MTA2

Algèbre et Analyse

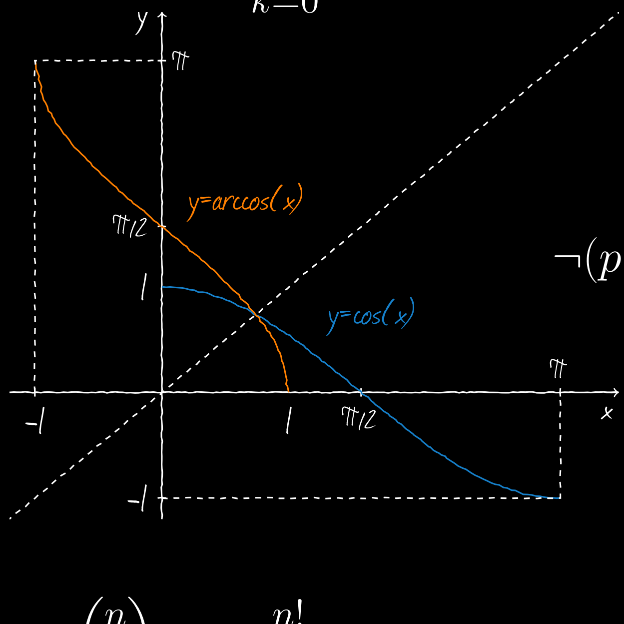
Deuxième partie

Alexis Flesch

Karine Mauffrey

Version étudiant

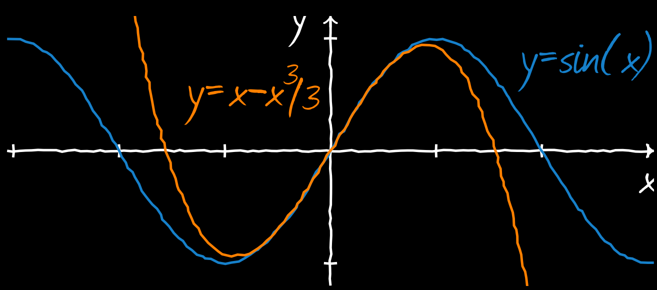
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



$$\zeta_k = |a|^{1/n} \mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$$

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Table des matières

I Limite d'une fonction

I.1 Limite en l'infini

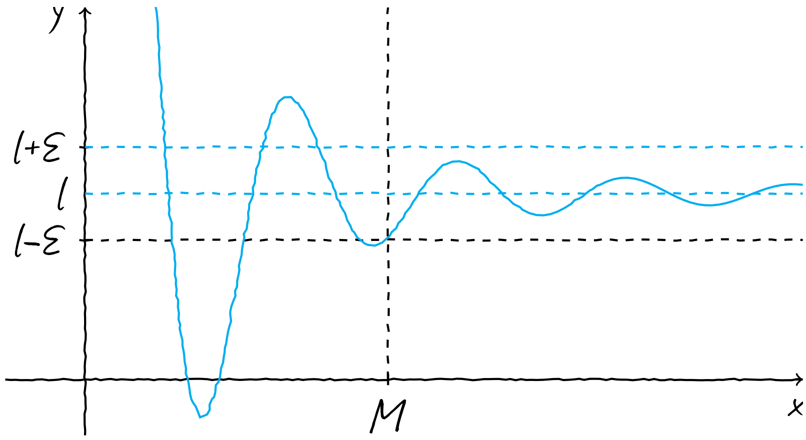
Définition 1.1. Soient I un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in I,\ \forall x \geqslant M, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{\to} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = \ell.$$

Illustration 1.2. Quelle que soit la précision ε, les $f(x)$ sont tous proches de la limite à ε près lorsque x est suffisamment grand.



Exemple 1.3. Considérons :

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos(x)}{x} \end{array}.$$

Alors, f tend vers 0 en $+\infty$.

$\boxed{1}$ *obligatoire.* En s'inspirant de la définition précédente, écrire la définition de « f tend vers ℓ en $-\infty$ ».

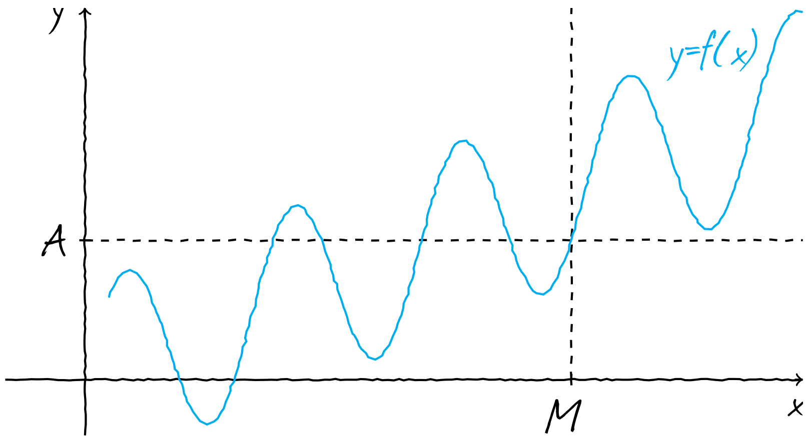
Définition 1.4. Soient I un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M \in I,\ \forall x \geqslant M, \quad f(x) \geqslant A.$$

On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{\to} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Illustration 1.5. Quel que soit le réel M, les $f(x)$ sont tous plus grands que M lorsque x est suffisamment grand.



Exemple 1.6. Considérons :

$$f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

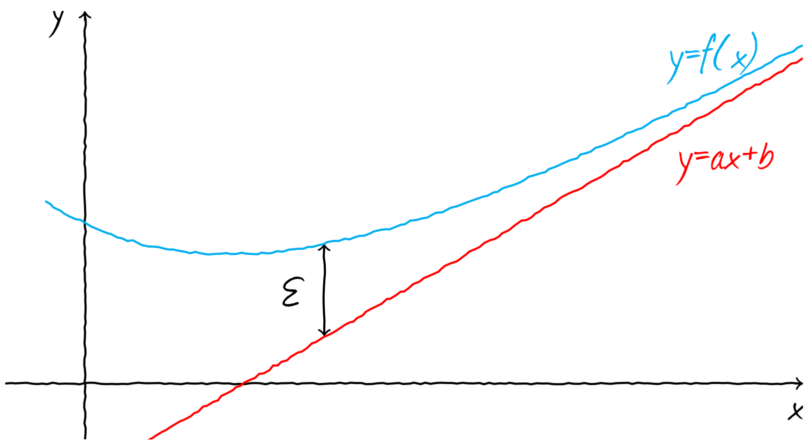
Alors, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

$\boxed{2}$ *obligatoire.* En s'inspirant de la définition précédente, écrire la définition de « f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ ».

Définition 1.7. Soient I un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax+b$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = ax+b+\varepsilon(x), \\ \varepsilon(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0. \end{cases}$$

Illustration 1.8. Autrement dit, la courbe représentative de f se rapproche de la droite d'équation $y = ax+b$ lorsque x tend vers l'infini.



I.2 Limite en un point

I.2.1 Premières définitions

Définition 1.9. Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dira que f est définie *au voisinage* de $x_0 \in \mathbb{R}$ si I est de la forme :

$$[a, x_0[\quad \text{ou} \quad]x_0, b] \quad \text{ou} \quad [a, x_0[\cup]x_0, b], \quad \text{ou encore} \quad [a, b] \text{ avec } x_0 \in [a, b].$$

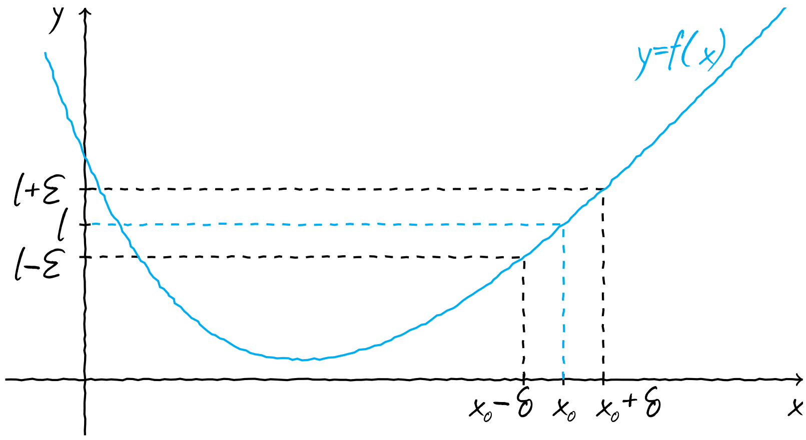
Définition 1.10. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

On note alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0}{\to} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = \ell.$$

Illustration 1.11. Quelle que soit la précision ε, pour x suffisamment proche de x_0, $f(x)$ est proche de ℓ à ε près.



Remarque 1.12. La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour y admettre une limite. Si f est définie en x_0 et que f admet une limite en x_0, alors, cette limite ne peut être que $f(x_0)$.

Exemple 1.13. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{array}$$

Alors, f tend vers 1 en 0. En effet :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

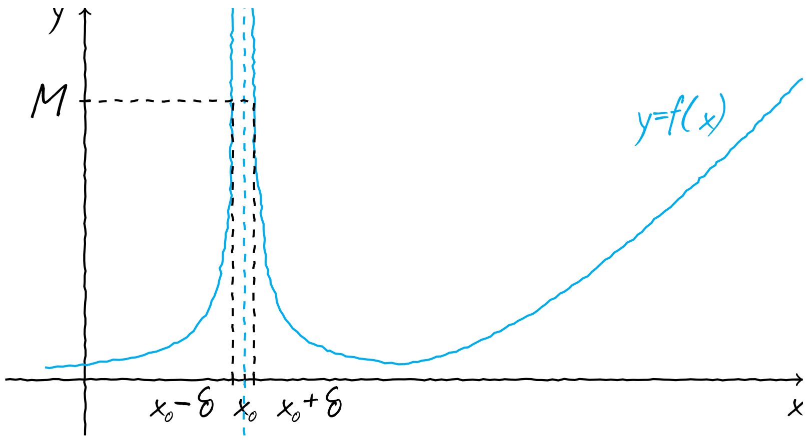
Définition 1.14. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M\Big).$$

On note alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0}{\to} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty.$$

Illustration 1.15. Quel que soit le réel M, $f(x)$ dépasse M pour tout x suffisamment proche de x_0.



Proposition 1.16 (unicité de la limite)

Si une fonction admet une limite en un point (ou en l'infini), alors cette limite est unique.

Démonstration. C'est la même démonstration que pour les suites. □

I.2.2 Limites à droite et à gauche

Définition 1.17. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f admet une *limite à droite* en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0^+}{\to} \ell.$$

3 *obligatoire.* En s'inspirant de la définition précédente, écrire ce que signifie avoir une *limite à gauche* en un point pour une fonction.

Exemple 1.18. Considérons la fonction :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Alors :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Proposition 1.19

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors f admet pour limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0 ssi f admet ℓ pour limites à droite et à gauche en x_0.

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell, \\ f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell. \end{cases}$$

Exemple 1.20. Considérons la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor. \end{array}$$

Alors, f n'a pas de limite en 0 car :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1.$$

Définition 1.21. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote verticale* à la courbe représentative de f en x_0 si :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

II Carctérisation séquentielle de la limite

Notation 1.22. Soit I un ensemble. On note $I^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans I.

Théorème 1.23 (caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si :

$$\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \implies f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \right).$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 1.24. Le résultat est encore vrai en remplaçant x_0 par $\pm\infty$ et/ou ℓ par $\pm\infty$.

Remarque 1.25. En général, on utilise ce théorème pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

4 *facultatif.* Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right). \end{array}$$

Montrer que f n'a pas de limite en 0.

III Opérations sur les limites

III.1 Opérations algébriques

Les résultats vus pour les suites s'appliquent aussi aux fonctions (sommes, produits, quotients). Les démonstrations sont similaires et ne seront donc pas présentées dans ce chapitre.

Proposition 1.26

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I.

(i) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et que $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors :
- $f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell + \ell'$,
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \lambda\ell$,
- $f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell\ell'$,
- si, de plus, g ne s'annule pas sur I et que $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

(ii) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

(iii) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ et que f est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (reps. $]-\infty; 0[$), alors : $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).

III.2 Limites et relations d'ordre

Définition 1.27. Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. On dira qu'une propriété portant sur f est vraie *au voisinage* de x_0 s'il existe un intervalle ouvert J_{x_0} de centre x_0 tel que la propriété soit vraie sur $J_{x_0} \cap I$.

Remarque 1.28. Cela signifie que cette propriété doit être vraie pour tout x suffisamment proche de x_0.

Définition 1.29. Soit $f\colon [z, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dira qu'une propriété portant sur f est vraie *au voisinage de l'infini* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que cette propriété soit vraie pour tout $x \geqslant M$.

Théorème 1.30 (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty - \infty\}$ un élément ou une extrémité de I. On suppose que, au voisinage de x_0, $f \leqslant g$.

(i) Si f et g admettent des limites finies en x_0, alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$;

(ii) Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$;

(iii) Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

Démonstration. C'est la même que pour les suites. □

Théorème 1.31 (des gendarmes)

Soient f, u et v trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. Si :

(i) au voisinage de x_0, $u \leqslant f \leqslant v$,

(ii) $\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,

alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Démonstration. C'est la même que pour les suites. □

III.3 Limites et fonctions composées

Théorème 1.32

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. Soient $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soient encore $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0, \\ \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \ell. \end{cases} \implies \lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

IV Comparaison locale de fonctions

Dans tout ce qui suit, f, g et h désignent trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I.

IV.1 Négligeabilité

Définition 1.33. On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de x_0 et on note $f =_{x_0} o(g)$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0, \\ \forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x). \end{cases}$$

On écrira encore « au voisinage de x_0, $f = o(g)$ » ou « en x_0, $f = o(g)$ ».

Proposition 1.34

Si g ne s'annule pas sur $I \backslash \{x_0\}$ alors :

$$f =_{x_0} o(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Évident. □

Proposition 1.35

Au voisinage de x_0, si f est négligeable devant g et que g est négligeable devant h alors f est négligeable devant h.

Exemples 1.36. Entre autres :

- Au voisinage de $+\infty$, $x^7 = o(\mathrm{e}^x)$.
- En 0, $\ln(x) = o(1/x)$.
- $f =_a o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_a f = 0$.

IV.2 Équivalence

Définition 1.37. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de x_0 et on note $f \sim_{x_0} g$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0, \\ \forall x \in I,\ f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x). \end{cases}$$

Proposition 1.38

$$f \sim_{x_0} g \iff f - g =_{x_0} o(g).$$

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

Exemples 1.39 (à connaître). Entre autres :

- En $+\infty$, $x^7 \sim x^7 + x^2 + \ln(x)$.
- En 0, $\ln(1+x) \sim x$.
- En 0, $\sin(x) \sim x$.
- En 0, $\cos(x) - 1 \sim -x^2/2$.
- En 0, $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$.

Proposition 1.40

Si g ne s'annule pas sur $I\backslash\{x_0\}$ alors :

$$f \sim_{x_0} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1.$$

Démonstration. Immédiat. □

Proposition 1.41

Au voisinage de x_0 :

(i) $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$;

(ii) Si $f \sim g$ et que $g \sim h$ alors $f \sim h$;

(iii) Si $f \sim g$ et que $h \sim k$ alors $fh \sim gk$;

(iv) Si $f \sim g$ et que f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0 alors $1/f \sim 1/g$.

Démonstration. Admis (similaire à celle vue pour les suites). □

Comme pour les suites, on ne peut pas additionner ni composer des équivalents.

5 *obligatoire.* Déterminer la limite éventuelle en 0 de :

$$\frac{\sin^3(x)}{x^3 + x^4}.$$

6 *obligatoire.* Déterminer la limite éventuelle en 0 de :

$$\frac{\ln(1+x)}{2x}.$$

V Fonctions continues

V.1 Continuité en un point

Définition 1.42. Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est *continue en* x_0 si f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0.

Proposition 1.43 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors, f est continue en x_0 ssi pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers x_0, $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration. Découle de la caractérisation séquentielle de la limite. □

7 *facultatif.* Démontrer que la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

n'est pas continue en 0.

V.2 Continuité globale

Définition 1.44. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *continue sur* I si elle est continue en tout point x_0 de I.

Remarque 1.45. Graphiquement, cela signifie qu'on peut tracer le graphe de f sans lever le crayon. Attention cependant à ne pas faire de trait vertical !

Proposition 1.46

Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\lambda f + g$ est continue sur I ;

(ii) fg est continue sur I ;

(iii) si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est continue.

Définition 1.47. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de la forme

$$]x_0, b] \quad \text{ou} \quad [a, x_0[\quad \text{ou} \quad [a, x_0[\cup]x_0, b].$$

On dit que f est *prolongeable par continuité* en x_0 si f admet une limite finie en x_0.

Exemple 1.48. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{array}$$

Alors, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

8 *obligatoire.* Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ x + k & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array}$$

Déterminer un réel k tel que f soit continue sur $\mathbb{R}$: on commencera par tracer le graphe de f en prenant une valeur de k « au hasard ».

V.3 Fonctions continues sur un segment

Théorème 1.49

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée sur $[a, b]$ et y atteint ses bornes.

Démonstration. Admis. □

Remarque 1.50. En terme de quantificateurs, cela signifie que

$$\exists m \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad f(m) \leqslant f(x),$$

et que

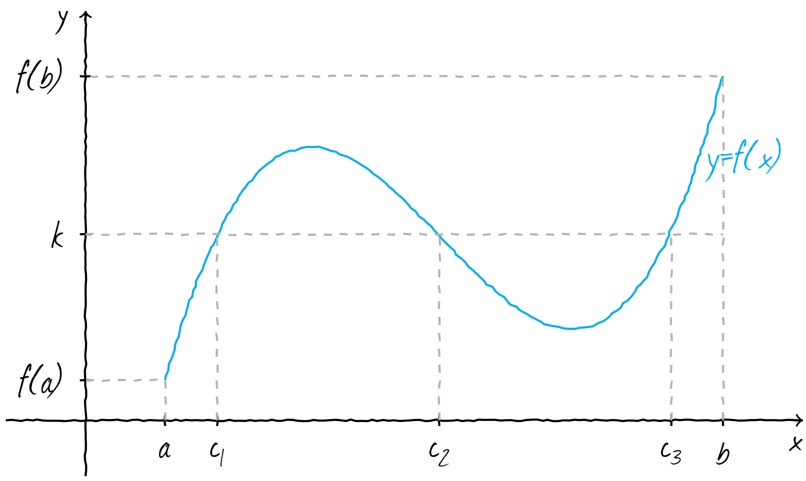
$$\exists M \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant f(M).$$

Théorème 1.51 (des valeurs intermédiaires)

Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :

$$\exists c \in [a,b], \quad f(c) = k.$$

Illustration 1.52. La fonction f peut prendre plusieurs fois la valeur k sur l'intervalle $[a,b]$.



Démonstration. Nous la ferons en classe. ☐

Remarque 1.53. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

9 *facultatif.* Un marcheur parcourt 10km en 2h. Montrer qu'il existe une période d'une heure pendant laquelle il a parcouru exactement 5km.
Indication : on pourra noter v la vitesse du marcheur et considérer la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_t^{t+1} v(s)\mathrm{d}s. \end{array}$$

V.4 Fonctions monotones

Théorème 1.54 (de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

(i) f réalise une bijection de I sur $f(I)$;

(ii) f^{-1} est continue et strictement monotone, de même monotonie que f ;

(iii) les bornes de $f(I)$ sont les images par f des bornes de I.

Démonstration. La première partie découle du théorème des valeurs intermédiaires. La deuxième partie est admise. ☐

Exemple 1.55. Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Alors f est strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de I dans $J = f(I) = [0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est continue de J dans I : c'est la fonction racine carrée.

10 *obligatoire.* Démontrer que l'équation

$$\ln(2x+1) + \sin(x) = 1$$

admet une unique solution sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.
Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto \ln(2x+1) + \sin(x)$ sur $[0, \pi/4]$.

Proposition 1.56

Lorsque f est bijective, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I L'ensemble des polynômes

I.1 Premières définitions

Définition 2.1. Un *polynôme* sur $\mathbb{K}$ est une suite de coefficients $(a_k)_k$ de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Pour simplifier, on écrira le polynôme $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n,$$

et on dira que X est *l'indéterminée* du polynôme.

Remarque 2.2. On note parfois aussi $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ou plus simplement $\sum a_k X^k$ le polynôme de la définition précédente.

Définition 2.3. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples 2.4. Entre autres :
- $P = 1 + X - 3X^4$ est un polynôme.
- $P = 0$ est le polynôme nul.

Définition 2.5. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. La *fonction polynomiale* associée à P est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x). \end{array}$$

On peut montrer que la fonction ci-dessus détermine entièrement le polynôme P. C'est pourquoi on identifiera souvent un polynôme à sa fonction polynomiale associée.

Proposition 2.6

Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.7. Deux polynômes P et Q sont égaux si leurs coefficients sont égaux.

I.2 Opérations sur les polynômes

Définition 2.8. Soient $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le polynôme $\lambda P + Q$ par :

$$\lambda P + Q = \sum (\lambda a_k + b_k) X^k.$$

Exemple 2.9. Soient :

$$P = 1 + X^2 \quad \text{et} \quad Q = X + X^2 + 3X^3.$$

Alors :

$$P - Q = 1 + X^2 - (X + X^2 + 3X^3) = 1 - X - 3X^3.$$

Définition 2.10. Soient $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme PQ par :

$$PQ = \sum c_k X^k,$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Remarque 2.11. La multiplication polynomiale correspond à la multiplication des fonctions polynomiales associées.

Exemple 2.12. Soient $P = 1 + X$ et $Q = 3X + X^2$, alors :

$$PQ = (1 + X)(3X + X^2) = 3X + X^2 + 3X^2 + X^3 = 3X + 4X^2 + X^3.$$

Remarque 2.13. Étant donné que l'on peut identifier un polynôme avec sa fonction polynomiale, l'addition, la multiplication par un scalaire ainsi que la multiplication de polynômes vérifient les mêmes propriétés que pour les fonctions : associativité, distributivité, commutativité, etc...

I.3 Degré d'un polynôme

Définition 2.14. Le *degré* d'un polynôme non nul $P = \sum a_k X^k$ est le plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, \quad a_n = 0.$$

On le note $\deg(P)$.

Définition 2.15. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Exemple 2.16. Soit $P = 1 + 3X^2$, alors $\deg(P) = 2$.

Définition 2.17. Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme non nul. On appelle *coefficient dominant* de P le coefficient a_n où $n = \deg(P)$.

Exemple 2.18. Si $P = 1 + 2X^9$, alors le coefficient dominant de P est 2.

Définition 2.19. Un polynôme est dit *unitaire* si son coefficient dominant est égal à 1.

Proposition 2.20

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors

(i) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;

(ii) Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$;

(iii) Si $\deg(P) = \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) \leqslant \deg(Q)$.

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

Exemple 2.21. Soient $P = 1 + X$ et $Q = 1 - X$, alors :

$$P + Q = 1 + X + 1 - X = 2.$$

Donc, $\deg(P + Q) = 0$ alors que P et Q sont de degré 1.

Exemple 2.22. En cas de doute, pour retrouver le premier point de la proposition, on pourra prendre par exemple

$$P = X^n \quad \text{et} \quad Q = X^m,$$

auquel cas

$$PQ = X^{n+m}.$$

On a bien : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

11 *obligatoire.* Soient P, Q et R trois polynômes non nuls tels que :

$$PQ = PR.$$

À l'aide de la proposition 2.20, montrer que $\deg(Q) = \deg(R)$.

II Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

II.1 Définition

Définition 2.23. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P *divise* Q (ou que Q est un *multiple* de P) si :

$$\exists R \in \mathbb{K}[X], \quad Q = PR.$$

On note alors $P|Q$.

Exemple 2.24. Soit $P = X^3 - X$. Alors :

$$P = X(X^2 - 1) = X(X-1)(X+1).$$

Alors, $X|P$, $(X-1)|P$, $(X^2-1)|P$...

Exemple 2.25. Soient $P = 1 + X$ et $Q = 2 + 2X$ alors :

$$P = \frac{1}{2}Q \quad \text{et} \quad Q = 2P.$$

Ainsi, $P|Q$ et $Q|P$.

Remarque 2.26. Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors :

(i) si $P|Q$, alors $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$,

(ii) $P|P$,

(iii) si $P|Q$ et que $Q|P$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda Q$.

II.2 Division euclidienne

Théorème 2.27 (division euclidienne)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Alors :

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = BQ + R, \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

Démonstration. L'existence des polynômes Q et R est admise. Nous démontrerons l'unicité en cours. $\square$

12 *facultatif.* Effectuer la division euclienne de $X^5 - X^4 + X^3$ par $X^2 + 1$.

II.3 Polynômes irréductibles

Définition 2.28. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* dans $\mathbb{K}[X]$ si $\deg(P) \geqslant 1$ et que ses seuls diviseurs sont les λ et les λP où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 2.29. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Exemple 2.30. Soit $P = 1 + X^2$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ puisque :

$$P = (X - i)(X + i).$$

III Polynôme dérivé

Définition 2.31. Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Le *polynôme dérivé* de P est le polynôme P' défini par :

$$P' = \sum_{k \geqslant 1} k a_k X^{k-1}.$$

Exemple 2.32. Soit $P = 4X^4 + 8X^3 - 2X + 1$. Alors :

$$P' = 16X^3 + 24X^2 - 2.$$

Exemple 2.33. Soit $Q = 1 + 2iX - (1+i)X^2$. Alors :

$$Q' = 2i - (2 + 2i)X.$$

Remarque 2.34. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la notion de dérivée coïncide avec celle vue en analyse pour les fonctions d'une variable réelle.

Proposition 2.35

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$;

(ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Démonstration. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est une conséquence des propriétés de la dérivation sur $\mathbb{R}$. Ce résultat peut aussi se montrer de manière directe (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). $\square$

Définition 2.36. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On définit par récurrence la *dérivée k-ième* d'un polynôme P, notée $P^{(k)}$, comme étant la dérivée de $P^{(k-1)}$. Par convention, on note $P^{(0)} = P$.

Exemple 2.37. Soit $P = 1 + X^3$. Alors :

$$P' = 3X^2, \quad P'' = 6X \quad \text{et} \quad P^{(3)} = 6.$$

De plus :

$$\forall k \geqslant 4, \quad P^{(k)} = 0.$$

13 *facultatif.* Soit P un polynôme de degré n. Montrer que pour tout $k > n$, $P^{(k)} = 0$.

IV Racines d'un polynôme

IV.1 Définition

Définition 2.38. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une *racine* de P (ou un *zéro*) si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.39

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) α est une racine de P ssi $(X - \alpha)$ divise P ;

(ii) si $\deg(P) = n$ avec $n \geqslant 0$ alors P admet au plus n racines.

Démonstration. Nous démontrerons le premier point en classe. Le deuxième en est une conséquence immédiate (exercice *facultatif* : par contraposition). □

14 *obligatoire.* Soit $P = X^3 + 3X^2 - X - 3$. Montrer que P est divisible par $X - 1$ et effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$.
Indication : on pourra calculer $P(1)$.

IV.2 Racines multiples

Définition 2.40. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^\star$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P *d'ordre de multiplicité* p (ou plus simplement *d'ordre* p) si :

$$(X - \alpha)^p | P \quad \text{et} \quad (X - \alpha)^{p+1} \nmid P.$$

Exemple 2.41. Soit $P = X^4 - X^2$. Alors, 0 est racine d'ordre 2 de P. En effet :

$$P = X^2(X^2 - 1) = X^2(X - 1)(X + 1).$$

Théorème 2.42

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, α est une racine de P d'ordre p ssi :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} P = (X - \alpha)^p Q, \\ Q(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Admis. □

Corollaire 2.43

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, α est une racine de P d'ordre p ssi :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. Dans le cas où $P \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'appliquer la proposition précédente puis de se souvenir comment dériver un produit. □

V Factorisation de polynômes

V.1 Polynômes scindés

Définition 2.44. On dit qu'un polynôme P est *scindé* sur $\mathbb{K}[X]$ s'il peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{p_1}(X-\alpha_2)^{p_2}\dots(X-\alpha_n)^{p_n},$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (\alpha_i, p_i) \in \mathbb{K}\times\mathbb{N}^\star.$$

Exemple 2.45. Le polynôme X^2+1 est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ mais pas sur $\mathbb{R}[X]$. En effet :

$$X^2+1 = (X-i)(X+i).$$

V.2 Relations entre racines et coefficients

Proposition 2.46

Soit $P = a_0 + a_1 + \dots + a_n X^n$ un polynôme scindé :

$$P = a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k = \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\dots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n &= (-1)^n a_0.
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous ferons la démonstration de ce résultat dans le cas particulier où $n=3$ en classe. □

Remarque 2.47. Il ne faut pas retenir ce résultat par cœur. Cependant, il faut être capable de reproduire la démonstration dans des cas particuliers.

15 *facultatif.* Soit $P = X^3+2X^2+3X+4$. On suppose qu'il admet trois racines α, β et γ. Calculer $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.
Indication : on pourra montrer au préalable que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$.

V.3 Décomposition en facteurs irréductibles

Proposition 2.48

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ se décompose en produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.49. Cette décomposition est similaire à la décomposition des entiers en produit de nombres premiers.

V.3.1 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 2.50 (de d'Alembert)

Tout polynôme sur $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Démonstration. Admis (difficile). □

Remarque 2.51. Cela signifie que l'on peut toujours factoriser un polynôme sur $\mathbb{C}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

16 *facultatif.* Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.

V.3.2 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 2.52

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

(i) les polynômes de degré 1 ;

(ii) les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Lemme 2.53. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ une racine de P. Alors, $\overline{\alpha}$ est racine de P.

Démonstration du lemme. Exercice (*facultatif*). □

Démonstration de la proposition. Nous la ferons en classe. □

17 *facultatif.* Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.

18 *facultatif.* Soit $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$. Démontrer que 1 est racine multiple de P puis en déduire les factorisations de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

19 *facultatif.* Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme :

$$P = X^3 - 3X^2 + 4X - 2.$$

Indication : on pourra commencer par chercher une racine évidente de P.

I Systèmes linéaires

I.1 Reconnaître un système linéaire

Définition 3.1.
- Un *système linéaire de n équations à p inconnues* $x_1, x_2, \dots, x_p$ est un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n, \end{cases}$$

  où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres (réels ou complexes) donnés.
- Lorsque tous les b_i sont nuls, on dit que le système est *homogène*.
- On appelle *solution* de ce système tout p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations du système.

Exemple 3.2. Un exemple de système à deux équations et trois inconnues :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x + y + z = 12. \end{cases}$$

Proposition 3.3

Un système linéaire admet soit une solution unique, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Démonstration. Nous la ferons en MTB. □

Définition 3.4. On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents* lorsqu'ils ont les mêmes inconnues et les mêmes solutions.

I.2 Systèmes linéaires échelonnés

Définition 3.5. Un *système linéaire échelonné* est un système pouvant s'écrire sous forme « triangulaire » (quitte à renuméroter les inconnues) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + \dots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + \dots + a_{2,p}x_p = b_2, \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n + \dots + a_{n,p}x_p = b_n, \end{cases}$$

avec $p \geqslant n$. Les inconnues figurant en début de ligne (ici x_1, x_2, …, x_n) sont appelées *inconnues principales*. Les inconnues non principales sont appelées *inconnues auxiliaires*.

Exemple 3.6. Le système ci-dessous est échelonné :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Remarque 3.7. Pour résoudre un système linéaire échelonné, on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires (si il y en a) en partant de la dernière équation, puis on remonte en effectuant des substitutions.

Exemple 3.8. Reprenons le système de l'exemple précédent. On exprime les solutions en fonction de z.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3(1-z)-z=0 \\ y=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(4z-3)/2 \\ y=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z-3/2 \\ y=1-z \end{cases}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par :

$$S=\{(2z-3/2,1-z,z), z\in\mathbb{R}\}.$$

Remarque 3.9. On aurait pu aussi choisir d'exprimer x et z en fonction de y. L'ensemble des solutions aurait alors été écrit différemment mais il aurait contenu exactement les mêmes éléments.

I.3 Le pivot de Gauss

Dans tout ce qui suit, nous noterons L_i la i-ème équation d'un système linéaire.

Théorème 3.10

Partant d'un système linéaire quelconque, on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

i) permutation de deux lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$),

ii) multiplication d'une ligne L_i par $a\neq 0$ ($L_i \leftarrow aL_i$),

iii) addition à une ligne L_i d'un multiple aL_j d'une autre ligne L_i ($L_i \leftarrow L_i + aL_j$).

Démonstration. Admis. □

Corollaire 3.11. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

Exemple 3.12. Résolvons le système suivant :

$$(S)\ :\ \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2y-z=0 \\ -x+y-2z=1. \end{cases}$$

On a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 & \\ 2y-z=0 & \\ 3y-z=3 & L_3\leftarrow L_3+L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 & \\ 6y-3z=0 & L_2\leftarrow 3L_2 \\ 6y-2z=6 & L_3\leftarrow 2L_3. \end{cases}$$

Donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 6y - 3z = 0 \\ z = 6 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - z = -10 \\ y = 3z/6 = 3 \\ z = 6. \end{cases}$$

On en déduit que le système admet une unique solution qui est $(-10, 3, 6)$.

Il est ***nécessaire*** d'écrire les équivalences entre les systèmes ainsi que les transformations effectuées d'une étape à l'autre, sans quoi votre travail ne sera pas relu.

20 *obligatoire.* Résoudre

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 10, \\ x + y - z = 3, \\ x + y = 19. \end{cases}$$

II Matrices rectangulaires

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 3.13. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Une *matrice* à n lignes et à p colonnes (appelée aussi matrice de taille $n \times p$) est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes et noté sous la forme :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne est noté $a_{i,j}$ et est appelé *terme général* de la matrice A. L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.15. On appelle :

i) *matrice ligne* tout élément de $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$,

ii) *matrice colonne* tout élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

iii) *matrice nulle* de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice notée $O_{n,p}$ dont tous les éléments sont nuls.

II.2 Opérations sur les matrices

Définition 3.16. Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. On appelle *somme* de A et B la matrice C de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A + B$ et dont le terme général est donné par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Remarque 3.17. Il s'agit en fait tout simplement de la somme coefficient par coefficient.

Exemple 3.18. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.19. Soit $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *produit* de A par λ la matrice C de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée λA et dont le terme général est donné par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Remarque 3.20. La matrice λA est obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par λ.

Exemple 3.21. On a :

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 3.22. Soient $(A, B, C) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

i) $A + B = B + A$
ii) $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$
iii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
iv) $A + (-A) = (-A) + A = O_{n,p}$
v) $1 \times A = A$
vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
vii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
viii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

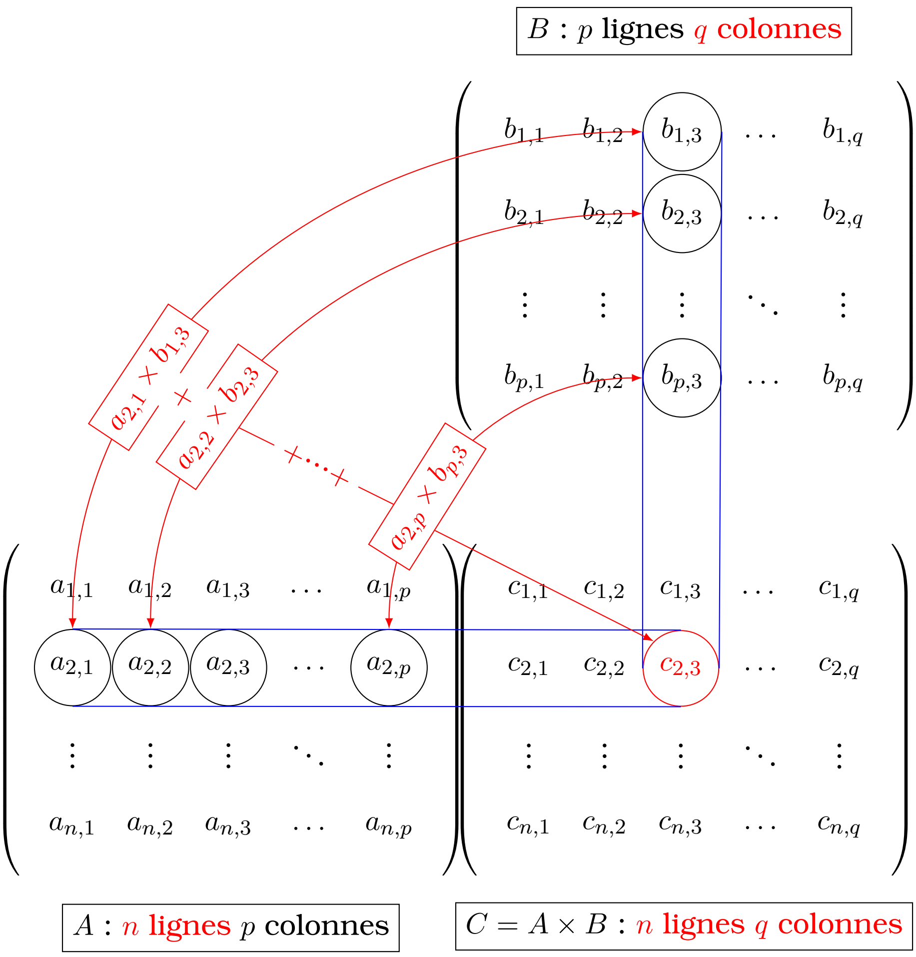
Démonstration. Toutes ces propriétés découlent des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. □

Définition 3.23. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le *produit* de A par B, noté AB, est la matrice $(c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ de $\mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le terme général est défini par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 3.24. On ne peut pas en général multiplier deux matrices, il faut faire attention à leurs tailles respectives. De plus, il se peut que le produit AB ait un sens alors que BA n'en a pas.

Illustration 3.25. Voici comment calculer $c_{2,3}$ dans la définition précédente.



Exemple 3.26. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.27. Soient A, B et C les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = AC.$$

Ainsi, $AB = AC$ avec $A \neq O_{2,2}$ et pourtant $B \neq C$. On ne peut donc pas « diviser » par une matrice (même non nulle).

Exemple 3.28. Lorsque les produits AB et BA ont un sens, on a $AB \neq BA$ en général. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Propriété 3.29. Soient A, B et C trois matrices. Lorsque les produits suivants ont un sens,

(i) $A(B+C) = AB + AC$,

(ii) $(A+B)C = AC + BC$,

(iii) $AO = O$,

(iv) $OA = O$,

(v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,

(vi) $A(BC) = (AB)C$,

où O désigne la matrice nulle de la dimension adéquate.

Démonstration. Admis. □

II.3 Transposée d'une matrice

Définition 3.30. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La *transposée* de A, notée ${}^tA$, est la matrice dont le terme général $(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque 3.31. Pour obtenir ${}^tA$, il suffit da transformer les lignes de A en des colonnes.

Exemple 3.32. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.33

Soient A et B deux matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsque les opérations ci-dessous ont un sens (i.e. quand les tailles des matrices sont compatibles avec les opérations), on a les égalités :

(i) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$,

(ii) ${}^t({}^tA) = A$,

(iii) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$,

(iv) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Démonstration. Admis. □

III Matrices carrées

III.1 Quelques matrices remarquables

Définition 3.34. Une *matrice carrée d'ordre* n est une matrice de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour simplifier, on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices. On note aussi O_n la matrice carrée nulle d'ordre n.

Exemple 3.35. Un exemple de matrice carrée d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.36. La *matrice identité* de $M_n(\mathbb{K})$ est la matrice notée I_n ayant des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.37. Pour $n = 3$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.38

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$AI_n = I_n A = A.$$

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

21 *obligatoire.* Vérifier que la proposition précédente fonctionne avec une matrice 3×3 non triviale de votre choix.

Définition 3.39. Une matrice est dite *diagonale* si tous ses coefficients en-dehors de la diagonale sont nuls.

Exemple 3.40. La matrice identité est diagonale. Autre exemple de matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.41

Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

22 *obligatoire.* Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Que remarque-t-on ?

Définition 3.42. Une matrice A est dite *symétrique* si $A = {}^tA$.

Remarque 3.43. On reconnaît une matrice symétrique par le fait que ses coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 3.44. La matrice ci-dessous est symétrique :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

23 *obligatoire.* Montrer que la somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.

Définitions 3.45. On dit qu'une matrice est *triangulaire supérieure* si tous ses coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls. On définit de manière similaire une matrice *triangulaire inférieure*.

Exemple 3.46. La matrice ci-dessous est triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

24 *obligatoire.* Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Que remarque-t-on ?

III.2 Puissances d'une matrice

Définition 3.47. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les *puissances* de A (par récurrence) de la façon suivante :

$$\begin{cases} A^0 = I_n, \\ A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}} = A^{p-1} \times A. \end{cases}$$

Proposition 3.48

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $A^{p+q} = A^p A^q$;

(ii) $(A^p)^q = A^{pq}$;

(iii) $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$.

En général, $(AB)^p \neq A^p B^p$. De même, les identités remarquables ne sont plus valables. On doit écrire :

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

25 *facultatif.* Soit A la matrice diagonale ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Déterminer A^n.

Théorème 3.49 (Formule du binôme)

Soient $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $N \in \mathbb{N}$. Si $AB = BA$, alors :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Démonstration. C'est la même que pour deux réels ! □

III.3 Matrices inversibles

Définition 3.50. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* si :

$$\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA = I_n.$$

L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.51

Lorsqu'elle existe, la matrice B de la définition précédente est unique. On la note A^{-1}.

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

Exemple 3.52. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet :

$$I_n I_n = I_n I_n = I_n.$$

26 *facultatif.* Soit A une matrice diagonale. À quelle condition suffisante est-elle inversible ?

Théorème 3.53

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ;

(ii) $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$;

(iii) $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$.

Démonstration. Nous la ferons en MTB. □

Proposition 3.54

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

(i) Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$;

(ii) Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. Exercice (*facultatif*). $\square$

Proposition 3.55

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si pour tout $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ l'équation

$$AX = X_0,$$

d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution. Dans ce cas, cette unique solution est donnée par

$$X = A^{-1}X_0.$$

Démonstration. Nous la ferons en MTB. $\square$

Remarque 3.56. En pratique, on utilise ce résultat pour étudier si une matrice est inversible et pour calculer son inverse le cas échéant.

Exemple 3.57. Inversons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Résolvons l'équation $AX = X_0$.

$$\begin{aligned}
AX = X_0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + z \\ x + 2y + 2z \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & x_0 \\ x + 2y + 2z & = & y_0 \\ y + z & = & z_0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y + 2z & = & y_0 & \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ x + z & = & x_0 & \qquad L_2 \leftrightarrow L_1 \\ y + z & = & z_0. & \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où

$$AX = X_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z &=& y_0 \\ -2y-z &=& x_0-y_0 \\ y+z &=& z_0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z &=& y_0 \\ -2y-z &=& x_0-y_0 \\ z &=& x_0-y_0+2z_0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2.$$

En substituant l'expression de z dans L_1 et L_2, on obtient :

$$AX = X_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& -2x_0+3y_0-4z_0 \\ -2y &=& 2x_0-2y_0+2z_0 \\ z &=& x_0-y_0+2z_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y_0-2z_0 \\ y &=& -x_0+y_0-z_0 \\ z &=& x_0-y_0+2z_0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0-2z_0 \\ -x_0+y_0-z_0 \\ x_0-y_0+2z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$AX = X_0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X_0.$$

D'après la proposition 3.55, on en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

27 *obligatoire.* Déterminer si la matrice ci-dessous est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV Systèmes linéaires et matrices

IV.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 3.58. Considérons le système :

$$(S) : \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{array}\right.$$

La *matrice du système* est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.59. Reprenons les notations de la définition précédente et notons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Alors, le système (S) est équivalent à $AX = B$.

Exemple 3.60. La matrice du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.61

Considérons un système linéaire écrit sous forme matricielle :

$$AX = B,$$

où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ce système admet une unique solution ssi A est inversible. Si tel est le cas, alors la solution est donnée par :

$$X = A^{-1}B.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.55. □

Exemple 3.62. Résolvons :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x + z = 1, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ y + z = 3. \end{cases}$$

La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a vu plus haut qu'elle était inversible et que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, (S) admet une unique solution qui est donnée par :

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On notera encore f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et on se placera dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I Dérivabilité en un point

Définition 4.1. On dit que f est *dérivable* en $a \in I$ si la limite suivante existe :

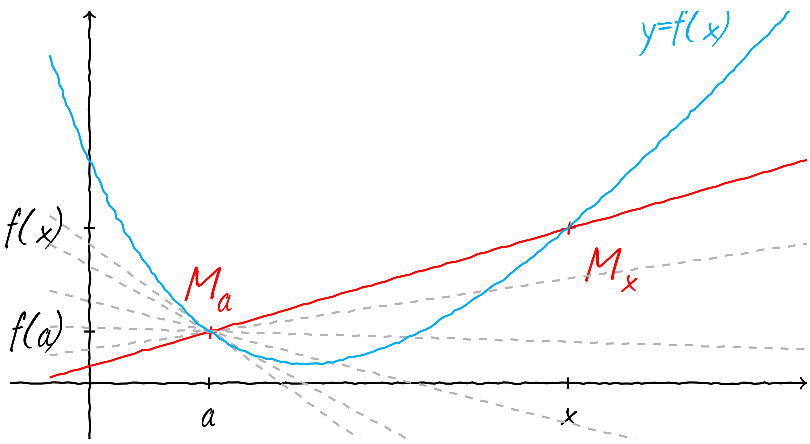
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On appelle alors cette limite nombre dérivé de f en a et on la note $f'(a)$.

Illustration 4.2. Le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $M_a = (a, f(a))$ et $M_x = (x, f(x))$.



28 *facultatif.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et que $f'(a) = na$.

Proposition 4.3

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;

(ii) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$;

(iii) Il existe une fonction ε telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Démonstration. Admis. □

Proposition 4.4

Si f est dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est donnée par :

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Proposition 4.5

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Exercice (*facultatif*) : utiliser la proposition 4.3. □

La réciproque est fausse ! Penser à la fonction valeur absolue par exemple.

Définition 4.6. On dit que f est ***dérivable à droite*** en a si sa restriction à $I \cap [a, +\infty[$ est dérivable en a. On note alors $f'_d(a)$ le nombre dérivé à droite en a.

Remarque 4.7. Cette définition est équivalente à l'existence de la limite :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition 4.8. On définit de même $f'_g(a)$ la ***dérivée à gauche*** de f en a.

Proposition 4.9

f est dérivable en a ssi elle est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

Exemple 4.10. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle admet cependant en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. En effet :

$$\forall h > 0, \quad \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h}\frac{h - 0}{h} = 1 \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

De plus :

$$\forall h < 0, \quad \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h}\frac{-h}{h} = -1 \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} -1.$$

II Dérivabilité globale

Définition 4.11. On dit que f est ***dérivable*** si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On note alors :

$$\begin{array}{rccc} f' & : \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

II.1 Dérivées usuelles à connaître

Les fonctions usuelles (trigonométriques, polynomiales, fractions rationnelles, exponentielles, logarithmes) sont dérivables sur leurs ensembles de définition. Attention cependant : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

29 *obligatoire.* Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Calculer la limite éventuelle du taux d'accroissement de f en 0. Que peut-on en déduire ?

Proposition 4.12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Alors :

(i) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

(ii) $(\ln(x))' = 1/x$,

(iii) $(\exp(x))' = \exp(x)$,

(iv) $(\cos(x))' = -\sin(x)$,

(v) $(\sin(x))' = \cos(x)$,

(vi) $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Démonstration. Admis. □

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 4.13

Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\lambda f + g$ est dérivable et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$,

(ii) fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$,

(iii) si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Théorème 4.14

Soient $u\colon I \to J$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors, $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x)).$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 4.15. Ce théorème permet de retrouver les dérivées suivantes :

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u, \quad \ln(u)' = \frac{u'}{u}, \quad \cos(u)' = -u'\sin(u), \quad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}, \dots$$

II.3 Fonctions bijectives

Rappelons que $f\colon I \to J$ est bijective si :

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x).$$

On note alors $f^{-1}\colon J \to I$ la bijection réciproque de f et :

$$\begin{aligned} &\forall y \in J, \quad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y, \\ &\forall x \in I, \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x. \end{aligned}$$

Théorème 4.16

Supposons que $f\colon I \to J$ est bijective et dérivable de dérivée non nulle. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

$\boxed{30}$ *facultatif.* Soit f l'application :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]-\pi/2, \pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

Démontrer que f est bijective puis étudier la dérivabilité de sa bijection réciproque.

III Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

III.1 Extrema locaux d'une fonction dérivable

Définition 4.17. On dit que f admet un *maximum global* en a si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a).$$

Exemple 4.18. Soit f la fonction définie par :

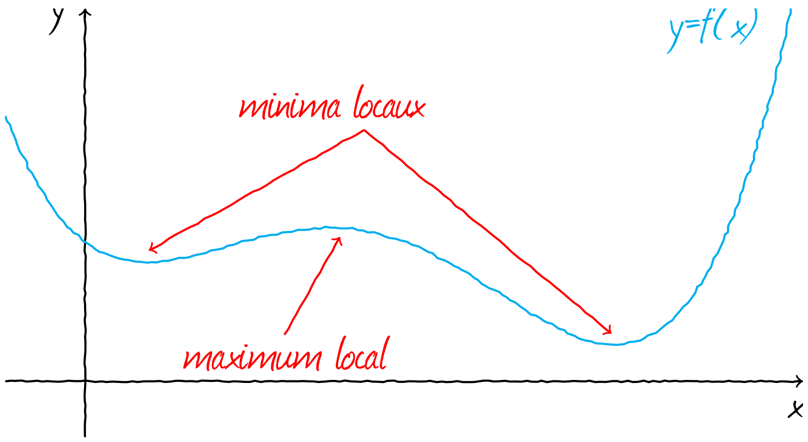
$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -x^2. \end{array}$$

Alors f admet un maximum global en 0.

Définition 4.19. On dit que f admet un *minimum local* en a s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) \geqslant f(a).$$

Illustration 4.20. Un extremum local n'est pas forcément global.

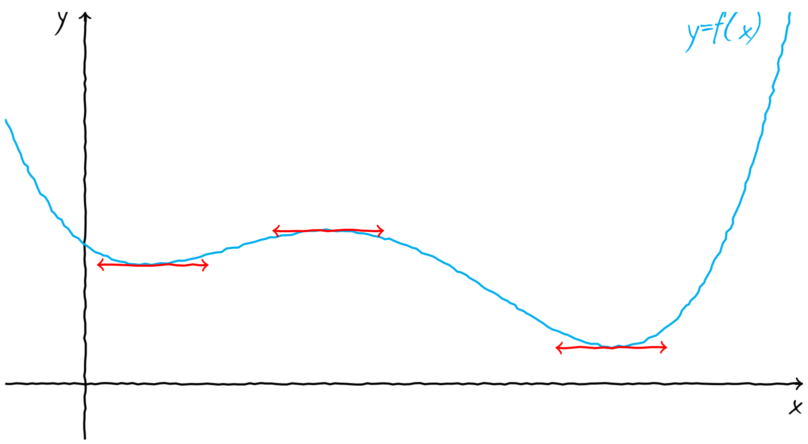


Proposition 4.21

Soit a un point de I qui n'est pas une extrémité de I. Si f est dérivable en a et que f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Illustration 4.22. Les tangentes à la courbe représentative de f aux extrema locaux sont horizontales.



La réciproque est fausse ! Penser par exemple à la fonction cube en zéro.

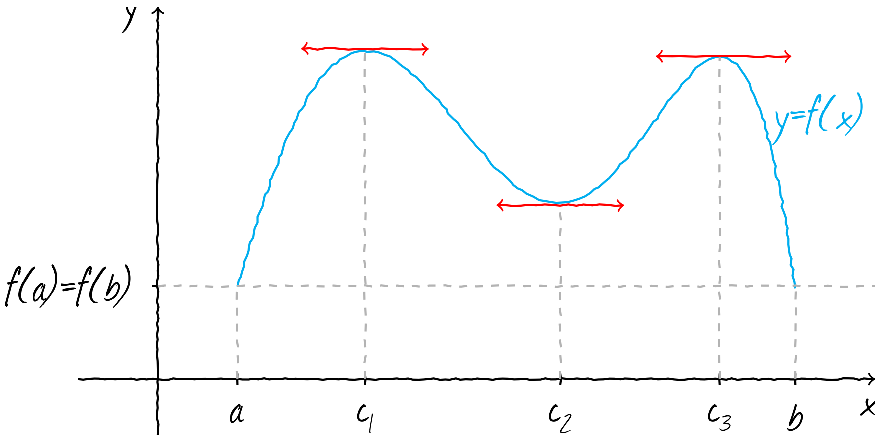
III.2 Accroissements finis

Théorème 4.23 (de Rolle)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ $(a < b)$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

Illustration 4.24. Il peut y avoir plusieurs points en lesquels f' s'annule.



Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Théorème 4.25 (des accroissements finis)

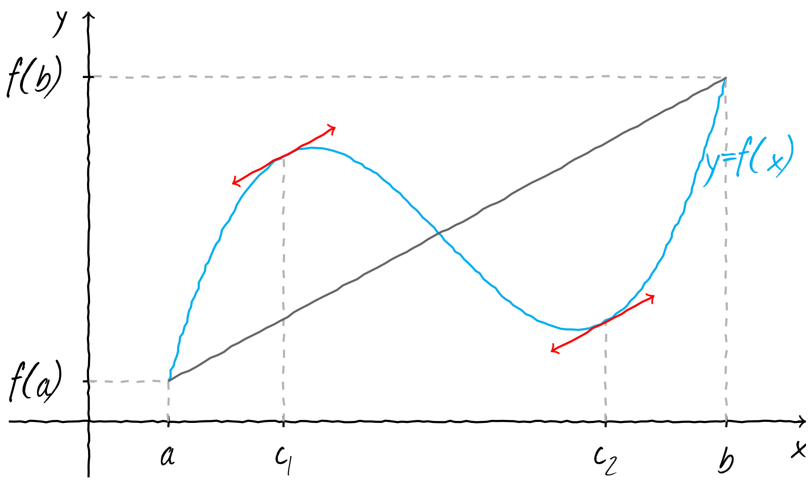
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ ($a<b$). Alors :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Illustration 4.26. Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

correspond à la pente de la droite reliant les points A et B de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Le théorème des accroissements finis dit qu'il existe au moints un réel c dans l'intervalle $]a,b[$ tel que le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $(c, f(c))$ soit le même que celui de la droite (AB).



Démonstration. Nous la ferons en classe. □

31 *facultatif.* Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

Indication : on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction :

$$g : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

32 *facultatif.* Un automobiliste met 10 minutes pour aller à son travail, situé à 15kms de chez lui. Montrer qu'il a atteint la vitesse de 90km/h lors de son trajet.

Corollaire 4.27 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ ($a < b$). Si la fonction f' est bornée sur $]a,b[$ par M, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a).$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

IV Variations des fonctions dérivables

Définitions 4.28. On rappelle que f est *croissante* si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)),$$

et que f est *strictement décroissante* si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$$

Théorème 4.29

Supposons f dérivable sur I. Alors :

(i) $f' = 0$ si et seulement si f est constante,

(ii) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante sur I,

(iii) si $f' > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

V Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

V.1 Définitions

Définition 4.30. On définit la *dérivée n-ième* d'une fonction par récurrence. On dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n-1$ fois dérivable sur I et que sa dérivée $(n-1)$-ème est dérivable. On note alors $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. On convient que $f^{(0)} = f$.

33 *obligatoire.* Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f'.
2. Justifier que f' est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f''.
3. Faire de même jusqu'à $f^{(4)}$.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ une formule de récurrence pour le calcul de $f^{(n)}$ et démontrer ce résultat.

Définition 4.31. On dit que f est *de classe* $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est dérivable n fois et si sa dérivée n-ième est continue. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Définition 4.32. Une fonction est dite *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4.33. Les fonctions usuelles (trigonométriques, polynomiales, fractions rationnelles, exponentielles, logarithmes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Remarque 4.34. La fonction racine carrée est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

V.2 Formule de Leibniz

Théorème 4.35 (Formule de Leibniz)

Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^n(I)^2$. Alors, $fg \in \mathscr{C}^n(I)$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n et est similaire à la démonstration de la formule du binôme. □

34 *obligatoire.* Soit φ l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x^2)\mathrm{e}^x. \end{array}$$

Notons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (1+x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x.$$

Appliquer la formule de Leibniz à φ et donner l'expression de $\varphi^{(n)}$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

V.3 Prolongement dérivable

Théorème 4.36 (de prolongement dérivable)

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et que

$$\lim_{a} f' = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\},$$

alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Corollaire 4.37

Dans les conditions du théorème précédent :

(i) si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;

(ii) si $\ell = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f présente une demi-tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. $\square$

35 *facultatif.* Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en 0.

V.4 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.38 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $(a, x) \in I^2$. Alors ::

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Démonstration. Admis. $\square$

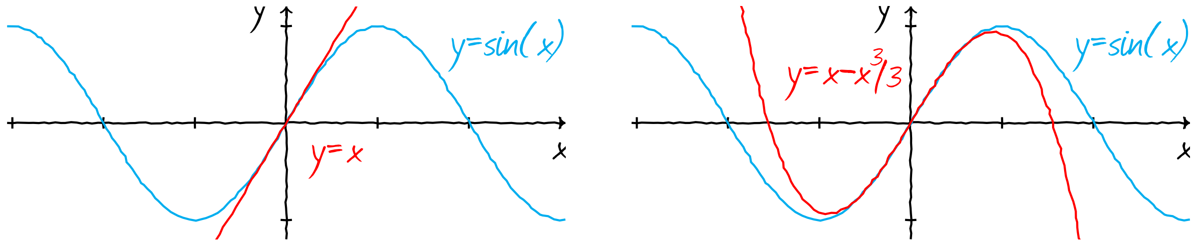
Remarque 4.39. Dans les conditions du théorème, ce résultat permet d'approcher f au voisinage de a par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

36 *facultatif.* On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$ puis écrire alors la formule de Taylor à l'ordre 3 en $a = 0$.

Illustration 4.40. Approximation de la fonction sinus au voisinage de 0.



I Les fonctions trigonométriques réciproques

Rappelons le résultat suivant vu au chapitre 4.

Théorème 5.1

Supposons que $f\colon I \to J$ (où I est un intervalle non vide non singulier de $\mathbb{R}$) est bijective et dérivable de dérivée non nulle. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

I.1 La fonction arc sinus

La fonction sinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, elle l'est de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$.

Définition 5.2. On appelle *arc sinus* et on note arcsin la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [-\pi/2; \pi/2] & \to & [-1; 1] \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in [-1; 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus vaut y :

$$\forall y \in [-1; 1], \quad \left(\arcsin(y) = x \iff \begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\pi/2; \pi/2] \end{cases} \right).$$

La fonction sin étant strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$, il en est de même de arcsin.

De plus, la dérivée de la fonction sinus ne s'annulant pas sur $]-\pi/2; \pi/2[$, on en déduit que arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$, et que :

$$\forall y \in]-1; 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

Or, pour tout $y \in]-1; 1[$:

$$\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - \sin^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2,$$

donc

$$|\cos(\arcsin(y))| = \sqrt{1 - y^2}.$$

Enfin, la fonction cos étant positive sur $]-\pi/2; \pi/2[$, on en déduit que

$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2}.$$

D'où

$$\forall y \in]-1; 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

La dérivée de arcsin est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1; 1[$, il en est donc de même pour arcsin.

En $-\pi/2$ et en $\pi/2$, la dérivée de la fonction sinus s'annule : la fonction arcsin présente donc en -1 et en 1 des demi-tangentes verticales.

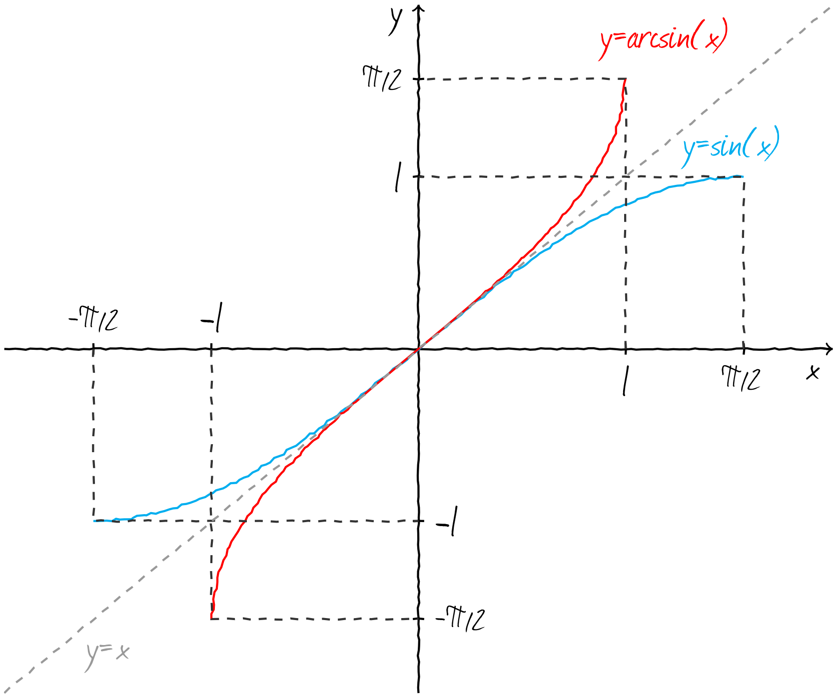
Proposition 5.3

La fonction arcsin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De plus, la courbe représentative de arcsin présente aux points d'abscisses 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Illustration 5.4. Graphe des fonctions sinus et arc sinus.



I.2 La fonction arccos

La fonction cosinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, elle l'est de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$.

Définition 5.5. On appelle *arc cosinus* et on note arccos la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in [-1;1]$, $\arccos(y)$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut y :

$$\forall y \in [-1;1], \quad \left(\arccos(y) = x \iff \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0;\pi] \end{cases}\right).$$

Proposition 5.6

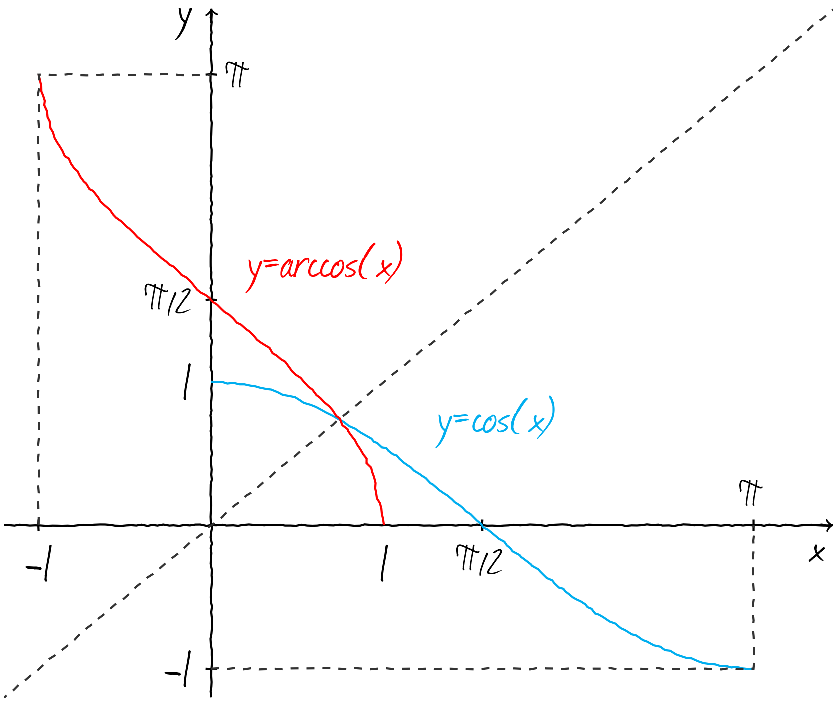
La fonction arccos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De plus, la courbe représentative de arccos présente aux points d'abscisses 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Démonstration. Exercice (*facultatif*) : s'inspirer de la construction faite pour la fonction arc sinus. □

Illustration 5.7. Graphe des fonctions cos et arccos.



I.3 La fonction arc tangente

Définition 5.8. On appelle arc tangente et on note arctan la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc}]-\pi/2;\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique angle compris strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut y :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left(\arctan(y) = x \iff \begin{cases} y = \tan x \\ x \in]-\pi/2;\pi/2[\end{cases} \right).$$

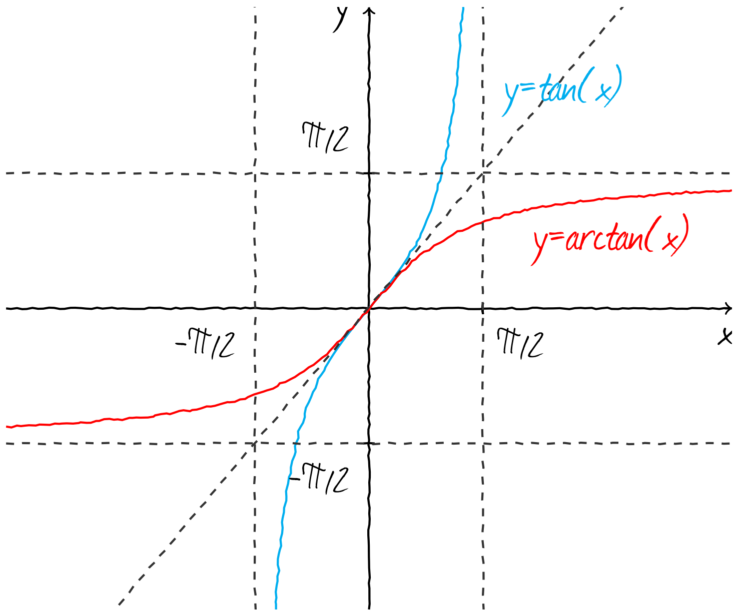
Proposition 5.9

La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Démonstration. Exercice (*facultatif*) : s'inspirer de la construction faite pour la fonction arc sinus. □

Illustration 5.10. Graphe des fonctions tan et arctan.



I.4 Quelques identités

Exemple 5.11. Montrons que :

$$\forall x \in [-1;1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Définissons la fonction f par :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos(x) + \arcsin(x). \end{array}$$

Alors, f est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur $]-1;1[$. Par continuité, elle l'est aussi sur $[-1;1]$. De plus :

$$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0,$$

d'où le résultat.

37 *facultatif.* Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0;1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2}).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1;0]$.

II Les fonctions hyperboliques

II.1 Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Définition 5.12. La fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, est la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch} & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \end{array}$$

Définition 5.13. La fonction *sinus hyperbolique*, notée sh, est la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh} & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \end{array}$$

Remarque 5.14. Le nom de ces fonctions provient de leur ressemblance avec les fonctions cosinus et sinus (en lien avec les formules d'Euler). Elles présentent des propriétés analogues aux fonctions circulaires (en relation avec le cercle trigonométrique d'équation $x^2+y^2=1$), mais sont construites autour de l'hyperbole d'équation $x^2-y^2=1$.

Proposition 5.15

La fonction cosinus hyperbolique est de classe $\mathscr{C}^\infty$, paire et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x).$$

Démonstration. Exercice (*obligatoire*). □

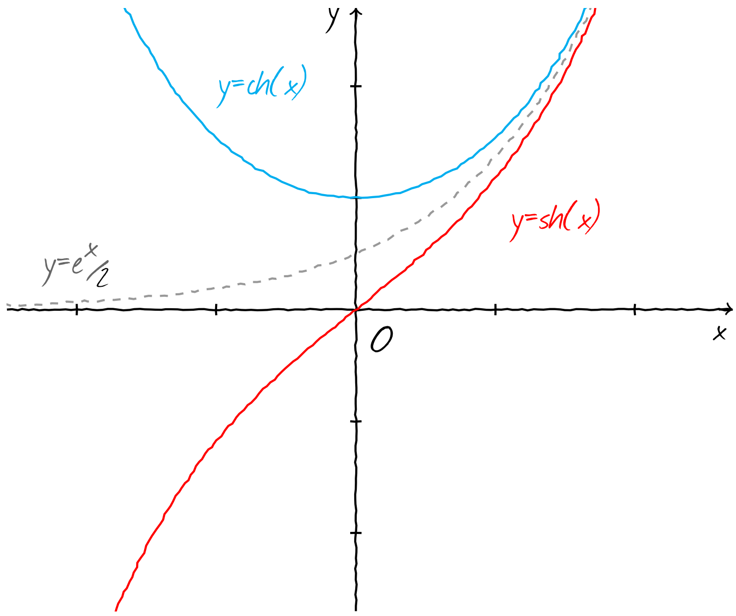
Proposition 5.16

La fonction sinus hyperbolique est de classe $\mathscr{C}^\infty$, impaire et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

Illustration 5.17. Graphe des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.



II.2 Trigonométrie hyperbolique

Proposition 5.18

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Démonstration. Exercice (*obligatoire*). □

Proposition 5.19

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b), \\ \mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a). \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

II.3 Tangente hyperbolique

Définition 5.20. La fonction *tangente hyperbolique*, notée th, est la fonction définie par :

$$\mathrm{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}.$$

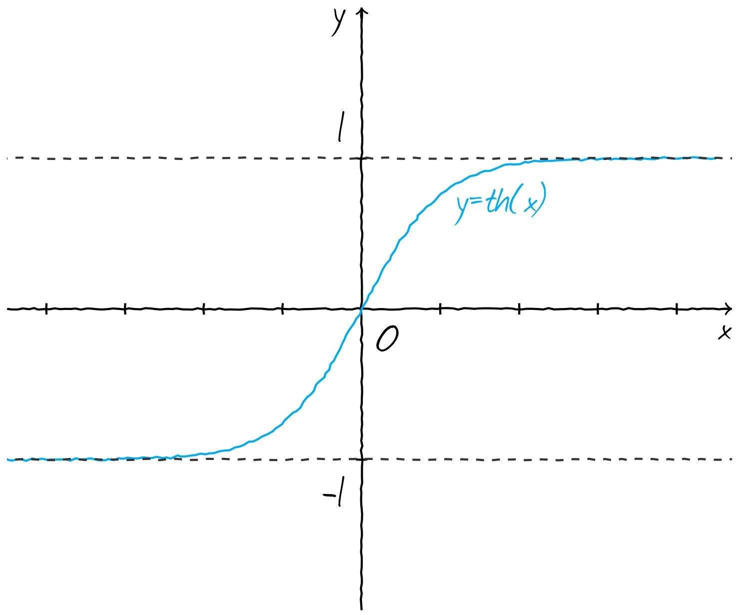
Proposition 5.21

La fonction tangente hyperbolique est de classe $\mathscr{C}^\infty$, impaire et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

Démonstration. Exercice (*facultatif*). □

Illustration 5.22. Graphe de la fonction tangente hyperbolique.



III Les fonctions logarithme et exponentielle

Définition 5.23. On appelle *logarithme népérien* et on note ln la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \ln & : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Remarque 5.24. La fonction ln ainsi définie est la primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\star$ qui s'annule en 1.

Proposition 5.25

La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et :

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition. □

Théorème 5.26

Pour tout $(x, y) \in (]0; +\infty[)^2$ et pour tout $k \in \mathbb{Q}$:

(i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

(ii) $\ln(1/x) = -\ln(x)$,

(iii) $\ln(x^k) = k\ln(x)$.

Démonstration. Exercice (*facultatif*).
Indication : à y fixé, on pourra considérer la fonction définie ci-dessous et la dériver :

$$f_y \; : \; \begin{array}{rcl}]0; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(xy). \end{array}$$

□

Propriété 5.27. La fonction ln réalise une bijection croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.28. On appelle *exponentielle* et on note exp la bijection réciproque du logarithme népérien. On note encore $e^x = \exp(x)$.

Proposition 5.29

La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)' = e^x.$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 5.1 : exercice (*facultatif*). □

Théorème 5.30

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

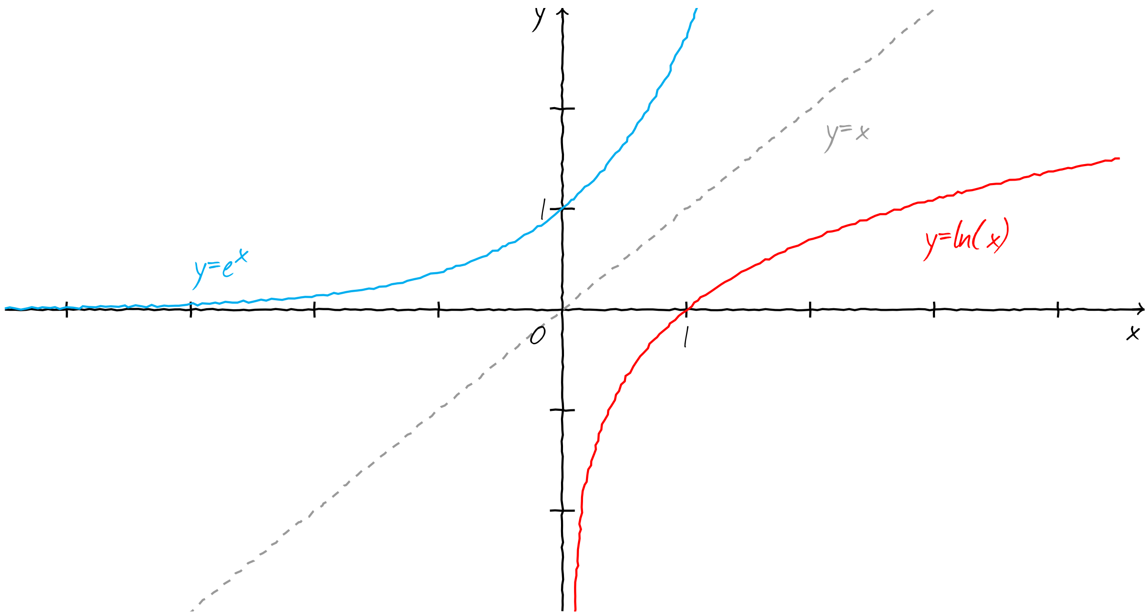
(i) $e^{x+y} = e^x e^y$,

(ii) $e^{-x} = 1/e^x$,

(iii) $e^{kx} = (e^x)^k$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés du logarithme népérien : exercice (*facultatif*). □

Illustration 5.31. Graphe des fonctions logarithme népérien et exponentielle.


y
y=x
1
y=e^x
y=ln(x)
0
1
x