Parcial 1 **Probabilidad**

Victor Tortolero CI:24.569.609

Pregunta 1

El Caballero De Meré sabía que era ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado. Entonces De Meré argumentó que debiera ser igualmente ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. Para ello había razonado "por regla de tres": si en 4 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 6 posibles, es lo mismo que si en 24 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 36 posibles, ya que 6 : 4 = 36 : 24.

(a) Calcule la probabilidad de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos
R: Definimos el siguiente evento:

A : obtener al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado de 6 cara

Para calcular $P\left(A\right)$, podemos usar su complemento, que seria $\overline{A}$: no obtener ningún 6 en 4 lanzamientos. Con esto entonces:

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.5177$$

Entonces tenemos que la probabilidad seria de $51.77\,\%$

(b) Calcule la probabilidad de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos de un par de dados.
R: Definimos el siguiente evento:

A : obtener al menos un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dado de 6 cara

Podemos aplicar lo mismo que en el caso anterior, tenemos que en este caso de las 36 posibles combinaciones al lanzar dos dados, nos interesa 1 y despreciamos la otras 35, entonces:

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{35^2 4}{36^2 4} \approx 0.4914$$

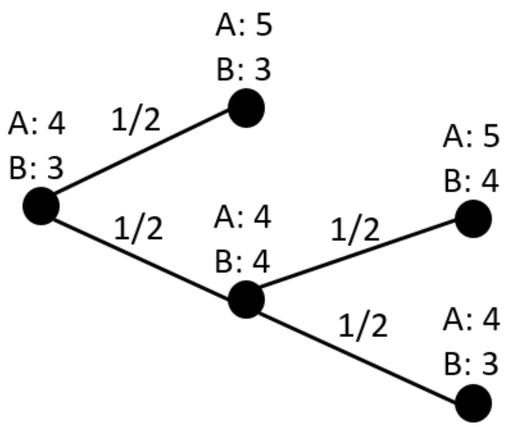
Entonces tenemos que la probabilidad seria de $49.14\,\%$

(c) En base a los resultados anteriores ¿Está de acuerdo con el argumento del Caballero de Meré?
R: No, ya que como vemos obtenemos probabilidades distintas, y por lo tanto no es igualmente ventajoso apostar por obtener al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado de 6 cara a apostar por obtener al menos un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados de 6 caras.

Pregunta 2

Los jugadores A y B apuestan cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos. ¿Como deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

R: Tendríamos el siguiente diagrama que indica que pasaría si A y B continúan su partida:



Entonces, podemos definir los siguientes eventos:

D : A obtiene un punto $\quad$ C : B obtiene un punto $\quad$ E : A gana $\quad$ F : B Gana

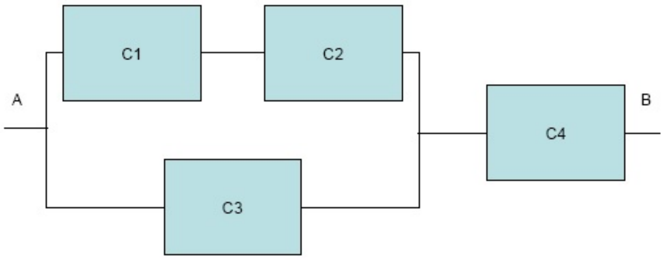
Entonces tenemos que:

$$P(E) = P(A) + P(A|B) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0.75$$
$$P(F) = P(B|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.25$$

Por lo tanto, para ser justos deberíamos darle un $75\,\%$ de la cantidad al jugador A y un $25\,\%$ al jugador B.

Pregunta 3

En la red de comunicaciones de 4 componentes conectados, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes es independiente de los demás, siendo la probabilidad de que funcione el componente 1 de 0.9, el componente 2 de 0.8, el componente 3 de 0.75 y el componente 4 de 0.85. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Con los supuestos anteriores, calcular la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B.



R: Definiremos el evento F como el evento de que la red funcione, y por lo tanto la probabilidad de F seria:

$$\begin{aligned}
P(F) &= P\left(\left(\left(C_1 \cap C_2\right) \cup C_3\right) \cap C_4\right) \\
&= P\left(\left(C_1 \cap C_2\right) \cup C_3\right) \times P\left(C_4\right) \\
&= \left(1 - P\left(\left(\overline{C_1} \cup \overline{C_2}\right) \cap \overline{C_3}\right)\right) \times P\left(C_4\right) \\
&= \left(1 - \left(P\left(\overline{C_1} \cup \overline{C_2}\right) \times P\left(\overline{C_3}\right)\right)\right) \times P\left(C_4\right) \\
&= \left(1 - \left(\left(1 - P\left(C_1 \cap C_2\right)\right) \times P\left(\overline{C_3}\right)\right)\right) \times P\left(C_4\right) \\
&= \left(1 - \left(\left(1 - \left(P\left(C_1\right) \times P\left(C_2\right)\right)\right) \times P\left(\overline{C_3}\right)\right)\right) \times P\left(C_4\right) \\
&= \left(1 - \left(\left(1 - (0.9 \times 0.8)\right) \times 0.25\right)\right) \times 0.85 \\
&= 0.7905
\end{aligned}$$

Teniendo ña $P(F)$ podemos calcular la $P\left(\overline{F}\right)$, que seria la probabilidad de que la red no funcione, osea que no haya comunicación entre A y B.

$$P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - 0.7905 = 0.2095$$

Entonces la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B es $20.95\,\%$.

Pregunta 4

Una aseguradora tiene clientes de riesgo alto, medio y bajo. Estos clientes tienen probabilidades de 0.02, 0.01 y 0.0025 de rellenar un impreso de reclamación. Si la proporción de clientes de alto riesgo es 0.1, de riesgo medio 0.2 y de bajo riesgo 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que un impreso rellenado sea de un cliente de alto riesgo?

R: Definimos los siguientes eventos:

A : es cliente de alto riesgo $\quad$ B : es cliente de medio riesgo $\quad$ C : es cliente de bajo riesgo

D : el cliente rellena un impreso de reclamacion

Entonces, por el teorema de Bayes podemos calcular la probabilidad de que un impreso rellanado sea de un cliente de alto riesgo.

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A)\,P(D|A)}{P(A)\,P(D|A) + P(B)\,P(D|B) + P(C)\,P(D|C)} \\ &= \frac{(0.1)(0.02)}{(0.1)(0.02) + (0.2)(0.01) + (0.7)(0.0025)} \\ &\approx 0.3478 \end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad condicional de que un cliente sea de alto riesgo si relleno un impreso de reclamo, es de $34.78\,\%$.