Spis treści

1 Wykład 2

1.1 Wektory styczne i kowektory

a) Wektor styczny w punkcie to odwzorowanie

$$C^\infty(M) \ni f \mapsto v(f) \in \mathbb{R},$$

spełniające

- liniowość $v(af + bh) = av(f) + bv(h)$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Leinbniz $v(fh) = f(p)v(h) + v(f)h(p)$

TODOFig1

Pozostaje pytanie jak to wygląda w lokalnych mapach. Rozważmy mapę φ i różniczkowanie w punkcie $p \in U$, gdzie U jest dziedziną mapy φ. Wtedy dla wektora stycznego $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} : f \longmapsto \left(v^k \frac{\partial}{\partial x^k}(f \circ \varphi^{-1}) \right)(x^1(p), \dots, x^n(p)). \tag{1.1}$$

Co więcej, każdy wektor styczny daje się zapisać w tej postaci. Dodatkowo, jeśli mamy atlas to wszystkie wektory wyrażają się w ten sposób (to znaczy, że nie musimy szukać nowej mapy dla każdego z wektorów stycznych).

Ogólnie. Jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem stycznym w $p \in M$ do M, a $M \supset U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ to istnieją $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$, takie, że $v(f)$ wyraża się poprzez

$$v(f) = \left(v^k \frac{\partial}{\partial x^k} f \circ \varphi^{-1} \right)(\varphi(p)).$$

TODOFig2

Zwyczajowo stosuje się notację uproszczoną

$$\mathbf{v} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

ALE do tego musimy pamiętać, że to w lokalnym układzie współrzędnych. Ma to konsekwencje np. jak mamy „drugą” pochodna tj. różniczkowanie raz po x^i, a raz po y^i, gdzie x, y to współrzędne w różnych mapach.

Wektor styczny jest także związany z krzywymi na rozmaitości. Rozważmy krzywą γ przechodzącą przez punkt p

$$\gamma : \tau \mapsto x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau), \quad (x^1(0), \ldots, x^n(0)) = \varphi(p)$$

$$\frac{\mathrm{d} f \circ \varphi^{-1}}{\mathrm{d}\tau}(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau)) = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})|_{x(p)}$$

Zauważmy, że różne funkcje mogą spełniać tę relację. Wniosek: wektor styczny w P do M to klasa równoważności krzywych takich, że

$$\frac{\mathrm{d}f(p(\tau))}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0} = \frac{\mathrm{d}f(q(\tau))}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0},$$

oraz $p(0) = q(0)$.

TODOFig3

c) Prawo transformacji Żeby nie pisać cały czas

$$(y^1, \ldots, y^n) = (\varphi' \cdot \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n),$$

gdzie y^i to współrzędne w mapie φ', a x^i to współrzędne w mapie φ, będziemy pisać po prostu

$$y^k = y^k(x^1, \ldots, x^n).$$

Przy tej konwencji zamiana współrzędnych ma postać

$$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = \underbrace{v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}}_{=:(v')^i}.$$

Wniosek: jeśli $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (v')^l \frac{\partial}{\partial (x')^l}$ to wtedy $(v')^l = \frac{\partial (x')^l}{\partial x^k} v^k$.

Przestrzeń wekorów stycznych do M w punkcie $p \in M$ nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez T_pM.

Lemma 1.1.1. *T_pM jest przestrzenią wektorową, czyli, jeśli $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ to $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in T_pM$ dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$.*

Wniosek: Bazę w przestrzeni T_pM tworzą wektory $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ gdzie $(x^1, \ldots, x^n)$to dowolny układ współrzędnych.

d) kowektory Kowektorem jest element przestrzeni dualnej T_p^*M.

Example 1.1.2. Niech $f \in C^\infty(M)$, zdefiniujmy

$$T_pM \ni v \mapsto v(f) \in \mathbb{R}.$$

Oznaczamy je $\mathrm{d}f$ i nazywamy różniczką funkcji f. Czyli $v \lrcorner \mathrm{d}f = v(f)$, tylko teraz patrzymy na to w ten sposób, że f jest stałe, a v się zmienia.

Lemma 1.1.3. *Dla każdego $\omega \in T_p^*M$ istnieją funkcje $f^1, \dots, f^n \in C^\infty(M)$ oraz współczynniki $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$\omega = \omega_i \mathrm{d}f^i.$$

Niech $(x^1, \dots, x^n)$ będzie układem współrzędnych. Rozważmy

$$\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i. \tag{1.2}$$

Lemma 1.1.4. *Wszystkie $\omega \in T^*M$ są postaci 1.2.*

Dowód.

$$v \lrcorner \omega = (v^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \lrcorner \omega = v^k (\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega) = \omega_k v^k = (v^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \lrcorner (\omega_l \mathrm{d}x^l).$$

□

Prawo transformacji Przestrzenie dualne zawsze transformują się macierzą odwrotną. Explicité wzór

$$\mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \mathrm{d}(x')^k$$

$$(\omega')_k = \frac{\partial x^i}{\partial (x')^k} \omega_i$$

1.2 Tensory

Rozważmy przestrzenie wektorowe V, W. Dla $v \in V$, $w \in W$ wprowadzamy

$$vw.$$

Rozważmy formalnych kombinacji liniowych elementów $(v, w) \in V \times W$. Są one postaci

$$a_1(v_1, w_1) + \dots + a_\mu(v_\mu, w_\mu), \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

Zdefiniujmy relację równoważności

$$(av + bv', w) \sim a(v, w) + b(v', w)$$

(analogicznie dla drugiej współrzędnej) oraz

$$(0, w) \sim (0, 0) \sim (v, 0).$$

Iloczyn tensorowy przestrzeni V, W definiuje się jako

$$V \otimes W = \{[(v,w)] = (v,w)/\sim |v \in V, w \in W\},$$

gdzie $\sim$ jest zdefiniowaną wyżej relacją równoważności.

Piszemy np.

$$v \otimes w = v^a w^b \frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}, \quad T = T^{ab}\frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

2 Wykład 3

2.1 Tensorowe, formy różniczkowe, gęstości

Iloczyn tensorowy Przykład
$$T_p^*M \otimes T_p^*M.$$
Jest to przestrzeń odwzorowań biliniowych
$$T_p^*M \otimes T_p^*M \ni L : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$
$$T_pM \otimes T_pM \ni L : T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R},$$
itp.

Wprowadzamy oznaczenie
$$\bigwedge^N T_p^*M \subset (T_p^*M)^{\otimes n}.$$

Formy różniczkowe są całkowicie antysymetryczne, czyli dla $\omega \in \bigwedge^N(T_p^*M)$ spełnia
$$\omega(v_1,\dots v_k,\dots,v_l\dots,v_n) = -\omega(v_1,\dots v_l,\dots,v_k\dots,v_n).$$

Własności

1. dla $N > \dim M$, $\bigwedge^N(T_p^*M) = \{0\}$
2. dla $N = \dim M$, $\dim \bigwedge^N(T_p^*M) = 1$.

Niech $e^1,\dots,e^n \in T_p^*M$,
$$e^a \wedge e^b := e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a,$$
a dla
$$e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_l} = \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} e^{a_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e^{a_{\sigma(l)}}}.$$

Matematyczny zapis
$$\bigwedge^k T_p^*M \ni \omega = \omega_{a_1,\dots,a_k} e^{a_1} \otimes \cdots \otimes e^{e_k} = \frac{1}{k!}\omega_{a_1,\dots,a_k} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{e_k}.$$

Zapis fizyczny dla $\alpha \in \bigwedge^k T^*M, \beta \in \bigwedge^l T^*M$ mamy

$$\alpha \wedge \beta = \left(\frac{1}{k!}\alpha_{a_1,\ldots,a_k} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_n}\right) \wedge \left(\frac{1}{l!}\beta b_1, \ldots, b_l e^{b_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_l}\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{1}{l!}\alpha_{a_1,\ldots,a_k}\beta b_1, \ldots, b_l e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \wedge e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_l}$$

Mamy także iloczyn wewnętrzny, zwany też zwężeniem lub kontrakcją:

$$v \lrcorner \omega = \frac{1}{(k-1)!} v^{a_1} \omega_{a_1,\ldots,a_k} e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_k}.$$

Własność:

$$v \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (v \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (v \lrcorner \beta).$$

2.2 Gęstości

Rozpocznijmy od rozważenia symbolu Levi-Civity. Zauważmy, że nie jest on tensorem. Jeśli by był to znaczy, że transformowałby się jak tensor, a tego nie robi (mnoży się razy $\det A$) gdzie $A \in GL(M)$. W fizyce tego nie widać, bo stosujemy transformacje z $SL(M)$, czyli ten wyznacznik daje 1.

Jest ważne żeby nie trakotować formy maksymalnego wymiaru jako funkcji — wynika to stąd, że nie jest ona niezmiennicza przy zamianie współrzędnych. Obiekt który przy zamianie współrzędnych z $\{e^i\}$ na $\{f^i\}$ transformuje się jak

$$f(p) \mapsto \det A(p) f(p)$$

nazywamy pseudogęstością. Jeśli w powyższym wzorze damy $|\det A|$ zamiast $\det A$ to dostaniemy gęstość. Żeby być całkowicie poprawnym to

Definition. Niech $p \in M$ będzie punktem rozmaitości, a $\mathfrak{b}$ będzie dowolną bazą w przestrzeni stycznej. Odwzorowanie które parze $(p, \mathfrak{b})$ przyporządkowuje liczbę z $\mathbb{R}$, a po zmianie współrzędnych transformuje sią jak

$$\rho(p, A\mathfrak{b}) = |\det A|^\alpha \rho(p, \mathfrak{b})$$

nazywamy α-gęstością.

2.3 Pola tensorowe i operacje

a) Pole wektorowe Polem wektorowym na rozmaitości różniczkowej M nazywamy gładkie odwzorowanie

$$M \ni p \mapsto v \in T_pM,$$

jeśli odwzorowanie to jest gładkie. Gładkość oznacza, że w lokalnym układzie współrzędnych, w którym $TM|_U$ można zapisać jako $U \times \mathbb{R}^n$ odwzorowanie

$$U \ni p \mapsto v \in \mathbb{R}^n$$

jest gładkie. W lokalnym układzie współrzędnych pola wektorowe można zapisywać jako

$$v = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Dodatkowo mamy nawias pól wektorowych dany poprzez

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)),$$

a w układzie współrzędnych

$$[v, w] = \left(v^a \frac{\partial w^b}{\partial x^a} - w^a \frac{\partial v^b}{\partial x^a} \right) \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

Pola tensorowe Każde pole tensorowe można wyrazić przy pomocy iloczynów tensorowych (i ich kombinacji liniowych) pól wektorowy i jednoform.

Pochodna Liego pola wektorowego Niech $v, w \in \mathfrak{X}(M)$. Wówczas pochodną Liego pola wektorowego w w kierunku pola v nazywamy

$$\mathcal{L}_v w := [v, w].$$

Niech $f \in C^\infty(M)$. Wówczas pochodną Liego funkcji f w kierunku pola v nazywamy

$$\mathcal{L}_v f := v(f).$$

Podobnie

$$\mathcal{L}_v(\mathrm{d}f) := \mathrm{d}(\mathcal{L}_v f).$$

Dodatkowo wymagamy, żeby pochodna Liego spełniała regułę Leibniza

$$\mathcal{L}_v(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_l) = (\mathcal{L}_v(v_1)) \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_l + \ldots.$$

Z tego już wynika działanie pochodnej Liego na dowolne pole wektorowe.

Przykład Niech

$$L = L_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b, \quad v = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Wtedy

$$\mathcal{L}_v L = \mathcal{L}_v(L_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b) = v(L_{ab}) \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab}(\mathrm{d}v(x^a)) \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes v(x^b)$$

$$= v(L_{ab}) \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab} \frac{\partial v^a}{\partial x^c} \mathrm{d}x^c \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab} \frac{\partial v^b}{\partial x^c} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^c.$$

Przykład 2

$$\mathcal{L}_v \frac{\partial}{\partial x^b} = -\frac{\partial v^a}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Lemma 2.3.1.

$$\mathcal{L}_v(w^a \alpha_a) = (\mathcal{L}_v w)^a \alpha_a + w^a (\mathcal{L}_v \alpha)_a.$$