تمرین هفتم - گروه ۲

امیرحسین مهدی‌نژاد
شماره دانشجویی ۸۱۰۸۰۰۰۵۸
mahdinejad@ut.ac.ir

۴

برای هر $i \in S$ و $p_{i,i}(0) = 1$ داریم $i \leftrightarrow i$ پس رابطه بازتابی است. طبق تعریف رابطه تقارنی نیز هست و کافیست تعدی را بررسی کنیم.

اگر $i, j, k \in S$ بوده، $i \leftrightarrow j$ و $k \leftrightarrow k$ باشد؛ آنگاه $m, n \geq 0$ وجود دارد به طوری که $p_{i,j}(n) > 0$ و $p_{j,k}(m) > 0$ باشد. لذا داریم:

$$p_{i,k}(m + n) = \sum_{l \in S} p_{i,l}(m) p_{l,k}(n) \geq p_{i,j}(n) p_{j,k}(m) > 0$$

پس $i \to k$. به همین ترتیب داریم $k \to i$ و نتیجه می‌شود $\leftrightarrow$ تعدی است. لذا رابطه هم‌ارزی بوده و فضای حالت را به کلاس‌های هم‌ارزی پارتیشن‌بندی می‌کند.

۷

در $SAT - 2$ مقداردهی به صورت یکنواخت و رندوم انجام می‌شود. فرض کنیم هدفمان تشخیص این باشد که این مقداردهی درست است یا ارضاء نشدنیست.

یک مقداردهی درست دلخواه در نظر می‌گیریم و با ریلکس کردن یک لیترال در آن، برای باقی تک‌تک چک کرده و این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا جایی که به مقداردهی مدنظر برسیم و در غیراینصورت آن‌را ارضاءنشدنی اعلام می‌کنیم.

عبارت حداکثر می‌تواند ۲ متغیر داشته باشد و احتمال افزایش تعداد تطابق‌ها حداقل $1/2$ و زمان اجرای هرکدام $O(n^2)$ است.

اگر در الگوریتم $SAT - 2$ عبارت ارضاءنشده باشد جواب درست برگردانده می‌شود و در غیراینصورت احتمال پیدا کردن آن حداقل $1 - 2^{-m}$ است.

پس وقتی به مقداردهی صحیح ارضاءشدنی نزدیک هستیم، زمان مورد انتظار کاهش یافته و در غیراینصورت افزایش می‌یابد.

۱۴

گراف دوبخشی نیست، بدون جهت و aperiodic است. طبق تعریف زنجیره مارکوفی time reversible است که $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$ که در آن P همان transition matrix و π نامنفی است.

اگر X_0 مجموعه‌ی مستقل دلخواهی در $G = (V, E)$ باشد، X_{i+1} را به این صورت محاسبه می‌کنیم:

با انتخاب راس v از مجموعه رئوس V، اگر $v \in X_i$ باشد مقدار $X_{i+1} = X_i - \{v\}$ و در غیراینصورت اگر $v \notin X_i$ یعنی اضافه کردن v به X_i همچنان مجموعه را مستقل نگه می‌دارد که همان $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$ است.

هر وضعیتی قابل دسترسی از مجموعه‌ی خالی است که یعنی کاهش‌پذیر نیست. از طرفی چون self-loop داریم، زنجیره aperiodic بوده و stationary distribution توزیع یکنواخت است که نشان می‌دهد زنجیره‌ی time reversible داریم.

۱۷

با شروع از 0 باید با یک حرکت به 1 برویم. احتمال اینکه اولین بازگشت ما به 0 بعد از $2n + 2$ حرکت رخ دهد با $C_n p^n (1 - p)^{n+1}$ قابل نمایش است که در آن C_n همان nمین عدد کاتالان برابر با $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ است؛ چون C_n مسیر از 1 با بازگشت به 1 داریم که طولشان $2n$ بوده و از 0 نگذرند.

$r^t_{0,0}$ را احتمال اولین بازگشت از 0 به 0 در زمان t در نظر می‌گیریم. در اینصورت داریم:

$$r^t_{0,0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p^n (1 - p)^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \rightarrow r^t_{0,0} = (1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} C_n (p(1 - p))^n$$

$$= (1 - p) . \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p(1-p)}$$

وقتی $p \le 1/2$ باشد، $\sqrt{1 - 4p(1 - p)} = 2p$ است و داریم $r^t_{0,0} = 1$ همچنین زنجیره recurrent است.

از طرفی اگر $p > 1/2$ باشد، $\sqrt{1 - 4p(1 - p)} = 2 - 2p$ و $r^t_{0,0} = (1 - p)/p < 1$. در این حالت زنجیره transient است.

برای بررسی posititve recurrent یا null recurrent بودن وضعیت 0 در نظر می‌گیریم:

$$h^t_{0,0} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 2) C_n p^n (1 - p)^{n+1} = 2(1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (p(1 - p))^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \rightarrow h^t_{0,0} = \frac{2(1-p)}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

در نتیجه $h^t_{0,0}$ وقتی $p < 1/2$ باشد، متناهی و اگر $p = 1/2$ نامتناهی است.

---

۲۳ a

در نظر می‌گیریم X_k تعداد هاست‌هایی باشد که بعد از k راند پیغام دریافت کرده‌اند ($X_0 = 1$). توزیع X_{k+1} فقط وابسته به X_k است. تاریخچه‌ی اینکه کدام هاست‌ها پیغام دریافت کردند هیچ اثری بر X_{k+1} ندارد.

لذا می‌توان منطبق بر فرضیه‌ی مارکوف با آن رفتار کرد.

b

می‌دانیم اگر $i = j$ باشد $P(i, j, 0) = 1$ و در غیراینصورت 0 است. داریم:

$$P(i, j, c) = P(i, j, c - 1)\frac{j-1}{n-1} + P(i, j - 1, c - 1)\frac{n-j+2}{n-1}$$

برای اینکه بعد از تصمیم‌گیری cتا از i هاست، j هاست پیام را دریافت کرده باشند، دو راه وجود دارد؛ یا j هاست پیام را بعد از $c - 1$ انتخاب داشتند و cمین هاست یکی از $j - 1$تایی که پیام را داشتند انتخاب می‌کند یا اینکه $j - 1$ هاست بعد از $c - 1$ انتخاب، پیام را داشتند و cمین هاست، یک هاست بدون پیام را انتخاب کرده است.

c

از خواص بالا استفاده می‌کنیم و توزیع X_k را برای هر راند بررسی می‌کنیم. یک برنامه‌ی ساده مقادیر مطلوب را محاسبه خواهد کرد. برای $n = 128$ همه‌ی هاست‌ها پیام را با احتمال ≥ 0.99 بعد از ۱۷ راند دارند و برای احتمال ≥ 0.9999 نیاز به ۲۲ راند داریم.

حتی اگر در هر راند، هر هاست با یک هاست بدون پیام تبادل انجام می‌داد، ۷ راند نیاز می‌داشتیم.

---

۲۴ a

یک گراف lollipop با n راس که کلیک با n/2 راس دارد، به مسیری با n/2 راس متصل است. u و v به ترتیب نودهای کلیک و مسیر و انتهای آن را نشان می‌دهند. زمان مورد انتظار برای بخش کلیک را $u(c_u)$ و بخش مسیر را $u(h_{v,u})$ در نظر می‌گیریم.

با فرض $n = 2k$ هر بخش k نود دارد و:

$$h_{v,u} = k^2$$

$c_u \leq \sum_{w \in clique} h_{u,w} + h_{w,u}$ یک حد بالای زمان مورد انتظار برای عبور از هر نود کلیک و بازگشت به u است. در نظر می‌گیریم w و x نیز نودهای داخل کلیک بوده و $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ نودهای مسیر باشند:

$$h_{u,w} = \frac{1}{k} \cdot 0 + \frac{k-2}{k} h_{x,w} + \frac{1}{k} h_{1,w} + 1$$

$$h_{x,w} = \frac{1}{k} \cdot 0 + \frac{k-3}{k-1} h_{x,w} + \frac{1}{k-1} h_{1,w} + 1$$

$$h_{1,w} = \frac{1}{2} h_{u,w} + \frac{1}{2} h_{2,w} + 1$$

$$h_{2,w} = \frac{1}{2} h_{1,w} + \frac{1}{2} h_{3,w} + 1$$

و دو عبارت آخر از این قرار محاسبه می‌شوند:

$$h_{k-1,w} = \frac{1}{2}h_{k-2,w} + \frac{1}{2}h_{k,w} + 1$$
$$h_{k,w} = \frac{1}{2}h_{k-1,w} + 1$$

نتیجه می‌گیریم $h_{k-i,w} = h_{k-i-1,w} + (2i + 1)$ و

$$h_{1,w} = h_{u,w} + (2k-1)$$
$$h_{u,w} = \frac{k^2+9k-2}{2k}$$

برای بدست آوردن $\sum h_{w,u}$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$\frac{2|E|}{d(u)} = h_{u,u}$$
$$= \frac{1}{d(u)}\sum_{w\in N(u)}(1+h_{w,u})$$
$$\sum_{w\in N(u)} h_{w,u} = 2|E| - k$$
$$= 2(k(k-1)+k) - k$$
$$= 2k^2 - k$$

لذا می‌توان گفت:

$$c_u \leq \sum_{w\in \text{clique}} h_{u,w} + h_{w,u} \leq (k-1)\frac{k^2+9k-2}{2k} + 2k^2 - k$$

از ترکیب عبارات فوق داریم $h_{v,u} = k^2 \geq$ زمان با شروع از $v \geq c_u + h_{v,u} = O(k^2)$ بنابراین زمان مورد انتظار با شروع از v عبارت است از $\Theta(k^2) = \Theta(n^2)$.

b

به اندازه‌ی $\Theta(k^2)$ طول می‌کشد که بخش کلیک گراف را با شروع از u پوشش دهیم.

$$h_{u,v} = \frac{k-1}{k}h_{w,v} + \frac{1}{k}h_{1,v} + 1$$
$$h_{w,v} = \frac{k-2}{k-1}h_{w,v} + \frac{1}{k-1}h_{u,v} + 1$$
$$h_{i,v} = \frac{1}{2}h_{i-1,v} + \frac{1}{2}h_{i+1,v} + 1$$

نتیجه می‌شود $h_{w,v} = h_{u,v} + (k-1)$ و $h_{k-i,w} = \frac{i}{i+1}h_{k-i-1,v} + i$ است که در ادامه با توجه به شرایطی که در بند قبل ذکر شد و عبارات بالا می‌توان نوشت:

$$h_{1,v} = \frac{k-1}{k} h_{u,v} + (k-1)$$
$$\frac{k-1}{k} h_{u,v} = h_{1,v} - (k-1)$$
$$h_{u,v} = \frac{[h_{1,v} - (k-1)]\, k}{k-1}$$
$$h_{u,v} = k^3$$

لذا زمان با شروع از u از مرتبه‌ی زمانی $\Theta(n^3)$ خواهد بود.

---

۲۵ a

اگر x جایگاه قبلی و y مقدار جدید بعد از پرتاب تاس باشد، جایگاه جدید $(x + y)$ خواهد بود مگر در دو حالت:

- اگر $(x + y)$ بر ۶ بخشپذیر بوده یا کمتر از ۳۶ باشد، جایگاه جدید $(x + y - 6)$ و
- اگر $(x + y)$ بزرگتر از ۶ و کمتر از ۳۶ باشد، جایگاه همان x است.

$$f(x_i) = \left\{ \begin{array}{cc} x_i & x_i < 0 \\ x_i + y & x_i + y_j > 0 \\ x_i + y_j - 6 & x_i + y_j < 6 \text{ and } \frac{(x_i + y_j)}{6} = [1,2,3,4,5,6] \\ x_i & x_i + y_j > 36 \end{array} \right\}$$

که این تابع در واقع همان $E(X_i)$ را توصیف می‌کند و $\{i{:}\, 0 \le i \le 35\}$ جایگاه و $[j{:}\, 1 \le j \le 6]$ شماره‌ی تاس است.

b

تابع مذکور را به صورت زیر پیاده می‌کنیم:

```
def func(x, y):
    if (x+y)%6 == 0 or x+y < 36:
        return x+y-6
    elif x+y > 36:
        return x
    else:
        return x+y
```

با ۱۰۰ بار رندوم تولید کردن و فراخوانی تابع، میانگین تمام این دفعات را محاسبه می‌کنیم تا مقدار مورد انتظار تعداد پرتاب حدودا ۱۷ بدست می‌آید.