Wykład 2

1 Wektory styczne i kowektory

a) Wektor styczny w punkcie to odwzorowanie

$$C^\infty(M) \ni f \mapsto v(f) \in \mathbb{R},$$

spełniające

- liniowość $v(af + bh) = av(f) + bv(h)$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Leinbniz $v(fh) = f(p)v(h) + v(f)h(p)$

Pozostaje pytanie jak to wygląda w lokalnych mapach. Rozważmy mapę φ i różniczkowanie w punkcie $p \in U$, gdzie U jest dziedziną mapy φ. Wtedy dla wektora stycznego $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} : f \longmapsto \left(v^k \frac{\partial}{\partial x^k}(f \circ \varphi^{-1}) \right) (x^1(p), \ldots, x^n(p)). \tag{1}$$

Co więcej, każdy wektor styczny daje się zapisać w tej postaci. Dodatkowo, jeśli mamy atlas to wszystkie wektory wyrażają się w ten sposób (to znaczy, że nie musimy szukać nowej mapy dla każdego z wektorów stycznych). Ogólnie. Jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem stycznym w $p \in M$ do M, a $M \supset U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ to istnieją $v^1, \ldots, v^n \in \mathbb{R}$, takie, że $v(f)$ wyraża się poprzez

$$v(f) = \left(v^k \frac{\partial}{\partial x^k} f \circ \varphi^{-1} \right) (\varphi(p)).$$

TODOFig2

Zwyczajowo stosuje się notację uproszczoną

$$\mathbf{v} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

ALE do tego musimy pamiętać, że to w lokalnym układzie współrzędnych. Ma to konsekwencje np. jak mamy „drugą" pochodna tj. różniczkowanie raz po x^i, a raz po y^i, gdzie x, y to współrzędne w różnych mapach.

Wektor styczny jest także związany z krzywymi na rozmaitości. Rozważmy krzywą γ przechodzącą przez punkt p

$$\gamma : \tau \mapsto x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau), \quad (x^1(0), \ldots, x^n(0)) = \varphi(p)$$

$$\frac{\mathrm{d} f \circ \varphi^{-1}}{\mathrm{d}\tau}(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau)) = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})|_{x(p)}$$

Zauważmy, że różne funkcje mogą spełniać tę relację. Wniosek: wektor styczny w P do M to klasa równoważności krzywych takich, że

$$\frac{\mathrm{d}f(p(\tau))}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0} = \frac{\mathrm{d}f(q(\tau))}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0},$$

oraz $p(0) = q(0)$.

TODOFig3

c) Prawo transformacji Żeby nie pisać cały czas

$$(y^1, \dots, y^n) = (\varphi' \cdot \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n),$$

gdzie y^i to współrzędne w mapie φ', a x^i to współrzędne w mapie φ, będziemy pisać po prostu

$$y^k = y^k(x^1, \dots, x^n).$$

Przy tej konwencji zamiana współrzędnych ma postać

$$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = \underbrace{v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}}_{=:(v')^i}.$$

Wniosek: jeśli $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (v')^l \frac{\partial}{\partial (x')^l}$ to wtedy $(v')^l = \frac{\partial (x')^l}{\partial x^k} v^k$.

Przestrzeń wekorów stycznych do M w punkcie $p \in M$ nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez T_pM.

Lemma 1.1. *T_pM jest przestrzenią wektorową, czyli, jeśli $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ to $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in T_pM$ dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$.*

Wniosek: Bazę w przestrzeni T_pM tworzą wektory $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ gdzie $(x^1, \dots, x^n)$to dowolny układ współrzędnych. Dla każdego $\omega \in T_p^*M$ istnieją funkcje $f^1, \dots, f^n \in C^\infty(M)$ oraz współczynniki $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\omega = \omega_i \mathrm{d} f^i.$$

Niech $(x^1, \dots, x^n)$ będzie układem współrzędnych. Rozważmy

$$\omega = \omega_i \mathrm{d} x^i. \tag{2}$$

Lemma 1.2. *Wszystkie $\omega \in T^*M$ są postaci 2.*

Dowód.

$$v \lrcorner \omega = (v^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \lrcorner \omega = v^k (\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega) = \omega_k v^k = (v^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \lrcorner (\omega_l \mathrm{d} x^l).$$

□

Prawo transformacji Przestrzenie dualne zawsze transformują się macierzą odwrotną. Explicité wzór

$$\mathrm{d} x^k = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \mathrm{d}(x')^k$$

$$(\omega')_k = \frac{\partial x^i}{\partial (x')^k} \omega_i$$

2 Tensory

Rozważmy przestrzenie wektorowe V, W. Dla $v \in V$, $w \in W$ wprowadzamy

$$v \otimes w.$$

Rozważmy formalnych kombinacji liniowych elementów $(v, w) \in V \times W$. Są one postaci

$$a_1(v_1, w_1) + \cdots + a_\mu(v_\mu, w_\mu), \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

Zdefiniujmy relację równoważności

$$(av + bv', w) \sim a(v, w) + b(v', w)$$

(analogicznie dla drugiej współrzędnej) oraz

$$(0, w) \sim (0, 0) \sim (v, 0).$$

Iloczyn tensorowy przestrzeni V, W definiuje się jako

$$V \otimes W = \{[(v, w)] = (v, w)/\sim | v \in V, w \in W\},$$

gdzie $\sim$ jest zdefiniowaną wyżej relacją równoważności.

Piszemy np.

$$v \otimes w = v^a w^b \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad T = T^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

Wykład 3

3 Tensorowe, formy różniczkowe, gęstości

Iloczyn tensorowy Przykład

$$T_p^*M \otimes T_p^*M.$$

Jest to przestrzeń odwzorowań biliniowych

$$T_p^*M \otimes T_p^*M \ni L : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

$$T_pM \otimes T_pM \ni L : T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R},$$

itp.

Wprowadzamy oznaczenie

$$\bigwedge^N T_p^*M \subset (T_p^*M)^{\otimes n}.$$

Formy różniczkowe są całkowicie antysymetryczne, czyli dla $\omega \in \bigwedge^N (T_p^*M)$ spełnia

$$\omega(v_1, \ldots v_k, \ldots, v_l \ldots, v_n) = -\omega(v_1, \ldots v_l, \ldots, v_k \ldots, v_n).$$

Własności

1. dla $N > \dim M$, $\bigwedge^N(T_p^*M) = \{0\}$
2. dla $N = \dim M$, $\dim \bigwedge^N(T_p^*M) = 1$.

Niech $e^1, \ldots, e^n \in T_p^*M$,

$$e^a \wedge e^b := e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a,$$

a dla

$$e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_l} = \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} e^{a_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e^{a_{\sigma(l)}}.$$

Matematyczny zapis

$$\bigwedge^k T_p^*M \ni \omega = \omega_{a_1,\ldots,a_k} e^{a_1} \otimes \cdots \otimes e^{e_k} = \frac{1}{k!}\omega_{a_1,\ldots,a_k} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{e_k}.$$

Zapis fizyczny dla $\alpha \in \bigwedge^k T^*M, \beta \in \bigwedge^l T^*M$ mamy

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \left(\frac{1}{k!}\alpha_{a_1,\ldots,a_k} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_n}\right) \wedge \left(\frac{1}{l!}\beta b_1, \ldots, b_l e^{b_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_l}\right)\\ &= \frac{1}{k!}\frac{1}{l!}\alpha_{a_1,\ldots,a_k}\beta b_1, \ldots, b_l e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \wedge e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_l}\end{aligned}$$

Mamy także iloczyn wewnętrzny, zwany też zwężeniem lub kontrakcją:

$$v \lrcorner \omega = \frac{1}{(k-1)!} v^{a_1} \omega_{a_1,\ldots,a_k} e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_k}.$$

Własność:

$$v \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (v \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (v \lrcorner \beta).$$

4 Gęstości

Rozpocznijmy od rozważenia symbolu Levi-Civity. Zauważmy, że nie jest on tensorem. Jeśli by był to znaczy, że transformowałby się jak tensor, a tego nie robi (mnoży się razy $\det A$) gdzie $A \in GL(M)$. W fizyce tego nie widać, bo stosujemy transformacje z $SL(M)$, czyli ten wyznacznik daje 1.

Jest ważne żeby nie trakotować formy maksymalnego wymiaru jako funkcji — wynika to stąd, że nie jest ona niezmiennicza przy zamianie współrzędnych. Obiekt który przy zamianie współrzędnych z $\{e^i\}$ na $\{f^i\}$ transformuje się jak

$$f(p) \mapsto \det A(p) f(p)$$

nazywamy pseudogęstością. Jeśli w powyższym wzorze damy $|\det A|$ zamiast $\det A$ to dostaniemy gęstość. Żeby być całkowicie poprawnym to Niech $p \in M$ będzie punktem rozmaitości, a $\mathfrak{b}$ będzie dowolną bazą w przestrzeni stycznej. Odwzorowanie które parze $(p, \mathfrak{b})$ przyporządkowuje liczbę z $\mathbb{R}$, a po zmianie współrzędnych transformuje sią jak

$$\rho(p, A\mathfrak{b}) = |\det A|^\alpha \rho(p, \mathfrak{b})$$

nazywamy α-gęstością.

5 Pola tensorowe i operacje

a) Pole wektorowe Polem wektorowym na rozmaitości różniczkowej M nazywamy gładkie odwzorowanie

$$M \ni p \mapsto v \in T_pM,$$

jeśli odwzorowanie to jest gładkie. Gładkość oznacza, że w lokalnym układzie współrzędnych, w którym $TM|_U$ można zapisać jako $U \times \mathbb{R}^n$ odwzorowanie

$$U \ni p \mapsto v \in \mathbb{R}^n$$

jest gładkie. W lokalnym układzie współrzędnych pola wektorowe można zapisywać jako

$$v = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Dodatkowo mamy nawias pól wektorowych dany poprzez

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)),$$

a w układzie współrzędnych

$$[v, w] = \left(v^a \frac{\partial w^b}{\partial x^a} - w^a \frac{\partial v^b}{\partial x^a} \right) \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

Pola tensorowe Każde pole tensorowe można wyrazić przy pomocy iloczynów tensorowych (i ich kombinacji liniowych) pól wektorowy i jednoform.

Pochodna Liego pola wektorowego Niech $v, w \in \mathfrak{X}(M)$. Wówczas pochodną Liego pola wektorowego w w kierunku pola v nazywamy

$$\mathcal{L}_v w := [v, w].$$

Niech $f \in C^\infty(M)$. Wówczas pochodną Liego funkcji f w kierunku pola v nazywamy

$$\mathcal{L}_v f := v(f).$$

Podobnie

$$\mathcal{L}_v(\mathrm{d}f) := \mathrm{d}(\mathcal{L}_v f).$$

Dodatkowo wymagamy, żeby pochodna Liego spełniała regułę Leibniza

$$\mathcal{L}_v(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_l) = (\mathcal{L}_v(v_1)) \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_l + \ldots.$$

Z tego już wynika działanie pochodnej Liego na dowolne pole wektorowe.

Przykład Niech

$$L = L_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b, \quad v = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v L &= \mathcal{L}_v(L_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b) = v(L_{ab}) \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab}(\mathrm{d}v(x^a)) \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes v(x^b) \\ &= v(L_{ab}) \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab} \frac{\partial v^a}{\partial x^c} \mathrm{d}x^c \otimes \mathrm{d}x^b + L_{ab} \frac{\partial v^b}{\partial x^c} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^c. \end{aligned}$$

Przykład 2

$$\mathcal{L}_v \frac{\partial}{\partial x^b} = -\frac{\partial v^a}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Lemma 5.1.

$$\mathcal{L}_v(w^a \alpha_a) = (\mathcal{L}_v w)^a \alpha_a + w^a (\mathcal{L}_v \alpha)_a.$$

Wykład 4

Rozkład jazdy

1. Pochodna Liego
2. Pochodna zewnętrzna
3. Związki pomiędzy $\mathcal{L}_\xi$ oraz d
4. Całka z k-formy
5. Uwagi: $T(M)$, $T^*(M)$ jako rozmatiości
   (a) wiązki naturalne
   (b) wiązki stowarzyszone
   (c) wiązki główne
6.

6 Pochoda zewnętrzna

Wprowadźmy oznaczenia

- $\Gamma(T^*M)$ — przestrzeń pól kowektorowych
- $\Gamma(\bigwedge^k(T^*M))$ — przestrzeń pól k-form różniczkowych

Różniczka zewnętrzna

$$\mathrm{d} : \Gamma(\bigwedge^{k} T^*M) \to \Gamma(\bigwedge^{k-1} T^*M),$$

z własnościami

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}(\alpha + \beta) &= \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}^2 &= 0 \end{aligned}$$

7 Związki pomiędzy $\mathcal{L}$ a d

Niech $\omega \in \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$, $\xi \in \Gamma(TM)$

$$\mathcal{L}_\xi \omega = \xi \lrcorner \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\xi \lrcorner \omega)$$

Geometryczny wzór na nawias Liego

$$\mathrm{d}\omega(v,w) = v(w \lrcorner \omega) - w(v \lrcorner \omega) - [v,w] \lrcorner \omega.$$

Przykład liczenia pochodnej Liego na tensorach

$$\mathcal{L}_V T_{ab} \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b = v(T_{ab}) + T_{cb}\frac{\partial v^c}{\partial x^a} + T_{ca}\frac{\partial v^c}{\partial x^b},$$

$$\mathcal{L}_V T^{ab}\frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} = v(T^{ab}) - T^{cb}\frac{\partial v^c}{\partial x^a} - T_{ca}\frac{\partial v^c}{\partial x^b},$$

8 Całki z form różniczkowych

Rozważmy rozmaitość M i formę $\omega \in \Omega^n$. Dodatkowo załóżmy, że supp$\omega_n \chi_I(U_I)$ dla pewnej lokalnej mapy. Definiujemy

$$\int_M \omega = \int_{U_I} \omega = \int \omega_{1,\dots,n} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Przy orientacji kluczowa jest orientacja na M. Jeśli mamy dwie mapy, (U_I, χ_I), oraz (U_J, χ_J) ze współrzędnymi odpowiednio $x^1, \dots, x^n$ oraz $y^1, \dots, y^n$ to nazywamy je zgodnie zorientowanymi jeśli

$$\forall a, b \quad \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^b}\right) > 0,$$

na przecięciu $U_I \cap U_J$. Rozmatiość nazywamy zorientowaną jeśli można na niej zadać atlas w którym każde dwie mapy mają zgodną orientację. Całkować można tylko na rozmaitościach zorientowanych. Wynika to z tego, że przy zmianie bazy pod całką wyskakuje znak — jeśli rozmaitość jest zorientowana to nie ma problemu, bo ten znak jest zawze taki sam.

Jeśli chcemy całkować na rozmaitości niespójnej to powinniśmy zdefiniować rozkład jedności. Zakłądamy, że istnieje rozkłąd jedności, czyli zbiór funkcji ϕ_χ takich, że

$$\forall p \in M, \phi_\chi \neq 0 \text{dla skończonego pozbioru zbioru } \chi$$

oraz

Koneksja Koneksja na TM. Jeśli dany jest reper $e^1, \dots, e^n$ to macierz koneksji wyraza się przez Γ^i_j, $i, j = 1 \dots, n$,

$$e^{ij} = (a^{-1})^i_j e^j, \quad (\Gamma')^i_j = (a^{-1})^i_k \Gamma^k + (a^{-1})^i_k \mathrm{d}a^k_j.$$

Krzywizna Krzywizna

$$\mathcal{R}^i_j = \mathrm{d}\Gamma^i_j + \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l.$$

Przy zmianie repera na $(e')^i = (a^{-1})^i_k e^k$ $\mathcal{R}$ zmienia się na

$$(\mathcal{R}')^i_j = (a^{-1})^i_k \mathcal{R}^k_l a^l.$$

Podsumowując

$$\Gamma' = a^{-1}\Gamma a + a^{-1}\mathrm{d}a, \quad \mathcal{R}' = a^{-1}\mathcal{R}a.$$

Pochodna kowariantna Pomyślmy teraz o polu wektorowym jak o funkcji o wartościach wektorowych. Mamy wtedy następujący wzór

$$Dv^i = \mathrm{d}v^i + \Gamma^i_j v^j.$$

Dla k-formy mamy

$$D\omega^i = \mathrm{d}\omega^i + \Gamma^i_j \wedge \omega^j.$$

Theorem 8.1. *Druga pochodna kowariantna dla współrzędnej*

$$D^2\omega^i = R^i_j \wedge \omega^j.$$

Dla funkcji mamy $D\omega = \mathrm{d}\omega$.

Różniczka kowarianta formy o wartościach kowektorowych Niech ω będzie jednoformą, $\omega = \omega_i e^i$. Patrzymy na to jak na zeroformę o wartościach w $T^*_x M$. Pochodną kowariantna dla jednoformy jest równa

$$D\omega_i = \mathrm{d}\omega_i - \Gamma^j_i \omega_j.$$

Wytłumaczenie dlaczego powinien być ten minus: rozważmy $v^i\omega_i$ i policzmy $\mathrm{d}(v^i\omega_i) = (\mathrm{d}v^i)\omega_i + v^i\mathrm{d}\omega_i$. Licząc dalej dostajemy

$$D(v^i\omega_i) \stackrel{?}{=} (Dv^i)\omega_i + v^i(D\omega_j).$$

Żeby równość zachodziła bierzemy minus, wtedy się rzeczy skracają.

$$D\omega^{ij} = \mathrm{d}\omega^{ij} + \Gamma^i_l \wedge \omega^{lj} - \Gamma^j_l \wedge \omega^{il}.$$

D jest przemienne ze zwężaniem indeksów.

Przykład Sprawdźmy jak to działa na deltę Kroneckera.

$$D\delta^i_j = \mathrm{d}\delta^i_j + \Gamma^i_l \delta^l_j - \Gamma^k_j \delta^i_k.$$

Przykład 2 Niech $\omega^i = \omega^i_j e^j = \delta^i_j e^j = e^i$

$$De^i = \mathrm{d}e^i \Gamma^i_j \wedge e^j = T^i = \frac{1}{2} T^i_{jk} e^j \wedge e^k.$$

Dla repera holonomicznego mamy (MOŻE BYĆ BłąD)

$$D(\mathrm{d}x^i) = \mathrm{d}(\mathrm{d}x^i) + \Gamma^i_j \wedge \mathrm{d}x^i = \Gamma^i_{jk} \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j.$$

Pochodna kowariantna Niech T^i_j będzie polem tensorowym (0 formą o wartościach tensorowych). Wtedy różniczkę kowariantną nazywamy z definicji pochodną kowariantną

$$\nabla T^{i\dots}_{j\dots} = DT^{i\dots}_{j\dots}$$

$$\nabla_k T^{i\dots}_{j\dots} e^k \otimes e_i \otimes \dots \otimes e^j \dots$$

$$\nabla_v = \nabla_i v^j e^i \otimes e_j$$