تمرین ششم

امیرحسین مهدی‌نژاد
شماره دانشجویی ۸۱۰۸۰۰۰۵۸
mahdinejad@ut.ac.ir

۱

به صورت تصادفی یک رنگ‌آمیزی با دو رنگ ارائه می‌دهیم. اگر E_i پیشامد کلیک تک‌رنگ بودن iامین k-مجموعه باشد، داریم:

$$P(E_i) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

اشتراک دو k-کلیک، ماکزیمم یک راس خواهد بود. برای هرکدام $\binom{n}{k-2}\binom{k}{2}$ کلیک وجود دارد که حداقل در دو راس مشترک باشند. اگر گراف وابستگی‌های D را برای همه‌ی E_iها بسازیم، درجه هر گره در D را می‌توان به این‌صورت مشخص کرد:

$$d = \binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$$

از طرفی

$$4\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}2^{1-\binom{k}{2}} \leq 1$$

می‌توانیم لم Lovasz Local را اعمال کرده و نشان دهیم یک رنگ‌آمیزی وجود دارد به طرزی که هیچ E_iای رخ ندهد. در این رنگ‌آمیزی، خواسته‌ی مسئله برقرار است.

۲

به لیترال‌ها به ترتیب $x_1, x_2, \dots, x_n$ و به صورت معیّن مقدار می‌دهیم. با فرض اینکه اولین kتا را مقداردهی کرده باشیم و این مقادیر $y_1, y_2, \dots, y_k$ باشند، خواهیم داشت:

$$E\left[N_c | x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_k = y_k, x_{k+1} = T\right]$$

$$E\left[N_c | x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_k = y_k, x_{k+1} = F\right]$$

در نهایت بیشترین امید ریاضی را در نظر می‌گیریم.

۳

$$E(X) = E\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right) = \sum_{k=0}^{n} E\left(X_k\right)$$

با توجه به اینکه X_k فقط شامل مقادیر ۰ یا ۱ است، داریم:

$$E(X_k) = P(X_k = 1) = \frac{f_k}{\binom{n}{k}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n} E(X_k) = E(X) \le 1$$

برای هر پادزنجیره‌ی F با یک n ثابت، ضریب دوجمله‌ای در $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ بیشینه می‌شود. لذا:

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{k=0}^{n} f_k \le \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \le 1$$

$$\Rightarrow |F| = \sum_{k=0}^{n} f_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

که همان خواسته‌ی سوال است.

۴

لم Lovasz Local بیان می‌کند که اگر $E_1, \ldots, E_n$ مجموعه اعداد زوج باشد، برای همه‌ی iها $P(E_i) \le p$، درجه‌ی گراف وابستگی‌ها روی این مجموعه با d و $4dp \le 1$ محدود می‌شود.

در صورتی که پیشامدهای بد به مقادیر جزئی وابسته باشند یا میزان وقوع آن‌ها بیشتر باشد نیز می‌توان لم مذکور را اعمال کرد.

از آنجا که $ep(d + 1) \le 1$ می‌توان گفت $x_i = \frac{1}{d+1}$ لذا:

$$x_i \prod_{(i,j)\in E} (1 - x_j) \ge \left(\frac{1}{d+1}\right)\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d$$

$$\ge ep\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d$$

$$= ep\left(\frac{d}{d+1}\right)^d$$

$$= \frac{ep}{\left(1+\frac{1}{d}\right)^d}$$

$$\Rightarrow x_i \prod_{(i,j)\in E} (1 - x_j) \ge ep\left(\frac{1}{e}\right) = p$$

از طرفی با توجه به $P(E_i) \le p$ برای هر E_i با داشتن $P(E_i) \le x_i \prod_{(i,j)\in E} (1 - x_j)$ و اعمال کردن لم، نتیجه می‌گیریم احتمال اینکه هیچ پیشامد بدی رخ ندهد، بیشتر از صفر خواهد بود.

از این رو، ورژن مقارن لم Lovasz Local در صورتی که شرط $ep(d+1)\leq 1$ را جایگزین $4dp\leq 1$ کنیم، بهبود می‌یابد.

۵

(در این سوال بخاطر کوچک بودن مقداری مثل x می‌توان از تقریب $1-x\approx e^{-x}$ استفاده کرد.)

احتمال جدا شدن یک راس (هیچ یالی مجاور آن نباشد) برابر است با

$$\left(1-\frac{c\ln n}{n}\right)^{n}\approx e^{-c\ln n}=n^{-c}$$

وقتی n به مقدار کافی بزرگ است، تعداد رئوس جدا شده تقریبا n^{1-c} و برای $c<1$ به میزان قابل توجهی از ۱ بیشتر است.

اگر راس i ایزوله باشد، $X=X_i$ را یک و در غیر این‌صورت صفر در نظر می‌گیریم. با داشتن $P\left(X_i=1\right)\approx n^{-c}$ محاسبه می‌کنیم:

$$E\left[X|X_i=1\right]=1+\sum_{j\neq i}P\left(X_j=1|X_i=1\right)$$

$$P\left(X_j=1|X_i=1\right)=\left(1-\frac{c\ln n}{n}\right)^{n-1}\approx n^{-c}$$

برای nهای به قدر کافی بزرگ:

$$P(X>0)\geq\frac{n^{1-c}}{1+(n-1)n^{-c}}\geq 1-\varepsilon$$

مقدار حداقل $1-\varepsilon$ همان خواسته‌ی سوال است.

---

۶ الف:

گراف $G_{n,p}$ با n راس و هر راس جداگانه با یک یال با احتمال p به یکدیگر متصل‌اند. دنباله‌ی $t_1,\ldots,\ldots,t_{\binom{n}{3}}$ را به عنوان تمام سه‌تایی‌های گراف در نظر می‌گیریم. اگر t_i در گراف به صورت یک مثلث ظاهر شود $X_i=1$ و در غیر این‌صورت $X_i=0$ و همچنین $X=\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}}X_i$ قرار می‌دهیم.

از طرفی $p=\omega\left(n^{-3/4}\right)$ یک حد بالا برای مثلث داشتن $G_{n,p}$ است. با مشتق گرفتن از آن برای گراف با ۴ کلیک، امید ریاضی X بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$E[X]=\Theta\left(n^{k}p^{2k-2}\right)$$

$$k=3\rightarrow E[X]=\Theta\left(n^{3}p^{4}\right)$$

ب:

از بند قبل داریم $E[X] = \Theta\left(n^3 p^4\right)$ و می‌توان گفت

$$P(X > 0) \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{P\left(X_i = 1\right)}{E\left[X|X_i = 1\right]} \to 0$$

در نتیجه

$$E\left[X|X_j = 1\right] = \sum_{i=1}^{(n)} E\left[X_i|X_j = 1\right]$$
$$= 1 + \binom{n-4}{4} p^6 + 4\binom{n-4}{3} p^6 + 6\binom{n-4}{2} p^5 + 4\binom{n-4}{1} p^3$$
$$\Rightarrow P(X > 0) \geq \frac{\binom{n}{4}}{1 + \binom{n-4}{4}p^6 + 4\binom{n-4}{3}p^6 + 6\binom{n-4}{2}p^5 + 4\binom{n-4}{1}p^3}$$

از طرفی $E[XY] = P(X > 0)$ که با جایگذاری $X^2 = X$ و $Y = 1/X$ می‌توان نوشت

$$E[X] = P(X > 0)$$

لذا وقتی $np \to 0$ در نتیجه $P(X > 0) \to 0$ پس وقتی امید ریاضی به صفر میل می‌کند، احتمال نیز به صفر میل خواهد کرد.

پ:

$$P(X < 0) \leq \frac{Var[X]}{E[x]^2} \Rightarrow Var\left[X_i\right] \leq p^3$$

۷

هر یال را به صورت $e = \{u, v\}$ و رنگ را با توجه به اینکه هیچ دو راس مجاوری که رنگ مشترک در لیست‌هایشان دارند نباید آن را انتخاب کنند به صورت $c \in C(v) \cap C(u)$ در نظر می‌گیریم؛ اگر $X(e, c)$ پیشامد تخصیص رنگ c به رئوس v و u باشد، بدین صورت، پیشامد مناسب بودن رنگ‌آمیزی تقاطع پیشامدهای $\neg X(e, c)$ است. برای هر یال اگر c در لیست هر دو سر آن وجود نداشته باشد، احتمال رخداد $X(e, c)$ صفر است؛ از طرفی احتمال اینکه هر $X(e, c)$ رخ بدهد $p = 1/(10k)^2 = 1/\left(100k^2\right)$ خواهد بود.

اگر e' مجاور e باشد، هر $X(e, c)$ به $X(e',\ c')$ بستگی دارد. برای هر رنگ در $C(u)$ حداکثر k حالت و همچنین فقط $10k^2$ حالت در مجاورت u می‌توان داشت و به طریق مشابه برای v نیز ممکن است؛ پس هر $X(e,\ c)$ حداکثر به $d = 20k^2 - 1$ متغیرهای دیگر وابستگی دارد.

لذا می‌توانیم لم محلی را با مقادیر $p = 1/(10k)^2 = 1/(100k^2)$ و $d + 1 = 20k^2$ اعمال کنیم. بنابراین $ep(d + 1) = e/5 < 1$ و احتمال اینکه هیچ $X(e, c)$ رخ ندهد بزرگتر از صفر خواهد بود. نتیجه می‌شود حتما یک لیست رنگ‌آمیزی وجود دارد به طوری که $X(e, c)$ رخ ندهد.

۸

بجای ۴-کلیک مطرح شده در کتاب، ۵-کلیک را در نظر می‌گیریم. برای هر مجموعه kراسی C_i که در آن X_i ($1 \le i \le \binom{n}{k}$) پیشامد ۵-کلیک بودن C_i بوده و $p = f(n) = o\left(n^{-2/4}\right)$ است. لذا داریم:

$$X = \sum_{i=1}^{\binom{n}{5}} X_i \Rightarrow E[X] = \binom{n}{5} p^{10}$$

از طرفی $E[X] = o\left(n^5\right) \cdot o\left(n^{-5}\right) = o(1)$ لذا برای nهای بزرگ $E[X] < \epsilon$ و از این رو $P[X \ge 1] \le E[X] < \epsilon$ یعنی احتمال اینکه زیرگرافی از $G_{n,p}$ دارای ۵-کلیک باشد از ϵ کمتر است. می‌دانیم:

$$E\left[X | X_j = 1\right] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{5}} E\left[X_i | X_j = 1\right]$$

اگر c_i و c_j دو راس مشترک داشته باشند، $\binom{5}{2}$ راه وجود دارد که بتوانیم دو راس مشترک و $\binom{n-5}{3}$ راه وجود دارد که باقی رئوس را انتخاب کنیم. باید ۹ یال جدید اضافه کنیم تا شرایط $X_i = 1,\ X_j = 1$ برقرار شود.

$$P[X < 0] \ge \frac{\binom{n}{5} p^{10}}{1 + \binom{n-5}{5} p^{10} + 5\binom{n-5}{4} p^{10} + 10\binom{n-5}{3} p^{9} + 10\binom{n-5}{2} p^{7} + 5\binom{n-5}{1} p^{4}}$$

ضمن در نظر گرفتن $p = f(n) = \omega\left(n^{-1/2}\right)$ وقتی $n \to \infty$، این مقدار از پایین به ۱ نزدیک می‌شود.