1.

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n^2 + n \quad \text{för alla n > 0}$$

<u>Basfall:</u>

$$\sum_{i=1}^{1} 2i = 2 * 1 = 2$$

$$1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

<u>Induktionssteg:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{i=1}^{n-1} 2i + 2n$$

<u>Induktionsantagande:</u>

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2i = (n-1)^2 + (n - 1)$$

<u>Induktionsbevis:</u>

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} 2i + 2n &=(IA)= (n-1)^2 + (n - 1) + 2n = \\ &= (n^2 - n - n + 1) + (n - 1) + 2n = \\ &= n^2 - 2n + 1 + n - 1 + 2n = \\ &= n^2 + 1 + n - 1 = \\ &= n^2 + n\end{aligned}$$

VSB

2.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1 \quad \text{för alla n > 0}$$

<u>Basfall:</u>

$$\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

$$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Induktionssteg:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} + 2^{n-1}$$

Induktionsantagande:

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} = 2^{n-1} - 1$$

Induktionsbevis:

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} + 2^{n-1} = \text{(IA)} = 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1} = 2 * 2^{n-1} - 1 = 2^{n} - 1 \text{ VSB}$$

3.

$$\sum_{i=1}^{n} F(i)^2 = F(n) * F(n + 1) \qquad \text{för alla } n > 0$$

Basfall:

$$\sum_{i=1}^{1} F(i)^2 = F(1)^2 = 1^2 = 1$$

F(1) * F(1 + 1) = 1 * 1 = 1

Induktionssteg:

$$\sum_{i=1}^{n} F(i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} F(i)^2 + F(n)^2$$

Induktionsantagande:

$$\sum_{i=1}^{n-1} F(i)^2 = F(n - 1) * F(n - 1 + 1) = F(n – 1) * F(n)$$

Induktionsbevis:

$$\sum_{i=1}^{n-1} F(i)^2 + F(n)^2 = \text{(IA)} = F(n – 1) * F(n) + F(n)^2 =$$

= F(n) * F(n - 1) + F(n) * F(n) =

= F(n) * (F(n – 1) + F(n)) = (Enligt Fibonnaci-formeln)

= F(n) * (F(n + 1)) = F(n) * F(n + 1)

VSB

4.

n! > 2^n för alla n > 3

Basfall:
4! > 2^4 <=> 24 > 16

Induktionsbevis:
n! = (n – 1)! * n > 2^{n-1} * n >= (Eftersom n är minst 4)
>= 2^{n-1} * 4 =
= 2^{n-1} * 2 * 2 =
= 2^{n+1} > 2^n
VSB

5.

Ett brev kan frankeras med a 4kr-frimärken och b 5kr-frimärken om det ska frankeras med minst 12kr totalt.

Låt B(n) betyda att porto kan användas.

Basfall:

B(12) = 4 + 4 + 4 (Sant)

B(13) = 4 + 4 + 5 (Sant)

B(14) = 4 + 5 + 5 (Sant)

B(15) = 5 + 5 + 5 (Sant)

Induktionsantagande:

Sätt n >= 16. Antag att B(m) är sant för 11 < m < n.

Induktionssteg/bevis:

Eftersom B(m) är sant vet vi att B(n-4) är sant. Om B(n-4) är sant kan vi bara lägga till ett till 4-kronors-frimärke för att få upp (n-4) till n. Därav vet vi att eftersom B(n-4) är sant så är B(n) sant, VSB.