22 Cálculo de probabilidades

1. En una caja hay m bolas blancas y una bola roja. Al extraer de la caja dos bolas simultáneamente, la probabilidad de que sean blancas es $\frac{1}{2}$. Calcula el número de bolas blancas que tenía la caja.

2. Tras la primera votación, el jurado que debe otorgar un premio ha llegado a la siguiente conclusión: el concursante A tiene una probabilidad de ganarlo doble que el concursante B, y las probabilidades que tienen los concursantes B y C de ganar son entre sí como dos es a tres. Calcula la probabilidad que tiene cada concursante de ganar el premio tras la votación definitiva.

3. Del conjunto de todas las sucesiones de n términos compuestas por las cifras 0, 1 y 2 se escoge al azar una sucesión. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A = «la sucesión comienza por 0».

b) B = «la sucesión no contiene ninguna cifra 2».

c) C = «la sucesión contiene m + 2 cifras 0, dos de las cuales están en los extremos».

d) D = «la sucesión contiene m_0 cifras 0, m_1 cifras 1 y m_2 cifras 2».

4. Los problemas del Caballero de Méré.

a) El Caballero de Méré, hombre ilustrado de la corte de Luis XIV, le propuso el siguiente problema al matemático Blaise Pascal.

«¿Qué es más probable, obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado, u obtener al menos un seis doble al lanzar dos dados veinticuatro veces?»

b) Méré se interesó también por el número mínimo de lanzamientos de dos dados que sería necesario realizar para obtener un seis doble con probabilidad favorable, es decir, mayor que 0,5. ¿Cuál habría sido la respuesta de Pascal?

5. Los sucesos $A \cup B \cup C$ y D forman un sistema completo de sucesos en el $p(D) = \frac{1}{4}$, siendo A, B y C tres sucesos equiprobables e independientes que no pueden ocurrir simultáneamente. Calcula la probabilidad de los sucesos A, B y C.

6. Una urna contiene tres bolas negras y dos blancas. El primer jugador extrae tres bolas. Vuelve a meter en la urna una bola negra si entre las bolas que ha sacado hay más bolas negras; en caso contrario, devuelve a la urna una bola blanca. El segundo jugador extrae después una bola y, por su color, debe adivinar la cantidad de bolas blancas que había entre las tres que sacó el primer jugador. Si el segundo jugador ha sacado una bola blanca, calcula la probabilidad de que el primer jugador extrajera:

a) Tres bolas negras.

b) Una bola blanca.

c) Dos bolas blancas.

7. En un determinado juego de dados el jugador se anota un punto cada vez que el resultado de la tirada es 6. Se dispone de dos dados, de los cuales uno es correcto y el otro está trucado, de manera que la probabilidad de obtener un 6 es siete veces mayor que la de cualquier otro resultado. Si escoges un dado al azar y juegas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado elegido sea el trucado en cada uno de los siguientes supuestos?

a) Antes de comenzar a jugar.

b) Si juegas una partida y la ganas.

c) Si juegas una partida y la pierdes.

SOLUCIONES

1. p(2 blancas) $= \dfrac{C_{m,2}}{C_{m+1,2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = 3$

2. Los sucesos «ganar A», «ganar B» y «ganar C» forman un sistema completo:

p(ganar A) + p(ganar B) + p(ganar C) = 1

p(ganar A) = 2p(ganar B) y $\dfrac{\text{p(ganar B)}}{\text{p(ganar C)}} = \dfrac{2}{3}$

Resolviendo el sistema:

p(ganar A) $= \dfrac{4}{9}$, p(ganar B) $= \dfrac{2}{9}$ y p(ganar C) $= \dfrac{1}{3}$

3. a) $p(A) = \dfrac{VR_{3,n-1}}{VR_{3,n}} = \dfrac{1}{3}$

b) $p(B) = \dfrac{VR_{2,n}}{VR_{3,n}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) $p(C) = \dfrac{C_{n-2,m} \cdot VR_{2,n-2-m}}{VR_{3,n}}$

d) Como $m_0 + m_1 + m_2 = n$, $p(D) = \dfrac{PR_n^{m_0,m_1,m_2}}{VR_{3,n}}$

4. a) En cuatro lanzamientos de un dado:

p(al menos un 6) = 1 − p(no obtener ningún 6) =

$= 1 - \dfrac{5^4}{6^4} = 0{,}51774...$

En veinticuatro lanzamientos de dos dados:

p(al menos un 6 doble) $= \dfrac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 0{,}49140...$

b) $p = \dfrac{36^n - 35^n}{36^n} = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \geqslant 0{,}5 \Rightarrow \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \leqslant 0{,}5$

Como la función logaritmo es creciente:

$L\left(\dfrac{35}{36}\right)^n \leqslant L(0{,}5) \Rightarrow n \geqslant \dfrac{L(0{,}5)}{L\left(\dfrac{35}{36}\right)} \Rightarrow n \geqslant 25$

5. $p(A \cup B \cup C) = 1 - p(D) = \dfrac{3}{4}$

Si $p = p(A) = p(B) = p(C)$

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) -$
$- p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

$\dfrac{3}{4} = p + p + p - p \cdot p - p \cdot p - p \cdot p - 0$

$$\dfrac{3}{4} = 3p - 3p^2 \Rightarrow p = \dfrac{1}{2}$$

6. R = «El segundo jugador saca una bola blanca».

Extracción del primer jugador	Probabilidad	Composición final de la urna	$p(R/U_i)$
3N	$\dfrac{1}{10}$	U_1: 2B1N	$\dfrac{2}{3}$
1B2N	$\dfrac{3}{5}$	U_2: 1B2N	$\dfrac{1}{3}$
2B1N	$\dfrac{3}{10}$	U_3: 1B2N	$\dfrac{1}{3}$

$p(R) = p(R/U_1) \cdot p(U_1) + p(R/U_2) \cdot p(U_2) + p(R/U_3) \cdot p(U_3) =$
$= \dfrac{11}{30}$

a) $p(U_1/R) = \dfrac{p(B/U_1) \cdot p(U_1)}{p(R)} = \dfrac{2}{11}$

b) $p(U_2/R) = \dfrac{p(B/U_2) \cdot p(U_2)}{p(R)} = \dfrac{6}{11}$

c) $p(U_3/R) = \dfrac{p(B/U_3) \cdot p(U_3)}{p(R)} = \dfrac{3}{11}$

7. a) Sea el suceso T = «dado trucado»

$p(T) = \dfrac{1}{2}$

b) Se considera el suceso G = «ganar la partida»

$p(G) = p(G/T) \cdot p(T) + p(G/\overline{T}) \cdot p(\overline{T}) =$

$= \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$

La probabilidad de elegir el dado trucado si se ha ganado la partida es:

$$p(T/G) = \dfrac{p(G/T) \cdot p(T)}{p(G)} = \dfrac{\dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{7}{9}$$

c) La probabilidad de elegir el dado trucado si se ha perdido la partida es:

$$p(T/\overline{G}) = \dfrac{p(\overline{G}/T) \cdot p(T)}{p(\overline{G})} = \dfrac{p(\overline{G}/T) \cdot p(T)}{1 - p(G)} =$$

$$= \dfrac{\dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{3}{8}} = \dfrac{1}{3}$$