Bu(\tau)$$

Prima o poi, continuando ad aggiungere 1 a t_0 , si arriverà al tempo t che cercavamo; Non ci resta, allora, che scrivere il termine generico $t_0 + k$ come t , quindi $k = t - t_0$:

$$x(t) = A^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-1-\tau}Bu(\tau)$$

La prima parte, $A^{t-t_0}x(t_0)$, non dipendendo dall'ingresso, sarà un'*evoluzione libera*, mentre la seconda parte, la sommatoria che è dipendente dall'ingresso, sarà l'*evoluzione forzata*. Nota che nel caso discreto è evidente come l'istante t non sia incluso: nella sommatoria il limite superiore è proprio $t - 1$. Denominiamo adesso le matrici ottenute, in modo coerente con il caso continuo:

$$\Phi(t) = A^t, \quad H(t) = A^{t-1}B \quad (\text{per } t \geq 1)$$

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$$

Possiamo notare come la struttura sia analoga al caso continuo, a parte le ovviamente (somme invece di integrali). Anche qui, per esempio, la matrice H dà il peso all'ingresso come fa nel caso continuo. Questa matrice può essere sempre chiamata *matrice delle risposte impulsive*; l'impulso discreto è definito come:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Per porre l'uscita $y(t)$ nella stessa forma dell'evoluzione completa dello stato in forma esplicita, possiamo sostituire la $x(t)$ trovata dentro l'espressione di $y(t)$:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} CH(t - \tau)u(\tau) + Du(t)$$

Chiamiamo $\Psi(t - t_0) := C\Phi(t - t_0) = CA^t$ e basta porre $W(t) := \begin{cases} CH(t), & t \geq 1 \\ D, & t = 0 \end{cases} = \begin{cases} CA^{t-1}B, & t \geq 1 \\ D, & t = 0 \end{cases}$ per ottenere:

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} W(t - \tau)u(\tau)$$

Ora, come fatto nel caso discreto, torniamo indietro e troviamo la forma implicita per verificare che le espressioni che abbiamo trovato sono effettivamente valide. Prendiamo allora $x(t)$ e calcoliamo $x(t + 1)$. Sostituiamo t a t_0 e sostituiamo $t + 1$ a t :

$$x(t + 1) = \Phi(1)x(t) + \sum_{\tau=t}^t H(t + 1 - \tau)u(\tau) = \Phi(1)x(t) + H(1)u(t)$$

Notiamo che $\Phi(1) = A^t|_{t=1} = A$, e che $H(1) = A^{t-1}B|_{t=1} = B$ ^[2]; avendo trovato le stesse matrici, possiamo dire che le due scritture (implicita ed esplicita) sono equivalenti.

Vediamo ora come calcolare A^t . Se A fosse diagonale avremmo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

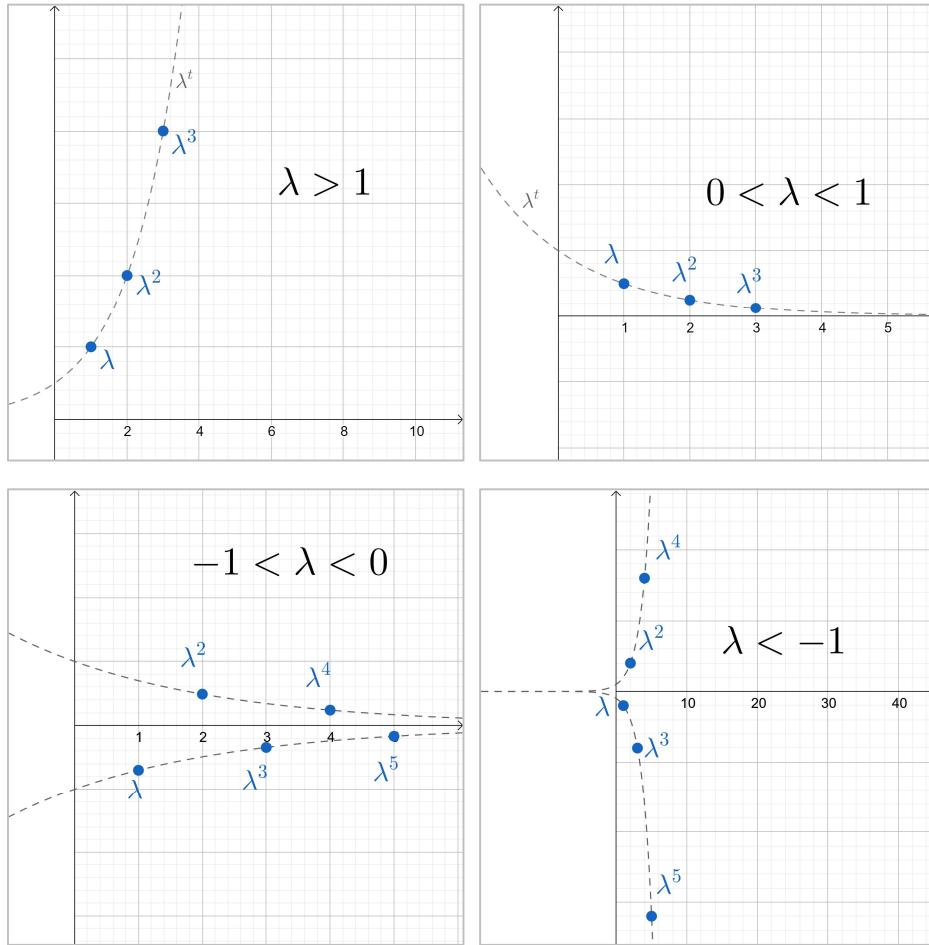
Se A non fosse diagonale, ma fosse diagonalizzabile:

$$A = U\Lambda U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v'_i \implies A^t = U\Lambda^t U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v'_i$$

Se gli autovalori sono tutti reali, con A^t possiamo calcolare l'evoluzione libera, quindi i modi naturali:

$$x_L(t) = A^t x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v'_i x_0 = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^t u_i$$

Che è l'equivalente del moto naturale aperiodico del tempo continuo. L'andamento è sempre esponenziale (discreto) ma è differente da quello a tempo continuo: mentre nel tempo continuo l'autovalore λ si trova come esponente, nel tempo discreto si trova alla base dell'esponenziale. Quindi avremo:



L'andamento per $\lambda < 0$ non si può avere per tempo continuo.

² Le notazioni del tipo $A^t|_{t=1}$ significano che l'espressione, nell'esempio A^t , dev'essere calcolata per $t = 1$.

Osservabilità ed eccitabilità nel tempo discreto

Prendiamo l'equazione di A^t e calcoliamo le varie matrici:

$$\begin{aligned} A^t &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v_i' \\ \Psi(t) = CA^t &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^t C u_i v_i' \\ H(t) = A^t B &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v_i' B \\ W(t) = CA^t B &= A^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t C u_i v_i' B \end{aligned}$$

Notiamo che sono sempre presenti i prodotti $C u_i$ e $v_i' B$, che possono essere nulli o meno, proprio come nel caso continuo. Questa, in effetti, è una condizione puramente geometrica e non dipende se il sistema è a tempo continuo o a tempo discreto. Le nozioni di osservabilità ed eccitabilità rimangono, pertanto, invariate rispetto al caso continuo.

Introduciamo un nuovo modo per indicare quali autovalori sono osservabili o eccitabili, con abuso di notazione³: possiamo indicare con Λ l'*insieme* degli autovalori, con Λ_o l'*insieme* degli autovalori osservabili, con Λ_e l'*insieme* dei λ eccitabili e, infine, con $\Lambda_{e,o}$ l'*insieme* degli autovalori sia osservabili che eccitabili. Per esempio:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ \Lambda_o &= \{\lambda_2, \lambda_4\} \text{ se } \lambda_2, \lambda_4 \text{ osservabili} \\ \Lambda_e &= \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4\} \text{ se } \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4 \text{ eccitabili} \\ \Rightarrow \Lambda_{e,o} &= \{\lambda_4\} \text{ se } \lambda_4 \text{ eccitabile e osservabile} \end{aligned}$$

Autovalori complessi nel tempo discreto

Assumiamo, per semplicità, che un sistema abbia come autovalori solamente una coppia complessa coniugata λ, λ^* . Avremo, quindi, come autovettori u e u^* . L'obiettivo è, partendo da $A = U\Lambda U^{-1}$, trovare un'espressione analoga che abbia solamente termini reali. Come abbiamo fatto per il caso continuo:

$$\begin{aligned} A &= U\Lambda U^{-1} = (u \quad u^*) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} (u \quad u^*)^{-1} = \\ &= (u_a \quad u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} (u_a \quad u_b)^{-1} \end{aligned}$$

Sappiamo che la parte centrale è proprio:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

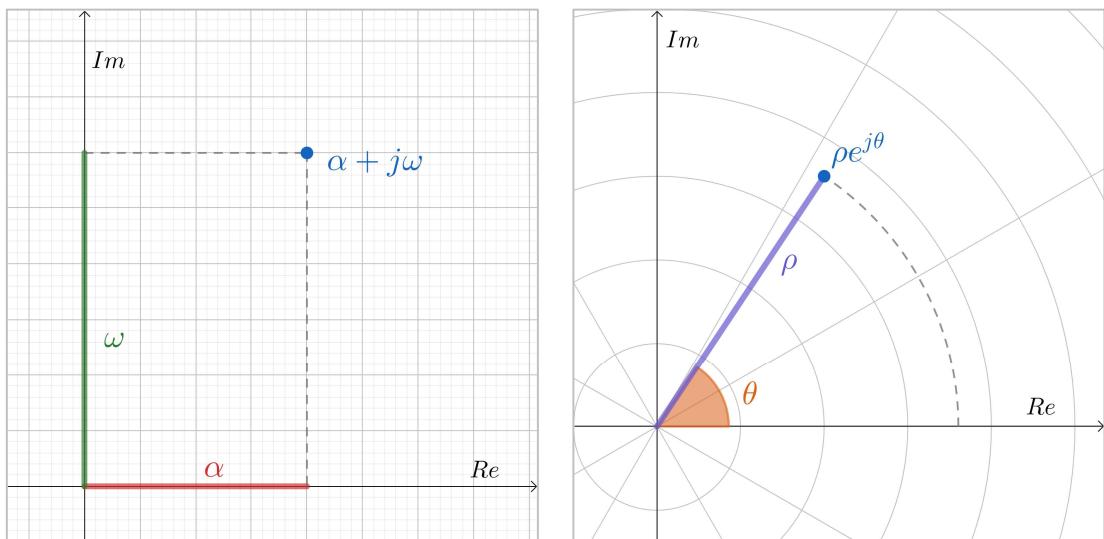
³ “Abuso di notazione” indica il fatto che si sta utilizzando una notazione non propriamente, e si usa per rendere più semplici alcuni concetti. Infatti, sappiamo che Λ è una matrice e non un insieme, ma a volte possiamo indicarla in questo modo, anche se *formalmente* la notazione è sbagliata, per semplicità di esposizione. Questa è una notazione che userà più volte il professore in futuro.

Ma questa scrittura non è conveniente nel caso discreto per calcolare le potenze. Questo perché, mentre nel caso continuo dovevamo calcolare $e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}t}$, in questo caso dobbiamo calcolare $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^t$. Vediamo allora come calcolare A^t in un modo conveniente:

$$\begin{aligned} A^t &= U\Lambda^t U^{-1} = (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} (u_a \ u_b)^{-1} = \\ &= (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & \lambda^{*t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} (u_a \ u_b)^{-1} \end{aligned}$$

Nel caso continuo abbiamo riscritto λ come $\alpha + j\omega$; questo perché con l'esponenziale funzionava molto bene: $e^{\lambda t} = e^{(\alpha+j\omega)t} = e^{\alpha t}e^{j\omega t}$, mentre nel caso discreto dobbiamo calcolare $\lambda^t = (\alpha + j\omega)^t$ e non è per nulla conveniente. Un modo alternativo per scrivere un numero complesso è usando le *coordinate polari*, ossia *modulo e fase*:

$$\alpha + j\omega \iff \rho e^{j\theta}$$



Sono semplicemente due scritture equivalenti per indicare i numeri complessi. Infatti, non è altro che:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \theta = \arctan(\omega/\alpha)$$

Però, utilizzando questa notazione invece che la classica, si ha che $\lambda^t = (\rho e^{j\theta})^t = \rho e^{j\theta t}$, che è sostanzialmente più semplice da trattare. Nota che $\lambda^* = \rho e^{-j\theta}$. Andiamo a calcolare, allora, Λ^t :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & \lambda^{*t} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho e^{j\theta t} & 0 \\ 0 & \rho e^{-j\theta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho^t e^{j\theta t} & \rho^t e^{-j\theta t} \\ j\rho^t e^{j\theta t} & -j\rho^t e^{-j\theta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^t \cos \theta t & \rho^t \sin \theta t \\ -\rho^t \sin \theta t & \rho^t \cos \theta t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

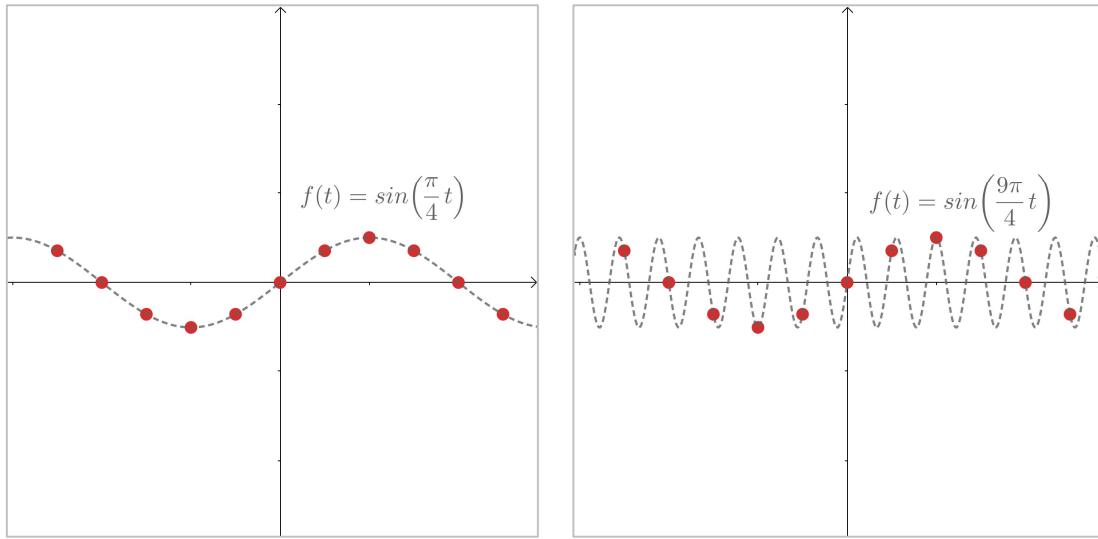
È stata usata l'equazione di Eulero ($e^{jz} = \cos z + j \sin z$). Abbiamo allora:

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \rho^t \cos \theta t & \rho^t \sin \theta t \\ -\rho^t \sin \theta t & \rho^t \cos \theta t \end{pmatrix}$$

Tenendo a mente che $\alpha = \rho \cos \theta$ e $\omega = \rho \sin \theta$. Anche in questo caso, la matrice Λ sarà diagonale "a blocchi": è diagonale per tutti gli autovalori reali, e per ogni coppia complessa coniugata "si espande" nel blocco con i seni e coseni.

Alcune osservazioni sul moto pseudoperiodico

La differenza fondamentale tra il moto pseudoperiodico continuo e quello discreto è che, effettivamente, nel moto continuo abbiamo una pulsazione ω che può assumere qualsiasi valore reale e risulta in una maggiore o minore frequenza. La stessa cosa non accade, però, nel tempo discreto: θ rappresenta la *fase* del numero complesso; perciò, non può assumere tutti i valori reali, ma è compreso tra 0 e 2π . O meglio, può anche assumere tutti i valori reali, ma alla fine risulta sempre $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ con $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Vedremo, cioè, variare la frequenza solamente nell'intervallo $[0, 2\pi)$, e per valori di θ maggiori si avrà che le frequenze si ripetono. Ecco un disegno che può chiarire le idee:



Come si nota, mentre nel tempo continuo (linea tratteggiata) effettivamente la frequenza cambia, nel tempo discreto (puntini rossi) si ripete ogni 2π . Infatti, la disposizione dei punti rossi nell'immagine di sinistra è uguale a quella di destra.

Un'altra osservazione è che il modulo ρ è sempre positivo, perciò, come nel tempo continuo, ci saranno esponenziali con base positiva (nel caso continuo la base era e). Eccitabilità e osservabilità non cambiano e sono identiche al tempo continuo.

Teoria dei Sistemi

Lezione 10 (14 ottobre 2021)

Esempio pratico

Consideriamo il sistema a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 0 \ 1)x(t) \end{cases}$$

In questo sistema, $n = 3$ (la dimensione della matrice A), $p = 1$ (le colonne di B), $q = 1$ (le righe di C).

Calcolo degli autovalori e autovettori – Vogliamo studiarne la dinamica, quindi i modi naturali. Ci occorrono autovalori e autovettori della matrice A ; possiamo procedere se la matrice è regolare. Iniziamo:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 1] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \stackrel{\text{set}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{-1} \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 + j, \quad \lambda_3 = 1 - j$$

Troviamo un autovettore relativo a ciascun autovalore; iniziamo con λ_1 : dobbiamo trovare un vettore u_1 tale che¹:

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0$$

Un modo (come ha fatto il professore, effettivamente) è indicare $u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix}$ e trovare dei valori di u_{11}, u_{12}, u_{13}

tale che il prodotto matrice vettore dia il vettore nullo. In questo caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{11} - u_{12} + u_{13} \\ u_{11} - u_{12} - u_{13} \end{pmatrix} \stackrel{\text{set}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{11} - u_{12} + u_{13} = 0 \\ u_{11} - u_{12} - u_{13} = 0 \end{cases}$$

Si fa, volendo, “a occhio”, basta porre $u_{13} = 0$ e $u_{11} = u_{12}$ (per qualsiasi valore, possiamo scegliere 1). Otteniamo allora:

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un altro modo, come studiato nel corso di geometria, è trovare l'intero sottospazio studiando, effettivamente, il $\ker(A - \lambda_1 I)$. Più semplice a farsi che a dirsi: basta porre in forma a scalini ridotta la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹ Per trovare la matrice, basta sostituire a λ il valore $\lambda_1 = 2$.

Sono stati evidenziati i pivot; poniamo la colonna senza pivot uguale a un parametro $h \in \mathbb{R}$ e otteniamo²:

$$\begin{cases} u_{11} = h \\ u_{12} = h, \quad h \in \mathbb{R} \\ u_{13} = 0 \end{cases}$$

Basta scegliere $h = 1$ per ottenere la stessa soluzione del professore.

Per quanto riguarda gli autovalori complessi, ci sono due strade. Una è procedere esattamente come si è fatto adesso per l'autovalore reale, quindi porre $(A - \lambda_2 I)u_2 = 0$; questa strada ci porta a trovare un autovettore $u_2 = u_{2a} + ju_{2b}$ e, di fatto, ci risparmia il calcolo di u_3 , che è banalmente il coniugato, ovvero $u_{2a} - ju_{2b}$. Un altro modo (sconsigliato) è eguagliare le parti reali tra di loro e le parti immaginarie separatamente. Questo si fa scrivendo:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)u_2 &= (A - \alpha_2 I - j\omega I)(u_{2a} + ju_{2b}) = \\ &= Au_{2a} + jAu_{2b} - \alpha_2 u_{2a} - j\alpha_2 u_{2b} - j\omega u_{2a} + \omega u_{2b} = \\ &= (Au_{2a} - \alpha_2 u_{2a} + \omega u_{2b}) + j(Au_{2b} - \alpha_2 u_{2b} - \omega u_{2a}) \stackrel{\text{set}}{=} 0 \\ \implies &\begin{cases} Au_{2a} - \alpha_2 u_{2a} + \omega u_{2b} = 0 \\ Au_{2b} - \alpha_2 u_{2b} - \omega u_{2a} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

E continuare il calcolo, che può risultare lungo. Proviamo, quindi, a cambiare strategia e a fare il calcolo usando l'altro metodo:

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-j & 0 & 0 \\ 1 & -j & 1 \\ 1 & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} (1-j)u_{21} = 0 \\ u_{21} - ju_{22} + u_{23} = 0 \\ u_{21} - u_{22} - ju_{23} = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $u_{21} = 0$; posto questo, si vede come la seconda equazione è nient'altro che la terza moltiplicata per j , perciò sono equivalenti e possiamo concentrarci solo su una di esse (l'altra è ridondante). Allora, si ottiene $u_{23} = ju_{22}$ quindi basta scegliere un valore per u_{22} e si ha che il valore di u_{23} deve essere lo stesso, moltiplicato per j . Se si sceglie $u_{22} = 1$, si avrà $u_{23} = j$. Per consistenza con quanto fatto dal professore, scegliamo $u_{22} = -j$, $u_{23} = -j \cdot j = 1$:

$$u_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per consistenza col professore, scegliamo

Trovare u_3 è banale, basta cambiare il segno a tutti i termini immaginari:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies u_3 = u_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora che abbiamo autovalori e autovettori, scriviamo la matrice A in funzione di Λ :

$$A = U\Lambda U^{-1} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^{-1} =$$

² Le colonne della matrice ottenuta sono, in ordine, u_{11} , u_{12} e u_{13} . I numeri rappresentano i coefficienti nel sistema. Per esempio, se la prima riga della matrice è $(1 \quad -1 \quad 0)$, la prima equazione sarà $u_{11} - u_{12} + 0u_{13} = 0$ ($l=0$ è sottinteso nella notazione matriciale). Perciò, se $u_{12} = h$, si ha $u_{11} - h = 0 \Leftrightarrow u_{11} = h$, $h \in \mathbb{R}$.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -j & j \\ 0 & \underbrace{1}_{u_2} & \underbrace{1}_{u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & 1-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -j & j \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Come abbiamo studiato, invece di lasciare le parti immaginarie, sostituiamoci a u_2 e $u_3 = u_2^*$, rispettivamente u_a e u_b , e scriviamo il blocchetto 2×2 nella matrice diagonale:

$$u_2 = u_a + ju_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \underbrace{1}_{u_a} & \underbrace{0}_{u_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Notare che $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ visto che $\lambda_2 = 1+j$. Vediamo ora com'è fatta e^{At} :

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos t & e^t \sin t \\ 0 & -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Concentriamoci sul calcolo della matrice inversa; anche qui ci sono due modi: calcolare il determinante e procedere col metodo del determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_a \\ v'_b \end{pmatrix}$$

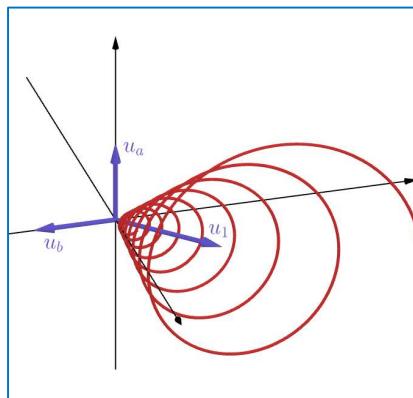
Nota che ogni *riga* della matrice U^{-1} corrisponde a un vettore riga: $(1 \ 0 \ 0) = v'_1$, ecc. Abbiamo ottenuto quindi:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos t & e^t \sin t \\ 0 & -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Modi naturali – L'evoluzione libera del sistema sarà:

$$x_L(t) = c_1 e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + m e^t \left(\underbrace{\sin(t+\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_a} + \underbrace{\cos(t+\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_b} \right)$$

Dove $m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$ e $\varphi = \arcsin \frac{c_a}{m} = \arccos \frac{c_b}{m}$. Il disegno del moto assomiglia a qualcosa del genere:



Eccitabilità e osservabilità – Trovati i due modi naturali, vediamo se sono osservabili o eccitabili. Per quanto riguarda il modo aperiodico, verifichiamo i prodotti Cu_1 e $v'_1 C$:

$$Cu_1 = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad v'_1 B = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Il moto esponenziale è, quindi, eccitabile ma *non è osservabile*. Per quanto riguarda il modo naturale pseudoperiodico (ricordiamo che le soluzioni sono due, complesse coniugate, ma il modo naturale che identificano è solo uno), questo risulta *non osservabile* se e solo se valgono *entrambe* le condizioni:

$$\begin{cases} Cu_a = 0 \\ Cu_b = 0 \end{cases}$$

Calcolando, si ottiene:

$$Cu_a = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad Cu_b = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Perciò il modo naturale risulta *osservabile*. Per quanto riguarda l'eccitabilità è analogo: il modo naturale pseudoperiodico è *non eccitabile* se valgono *entrambe* le condizioni:

$$\begin{cases} v'_a B = 0 \\ v'_b B = 0 \end{cases}$$

Di nuovo, calcolando si ottiene:

$$v'_a B = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad v'_b B = (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Visto che entrambi i prodotti sono nulli, il modo naturale pseudoperiodico è *non eccitabile*. La matrice $H(t)$, quindi, conterrà solamente il modo naturale aperiodico e non conterrà quelli pseudoperiodici, mentre la matrice $\Psi(t)$ conterrà solamente parti di modi naturali pseudoperiodici. Usando la notazione insiemistica:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{2, \ 1+j, \ 1-j\} \\ \Lambda_e &= \{2\}, \quad \Lambda_o = \{1+j, \ 1-j\}, \quad \Lambda_{e,o} = \{\} \end{aligned}$$

Esempio pratico: analogia con il caso discreto

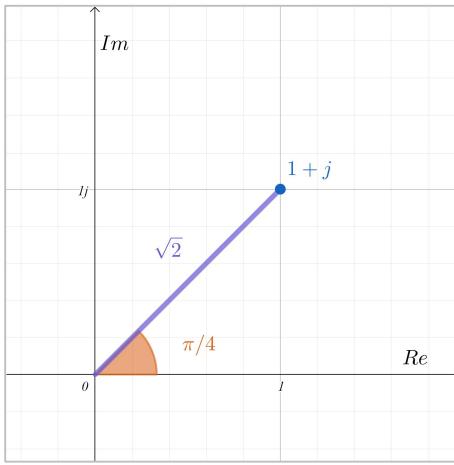
Ora studiamo lo stesso sistema ma consideriamolo discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 0 \ 1)x(t) \end{cases}$$

Gli autovalori sono sempre gli stessi, non cambiano: $2, 1+j, 1-j$. Ma ci ricordiamo che è meglio scrivere gli autovalori complessi in forma modulo-fase (vedi lezione precedente):

$$\lambda_2 = 1+j = \rho e^{j\theta} = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Dove $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\theta = \arctan(1) = \pi/4$. È più semplice vederlo in questo modo: $1+j$ corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano reale-immaginario; il segmento che collega l'origine al punto è lungo $\sqrt{2}$ e forma l'angolo $\pi/4$ con l'asse reale:



$\alpha = \rho \cos \theta = \sqrt{2} \cos(\pi/4) = 1$ e $\omega = \rho \sin \theta = 1$; la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$ sarà la stessa trovata in precedenza: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ora però possiamo calcolare A^t :

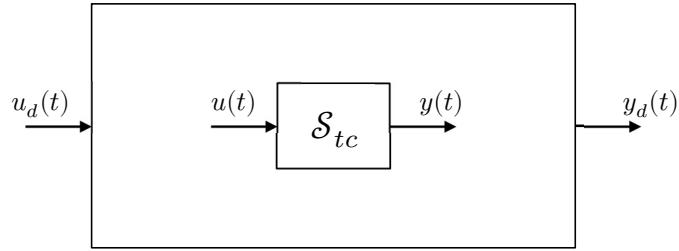
$$\begin{aligned} A^t &= U \Lambda^t U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & 0 \\ 0 & \rho^t \cos \theta t & \rho^t \sin \theta t \\ 0 & -\rho^t \sin \theta t & \rho^t \cos \theta t \end{pmatrix} U^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\sqrt{2})^t \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & (\sqrt{2})^t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 0 & -(\sqrt{2})^t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & (\sqrt{2})^t \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda eccitabilità e osservabilità, non cambia nulla; gli insiemi Λ_e, Λ_o non sono cambiati (anche se è chiaro che la legge che seguono i modi naturali è diversa).

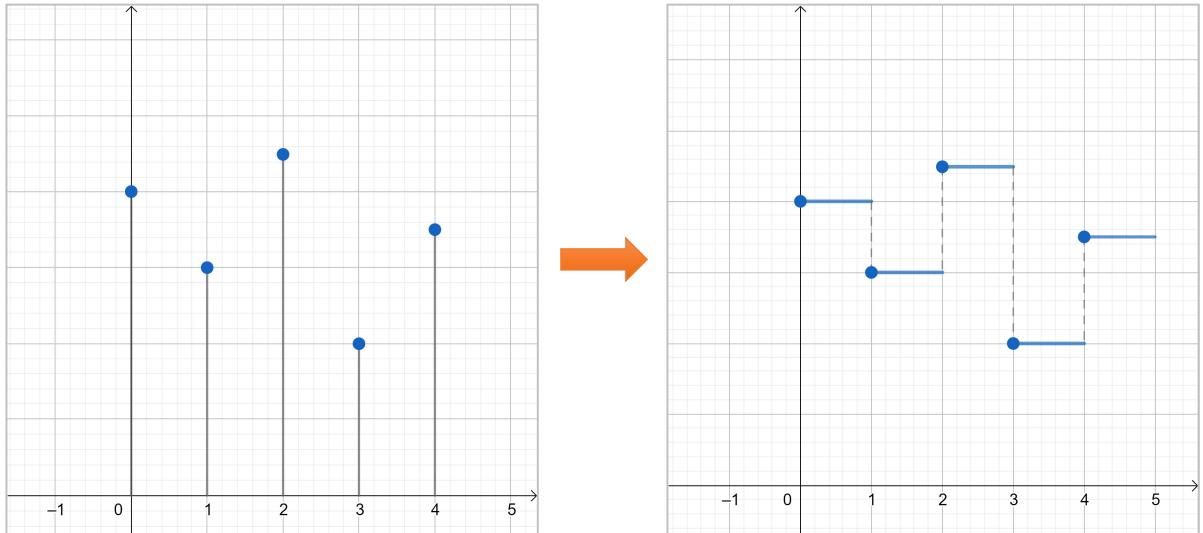
Tempo discreto campionato

Nei sistemi a tempo discreto, la variabile tempo t , nella maggior parte dei casi, non ha nulla a che vedere con il “tempo dell’orologio”. $t = 1, t = 2, \dots$ si riferiscono a degli *eventi* che possono accadere in intervalli di tempo diversi tra di loro. Dei legami, però, ci sono: per esempio, se leggiamo un valore *una volta al secondo*, allora è chiaro come t sia correlato al tempo reale. C’è un modo per rappresentare un sistema a tempo continuo in forma discreta, ed è come funziona la maggior parte degli strumenti digitali di misurazione.

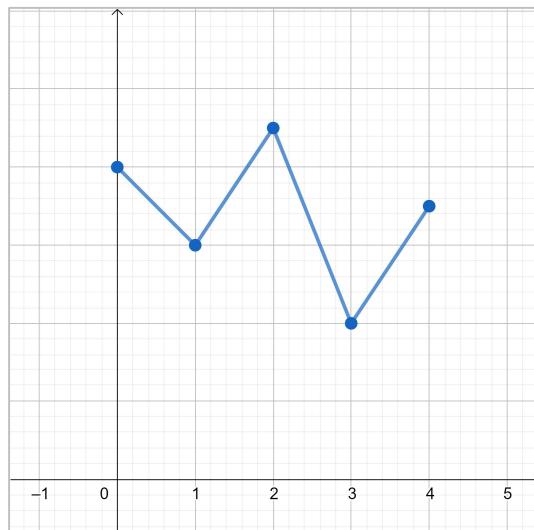
Si ha un sistema a tempo continuo \mathcal{S}_{tc} con un ingresso $u(t)$ e un'uscita $y(t)$; l'obiettivo è vedere esternamente questo sistema come un sistema a tempo discreto. Ovvero, si avrà un ingresso discreto $u_d(t)$ e si dovrà produrre un'uscita discreta $y_d(t)$. Lo schema sarà qualcosa del tipo:



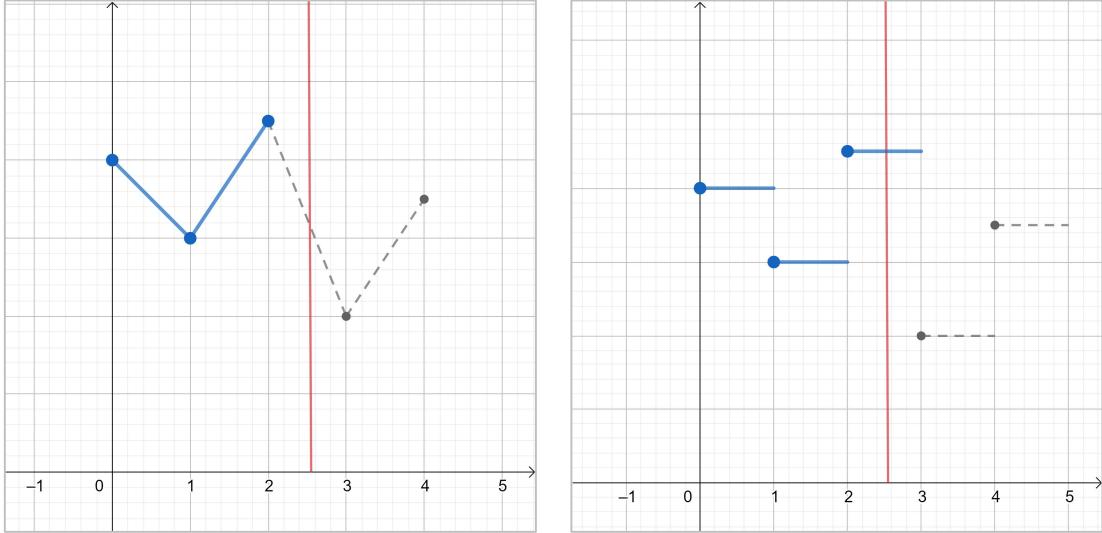
Il problema con questo approccio è che, mentre $u_d(t)$ sarà una funzione discreta, il sistema si aspetta un ingresso continuo; perciò, serve un dispositivo che “trasforma” l'ingresso discreto in ingresso continuo. Un dispositivo simile è chiamato *dispositivo di tenuta (holder)*; se questo dispositivo non fa altro che tenere un valore costante di un ingresso fino al prossimo ingresso, allora si chiama *tenuta di ordine zero* (sarà più chiaro il motivo del nome più avanti) o *zero-order holder (ZOH)*:



Visto che, in questo caso, il tempo discreto non rappresenta più eventi ma il tempo reale, possiamo chiamare l'intervallo di tempo che trascorre tra due “misurazioni” successive T_c , ovvero *tempo di campionamento*. Un'altra scelta riguardo al passaggio da discreto a continuo potrebbe essere l'*interpolazione* dei vari punti:

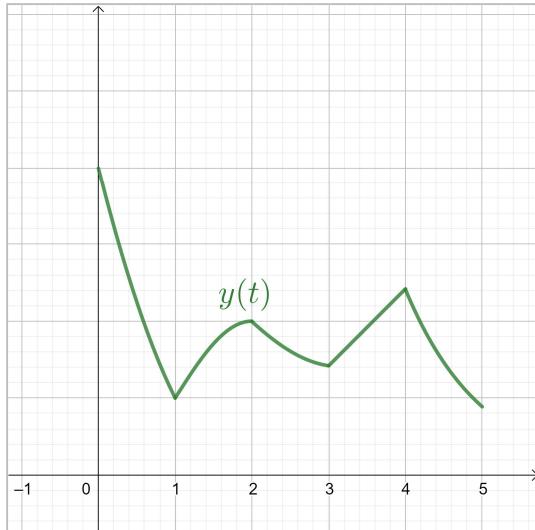


Nel caso di rette, come nell'immagine sopra, si parla di *tenuta di ordine 1*, se sono archi di parabola è tenuta di ordine 2, ecc. (diventa chiaro come mai si tratta di “ordine zero”: sono costanti i tratti). Il problema dell'approccio con tenuta di ordine 1 è che, fatta una misurazione nel tempo t , dobbiamo conoscere anche la misurazione successiva per poter tracciare la retta, e finché non ce l'abbiamo non possiamo dire “quanto vale in mezzo”:



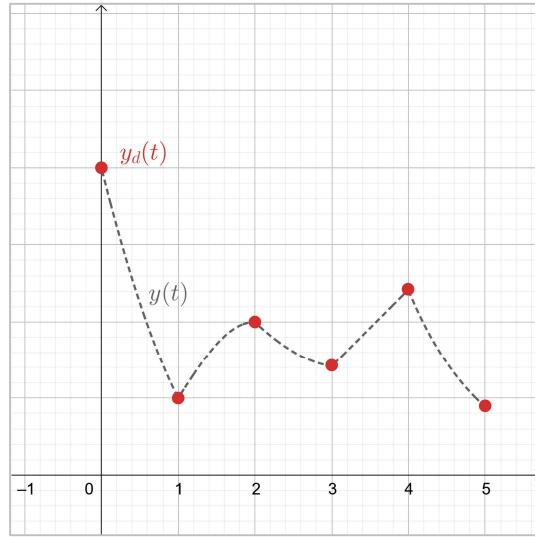
Nell'esempio dell'immagine, finché non prendiamo la misurazione al tempo $t = 3$ non possiamo sapere come tracciare la retta, quindi non possiamo sapere a priori quanto vale il sistema nell'istante indicato dalla barra rossa; questo è possibile, invece, con la tenuta di ordine zero. Con tenuta di ordini superiori allo zero si ha, in effetti, un *ritardo* nel sistema³.

Abbiamo risolto il problema dell'ingresso discreto; avendo quindi il nostro ingresso continuo $u(t)$, possiamo passarlo nel sistema a tempo continuo \mathcal{S}_{tc} per ottenere l'uscita $y(t)$. Se $D = 0$ (come nella maggior parte dei casi che andremo a studiare), allora l'output del sistema sarà una funzione con derivata discontinua, che può essere ad esempio:

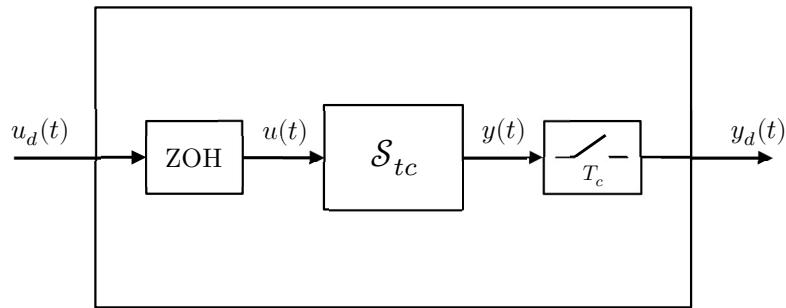


³ Per ordini superiori all'uno il ritardo si “amplifica”: per la tenuta di ordine 2 è necessario conoscere *due misurazioni successive* oltre a quella iniziale per poter tracciare un arco di parabola; per ordine 3 servono tre successive oltre a quella iniziale, e così via.

Per $D \neq 0$, sarà discontinua l'uscita stessa. Ora abbiamo un'uscita $y(t)$, e non ci resta che “trasformarla” in discreta (questo era l'obiettivo). Per farlo, basta campionare il valore di $y(t)$ ogni T_c , e si avrà l'uscita discreta $y_d(t)$ desiderata:



Il dispositivo che ci permette di fare questo si chiama, semplicemente, *campionatore*. Il sistema ottenuto ha questa struttura:



Ora studiamone le proprietà matematiche. Il sistema \mathcal{S}_{tc} sarà descritto in modo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \iff x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

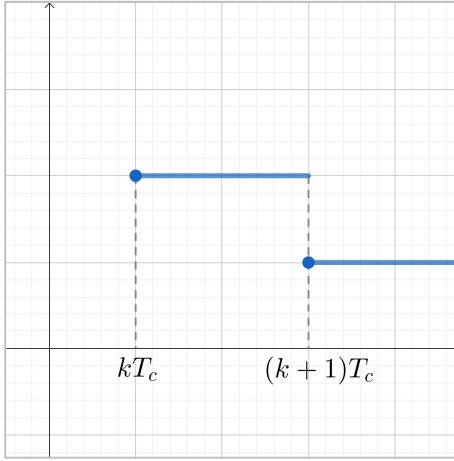
Per rappresentarlo in forma discreta, dobbiamo porre t_0 come un generico campionamento kT_c , e poniamo t come “la volta dopo”, ovvero $(k+1)T_c$. Procediamo:

$$x((k+1)T_c) = e^{AT_c}x(kT_c) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Il termine e^{AT_c} sarebbe e^{At} calcolata al tempo $t = T_c$; è, quindi, una matrice $n \times n$ a valori costanti. E, in effetti, ci stiamo aspettando che il sistema ottenga la forma:

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t)$$

La matrice e^{AT_c} può effettivamente essere la matrice A_d che ci aspettiamo. Possiamo, nel frattempo, semplificare l'integrale; l'intervallo di integrazione va da kT_c alla volta successiva $(k+1)T_c$, ma sappiamo che la funzione in questo intervallo è costante—per via della tenuta di ordine zero che abbiamo messo:



Perciò, $u(\tau)$ che sta nell'integrale avrà un valore costante pari a $u(kT_c)$ e può uscire dall'integrale:

$$x((k+1)T_c) = A_d x(kT_c) + \left(\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c - \tau)} B d\tau \right) u(kT_c)$$

Notiamo ora che l'integrale tra parentesi è definito e quindi è uguale a una matrice costante⁴; possiamo chiamare questa matrice B_d :

$$x((k+1)T_c) = A_d x(kT_c) + B_d u(kT_c)$$

Sappiamo scrivere facilmente anche la forma spettrale; se $A = U \Lambda_R U^{-1}$, $e^{At} = U e^{\Lambda_R t} U^{-1}$ allora:

$$A_d = e^{AT_c} = U e^{\Lambda_R T_c} U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T_c} & & & \\ & e^{\lambda_2 T_c} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n T_c} \end{pmatrix} U^{-1}$$

Ma se $A_d = U \Lambda_d U^{-1}$ e $A_d = U e^{\Lambda_R T_c} U^{-1}$, allora si avrà che $\Lambda_d = e^{\Lambda_R T_c}$, quindi gli autovalori di A_d sono effettivamente quelli che appaiono (considerando il caso reale) nella matrice $e^{\Lambda_R T_c}$; ovvero, $e^{\lambda_1 T_c}, \dots, e^{\lambda_n T_c}$ sono in realtà gli autovalori del sistema discreto campionato $\lambda_{1,d}, \dots, \lambda_{n,d}$. Notiamo che questi, essendo in realtà esponenziali, sono *sempre positivi*. Per quanto riguarda eccitabilità e osservabilità, non cambia nulla: tutti i modi eccitabili nel sistema continuo continueranno ad essere eccitabili nel sistema discreto.

Quando si trattano sistemi discreti campionati, spesso si omette il fattore T_c e si scrive tutto intendendo k come passo di campionamento:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

⁴ Per rendere l'integrale più semplice da leggere, si può porre $(k+1)T_c - \tau = \vartheta$; si ha $d\tau = -d\vartheta$ e, per gli estremi di integrazione, basta sostituire prima $\tau = kT_c$ e poi $\tau = (k+1)T_c$ per trovare: $\vartheta = 0$ e $\vartheta = T_c$:

$$\int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c - \tau)} B d\tau = - \int_{T_c}^0 e^{A\vartheta} B d\vartheta = \int_0^{T_c} e^{A\vartheta} B d\vartheta =: B_d$$

Teoria dei Sistemi

Lezione 11 (15 ottobre 2021)

Punti di equilibrio e dinamica

Introduciamo un argomento più qualitativo e generale; iniziamo a chiederci qual è l'andamento di determinati sistemi e il loro comportamento effettivo se sollecitati da un ingresso o lasciati liberi. Abbiamo visto come i sistemi, in generale, sono descritti dalle equazioni:

$$\begin{cases} \Delta x(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Introduciamo le caratteristiche di questi sistemi in generale, senza limitarci a quelli lineari e stazionari. Per ora concentriamoci sull'equazione dello stato $\Delta x(t)$ e consideriamo il caso continuo per semplicità di trattazione (il caso discreto è analogo):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

La domanda che ci poniamo è: esistono delle condizioni per cui, se il sistema parte da quelle, resta fermo? O meglio, esistono dei *punti di equilibrio* del sistema tali per cui, partendo da questi punti, il sistema resta in quello stato? Se esiste un tale punto, che indichiamo con x_e per “equilibrio” (possono esserci anche di più), allora sarà tale da non far variare il sistema, ovvero:

$$f(x_e, u_e) = 0$$

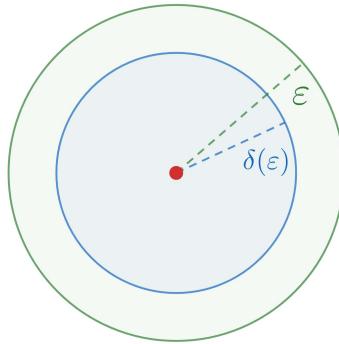
Per un qualche ingresso u_e . Molto spesso andremo a studiare i casi in cui non c'è ingresso, ovvero quando $u_e = 0$. Operativamente, quindi, un sistema ammette condizioni di equilibrio se esistono soluzioni al sistema $f(x_e, 0) = 0$, che in generale è un sistema non lineare; perciò, non sappiamo a priori quante soluzioni può avere e ci può essere un certo numero di punti di equilibrio (anche zero). Quello che ci interessa è vedere cosa succede se, invece di prendere come condizione iniziale del sistema un punto di equilibrio x_e , si prende un punto x_0 “vicino” a x_e . Non essendo un punto di equilibrio, il sistema evolve, e si possono verificare tre possibilità: il sistema resta in un intorno di x_e (*stabilità semplice*); il sistema tende a x_e (*stabilità asintotica*); il sistema diverge (*instabilità*).

Definizione formale di stabilità

Iniziamo col descrivere la stabilità semplice: preso x_e punto di equilibrio, questo si dice *stabile semplicemente* se, qualunque preso un intorno (di raggio ε) del punto, esiste un altro intorno (di raggio $\delta(\varepsilon)$) tale che, se prendiamo dei punti iniziali in questo intorno, l'evoluzione del sistema rimarrà entro il primo intorno. In simboli¹:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (\spadesuit)$$

¹ (N.d.R.) Scrivo passo passo il significato dei simboli, per maggiore chiarezza. Preso un punto di equilibrio x_e , questo è stabile semplicemente se: comunque sceglio un intorno di questo punto ($\forall \varepsilon > 0$), esiste sempre un intorno (più piccolo) di quel punto ($\exists \delta(\varepsilon) > 0$) tale che, se sceglio un punto x_0 in questo intorno ($\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon)$), si avrà che l'evoluzione del sistema nel tempo rimarrà sempre ($\forall t \geq 0$) nell'intorno di raggio ε ($\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon$). Nota che si usa il simbolo della norma $\|\cdot\|$, poiché stiamo trattando dei vettori.



Informalmente, vuol dire che scegliendo un punto x_0 necessariamente vicino a un punto di equilibrio x_e , c'è stabilità semplice se x_0 resta "vicino" a x_e per tutta l'evoluzione del sistema nel tempo.

In alcuni casi, scegliendo un punto vicino a quello di equilibrio, si ha che il punto si avvicina sempre di più a quello di equilibrio; in questo caso, non solo si ha stabilità semplice, ma si parla di stabilità asintotica: preso x_e punto di equilibrio, questo si dice *stabile asintoticamente* se, oltre a valere l'espressione (♣), si ha che, al passare del tempo, la distanza tra i due punti diminuisce. In simboli, valgono entrambe le espressioni:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

Queste considerazioni valgono indifferentemente per il tempo continuo e per il tempo discreto.

Definizione operativa di stabilità

Facciamo un esempio pratico: consideriamo il sistema $\dot{x} = x^2 - 1$; i punti di equilibrio si calcolano mettendo uguale a zero questa quantità, e quindi $x_e^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{e,1} = 1, x_{e,2} = -1$, per cui dovremo studiare la stabilità per ognuno di questi punti. Ma è evidente che non possiamo controllare "ogni intervallo" di raggio ε e applicare in pratica la definizione formale; ci servirà quindi una definizione operativa. Consideriamo il caso in cui il sistema è lineare:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Per trovare i punti di equilibrio basta porre a zero questa quantità, mettendo $u = 0$:

$$Ax_e = 0$$

Che è l'equazione che caratterizza i punti di equilibrio. Essendo un sistema lineare omogeneo, sappiamo già quanti punti di equilibrio possono esserci: uno o infiniti. Nel caso in cui ne abbia solo una, quel punto è sicuramente $x_e = 0$, dato che è necessariamente una soluzione di $Ax_e = 0$. I punti di equilibrio stabili semplicemente sono tali che (come visto nella definizione) $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon$, ma se il sistema è lineare (e se trascuriamo l'ingresso u), sappiamo com'è fatta $x(t)$:

$$x(t) = \Phi(t)x_0$$

Il punto di equilibrio x_e rimane fisso nel tempo e non evolve; perciò, si avrà che $x_e(t) = \Phi(t)x_e = x_e$. Possiamo scrivere allora che:

$$\|\Phi(t)x_0 - \Phi(t)x_e\| \leq \varepsilon \iff \|\Phi(t)\| \|x_0 - x_e\| \leq \varepsilon \iff \|\Phi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|x_0 - x_e\|}$$

Ovvero, un punto del sistema è stabile se $\Phi(t)$ è limitata, e questo avviene quando i modi naturali sono limitati: gli aperiodici, che hanno legge $e^{\lambda t}$, saranno limitati se $\lambda \leq 0$; gli pseudoperiodici hanno legge $e^{\alpha t}(\dots)$ e saranno limitati se $\alpha \leq 0$.

Combinando le due cose, si ha che gli autovalori devono essere tali che $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ (devono avere parte reale ≤ 0). Notiamo che questa condizione non dipende da un singolo punto di equilibrio; se il sistema ha infiniti punti, basta che uno sia stabile semplicemente perché tutti siano stabili semplicemente.

Per quanto riguarda la stabilità asintotica, deve valere anche che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| \cdot \|x_0 - x_e\| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0$$

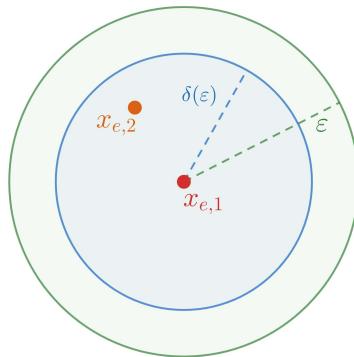
E questo è vero se i modi naturali convergono, quindi deve essere $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Allora si ha stabilità asintotica se:

$$\begin{cases} \|\Phi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|x_0 - x_e\|} & \iff \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0 & \iff \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \end{cases} \implies \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$$

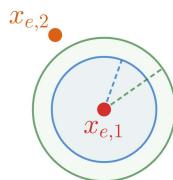
Notiamo che il sistema, allora, non è stabile se ha almeno un autovalore con parte reale positiva.

Stabilità asintotica nei sistemi lineari

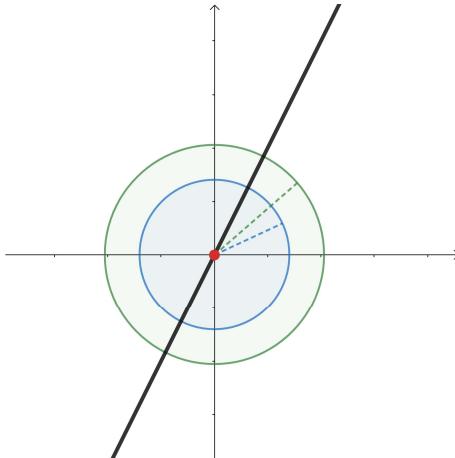
Consideriamo due punti di equilibrio, $x_{e,1}$ e $x_{e,2}$, che sono “vicini” tra loro.



Per la stabilità semplice non c’è problema, perché è vero che, scegliendo un punto nell’intorno (blu) di raggio $\delta(\varepsilon)$, si rimane nell’intorno (verde) di raggio ε ; tuttavia, non può valere la stabilità asintotica, perché se il sistema parte dal punto $x_{e,2}$, resta fermo lì e non si avvicinerà mai asintoticamente a $x_{e,1}$. Questo può essere risolto, magari, prendendo un intorno più piccolo:



Questa cosa, tuttavia, si complica con i sistemi lineari; infatti, se non hanno un solo punto di equilibrio ($x_e = 0$), allora se ne hanno infiniti, che formano un intero sottospazio (che può essere, ad esempio, una retta):



In questo caso non si può neanche scegliere un intervallo più piccolo, poiché ci saranno sempre infiniti punti nell'intorno. Segue che *in un sistema lineare può esistere stabilità asintotica solo se il sistema ammette una sola soluzione* ($x_e = 0$), altrimenti si può avere solamente stabilità semplice².

Stabilità esterna

Se guardiamo un sistema dall'esterno, cioè senza vedere ciò che accade al suo interno, possiamo comunque definire un tipo di stabilità, la *stabilità esterna* (contrapposta alla stabilità *interna* che è quella studiata finora). Cioè, dato un sistema “chiuso”, si ha stabilità esterna quando ad ogni perturbazione limitata nell’ingresso $u(t)$ del sistema, si ha che anche l’uscita $y(t)$ sia limitata. In simboli:

$$\forall \|u(t)\| \leq U, \|y(t)\| \leq Y \quad \forall t \geq 0$$

In un sistema lineare, sappiamo com’è fatta $y(t)$, a patto di conoscere x_0 ; possiamo, quindi, sostituire (posto $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \left\| \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \|\Psi(t)x_0\| + \left\| \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)u(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\| \underbrace{\|u(\tau)\|}_{\leq U} d\tau \leq \\ &\leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\| d\tau U \end{aligned}$$

² Un approfondimento che ha fatto il professore è far notare che, se esistono punti di equilibrio diversi da 0, allora l’equazione $Ax_e = 0$ si può vedere come $(A - \lambda I)u = 0$, con $\lambda = 0$; questo significa che $\lambda = 0$ è sicuramente un autovalore del sistema, ed essendo vero questo, non è più verificata la condizione $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$, perciò automaticamente non può esserci stabilità asintotica se ci sono punti di equilibrio diversi dall’origine.

Questa quantità risulta essere $\leq Y$ (quindi limitata) se sono limitati entrambi gli addendi; in particolare, deve essere limitata $\Psi(t)$, quindi $\|\Psi(t)\| \leq \Psi_0$, e l'integrale è limitato se l'argomento tende a 0. Avremo allora che $\|y(t)\| \leq Y$ se:

$$\begin{cases} \|\Psi(t)\| \leq \Psi_0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|W(t)\| = 0 \end{cases}$$

La prima condizione è soddisfatta se i modi naturali contenuti in $\Psi(t)$ sono limitati, ovvero se la parte reale degli autovalori osservabili è minore o uguale a zero. La seconda condizione è soddisfatta quando i modi naturali contenuti in $W(t)$ sono *convergenti*, cioè quando la parte reale degli autovalori eccitabili e osservabili è negativa. In definitiva, sarà limitata l'uscita se:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\Lambda_o) \leq 0 \\ \operatorname{Re}(\Lambda_{e,o}) < 0 \end{cases}$$

Le due sono indipendenti e una non esclude l'altra. Operativamente, a volte si fa l'assunzione che il sistema parta da condizioni iniziali nulle ($x_0 = 0$); in questo caso, i termini con x_0 sono tutti nulli e rimane solo la condizione $\operatorname{Re}(\Lambda_{e,o}) < 0$ affinché un sistema sia stabile esternamente.

Non ci interessa, quindi, il *valore* degli autovalori, ma se essi sono positivi, negativi o nulli, e c'è un modo, che si vedrà nel dettaglio nella prossima lezione, per verificare il segno degli autovalori di un sistema *senza trovare i loro valori*. In breve, il procedimento è questo: prendiamo il polinomio caratteristico e fattorizziamolo:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = \\ &= a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Supponiamo ora che tutti gli autovalori abbiano parte reale negativa, ovvero $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Allora tutti i fattori del polinomio fattorizzato sono *positivi*; mettiamolo in evidenza:

$$p(\lambda) = a_n (\lambda + |\lambda_1|) \cdots (\lambda + |\lambda_n|)$$

I coefficienti a_0, a_1, \dots, a_n del polinomio caratteristico “vengono fuori” da combinazioni di prodotti nel polinomio fattorizzato, ovvero tutti i coefficienti sono necessariamente positivi perché risultato di prodotti di numeri positivi. Quindi, avere tutti i coefficienti dello stesso segno è *condizione necessaria* perché le soluzioni del polinomio (cioè gli autovalori) siano negative; in altre parole, *se il polinomio caratteristico ha termini non tutti dello stesso segno, sicuramente ci saranno soluzioni non negative*.

Teoria dei Sistemi

Lezione 12 (18 ottobre 2021)

Criterio di Routh

Come abbiamo visto verso la fine della scorsa lezione, condizione necessaria affinché gli autovalori di un sistema siano tutti negativi è che i coefficienti a_1, \dots, a_n del polinomio caratteristico siano tutti dello stesso segno. Se non lo sono, si conclude direttamente che c'è almeno una radice con parte reale positiva. Una soluzione è utilizzare il *criterio di Routh* (Routh-Hurwitz). È un *algoritmo* abbastanza semplice che si basa sulla costruzione di una tabella; questa tabella avrà $n + 1$ righe, che sono numerate da n a 0. Per prima cosa, si riempiono le prime due righe con i coefficienti seguendo questo andamento:

n			
$n - 1$			
$n - 2$			
\vdots			
1			
0			

Ottenendo quindi la tabella:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
$n - 1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	
$n - 2$	b_1	b_2	\dots		
\vdots	\vdots	\vdots			
0					

Ora andiamo a calcolare il primo elemento della riga $(n - 2)$, che abbiamo indicato con b_1 . Questo è uguale al determinante della matrice 2×2 che ha, come prima colonna, *i primi due elementi delle due righe precedenti* (in questo caso, a_n e a_{n-1}) e, come seconda colonna, *gli elementi delle due righe precedenti che si trovano sulla colonna immediatamente a destra di quella di b_1* (in questo caso, a_{n-2} e a_{n-3}); il tutto diviso il primo elemento della riga precedente (a_{n-1}) cambiato di segno:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Per calcolare b_2 , la prima colonna del determinante e il termine per cui è stato diviso b_1 rimangono invariati, e cambia solamente la seconda colonna del determinante, che sarà formata dai due elementi delle due righe precedenti che stanno nella colonna dopo rispetto a b_2 :

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Si finisce quando finiscono i termini. Se i coefficienti del polinomio sono dispari, la tabella avrà un “buco” alla fine della riga ($n - 1$); per esempio, se un polinomio ha cinque coefficienti (quindi è di grado 4), avremo una tabella come questa:

4	a_4	a_2	a_0
3	a_3	a_1	
2	b_1	b_2	
1	c_1		
0	d_1		

Quando si calcola b_2 , dovremo mettere uno 0 al posto della casella vuota; quindi $b_2 = \frac{1}{-a_3} \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}$. Lo zero, però, *non va scritto nella tabella*, in quanto si riferirebbe ad un altro polinomio. Notiamo che non possiamo calcolare b_3 , perché non abbiamo altri elementi alla destra di a_0 ; in questo caso, ci fermiamo e passiamo alla riga successiva. Per calcolare c_1 e tutti gli altri c_i della riga, si procede esattamente come b_1 e b_2 ma si considerano le due righe immediatamente sopra a c_1 ; nell'esempio, $c_1 = \frac{1}{-b_1} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Andando avanti, la tabella si stringe sempre di più e si arriva alle righe 1 e 0 che hanno un solo termine ciascuna:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
$n - 1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	
$n - 2$	b_1	b_2	...		
:	:	:			
1	y_1				
0	z_1				

Una volta costruita la tabella, si guarda la prima colonna: ogni volta che due elementi successivi hanno lo stesso segno, si dice che c'è *permanenza di segno* (P); ogni volta che il segno tra due termini cambia, si dice che c'è *variazione di segno* (V). Ovvero, se $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$ e $b_1 < 0$, si avrà una permanenza e una variazione. Secondo il criterio che stiamo seguendo, *se c'è solo permanenza di segno, ovvero non ci sono variazioni di segno, allora gli autovalori hanno tutti parte reale negativa*. In particolare, ad ogni variazione di segno corrisponde una radice con parte reale positiva, e ad ogni permanenza corrisponde una radice con parte reale negativa.

Questo sistema è particolarmente utile quando nei coefficienti si hanno dei parametri; allora ecco è facile dire per quali valori di un certo parametro il sistema è stabile o instabile.

Esempio numerico di applicazione del criterio

Consideriamo il polinomio caratteristico di un sistema:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 5$$

Il primo passo è verificare se tutti i coefficienti sono *positivi*. Positivi vuol dire *strettamente maggiori di zero*, perciò se ci fossero dei termini mancanti (ovvero con coefficiente nullo), la condizione necessaria non è verificata e ci sono radici con parte reale non negativa.

Costruiamo la tabella:

4	1	1	5
3	2	3	
2	b_1	b_2	
1			
0			

Calcoliamo b_1 e b_2 :

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 5$$

In generale, quando ci troviamo nella situazione in cui dobbiamo aggiungere uno zero perché la casella è vuota, il risultato sarà sempre il numero in alto a destra della matrice, in questo caso 5. Continuiamo:

4	1	1	5
3	2	3	
2	$-1/2$	5	
1	c_1		
0	d_1		

Calcoliamo allora c_1 :

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1/2 & 5 \end{vmatrix}}{1/2} = 2 \left(10 + \frac{3}{2} \right) = 23$$

A destra di c_1 non c'è nulla perché non possiamo calcolare più il determinante (mancano i numeri). Sappiamo già che $d_1 = 5$, perché, di nuovo, c'è uno zero che va aggiunto:

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1/2 & 5 \\ 23 & 0 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-5 \cdot 23}{-23} = 5$$

La tabella finale è:

4	1	1	5
3	2	3	
2	$-1/2$	5	
1	23		
0	5		

I coefficienti sono allora $1, 2, -1/2, 23, 5$, e abbiamo permanenza di segno tra 1 e 2, variazione tra 2 e $-1/2$, variazione tra $-1/2$ e 23, e permanenza tra 23 e 5. Avremo allora due radici a parte reale positiva (per le variazioni) e due a parte reale negativa (per le permanenze); tuttavia, ci basta la presenza di una sola variazione di segno affinché ci sia una radice a parte reale positiva che indica il fatto che il sistema è instabile.

È possibile moltiplicare una colonna per un fattore positivo; era possibile, quindi, moltiplicare la riga 2 per 2 così da ottenere:

4	1	1	5
3	2	3	
2	-1	10	
1	23		
0	10		

Le conclusioni sarebbero state identiche (è ovvio che non si può moltiplicare una riga per un fattore minore o uguale a zero).

Caso in cui il primo elemento di una riga è nullo

Cosa sarebbe successo se un termine che andiamo a calcolare mentre si applica l'algoritmo venisse zero nel primo elemento di una riga? Avremmo difficoltà a proseguire la tabella, visto che per calcolare l'elemento sotto allo zero dovremmo fare il determinante della matrice diviso zero; c'è un procedimento che può risolvere proprio questo. Consideriamo il polinomio: $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$, e costruiamone la tabella:

5	1	1	2
4	1	1	1
3	0	1	
2	*		
1			
0			

Se abbiamo una cosa simile, non possiamo per ora calcolare l'elemento in posizione *, visto che divideremmo per zero. Innanzitutto, se un termine a inizio riga viene zero, sicuramente le radici non sono tutte a parte reale (strettamente) negativa; quindi, il sistema certamente non sarà stabile asintoticamente. Ma può ancora essere stabile semplicemente, perciò continuiamo a studiarlo.

Allora, se ci si presenta una riga con uno zero in prima posizione, togliamo lo zero, spostiamo tutta la riga a sinistra di uno, cambiamo tutta la riga di segno e mettiamo uno zero a destra; infine, sommiamo la riga ottenuta con la riga che c'era prima. Ovvero, abbiamo la riga

$$\boxed{3 \quad 0 \quad 1}$$

Togliamo lo zero, spostiamo il resto a sinistra cambiandolo di segno, aggiungiamo lo zero alla fine ottenendo:

$$\boxed{\quad -1 \quad 0}$$

A questo punto sommiamo le due colonne ottenute:

3	0	1	
	-1	0	
3'	-1	1	

+

=

E sostituiamo questa colonna alla colonna iniziale, ottenendo così la tabella:

5	1	1	2
4	1	1	1
3'	-1	1	
2	*		
1			
0			

A questo punto risulta semplice calcolare l'elemento in posizione *. Se ci sono due o più zeri (uno zero in prima posizione, uno in seconda posizione, ecc.), questo procedimento può essere applicato ancora spostando di due o più posti a sinistra la colonna e sommando alla fine, ma *ogni volta che ci si sposta di un posto va cambiato il segno all'intera riga*. Procediamo, però, con l'esempio: vediamo che c'è variazione di segno tra la riga 4 e la riga 3', perciò sicuramente ci sarà una soluzione con parte reale positiva e ci fermiamo qui dicendo che il sistema è instabile.

Nel caso in cui risultino tutte permanenze di segno, si può concludere che *il polinomio ha radici non positive* (alcune sono nulle), quindi che $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\forall i$ e, quindi, che il sistema è stabile semplicemente (ma non asintoticamente). Non possiamo dire che sono tutte negative perché abbiamo “modificato” la tabella a fronte degli zeri che sono apparsi.

Caso in cui un'intera riga è nulla

Prendiamo in considerazione il polinomio $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$, e costruiamone la tabella:

5	1	1	2
4	1	1	2
3	0	0	
2	*		
1			
0			

Nella dimostrazione (che non facciamo) di questo criterio, viene fuori che, se dovesse presentarsi una riga tutta nulla, è una riga di indice dispari (in questo caso nella riga 3). In questo caso, il polinomio può essere fattorizzato in due polinomi:

$$p(\lambda) = p_1(\lambda) p_2(\lambda)$$

Dove $p_1(\lambda)$ è un polinomio che ha le radici di parte reale positiva o negativa a seconda della parte di tabella che siamo riusciti a completare prima degli zeri; ovvero, tra la riga 5 e la riga 4 c'è permanenza di segno, quindi $p_1(\lambda)$ avrà *una radice, negativa*. Allora $p_1(\lambda)$ avrà grado 1. L'altro polinomio avrà necessariamente $5 - 1 = 4$ radici, sarà di quarto grado ed è composto solo da potenze *pari* (fino alla quarta) che hanno come coefficienti i numeri della riga precedente agli zeri, quindi la riga 4 in questo caso:

$$p_2(\lambda) = 1\lambda^4 + 1\lambda^2 + 2$$

(1, 1 e 2 sono i numeri della riga 4). A questo punto abbiamo due possibilità: calcolare direttamente le radici di $p_2(\lambda)$, oppure derivare $p_2(\lambda)$ e mettere, al posto della riga nulla, i coefficienti della derivata; ovvero:

$$\frac{dp_2(\lambda)}{d\lambda} = 4\lambda^3 + 2\lambda$$

5	1	1	2
4	1	1	2
3'	4	2	
2	:	:	
1			
0			

Ad ogni modo, avendo ottenuto una riga di tutti zeri e avendo “modificato” la tabella, possiamo concludere che le radici saranno al più non positive, ma ci sono radici nulle, perciò il sistema non potrà essere stabile asintoticamente.

Approssimazione di sistemi non lineari

Finora abbiamo detto che i sistemi lineari ricoprono gran parte dei problemi del mondo reale; in più, ci permettono di studiare delle proprietà di alcuni sistemi non lineari sotto certe condizioni. In queste lezioni abbiamo visto quali sono le condizioni: se ci “avviciniamo” sufficientemente ad un punto di equilibrio x_e di un sistema non lineare, possiamo dire che il sistema è ben approssimato da un sistema lineare¹:

$$\dot{x} = f(x, u) \approx f(x_e, 0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} (x - x_e) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} u$$

Ricordiamo che $f(x_e, 0) = 0$ per definizione di punto di equilibrio. Cambiamo variabile: $x - x_e = z$, e avremo un sistema della forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ \text{dove: } & \left(\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} \right) = A \\ & \left(\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} \right) = B \end{aligned}$$

La procedura da seguire per lo studio di un sistema non lineare, quindi è: calcolare i punti di equilibrio x_{e1}, \dots, x_{ek} (con ingresso nullo); per *ciascun* punto di equilibrio, si calcolano le derivate parziali, ottenendo così k matrici A_1, \dots, A_k , e si studiano separatamente questi sistemi.

C’è un teorema che ci permette di dire se un sistema non lineare è stabile o instabile data la stabilità o instabilità del sistema lineare approssimante; questo teorema afferma che, se il sistema lineare che approssima il sistema non lineare è *stabile asintoticamente*, allora anche il sistema non lineare sarà stabile asintoticamente; se il sistema lineare è *instabile*, allora anche il sistema non lineare sarà instabile. Non si può dire, però, lo stesso

¹ Il simbolo $\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}}$ indica la derivata di $f(x, u)$ parziale rispetto ad x , calcolata in $x = x_e$ e $u = 0$. Per esempio, se $\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) = x^2 + 2u - 4xu$, allora $\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} = (x_e)^2$. In particolare, la scrittura indica la serie di Taylor (in più variabili) dove il centro della x è x_e (infatti la derivata parziale rispetto a x viene moltiplicata per $x - x_e$) e il centro della u è 0 (infatti la derivata parziale rispetto alla u viene moltiplicata per $u - 0$).

per la stabilità semplice: *non è possibile concludere nulla se il sistema lineare approssimante è instabile semplicemente.*

Modelli di epidemie: modello SIR

Possiamo applicare quanto studiato, per fare un esempio, a un modello utilizzato realmente. Consideriamo un'epidemia; ci sono un numero di persone che sono sane ma *suscettibili* ad ammalarsi, che costituiscono la prima variabile di stato che indicheremo con S . Questi individui possono *infettarsi* entrando in contatto con degli *infetti*, il cui numero è indicato da una seconda variabile di stato I . Se individui suscettibili entrano in contatto con gli infetti, proporzionalmente alla quantità di infetti e a un coefficiente β (che può essere la probabilità di infezione e altri fattori), aumenterà il numero di infetti e diminuirà quello di suscettibili:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \beta SI \end{cases}$$

I suscettibili potrebbero aumentare (magari per delle nascite o per delle persone che si aggiungono al campione misurato) di una quantità che indichiamo con B , e potrebbe esserci qualcuno che muore (per qualsiasi causa) che possiamo indicare con $\mu_S S$:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + B - \mu_S S \\ \dot{I} = \beta SI \end{cases}$$

Un individuo infetto può guarire con probabilità γ , e diventare *recuperato*, ovvero una persona ormai sana che non si reinfetta, oppure morire (non per forza per l'infezione, può essere qualsiasi causa) con probabilità μ_I . Indichiamo con R il numero degli individui recuperati. Avremo allora completato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + B - \mu_S S \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I - \mu_I I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu_R R \end{cases}$$

Questo modello si chiama “modello SIR” (la sigla formata dalle tre lettere) ed è un vecchio e semplicissimo modello per descrivere le epidemie. È un modello non lineare, perché ci sono prodotti $S \cdot I$. Possiamo trovare i punti di equilibrio ponendo le variazioni delle variabili di stato nulle:

$$\begin{cases} -\beta SI + B - \mu_S S = 0 \\ \beta SI - \gamma I - \mu_I I = 0 \\ \gamma I - \mu_R R = 0 \end{cases}$$

Mettendo in evidenza I nella seconda equazione, $I(\beta S - \gamma - \mu_I) = 0$, si ottengono due diverse soluzioni:

$$I = 0, \quad S = \frac{\gamma + \mu_I}{\beta}$$

Per quanto riguarda la prima, possiamo sostituire $I = 0$ in tutte e tre le equazioni ottenendo un primo punto di equilibrio:

$$\begin{cases} S = \frac{B}{\mu_S} \\ I = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

Sostituendo, invece, la seconda soluzione in tutte le equazioni si ricava un secondo punto di equilibrio:

$$\begin{cases} S = \frac{\gamma + \mu_I}{\beta} \\ I = \frac{B}{\gamma + \mu_I} - \frac{\mu_S}{\beta} \\ R = \frac{\gamma}{\mu_R} I \end{cases}$$

La prima soluzione indica che, se non ci sono infetti e c'è una certa popolazione iniziale, quella resterà costante (non c'è epidemia). La seconda soluzione, meno banale, illustra le quantità di suscettibili, infetti e recuperati tali da non variare nel tempo (*situazione endemica*): il numero degli infetti sarà costante, così come quello dei recuperati e di suscettibili.

Vorremmo studiare la stabilità del sistema; ovvero, se cambiamo i valori del sistema nei punti di equilibrio, vogliamo studiare come il sistema varia. Per farlo, approssimiamo il sistema nei due punti di equilibrio come un sistema lineare. Calcoliamo la matrice A nel primo punto di equilibrio. La matrice A , in realtà, è lo Jacobiano:

$$A = J(x)|_{x_e} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{pmatrix} \Big|_{x_e}$$

f_1, f_2, f_3 indicano rispettivamente la prima, seconda e terza equazione del sistema iniziale. Ovvero: $\frac{\partial f_1}{\partial R}$ sarebbe la derivata rispetto a R nella prima equazione del sistema, ovvero $-\beta SI + B - \mu_S S$; non essendoci la variabile R , la derivata è nulla. Per quanto riguarda la derivata rispetto ad S , $\frac{\partial f_1}{\partial S}$, avremo $-\beta I - \mu_S$. Si continua così fino ad ottenere tutte le derivate:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu_S & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \gamma - \mu_I & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_R \end{pmatrix} \Big|_{x_e}$$

Ora non ci resta che calcolarla nei punti di equilibrio trovati in precedenza; iniziamo col primo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu_S & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \gamma - \mu_I & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_R \end{pmatrix} \Big|_{\substack{S=\frac{B}{\mu_S} \\ I=0 \\ R=0}} = \begin{pmatrix} -\mu_S & -\frac{\beta B}{\mu_S} & 0 \\ 0 & \frac{\beta B}{\mu_S} - \gamma - \mu_I & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_R \end{pmatrix}$$

In questo caso, data la conformazione particolare della matrice A , gli autovalori sono proprio quelli presenti sulla diagonale (basta fare un veloce calcolo per verificare che è vero):

$$\lambda_1 = -\mu_S, \quad \lambda_2 = \frac{\beta B}{\mu_S} - \gamma - \mu_I, \quad \lambda_3 = -\mu_R$$

Tutti i termini $(\mu_S, \mu_I, \mu_R, \beta, B, \gamma)$ sono *positivi*; perciò, λ_1 e λ_3 saranno sicuramente negativi. Ecco allora che il sistema è stabile asintoticamente quando è vera la condizione:

$$\lambda_2 = \frac{\beta B}{\mu_S} - \gamma - \mu_I < 0 \iff \frac{\beta B}{\mu_S(\gamma + \mu_I)} < 1$$

La quantità $\frac{\beta B}{\mu_S(\gamma + \mu_I)}$ viene spesso indicata con R_0 .