VŠB - TUO

Datum 7.12.2023

Diskrétní matematika
Projekt

číslo zadání 3

Příklad	Poznámky
1	
2	

Osobní číslo RUC0066

Jméno Michal Ručka

1 Kombinatorika

V soutěži o poklad je třeba otevřít zakódovanou skříňku, která skrývá další soutěžní úkol a část pokladu. Skříňka je zajištěna zámkem se 4-místným kódem. K rozluštění kódu mají soutěžící tuto nápovědu:

- Čtyřciferné číslo kódu dává po dělení 7 zbytek 2.
- Po dělení 8 dává zbytek 5.
- Přičteme-li ke kódovému číslu 2, dostaneme násobek 11.
- Kódové číslo je menší než číslo 2000.

Určete všechna čísla, která by mohla být kódem zamku na skříňce.

Řešení příkladu 1:

a) $x \equiv 2 \pmod 7$

b) $x \equiv 5 \pmod 8$

c) $x \equiv 9 \pmod{11}$

d) $0 \leq x \leq 2000$

a)

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 7 \\ x &= 2 + 7t \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod 8 \\ 2 + 7t &\equiv 5 \pmod 8 \\ 7t &\equiv 3 \pmod 8 \\ 7t &\equiv 11 \pmod 8 \\ 7t &\equiv 19 \pmod 8 \\ 7t &\equiv 27 \pmod 8 \\ 7t &\equiv 35 \pmod 8 \\ t &\equiv 5 \pmod 8 \\ \underline{Dosazeni:} &\implies a) \\ t &= 5 + 8u \\ x &= 2 + 7(5 + 8u) \\ x &= 2 + 35 + 56u \\ x &= 37 + 56u \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x &\equiv 9 \pmod{11} \\ 37 + 56u &\equiv 9 \pmod{11} \\ 56u &\equiv -28 \pmod{11} \\ 2u &\equiv -1 \pmod{11} \\ 2u &\equiv -12 \pmod{11} \\ u &\equiv -6 \pmod{11} \\ u &\equiv 5 \pmod{11} \\ \underline{Dosazeni} &\implies b) \\ u &= 5 + 11v \\ x &= 37 + 56(5 + 11v) \\ x &= 37 + 280 + 616v \\ x &= 317 + 616v \end{aligned}$$

Finální výsledek této úlohy vychází ze soustavy kongurencí, které nám umožní získat předpis pro výpočet konkrétních řešení. Tento finální předpis vypadá následovně:

$$x = 317 + 616v, \quad v \in \mathbb{N}$$

Aby byla splněna podmínka d), tak musí proměnná v nabývat čísel od 0 do 2. Výsledné možné kódy zámku budou tedy po dosazení jednotlivých čísel následovné:

$$v_0 : x_1 = 317 + 616 \cdot 0 \implies x_1 = 0317$$

$$v_1 : x_2 = 317 + 616 \cdot 1 \implies x_2 = 0933$$

$$v_2 : x_3 = 317 + 616 \cdot 2 \implies x_3 = 1549$$

Výsledná kódová čísla jsou tedy tyto: **0317, 0933, 1549**

2 Teorie grafů

Graf U je zadán jeho maticí sousednosti I.

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

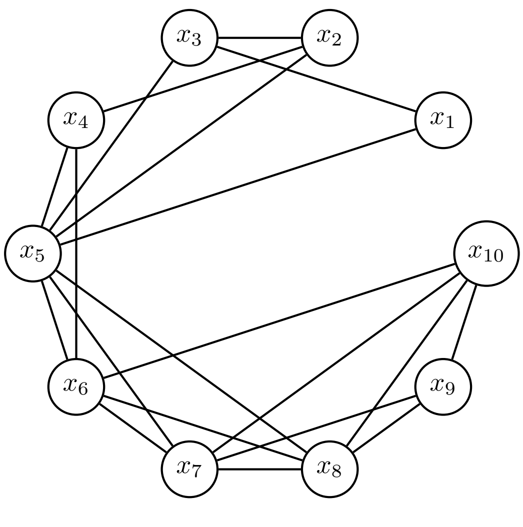
Nakreslete graf U a pojmenujte jeho vrcholy tak, aby číslování vrcholů odpovídalo řádkům matice sousednosti. Zvláště vykreslete indukovaný podgraf P grafu U, kde P je indukovaný na všech vrcholech lichého stupně.

a) Kolik hran má graf U a kolik hran má indukovaný podgraf P? Zapište stupňové posloupnosti obou grafů.

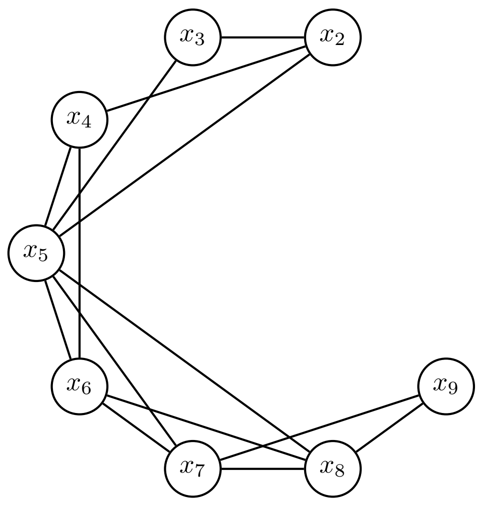
b) Je graf U eulerovský? Je podgraf P eulerovský? Svou odpověď zdůvodněte.

c) Kolika nejméně tahy lze podgraf P nakreslit? Popište, jak takové tahy najít a zapište je.

Graf U



Indukovaný graf P



a)

U: Graf U má následující stupňovou posloupnost: [7,5,5,5,4,3,3,3,3,2]
Po postupném dosazení do následujícího vzorce získáme výpočtem počet hran tohoto grafu.

$$\sum_{i=1}^{10} S(U_i) = 2|H|$$

S = Stupeň vrcholů, H = Počet hran

$$1 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 2|H|$$
$$40 = 2|H|$$
$$20 = |H|$$
$$H = 20$$

Tento graf má tedy celkem 20 hran

P: Graf P má následující stupňovou posloupnost: [6,4,4,4,3,3,2,2]
Po postupném dosazení do následujícího vzorce získáme výpočtem počet hran tohoto grafu.

$$\sum_{i=2}^{9} S(U_i) = 2|H|$$

S = Stupeň vrcholů, H = Počet hran

$$1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 2|H|$$
$$28 = 2|H|$$
$$14 = |H|$$
$$H = 14$$

Tento graf má tedy celkem 14 hran

b)

U: Tento graf není eulerovský

Platí pro něj sice podmínky, že eulerovský graf musí být souvislý, obyčejný a konečný, ovšem neplatí pro něj další podmínka, a to uzavřenost eulerovského tahu. Eulerovský tah je uzavřený pouze v případě, že jsou všechny vrcholy daného grafu sudého stupně. V tomto grafu máme pouze dva vrcholy sudého stupně a osm vrcholů lichého stupně.

P: Tento graf taktéž není eulerovský

Platí pro něj stejné podmínky jako u předešlého grafu, ovšem znova neplatí podmínka uzavřenosti eulerovského tahu. V tomto grafu máme pouze dva vrcholy lichého stupně a šest vrcholů sudého stupně.

c)

U: Tento graf nesplňuje podmínku uzavřeného eulerovského tahu, ovšem splňuje podmínku otevřeného eulerovského tahu. Tato podmínka nám říká, že graf má otevřený eulerovský tah právě tehdy, pokud má právě 2 vrcholy lichého stupně.

Důsledkem tohoto víme, že graf lze nakreslit jedním tahem. Ovšem musíme dodržet podmínku a začít tah na jednom ze dvou lichých vrcholů. Následně pokračujeme libovolným výberem jednoho z jeho sousedů. Tento tah končí v moment, kdy dorazíme na lichý vrchol, ze kterého jsme nezačínali, a ten již nemá žádné hrany, které jsme ještě nepoužili.

Graf tedy lze nakreslit nejméně jedním tahem s tím, že cesta povede přes celkem 15 vrcholů a použije všech jeho 14 hran. Jednou z touto cest je například tato:

$$x2 \to x3 \to x5 \to x6 \to x7 \to x8 \to x9 \to x7 \to x5 \to x8 \to x6 \to x4 \to x2 \to x5 \to x4$$