Parcial 2 **Probabilidad**

Victor Tortolero CI:24.569.609

Pregunta 1

Considérese Y tiene una distribución hipergeométrica

$$P\left(y\right) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

a) Demuestre que

$$P\left(Y = n\right) = \left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{r-1}{N-1}\right)\left(\frac{r-2}{N-2}\right)\dots\left(\frac{r-n+1}{N-n+1}\right)$$

b) Aplique la expansión binomial a cada factor de la siguiente ecuación:

$$\left(1+a\right)^{N_1}\left(1+a\right)^{N_2} = \left(1+a\right)^{N_1+N_2}$$

Ahora compare los coeficientes a^n en ambos lados para demostrar que

$$\binom{N_1}{0}\binom{N_2}{n} + \binom{N_1}{1}\binom{N_2}{n-1} + \dots + \binom{N_1}{n}\binom{N_2}{0} = \binom{N_1+N_2}{n}$$

c) Usando el resultado del inciso 1b, concluya que

$$\sum_{y=0}^{n} P\left(y\right) = 1$$

R:

a) Se sabe que $r \geq y$ y que $N - r \geq n - y$, y al reemplazar y por n, tenemos que $r \geq n$ y que $N - r \geq 0$, y esto nos indica que $N \geq r$ y por lo tanto $N \geq n$, y al desarrollar, tenemos:

$$\begin{aligned}
P\left(n\right) &= \frac{\binom{r}{n}\binom{N-r}{n-n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{r}{n}\binom{N-r}{0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{r}{n}(1)}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{r}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{r!}{n!(r-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \frac{r!\,n!\,(N-n)!}{N!\,n!\,(r-n)!} = \frac{r!\,(N-n)!}{N!\,(r-n)!} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)(r-n)!\,(N-n)!}{N!\,(r-n)!} \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)(N-n)!}{N!} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)(N-n)!}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)(N-n)!} \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)} = \left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{r-1}{N-1}\right)\left(\frac{r-2}{N-2}\right)\ldots\left(\frac{r-n+1}{N-n+1}\right)
\end{aligned}$$

$\therefore$ Llegamos a lo que se pedía, por lo tanto queda demostrado que:

$$P\left(Y=n\right) = \left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{r-1}{N-1}\right)\left(\frac{r-2}{N-2}\right)\ldots\left(\frac{r-n+1}{N-n+1}\right)$$

b) El teorema del binomio, dice que:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Y con este teorema, tenemos lo siguiente:

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1^{n-k}\right) a^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

Y con esto, al desarrollar cada factor de la ecuación dada en el enunciado, primero desarrollando $(a+1)^{N_1}(a+1)^{N_2}$, tendríamos:

$$\begin{aligned}(a+1)^{N_1}(a+1)^{N_2} &= \left[\sum_{k=0}^{N_1} \binom{N_1}{k} a^k\right] \times \left[\sum_{k=0}^{N_2} \binom{N_2}{k} a^k\right] \\ &= \left[\binom{N_1}{0} + \binom{N_1}{1} a + \ldots + \binom{N_1}{N_1} a^{N_1}\right] \times \left[\binom{N_2}{0} + \binom{N_2}{1} a + \ldots + \binom{N_2}{N_2} a^{N_2}\right]\end{aligned}$$

Ahora al desarrollar $(a+1)^{N_1+N_2}$, tendríamos:

$$(a+1)^{N_1+N_2} = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} \binom{N_1+N_2}{k} a^k = \binom{N_1+N_2}{0} + \binom{N_1+N_2}{1} a + \ldots + \binom{N_1+N_2}{N_1+N_2} a^{N_1+N_2}$$

Entonces tenemos lo siguiente al igualar ambos lados:

$$\begin{aligned}&\left[\binom{N_1}{0} + \binom{N_1}{1} a + \ldots + \binom{N_1}{N_1} a^{N_1}\right] \times \left[\binom{N_2}{0} + \binom{N_2}{1} a + \ldots + \binom{N_2}{N_2} a^{N_2}\right] \\ &= \binom{N_1+N_2}{0} + \binom{N_1+N_2}{1} a + \ldots + \binom{N_1+N_2}{N_1+N_2} a^{N_1+N_2}\end{aligned} \tag{1}$$

Como la igualdad se cumple, tenemos que el coeficiente de cada a^n debe ser igual. Tenemos que el coeficiente del lado izquierdo de la ultima ecuación para a^n, viene dado por la siguiente sumatoria:

$$\binom{N_1}{0}\binom{N_2}{n} + \binom{N_1}{1}\binom{N_2}{n-1} + \ldots + \binom{N_1}{n}\binom{N_2}{0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

Y el coeficiente del lado derecho para a^n vendría dado por:

$$\binom{N_1+N_2}{n}$$

$\therefore$ Entonces como la igualdad se cumple, el coeficiente a^n de un lado de la ecuación (1) debería ser igual al del otro lado y por lo tanto tenemos que:

$$\binom{N_1}{0}\binom{N_2}{n} + \binom{N_1}{1}\binom{N_2}{n-1} + \ldots + \binom{N_1}{n}\binom{N_2}{0} = \binom{N_1+N_2}{n}$$

c) Se quiere demostrar que $\sum_{y=0}^{n} P\left(y\right) = 1$, entonces tenemos que:

$$\sum_{y=0}^{n} P\left(y\right) = \sum_{y=0}^{n} \left(\prod_{k=0}^{y+1} \frac{r-k}{N-k} \right)$$

Pregunta 2

En la producción de cierta clase cuerda, el numero de defectos por pie Y se supone que tiene una distribución de Poisson con media $\lambda = 2$. La utilidad por pie se cuando se venda la cuerda esta dada por X, donde $X = 50 - 2Y - Y^2$. Encuentre la utilidad esperada por pie.

R: Tenemos que para una distribución de Poisson, la varianza viene dada por λ, al igual que la esperanza. Por lo tanto, tendríamos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= 2 \\ \mathrm{Var}(Y) &= 2 \end{aligned}$$

Y luego:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(50 - 2Y - Y^2) \\ \mathrm{E}(X) &= 50 - 2\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y^2) \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \end{aligned}$$

Si despejamos $\mathrm{E}(Y^2)$, y luego sustituimos, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y^2) &= (\mathrm{E}(Y))^2 + \mathrm{Var}(Y) \\ \mathrm{E}(Y^2) &= 2^2 + 2 \\ \mathrm{E}(Y^2) &= 4 + 2 \\ \mathrm{E}(Y^2) &= 6 \end{aligned}$$

Y con este resultado, podemos calcular $\mathrm{E}(X)$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 50 - 2(2) - 6 \\ \mathrm{E}(X) &= 50 - 4 - 6 \\ \mathrm{E}(X) &= 40 \end{aligned}$$

$\therefore$ Por lo tanto, la utilidad esperada por pie, es 40.

Pregunta 3

Suponga un lote de 5000 fusibles eléctricos contiene 5 % de piezas defectuosas. Si se prueba una muestra de 5 fusibles, encuentre la probabilidad de hallar al menos uno defectuoso.

R: Tenemos que es una distribución binomial, en donde la probabilidad de éxito es $p = 0.05$, y la probabilidad del fracaso seria $q = 0.95$ y tenemos que $n = 5$ que es nuestra muestra. Y queremos saber la probabilidad de hallar al menos uno defectuoso, entonces tenemos que queremos encontrar $P(X \geq 1)$. Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
&P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = P(X \geq 1) \\
&P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \\
&P(0) + P(X \geq 1) = 1 \\
&P(X \geq 1) = 1 - P(0)
\end{aligned}
$$

De modo que para calcular $P(X \geq 1)$ solo hace falta calcular $P(0)$. Para calcular esto, entonces para calcular $P(0)$, podemos usar:

$$P(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Tenemos n y p, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
&P(0) = \binom{5}{0} \left(0.05^0\right) (1 - 0.05)^{5-0} \\
&P(0) = (1)(1)(0.95)^5 \\
&P(0) = (1)(1)(0.95)^5 \\
&P(0) = 0.95^5
\end{aligned}
$$

Con esto ya podemos calcular $P(X \geq 1)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 1) = 1 - 0.95^5 \\
&P(X \geq 1) = 0.2262190625
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Entonces la probabilidad de que haya al menos uno defectuoso es de 0.2262190625