Tarea 2 **Calculo Computacional**

Victor Tortolero CI:24.569.609

Respuesta 1

Al correr el programa, que calcula el método de diferencias divididas de newton para interpolar la función:

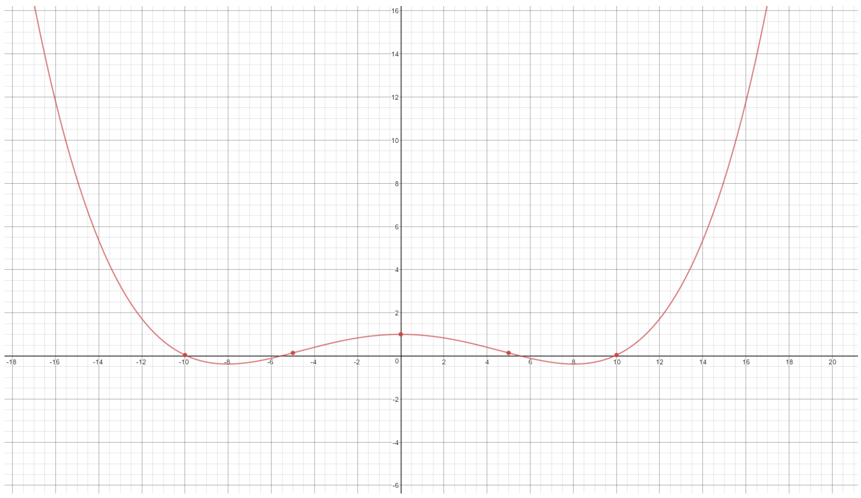
$$f(x) = \frac{1}{1 + (\frac{5x}{10})^2}$$

En el intervalo de $[-10, 10]$, con 5, 8 y 11 nodos igualmente espaciados, se obtuvieron los siguientes coeficientes:

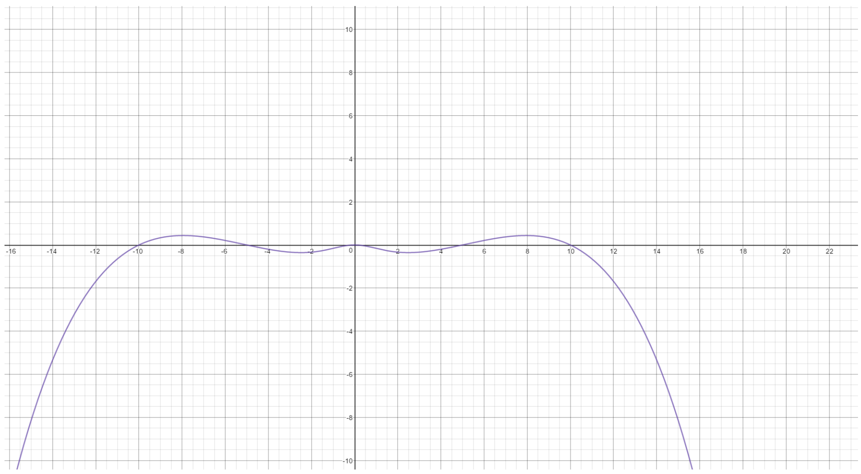
Para $n = 4$ se obtiene el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} P_0(x) = {} & 0.03846154 + 0.01989390 * (x + 10.00000000) + 0.01525199 * (x + 10.00000000) \\ & * (x + 5.00000000) - 0.00331565 * (x + 10.00000000) * (x + 5.00000000) * (x - 0.00000000) \\ & + 0.00033156 * (x + 10.00000000) * (x + 5.00000000) * (x - 0.00000000) * (x - 5.00000000) \end{aligned} \quad (1)$$

La grafica de $P_0(x)$:



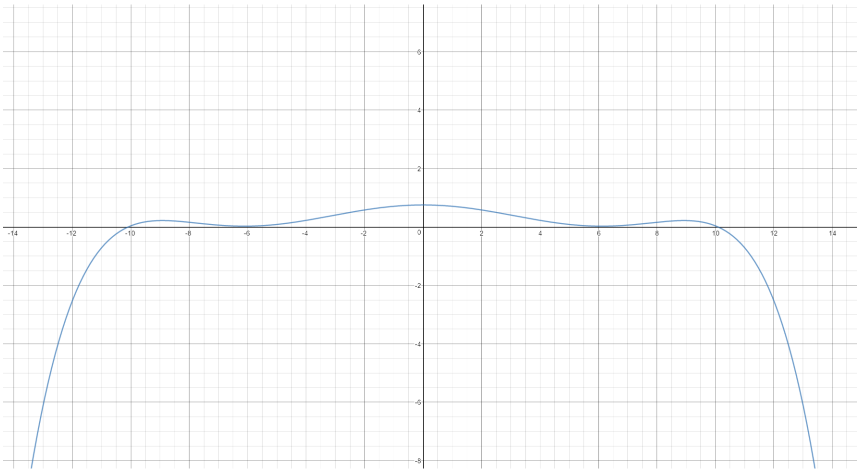
Y la grafica de $f(x) - P_0(x)$:



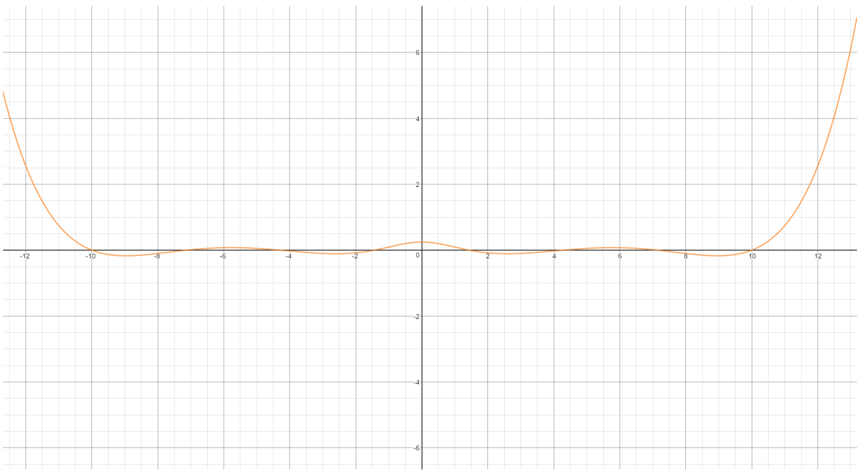
Para $n = 7$ se obtiene el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} P_1(x) = {} & 0.03846154 + 0.01198357 * (x + 10.00000000) + 0.00440345 * (x + 10.00000000) * (x + 7.14285714) \\ & + 0.00218166 * (x + 10.00000000) * (x + 7.14285714) * (x + 4.28571429) - 0.00072895 * (x + 10.00000000) \\ & * (x + 7.14285714) * (x + 4.28571429) * (x + 1.42857143) + 0.00008869 * (x + 10.00000000) * (x + 7.14285714) \\ & * (x + 4.28571429) * (x + 1.42857143) * (x - 1.42857143) - 0.00000517 * (x + 10.00000000) * (x + 7.14285714) \\ & * (x + 4.28571429) * (x + 1.42857143) * (x - 1.42857143) * (x - 4.28571429) + 0.00000000 * (x + 10.00000000) \\ & * (x + 7.14285714) * (x + 4.28571429) * (x + 1.42857143) * (x - 1.42857143) * (x - 4.28571429) * (x - 7.14285714) \end{aligned} \tag{2}$$

La grafica de $P_1(x)$:



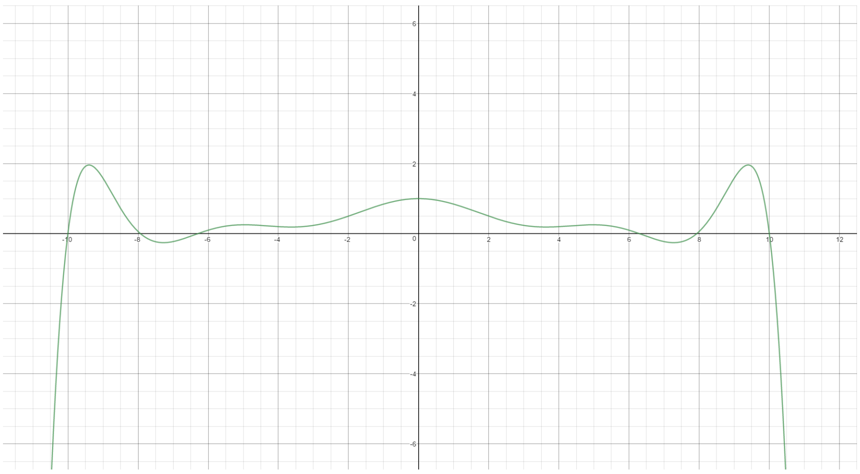
Y la grafica de $f(x) - P_1(x)$:



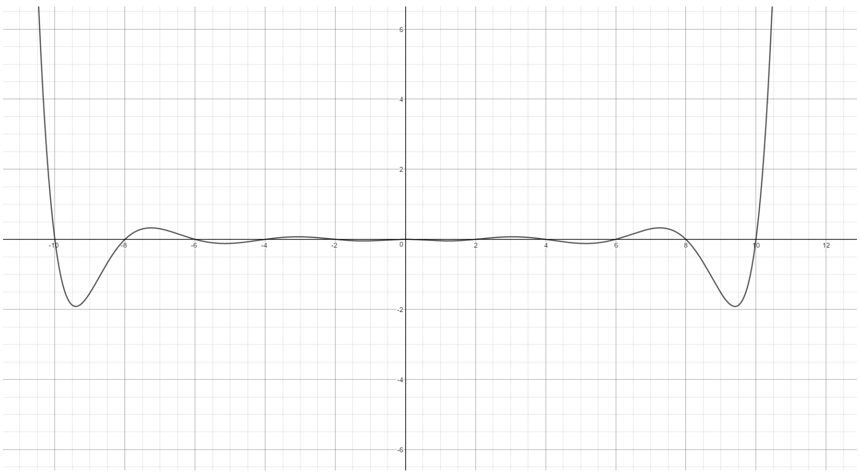
Para $n = 10$ se obtiene el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned}
P_2(x) = {} & 0.03846154 + 0.01018100 * (x + 10.00000000) + 0.00260181 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) \\
& + 0.00079186 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) * (x + 6.00000000) + 0.00026867 * (x + 10.00000000) \\
& * (x + 8.00000000) * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) - 0.00006363 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) \\
& * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) * (x + 2.00000000) - 0.00001768 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) \\
& * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) * (x + 2.00000000) * (x - 0.00000000) + 0.00000848 * (x + 10.00000000) \\
& * (x + 8.00000000) * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) * (x + 2.00000000) * (x - 0.00000000) * (x - 2.00000000) \\
& - 0.00000168 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) * (x + 2.00000000) \\
& * (x - 0.00000000) * (x - 2.00000000) * (x - 4.00000000) + 0.00000022 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) \\
& * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) * (x + 2.00000000) * (x - 0.00000000) * (x - 2.00000000) * (x - 4.00000000) \\
& * (x - 6.00000000) - 0.00000002 * (x + 10.00000000) * (x + 8.00000000) * (x + 6.00000000) * (x + 4.00000000) \\
& * (x + 2.00000000) * (x - 0.00000000) * (x - 2.00000000) * (x - 4.00000000) * (x - 6.00000000) * (x - 8.00000000)
\end{aligned} \tag{3}$$

La grafica de $P_2(x)$:



Y la grafica de $f(x) - P_2(x)$:



Para ver cualquiera de estas gráficas con mas detalle, acceder al siguiente enlace `https://www.desmos.com/calculator/sqria4dpmp`

Respuesta 2

Para n=4, o 5 nodos igualmente espaciados, tenemos los siguientes polinomios que forman el spline:

$S_0(x)$Para x entre -10.000000000000 y -5.00000000

$S_0(x) = 0.03846154 - 0.04831376(x + 10.00000000) + 0.00000000(x + 10.00000000)^2 + 0.00272831(x + 10.00000000)^3$

$S_1(x)$Para x entre -5.000000000000 y 0.00000000

$S_1(x) = 0.13793103 + 0.15630921(x + 5.00000000) + 0.04092459(x + 5.00000000)^2 - 0.00754074(x + 5.00000000)^3$

$S_2(x)$Para x entre0.000000000000 y 5.00000000

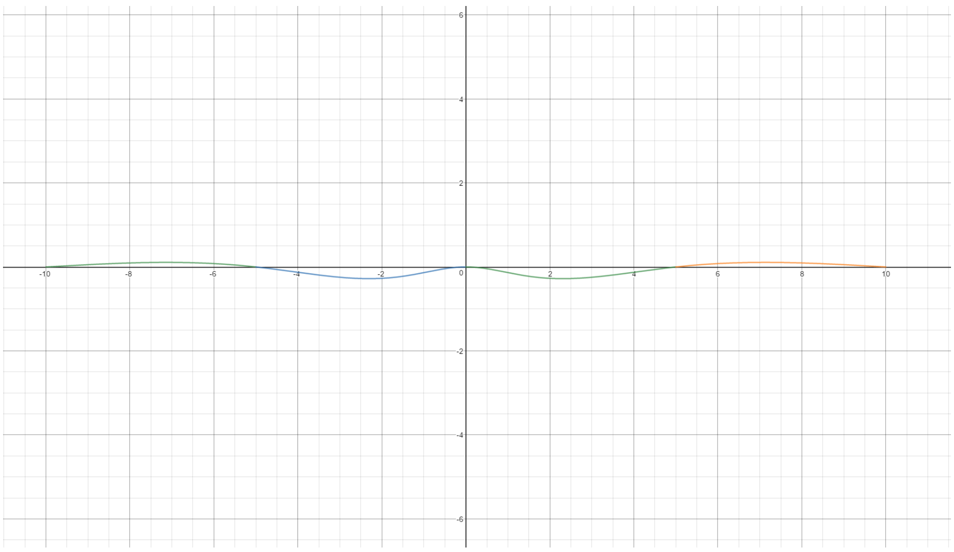
$S_2(x) = 1.00000000 + 0.00000000(x - 0.00000000) - 0.07218643(x - 0.00000000)^2 + 0.00754074(x - 0.00000000)^3$

$S_3(x)$Para x entre5.000000000000 y 10.00000000

$S_3(x) = 0.13793103 - 0.15630921(x - 5.00000000) + 0.04092459(x - 5.00000000)^2 - 0.00272831(x - 5.00000000)^3$

Al graficar este spline, obtenemos la siguiente grafica:

Y la gráfica de este spline menos la función original:



Para n=7, o 8 nodos igualmente espaciados, tenemos los siguientes polinomios que forman el spline:

$S_0(x)$Para x entre -10.000000000000 y -7.14285714

$S_0(x) = 0.03846154 + 0.01692967(x + 10.00000000) + 0.00000000(x + 10.00000000)^2 - 0.00060590(x + 10.00000000)^3$

$S_1(x)$Para x entre -7.142857142857 y -4.28571429

$S_1(x) = 0.07270030 + 0.00209135(x + 7.14285714) - 0.00519341(x + 7.14285714)^2 + 0.00611191(x + 7.14285714)^3$

$S_2(x)$Para x entre -4.285714285714 y -1.42857143

$S_2(x) = 0.17883212 + 0.12209402(x + 4.28571429) + 0.04719435(x + 4.28571429)^2 - 0.01075176(x + 4.28571429)^3$

$S_3(x)$Para x entre -1.428571428571 y 1.42857143

$S_3(x) = 0.66216216 + 0.12846751(x + 1.42857143) - 0.04496363(x + 1.42857143)^2 + 0.00000000(x + 1.42857143)^3$

$S_4(x)$Para x entre1.428571428571 y 4.28571429

$S_4(x) = 0.66216216 - 0.12846751(x - 1.42857143) - 0.04496363(x - 1.42857143)^2 + 0.01075176(x - 1.42857143)^3$

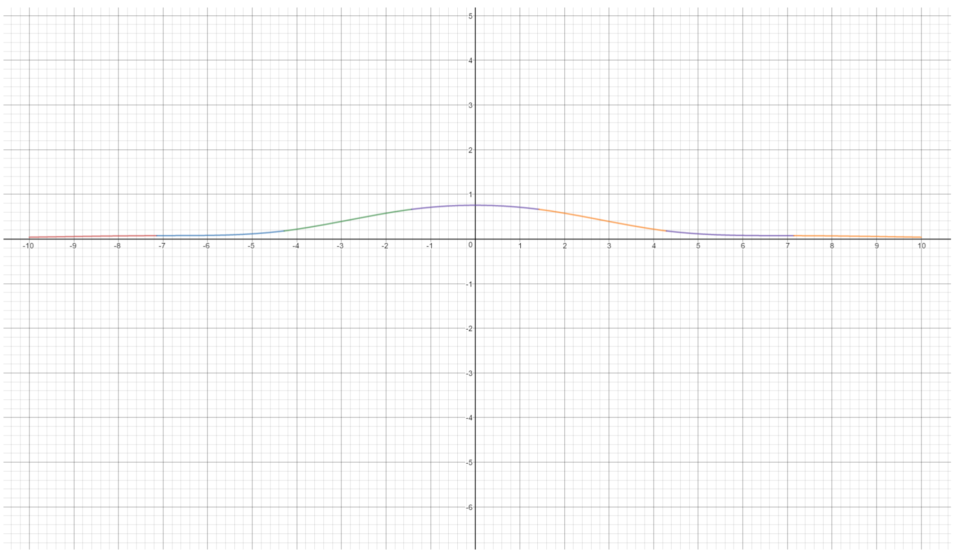
$S_5(x)$Para x entre4.285714285714 y 7.14285714

$S_5(x) = 0.17883212 - 0.12209402(x - 4.28571429) + 0.04719435(x - 4.28571429)^2 - 0.00611191(x - 4.28571429)^3$

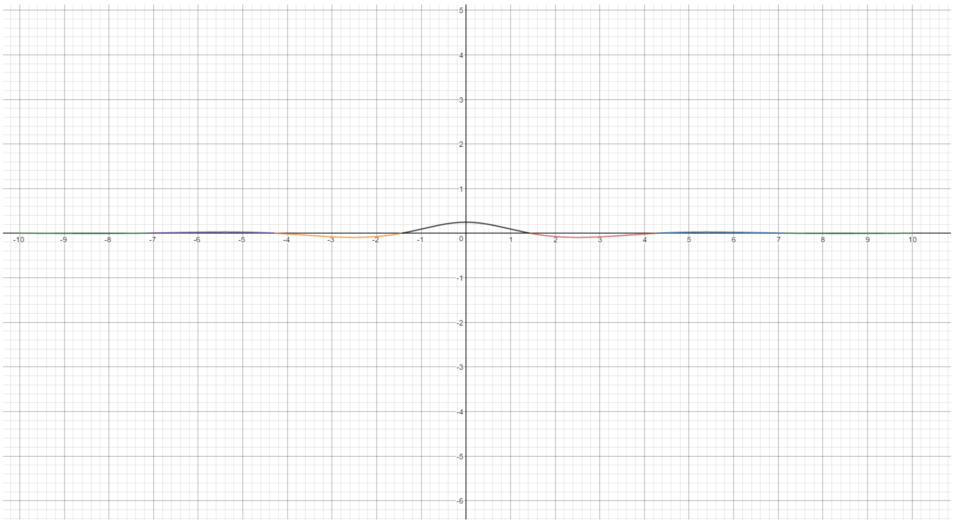
$S_6(x)$Para x entre7.142857142857 y 10.00000000

$S_6(x) = 0.07270030 - 0.00209135(x - 7.14285714) - 0.00519341(x - 7.14285714)^2 + 0.00060590(x - 7.14285714)^3$

Al graficar este spline, obtenemos la siguiente grafica:



Y la gráfica de este spline menos la función original:



Para n=10, o 11 nodos igualmente espaciados, tenemos los siguientes polinomios que forman el spline:

$S_0(x)$Para x entre -10.000000000000 y -8.00000000

$S_0(x) = 0.03846154 + 0.00881415(x + 10.00000000) + 0.00000000(x + 10.00000000)^2 + 0.00034171(x + 10.00000000)^3$

$S_1(x)$Para x entre -8.000000000000 y -6.00000000

$S_1(x) = 0.05882353 + 0.01291468(x + 8.00000000) + 0.00205026(x + 8.00000000)^2 + 0.00089326(x + 8.00000000)^3$

$S_2(x)$Para x entre -6.000000000000 y -4.00000000

$S_2(x) = 0.10000000 + 0.03183483(x + 6.00000000) + 0.00740981(x + 6.00000000)^2 + 0.00083639(x + 6.00000000)^3$

$S_3(x)$Para x entre -4.000000000000 y -2.00000000

$S_3(x) = 0.20000000 + 0.07151071(x + 4.00000000) + 0.01242813(x + 4.00000000)^2 + 0.01340826(x + 4.00000000)^3$

$S_4(x)$Para x entre -2.000000000000 y 0.00000000

$S_4(x) = 0.50000000 + 0.28212232(x + 2.00000000) + 0.09287768(x + 2.00000000)^2 - 0.05446942(x + 2.00000000)^3$

$S_5(x)$Para x entre0.000000000000 y 2.00000000

$S_5(x) = 1.00000000 + 0.00000000(x - 0.00000000) - 0.23393884(x - 0.00000000)^2 + 0.05446942(x - 0.00000000)^3$

$S_6(x)$Para x entre2.000000000000 y 4.00000000

$S_6(x) = 0.50000000 - 0.28212232(x - 2.00000000) + 0.09287768(x - 2.00000000)^2 - 0.01340826(x - 2.00000000)^3$

$S_7(x)$Para x entre4.000000000000 y 6.00000000

$S_7(x) = 0.20000000 - 0.07151071(x - 4.00000000) + 0.01242813(x - 4.00000000)^2 - 0.00083639(x - 4.00000000)^3$

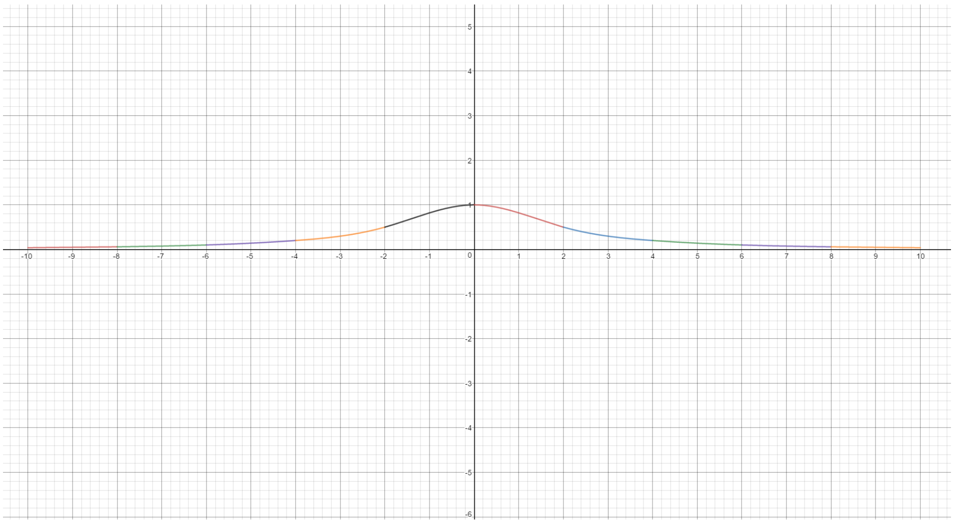
$S_8(x)$Para x entre6.000000000000 y 8.00000000

$S_8(x) = 0.10000000 - 0.03183483(x - 6.00000000) + 0.00740981(x - 6.00000000)^2 - 0.00089326(x - 6.00000000)^3$

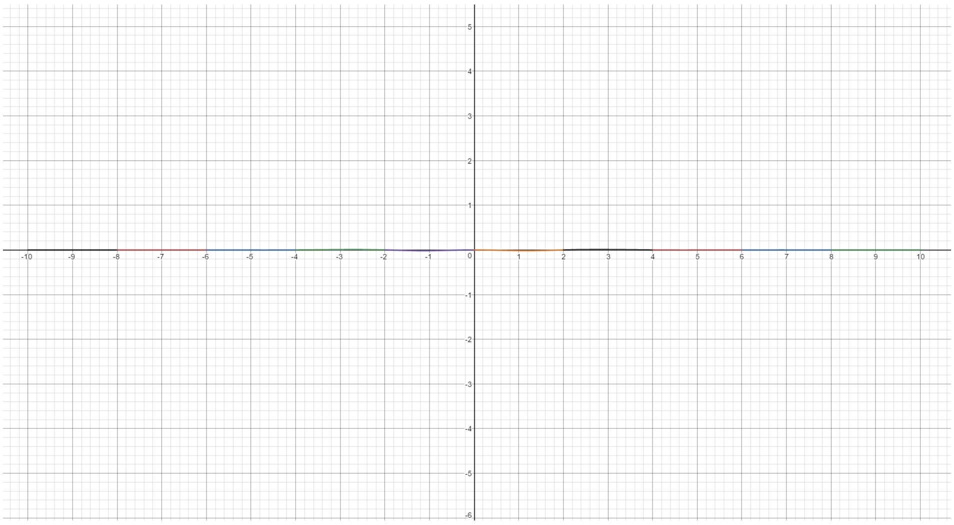
$S_9(x)$Para x entre8.000000000000 y 10.00000000

$S_9(x) = 0.05882353 - 0.01291468(x - 8.00000000) + 0.00205026(x - 8.00000000)^2 - 0.00034171(x - 8.00000000)^3$

Al graficar este spline, obtenemos la siguiente grafica:



Y la gráfica de este spline menos la función original:



Para observar las graficas asociadas a n=4 con mayor detalle, ingresar a `https://www.desmos.com/calculator/m5ivphwzin`

Para observar las graficas asociadas a n=7 con mayor detalle, ingresar a `https://www.desmos.com/calculator/xxtwuc6p6m`

Para observar las graficas asociadas a n=10 con mayor detalle, ingresar a `https://www.desmos.com/calculator/iv0a4nofql`

Respuesta 3

En el caso del algoritmo de diferencias divididas de newton, tenemos que armar la matriz tridiagonal, y si nos damos cuenta con el algoritmo en cada iteración se recorre una fila menos que en la anterior, entonces la formula utilizada para calcular cada espacio de la matriz, se calcula $\sum_{i=1}^{n} n-i$ veces. En el caso de diferencias divididas en cada iteración se calculan 2 restas y una división. Y en cada iteración se hacen 3 operaciones (2 restas y una división). Entonces tenemos que podemos calcular el numero de operaciones usando:

$$3 \times \sum_{i=1}^{n} n - i = 3 \times \frac{n^2 - n}{2}$$

En el caso de los splines, tenemos lo siguiente, siguiendo el algoritmo planteado en la pagina 150 del libro de Burden & Faires:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 7 + 1 \sum_{i=1}^{n-1} 8 + \sum_{i=0}^{n-1} 12 = 28n - 15$$

Evaluando con las formulas obtenidas, obtenemos lo siguiente:

Figura 1: Punto inicial: 0.50

n	Diferencias divididas	Spline
10	165	265
50	3825	1385
200	60300	5585
1000	1501500	27985

Respuesta 4

Queremos interpolar la letra V en la siguiente imagen mediante un spline:

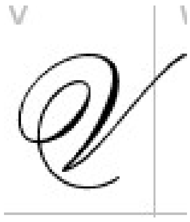


Figura 2: Letra V caligrafeada

Se eligieron 20 puntos en, los cuales estan en la siguiente tabla y su t correspondiente:

Figura 3: Punto inicial: 0.50

t	x	y
0	1.123	0.163
1/19	0.8	0.075
2/19	0.4	0.238
3/19	0.28	0.497
4/19	0.4	0.87
5/19	0.7	1.047
6/19	0.817	0.95
7/19	0.6	0.63
8/19	0.28	0.497
9/19	0.075	0.7
10/19	0.2	0.998
11/19	0.4	1.165
12/19	0.8	1.294
13/19	1.06	1.2
14/19	1	0.77
15/19	0.53	0.23
16/19	0.8	0.36
17/19	1.2	0.746
18/19	1.6	1.132
1	1.84	1.289

Obtuvimos el siguiente spline, formado por los siguientes polinomios al armar la función que relaciona x y t:

$S_0(t)$Para x entre0.000000000000 y 0.05263158

$S_0(t) = 1.12300000 - 5.43046507(t + 0.00000000) + 0.00000000(t + 0.00000000)^2 - 255.05910980(t + 0.00000000)^3$

$S_1(t)$Para x entre0.052631578947 y 0.10526316

$S_1(t) = 0.80000000 - 7.55006986(t - 0.05263158) - 40.27249102(t - 0.05263158)^2 + 747.15254902(t - 0.05263158)^3$

$S_2(t)$Para x entre0.105263157895 y 0.15789474

$S_2(t) = 0.40000000 - 5.58025549(t - 0.10526316) + 77.69896409(t - 0.10526316)^2 - 284.88808629(t - 0.10526316)^3$

$S_3(t)$Para x entre0.157894736842 y 0.21052632

$S_3(t) = 0.28000000 + 0.23109181(t - 0.15789474) + 32.71663467(t - 0.15789474)^2 + 118.03979614(t - 0.15789474)^3$

$S_4(t)$Para x entre0.210526315789 y 0.26315789

$S_4(t) = 0.40000000 + 4.65588823(t - 0.21052632) + 51.35449722(t - 0.21052632)^2 - 598.81109828(t - 0.21052632)^3$

$S_5(t)$Para x entre0.263157894737 y 0.31578947

$S_5(t) = 0.70000000 + 5.08535526(t - 0.26315789) - 43.19462356(t - 0.26315789)^2 - 212.61240301(t - 0.26315789)^3$

$S_6(t)$Para x entre0.315789473684 y 0.36842105

$S_6(t) = 0.81700000 - 1.22830929(t - 0.31578947) - 76.76500298(t - 0.31578947)^2 + 413.55171034(t - 0.31578947)^3$

$S_7(t)$Para x entre0.368421052632 y 0.42105263

$S_7(t) = 0.60000000 - 5.87211811(t - 0.36842105) - 11.46736451(t - 0.36842105)^2 + 142.83456165(t - 0.36842105)^3$

$S_8(t)$Para x entre0.421052631579 y 0.47368421

$S_8(t) = 0.28000000 - 5.89221829(t - 0.42105263) + 11.08546102(t - 0.42105263)^2 + 510.37204306(t - 0.42105263)^3$

$S_9(t)$Para x entre0.473684210526 y 0.52631579

$S_9(t) = 0.07500000 - 0.48400874(t - 0.47368421) + 91.67052045(t - 0.47368421)^2 - 709.63773390(t - 0.47368421)^3$

$S_10(t)$Para x entre0.526315789474 y 0.57894737

$S_10(t) = 0.20000000 + 3.26825324(t - 0.52631579) - 20.37754280(t - 0.52631579)^2 + 579.13389254(t - 0.52631579)^3$

$S_11(t)$Para x entre0.578947368421 y 0.63157895

$S_11(t) = 0.40000000 + 5.93599577(t - 0.57894737) + 71.06465076(t - 0.57894737)^2 - 749.52283627(t - 0.57894737)^3$

$S_12(t)$Para x entre0.631578947368 y 0.68421053

$S_12(t) = 0.80000000 + 7.18776369(t - 0.63157895) - 47.28106023(t - 0.63157895)^2 + 86.89745254(t - 0.63157895)^3$

$S_13(t)$Para x entre0.684210526316 y 0.73684211

$S_13(t) = 1.06000000 + 2.93294948(t - 0.68421053) - 33.56040983(t - 0.68421053)^2 - 832.68697387(t - 0.68421053)^3$

$S_14(t)$Para x entre0.736842105263 y 0.78947368

$S_14(t) = 1.00000000 - 7.51956159(t - 0.73684211) - 165.03730044(t - 0.73684211)^2 + 2626.54044295(t - 0.73684211)^3$

$S_15(t)$Para x entre0.789473684211 y 0.84210526

$S_15(t) = 0.53000000 - 3.06470311(t - 0.78947368) + 249.67961160(t - 0.78947368)^2 - 1785.62479792(t - 0.78947368)^3$

$S_16(t)$Para x entre0.842105263158 y 0.89473684

$S_16(t) = 0.80000000 + 8.37837403(t - 0.84210526) - 32.26114596(t - 0.84210526)^2 + 331.96874874(t - 0.84210526)^3$

$S_17(t)$Para x entre0.894736842105 y 0.94736842

$S_17(t) = 1.20000000 + 7.74120699(t - 0.89473684) + 20.15497226(t - 0.89473684)^2 - 433.92019704(t - 0.89473684)^3$

$S_18(t)$Para x entre0.947368421053 y 1.00000000

$S_18(t) = 1.60000000 + 6.25679800(t - 0.94736842) - 48.35874306(t - 0.94736842)^2 + 306.27203941(t - 0.94736842)^3$

Y los siguientes polinomios que forman el spline al tener la función que relaciona t con y:

$P_0(t)$Para x entre0.000000000000 y 0.05263158

$P_0(t) = 0.16300000 - 2.87433585(t + 0.00000000) + 0.00000000(t + 0.00000000)^2 + 434.04324177(t + 0.00000000)^3$

$P_1(t)$Para x entre0.052631578947 y 0.10526316

$P_1(t) = 0.07500000 + 0.73267170(t - 0.05263158) + 68.53314344(t - 0.05263158)^2 - 448.60720883(t - 0.05263158)^3$

$P_2(t)$Para x entre0.105263157895 y 0.15789474

$P_2(t) = 0.23800000 + 4.21864905(t - 0.10526316) - 2.29957375(t - 0.10526316)^2 + 297.24059356(t - 0.10526316)^3$

$P_3(t)$Para x entre0.157894736842 y 0.21052632

$P_3(t) = 0.49700000 + 6.44673209(t - 0.15789474) + 44.63315155(t - 0.15789474)^2 - 616.89316541(t - 0.15789474)^3$

$P_4(t)$Para x entre0.210526315789 y 0.26315789

$P_4(t) = 0.87000000 + 6.01842257(t - 0.21052632) - 52.77103246(t - 0.21052632)^2 + 44.04206807(t - 0.21052632)^3$

$P_5(t)$Para x entre0.263157894737 y 0.31578947

$P_5(t) = 1.04700000 + 0.82957762(t - 0.26315789) - 45.81702171(t - 0.26315789)^2 - 94.27710686(t - 0.26315789)^3$

$P_6(t)$Para x entre0.315789473684 y 0.36842105

$P_6(t) = 0.95000000 - 4.77673304(t - 0.31578947) - 60.70288069(t - 0.31578947)^2 + 682.87535939(t - 0.31578947)^3$

$P_7(t)$Para x entre0.368421052632 y 0.42105263

$P_7(t) = 0.63000000 - 5.49164547(t - 0.36842105) + 47.11954448(t - 0.36842105)^2 + 174.96566932(t - 0.36842105)^3$

$P_8(t)$Para x entre0.421052631579 y 0.47368421

$P_8(t) = 0.49700000 + 0.92231491(t - 0.42105263) + 74.74570279(t - 0.42105263)^2 - 360.74703667(t - 0.42105263)^3$

$P_9(t)$Para x entre0.473684210526 y 0.52631579

$P_9(t) = 0.70000000 + 5.79238582(t - 0.47368421) + 17.78564437(t - 0.47368421)^2 - 384.99652265(t - 0.47368421)^3$

$P_10(t)$Para x entre0.526315789474 y 0.57894737

$P_10(t) = 0.99800000 + 4.46514182(t - 0.52631579) - 43.00328026(t - 0.52631579)^2 + 350.59912725(t - 0.52631579)^3$

$P_11(t)$Para x entre0.578947368421 y 0.63157895

$P_11(t) = 1.16500000 + 2.85204690(t - 0.57894737) + 12.35447667(t - 0.57894737)^2 - 379.51298636(t - 0.57894737)^3$

$P_12(t)$Para x entre0.631578947368 y 0.68421053

$P_12(t) = 1.29400000 + 0.99867059(t - 0.63157895) - 47.56862644(t - 0.63157895)^2 - 101.46218180(t - 0.63157895)^3$

$P_13(t)$Para x entre0.684210526316 y 0.73684211

$P_13(t) = 1.20000000 - 4.85172927(t - 0.68421053) - 63.58897093(t - 0.68421053)^2 + 10.29471357(t - 0.68421053)^3$

$P_14(t)$Para x entre0.736842105263 y 0.78947368

$P_14(t) = 0.77000000 - 11.45975352(t - 0.73684211) - 61.96348984(t - 0.73684211)^2 + 1610.41732751(t - 0.73684211)^3$

$P_15(t)$Para x entre0.789473684211 y 0.84210526

$P_15(t) = 0.23000000 - 4.59925665(t - 0.78947368) + 192.31293029(t - 0.78947368)^2 - 1101.94402360(t - 0.78947368)^3$

$P_16(t)$Para x entre0.842105263158 y 0.89473684

$P_16(t) = 0.36000000 + 6.48678013(t - 0.84210526) + 18.32176867(t - 0.84210526)^2 - 42.26723312(t - 0.84210526)^3$

$P_17(t)$Para x entre0.894736842105 y 0.94736842

$P_17(t) = 0.74600000 + 8.06413612(t - 0.89473684) + 11.64799502(t - 0.89473684)^2 - 484.89104392(t - 0.89473684)^3$

$P_18(t)$Para x entre0.947368421053 y 1.00000000

$P_18(t) = 1.13200000 + 5.26067539(t - 0.94736842) - 64.91374876(t - 0.94736842)^2 + 411.12040878(t - 0.94736842)^3$

Tenemos que obtuvimos la siguiente gráfica:

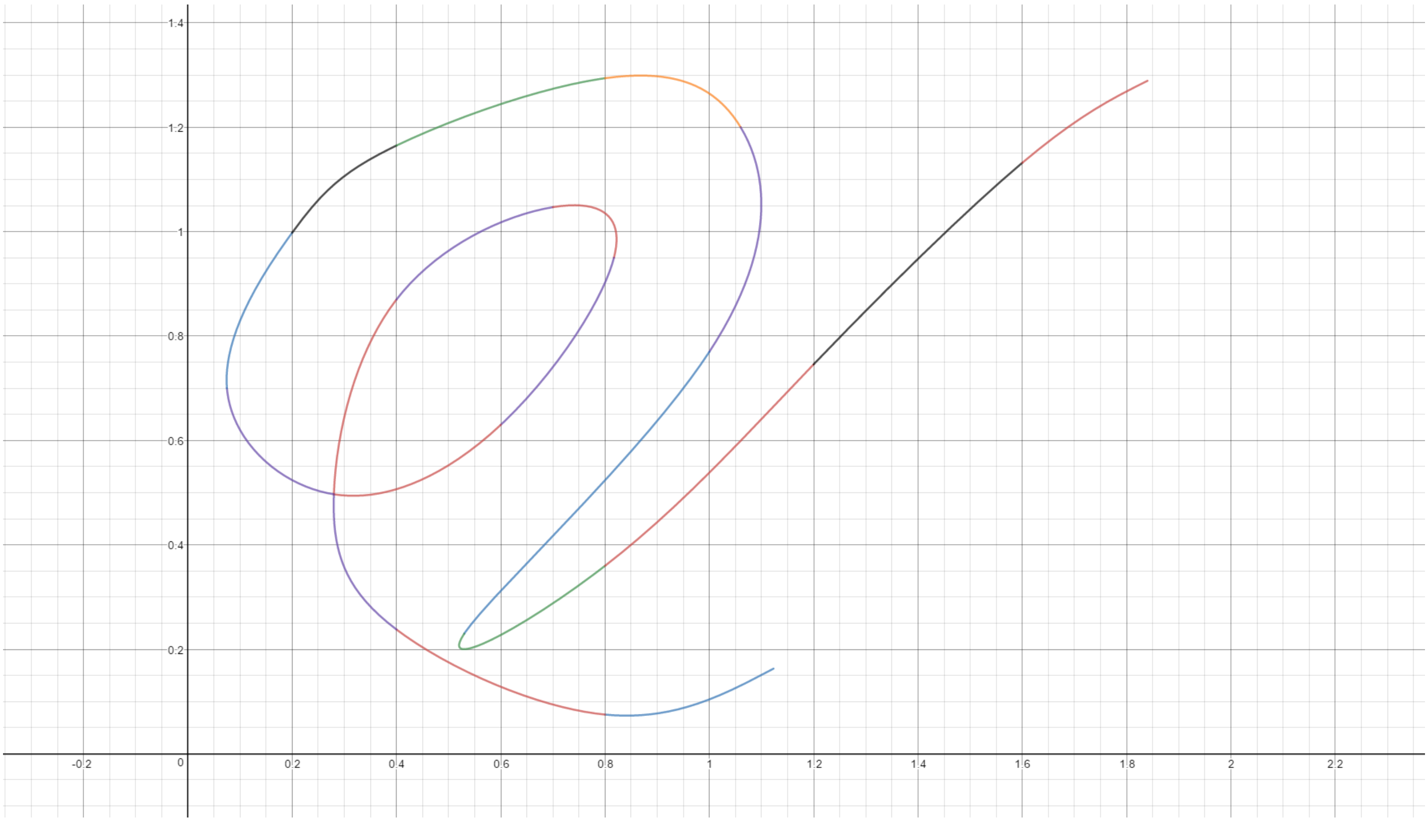


Figura 4: Letra V Con curvas parametricas!

Se puede observar con mas detalle, en sl siguiente enlace `https://www.desmos.com/calculator/dewbwompm8`