تمرین چهارم

امیرحسین مهدی‌نژاد
شماره دانشجویی ۸۱۰۸۰۰۰۵۸
mahdinejad@ut.ac.ir

۱

اگر یک تاس منصفانه با ۶ وجه داشته باشیم و X را تعداد دفعاتی در نظر بگیریم که ۶ در n بار پرتاب تاس ظاهر می‌شود و p را احتمال آن در نظر بگیریم که $X \geq n/4$ می‌خواهیم بهترین کران‌های بالا را در نامساوی‌های چرنوف، چبی‌شف و مارکوف مقایسه کنیم:

- چرنوف

$$\rho = \Pr(X \geq n/4) = \Pr(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\mu\delta^2/3}$$
$$E(X) = \mu = \frac{n}{6}$$
$$(1+\delta)\mu = n/4$$
$$\delta = 1/2$$
$$\rho \leq e^{-(n/6)(1/4)/3} = e^{-n/72}$$

- مارکوف

$$\rho(X \geq t) \leq (\frac{E(x)}{t})$$
$$E(x) = E(\sum X_i) = n/6$$
$$\rho = \mathrm{P}(X \geq n/4) \leq (\frac{n/6}{n/4}) = 2/3$$

- چبی‌شف

$$\mathrm{P}(X \geq t) \leq \mathrm{P}(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{t^2}$$
$$\operatorname{var}(X) = nq(1-q)$$
$$\mathrm{P}(X \geq n/4) \leq \mathrm{P}(|X - E(X)| \geq n/4) \leq \frac{n * \frac{1}{6} * \frac{5}{6}}{(n/4)^2} = \frac{20}{9n}$$

۲

می‌خواهیم X را طوری تخمین بزنیم که

$$\Pr(|X-\rho| \le \varepsilon\rho) \succ 1-\delta$$
$$\varepsilon > 0$$
$$\delta \prec 1$$
$$\Pr(|X-\rho| \le \varepsilon\rho) \succ 1-\delta = \Pr(|nX-n\rho| \le \varepsilon\rho n) \succ 1-\delta$$

از طرفی داریم

$$\Pr(|nX-n\rho| \prec \varepsilon\rho n) \succ 1-\delta$$

و در نهایت می‌توان رابطه‌ی بالا را با رابطه‌ی زیر جایگزین کرد

$$\Pr(|nX-n\rho| \ge \varepsilon\rho n) \le \delta$$

طبق کران چرنوف:

$$\Pr(|Y-\mu| \ge \varepsilon\mu) \le 2e^{-\mu\varepsilon^2/3}$$
$$\mu = np$$
$$2e^{-\mu\varepsilon^2/3} \le \delta$$
$$\frac{3\ln\frac{2}{\delta}}{\rho\varepsilon^2} \le n$$

۳

باتوجه به صورت سوال می‌دانیم که $f(j)$ اعداد را از black box مقداردهی می‌کند و همچنین $\forall_{i<j} f(j) \neq f(j)$ لذا اگر متغیرهای تصادفی را v_i و w_i در نظر بگیریم، آنگاه احتمال آن‌ها به ازای هر I برابر است با:

$$\mathrm{P}\left[V_i = 1\right] = p_i \ge \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}\left[w_i = 1\right] = p_i \ge \frac{1}{2}$$

همچنین برای k داریم

$$V = \sum_{i=1}^{k} V_i$$
$$w = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

سپس برای همه‌ی $x > 0$ می‌توان نوشت

$$P[V \le x] \le P[W \le x]$$

با فرض اینکه $f^{(0)}$ یک ساختار black box کامل از توابع امن $\varepsilon(n)$ از $(1 - \delta(n))$ است، آنگاه نامساوی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$q \ge \Omega\left(\frac{1}{\delta}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$1 \ge n - O(\log q) + \Omega\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

از طرفی F^f یک تابع $f: \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}^n$ از $l(n)$ بیت است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P\left[A(F^f(Z)) = z' : F^f(z') = F^f(z)\right] \ge \varepsilon(4n)$$

کران چرنوف هنگامی که برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و محدود بدون توجه به توزیع آن‌ها استفاده می‌شود نامساوی Hoeffding نامیده می‌شود. در نامساوی Hoeffding در نظر می‌گیریم $x_i, \ldots, x_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند که مقادیرشان به صورت $[a, b]$ است.

با فرض اینکه X نشان‌دهنده‌ی مجموع باشد و $\mu = E[x]$ داریم:

$$P\left[X \le (1-\delta)\mu\right] \prec e^{-\frac{2\delta^2\mu^2}{n(b-a)^2}}$$

$$P\left[X \ge (1+\delta)\mu\right] \prec e^{-\frac{2\delta^2\mu^2}{n(b-a)^2}}$$

با استفاده از کران چرنوف هنگامی که مجموع n متغیر تصادفی مستقل که احتمال را می‌دهند برای هر $0 < a < \mu$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P\left[X \le \mu - a\right] \le e^{-2a^2/n}$$

لذا جایگشت از بین همه‌ی جایگشت‌ها و به طور تصادفی و یکنواخت انتخاب شده و احتمال call های جعبه‌سیاه حداقل 4n است.

۴

شبکه‌ی wrapped butterfly دارای $N = n2^n$ نود است که نودها در این شبکه به صورت n ستون و 2^n سطر سازمان‌دهی شده‌اند.

یک شبکه n-cube با استفاده از فروپاشی n ردیف از شبکه پروانه‌ای پیچیده به دست می‌آید. در الگوریتم مسیریابی تصادفی، سه فاز برای مسیریابی بسته‌ها از مبدا به مقصد وجود دارد. هنگامی که مسیر بسته داده می‌شود، مقدار موردانتظار بسته‌هایی که یال‌هایی را با این بسته به اشتراک می‌گذارند برابر n است.

در هر مرحله حداکثر یک بسته می‌تواند از یک یال عبور کند. یک بسته می‌تواند در یک نود در هر مرحله‌ی زمانی انتظار بکشد. این درحالی است که صف موجود در هر نود بدون محدودیت در نظر گرفته شده است.

کمترین میزان بسته‌هایی که برای شبکه‌ی پروانه‌ای پیچیده مورد انتظار است n^2 است، بنابراین بهترین حالت الگوریتم جایگشت مسیریابی برابر است با $\Omega\left(n^2\right)$ و خواسته‌ی سوال برقرار است.

۵

می‌خواهیم ثابت کنیم هنگامی که $X \leq (1 - \delta)\mu$ برای هر $\delta > 0$:

$$\Pr(X \leq (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)1-\delta}\right)^{\mu}$$

می‌دانیم که $x_1, \ldots, x_n$ همگی آزمایش‌های مستقل پواسن هستند به‌صورتی که $P(X_i) = p_i$ و $a_1, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی در بازه‌ی $[1, 2]$ هستند. از طرفی:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

$$\mu = E\left[X\right]$$

بر اساس نامساوی مارکوف اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آنگاه برای همه‌ی $a > 0$ داریم:

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{E\left[X\right]}{a}$$

حال اگر از این نامساوی هنگامی که $t > 0$ استفاده کنیم:

$$\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) = \Pr(e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{t(1+\delta)\mu}} \leq \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

$$\delta > 0$$

$$t = \ln(1+\delta)$$

$$\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \frac{e^{(e^{\ln(1+\delta)}-1)\mu}}{e^{(1+\delta)\mu\ln(1+\delta)}}$$

از آنجا که $e^{\ln u} = u$ می‌توان گفت

$$P(X \geq (1 + \delta)\mu) \leq \frac{e^{(1+\delta-1)\mu}}{(1+\delta)^{(1+\delta)\mu}} = \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

حال اگر $0 < \delta < 1$ همچنان t مقدار $\ln(1+\delta)$ را از آنجایی که مقدار لگاریتم بزرگتر از 0 و کوچکتر از 1 است، خواهد داشت. با استفاده از مراحل قبلی و جایگذاری مقدار t می‌توان ثابت کرد برای $0 < \delta < 1$ رابطه‌ی ذیل برقرار است:

$$\Pr\left(X \geq (1+\delta)\mu\right) = \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu}$$

۶

سیگنال $s(t)$ که توسط گیرنده دریافت می‌شود به صورت

$$s(t) = b(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i b_i(t)$$

خواهد بود. تابع $b(t)$ مقادیر 1 و 1- را می‌گیرد و هنگامی که مقدار تابع به 1 نزدیک باشد فرض می‌شود که گیرنده بیت را در زمان t=1 ارسال می‌کند، در غیر اینصورت فرض می‌شود که بیت در زمان t برابر 1- ارسال شده است.
در نظر می‌گیریم که تمام $b_i(t)$ ها متغیرهای تصادفی یکنواخت و مستقل هستند. فرض می‌کنیم X تاثیر نویز است لذا:

$$X = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n$$
$$\mu = E(X) = 0$$

سیگنال می‌تواند به‌صورت درست رمزگشایی شود اگر $|X| < 1$ باشد و احتمال خطا به صورت زیر است:

$$\Pr(\textit{receiver}\ \text{makes an error}) \leq \Pr(|x| \geq 1)$$

تابع moment generation برای هر $p_i b_i$ به صورت زیر است:

$$\mathrm{M}_{p_i b_i} = \mathrm{E}(e^{tp_i b_i}) = \frac{1}{2}(e^{tp_i} + e^{-tp_i}) = \sum_{j \geq 0} \frac{(tp_i)^{2j}}{(2j)!} \leq e^{\frac{t^2 p_i^2}{2}}$$

ضمن در نظر گرفتن

$$\sum_i p^2{}_i = J$$

$$M_x(t) \leq e^{\frac{t^2 J}{2}}$$

$$\Pr(|x| \geq 1) = 2\Pr(X \geq 1) = 2\Pr(e^{tX} \geq e^t) \leq \frac{2E\left[e^{tX}\right]}{e^t} = \frac{2M_x(t)}{e^t}$$

$$\Pr(|x| \geq 1) \leq \frac{2e^{\frac{t^2 J}{2}}}{e^t}$$

طبق کران چرنوف خواهیم داشت:

$$\Pr(|X| \geq 1) \leq \frac{2e^{\frac{t^2 J}{2}}}{e^t}\left(t = \frac{1}{J}\right) = 2e^{\frac{-1}{2J}}$$

لذا خطایی که گیرنده ممکن است در تعیین یک بیت انجام دهد برابر با $2e^{\frac{-1}{2J}}$ است.

۷

a

می‌دانیم تابع moment generating برای متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t) = E[e^{tX}]$ خواهد بود.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pe^{tk} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k e^{tk}$$
$$= \frac{p}{1-p}\left(\left(1-(1-p)e^t\right)^{-1} - 1\right)$$

که با در نظر گرفتن $p = 0.5$ داریم:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{1}{2}e^t\right)^{-1} - 1 = \frac{\frac{1}{2e^t}}{1-\frac{1}{2e^t}} = \frac{\frac{e^t}{2}}{\frac{1-e^t}{2}}$$

b

$$P(X \geq (1+\delta)2n) = P(e^{iX} \geq e^{t(1+\delta)2n}) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)2n}} = \frac{\left(\frac{e^t}{2-e^t}\right)^n}{e^{t(1+\delta)2n}}$$

کمترین مقدار عبارت فوق به ازای $t = \ln(1 + \frac{\delta}{1+\delta})$ دیده می‌شود. لذا:

$$e^t = \frac{1+2\delta}{1+\delta} \rightarrow \frac{\left(\frac{e^t}{2-e^t}\right)^n}{e^{t(1+\delta)2n}} = e^{-2t(1+\delta)n}\left(\frac{e^t}{2-e^t}\right)^n = \left(\frac{1+2\delta}{1+\delta}\right)^{-2(1+\delta)n}(1+2\delta)^n$$

c

برای عددهای ثابت $c_1, c_2 > 1$ اثبات می‌شود حد بالای عبارت بند قبل به این صورت خواهد بود:

در صورتی که $\delta \in [0, 1]$ باشد $\exp(-\delta^2 n/c_1)$ و در صورتی که $\delta > 1$ باشد $\exp(-\delta n/c_2)$ است.

۸

a

از آنجا که $f'(x) = te^{tx}$ و $f''(x) = t^2e^{tx}$ و هر دو مقدار t^2, e^x مثبت هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها نیز مثبت و در نتیجه مشتق دوم مثبت است پس تابع convex (محدب) خواهد بود.

b

با توجه به محدب بودن تابع می‌توان نوشت:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \rightarrow f(s) \leq (1-s)f(0) + sf(1)$$

$$E[f(C)] = \sum_{s\subset S} P(C = s)f(s) \le \sum_{s\subset S} P(C = s)(1 - s)f(0) + \sum_{s\subset S} P(C = s)sf(1)$$
$$= f(0)(1 - E[C]) + f(1)E[C] = f(0)(1 - p) + f(1)p = E[f(B)]$$

طبق خواسته‌ی سوال داریم:

$$E[f(C)] \le E[f(B)]$$

c

برای هر C_i که توزیع پواسون است می‌توان یک کران بالا برای $E(d^{tC_i})$ پیدا کرد و هر کران چرنوف که برای X (جمع متغیرها) برقرار باشد، برای متغیرهای تصادفی با توزیع C نیز برقرار است.

$$\Pi e^{p_i(e^t-1)} = e^{\sum_{i=1}^{n} p_i(e^t-1)} = e^{\mu(e^t-1)}$$

۹

فرض کنیم $k = \frac{n}{2}$ بنابراین آدرس گره‌ها جایی که $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ باشد به صورت $a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_k$ خواهد بود که در نیمه‌ی دوم آن به صورت دلخواه تنظیم می‌شود یعنی اگر $b_1 b_2 \cdots b_k = 00 \cdots 0$ در نظر بگیریم، تعداد 2^n گره به شکل $a_1 a_2 \cdots a_k 00 \cdots 0$ وجود دارند که هرکدام یک بسته می‌فرستند به طوری که یک آدرس منبع که k بیت آخر آن روی صفر تنظیم شده و یا یک آدرس منبع که k بیت اول را روی صفر تنظیم کرده است.

بنابراین الگوریتم که k بیت اول را فیکس کرد هرکدام از این بسته‌ها در یک گره با آدرس صفر قرار می‌گیرند و دقیقا نیمی از بسته‌ها یعنی آن‌هایی که $a_1 = 1$ دارند وقتی که بیت بعدی فیکس شد به گره $0 \cdots 01 \cdots 00$ منتقل می‌شوند که حالا تعداد 2^{k-1} عدد از این بسته‌ها وجود دارد بنابراین حداقل $2^{k-1} = \frac{\sqrt{n}}{2}$ بسته روی یال‌ها بین نود $0 \cdots 00$ و $0 \cdots 10 \cdots 00$ حرکت می‌کنند که نیاز به $\Omega(\sqrt{n})$ گام دارد.

۱۰

a

احتمال آنکه میانگین یک نمونه n/2 باشد:

$$\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} = \frac{n!}{(n/2)!^2\, 2^n} \approx \frac{\sqrt{2\Pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\Pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n 2^n} = \sqrt{\frac{2}{\Pi n}} = \Theta\left(1/\sqrt{n}\right).$$

مشخص است که دیگر خروجی‌ها احتمال‌های کمتری دارند. بنابراین حدود مقادیر در $n/2 \pm c\sqrt{n}$ احتمال $O(c)$ را خواهد داشت. پس با انتخاب مناسب ثابت، می‌توان به مقدار احتمال دلخواه خارج از این حدود رسید.

b

$$\begin{aligned}&universe\ \mathrm{U}=\{1,....n\}\\&\text{subsets } \mathrm{S}_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq U\\&partition\ \mathrm{P} \subset \mathrm{U}\end{aligned}$$

می‌گوییم که یك افراز برای S_i خوب است هنگامی که انحراف در S_i حداکثر $2/3c\sqrt{n}$ باشد.

زیرمجموعه را به این صورت انتخاب می‌کنیم: قرار می‌دهیم $S_1 = U$ و باقی S_i هارا به صورت رندوم و مستقل انتخاب می‌کنیم که احتمال شامل شدن هر عنصر در آن برابر با 1/2 باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که یك انتخاب از مجموعه‌ها وجود دارد به صورتی که هیچ افرازی برای آن مناسب نیست. با استفاده از متدهای احتمالاتی این مقدار به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Pr_{\bar{S}}\left[\exists \text{ good partition P for } \bar{S}\right] < 1$$

$$\Pr_{\bar{S}}\left[\exists \text{ good partition P for } \bar{S}\right] \le \sum_{P} \Pr_{\bar{S}}\left[P \text{ is good for } \bar{S}\right] = \sum_{p} \prod_{i=1}^{n} \Pr_{\bar{S}}\left[P \text{ is good for } \mathrm{S}_i\right]$$

با توجه به اجتماع و استقلال S_iها، P را در رابطه‌ی زیر ثابت در نظر می‌گیریم و تخمین می‌زنیم:

$$\prod_{i=1}^{n} \Pr_{\bar{S}}\left[P \text{ is good for } \mathrm{S}_i\right]$$
$$\mathrm{S}_1 = U$$

این مقدار تنها در شرایطی غیر صفر است که:

$$|P| \in \left[n/2 - c\sqrt{n}/3, n/2 + c\sqrt{n}/3\right]$$

از آن جایی که P در غیر اینصورت باید S_1 را به‌صورت نامساوی تقسیم کند در ادامه P را در این حدود فرض می‌کنیم.
زیرمجموعه‌های S_i را برای $i \ge 2$ و همچنین X, Y, Z را متغیرهای تصادفی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&X = |S_i \cap P|\\&Y = |S_i \cap \bar{P}|\\&Z = |\bar{S}_i \cap \bar{P}|\\&Y + Z = n - |p|\end{aligned}$$

$$1 - \Pr\left[p \text{ is good for } S_i\right] = \Pr\left[|X - Y| \ge \frac{2}{3}c\sqrt{n}\right]$$

$$= \Pr\left[|X + Z - n + |p|| \ge \frac{2}{3}c\sqrt{n}\right]$$

$$= \Pr\left[X + Z - n + |p| \ge \frac{2}{3}c\sqrt{n}\right] + \Pr\left[X + Z - n + |p| \le \frac{-2}{3}c\sqrt{n}\right]$$

$$= \Pr\left[| X + Z - n/2 | \geq c\sqrt{n} \right] \geq \frac{3}{4}$$

احتمال آن‌که P برای S_i خوب باشد حداکثر 1/4 است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Pr_{\bar{S}}\left[\exists \text{ good partition P for } \bar{S} \right] \leq \sum_{p} \prod_{i=1}^{n} \Pr_{\bar{S}}\left[P \text{ is good for } S_i \right] \leq 2^n . \frac{1}{4^{n-1}} \prec 1$$

که وجود زیرمجموعه‌های مطلوب برای مقادیر به‌اندازه‌ی کافی بزرگ n را ثابت می‌کند.

۱۱

a

با فرض اینکه d حداکثر مسافت طی شده هر بسته باشد و c حداکثر تعداد بسته‌هایی باشد که از یک یال در طول مسیر عبور کند، از آنجا که زمان مورد نیاز برای هر برنامه حداقل $\Omega(c + d)$ است، می‌توان گفت:
بسته‌ای وجود خواهد داشت که فاصله‌ی d را طی کند و واضح است که اندازه‌ی حداقل d گام تا مقصد فاصله دارد لذا اگر طول آن برنامه را T فرض کنیم، حتما $T \geq d$ خواهد بود. از آنجا که در هر واحد زمانی فقط یک بسته می‌تواند از یالی مثل e با تراکم c عبور کند باید برای همه c بسته‌ای که از e عبور می‌کنند زمان‌شان در نظر گرفته شود پس $T \geq c$ است و در نتیجه

$$T \geq \max\{c, d\} = \Omega(c + d)$$

b

به هر بسته تاخیری به صورت تصادفی، یکنواخت و مستقل در بازه‌ی $[1, \frac{\alpha c}{\log(nd)}]$ تخصیص می‌دهیم که α ثابت است. یک بسته با میزان تاخیر x به مدت x واحد در گره منبع منتظر می‌ماند و بعد از آن از طریق مسیر مشخص خودش بدون اینکه توافقی صورت گیرد به مقصد نهایی خواهد رفت. لذا احتمال اینکه بیش از $O(\log(Nd))$ عدد بسته از یک یال مشخص مثل e در واحد زمانی t استفاده کند را $\frac{1}{\frac{\alpha c}{\log(Nd)}}$ در نظر می‌گیریم.
از طرفی احتمال اینکه بعضی از بسته‌های $\log(Nd)$ در لحظه‌ی t از یال e عبور کنند برابر با $p^{\log(Nd)}$ خواهد شد و می‌دانیم حداکثر c بسته از طریق این یال می‌توانند عبور داده شوند لذا کران بالای احتمال آنکه $\log(Nd)$ بسته در t از یال e عبور کنند $\binom{c}{\log(Nd)} p^{\log(Nd)}$ خواهد بود.

c

از آنجا که هر بسته حداکثر از d یال متمایز می‌تواند استفاده کند، لذا تعداد کل یال‌های مورد استفاده همان‌طور که می‌دانیم Nd است و همچنین تعداد کل مراحل زمانی $\frac{\alpha c}{\log(Nd)} + d$ خواهد بود. با توجه به شرایط مسئله می‌توانیم مرز واحد را روی همه‌ی یال‌های e که در مراحل زمانی t استفاده می‌شوند در نظر بگیریم و در این صورت احتمال اینکه t, e وجود داشته باشند به گونه‌ای که بیشتر از $5\log(Nd)$ بسته در زمان t از یال e استفاده کنند حداکثر برابر $\frac{Nd \times 2Nd}{(Nd)^3} \leq \frac{n}{2}$ خواهد بود و با احتمال $1 - O(\frac{1}{n})$ این اتفاق خواهد افتاد.

d

با گسترش هر گام زمانی به گام‌های $\log(Nd)$ در یک برنامه نامحدود می‌توانیم آن را به برنامه‌ی محدود تبدیل کنیم و با احتمال بالایی بیشتر از $\log(Nd)$ از یک یال مانند e عبور نخواهند کرد. لذا از آنجا که در برنامه‌ی نامحدود، اکثر بسته‌های s هر یال خاصی را در یک گام طی می‌کنند، همه‌ی این بسته‌ها می‌توانند این یال را در گام‌های زمانی s در زمان‌بندی واقعی بدون نقض این محدودیت که "حداکثر یک بسته از یک یال در هر واحد زمانی عبور می‌کند" طی کنند.

از طرفی طول یک زمانبندی نامحدود حداکثر برابر با $d + \frac{\alpha c}{\log(Nd)}$ است و در نتیجه طول زمانبندی جدید حداکثر برابر با $(\frac{\alpha c}{\log(Nd)} + d)\log(Nd) = \alpha c + d\log(Nd)$ خواهد بود که از مرتبه $O(c + d\log(Nd))$ است. هنگامی که یک بسته از یک یال عبور می‌کند، در انتهای دیگر یال تا واحد زمانی بعدی در برنامه نامحدود منتظر می‌ماند.

لذا به صف‌هایی با اندازه $O(\log(Nd))$ برای پیاده‌سازی این برنامه نیاز داریم که طول برنامه نامحدود برابر با $d + \frac{\alpha c}{\log(Nd)}$ شده و طول برنامه واقعی یعنی $O(c + d\log(Nd))$ چند برابر آن خواهد بود.