



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 3
14 Marzo 2023 — Compito n. 00104

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-2x} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k1)!}.$$

1C) Si ha

$$x e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k x^k}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^6 \sin(3x),$$

e sia $T_n(x; 0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

2A) Si ha $T_1(x; 0) = 3x$.

2B) Si ha $T_6(x; 0) = 3x^6$.

2C) Si ha $f^{(7)}(0) = 3 \cdot 7!$.

2D) Si ha $f^{(7)}(0) = 3 \cdot 8!$.

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-6)^k.$$

3A) Il centro della serie è $x_0 = 6$.

3B) Se L in $(0, +\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 3$, la serie converge per $x = 12$.

3D) Se $a_7 \neq 0$, si ha $f^{(7)}(6) = a_7 \cdot 7!$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6x-19)^k}{(k+1)9^k}.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = \frac{19}{6}$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = 9$.

4C) La serie converge per $x = \frac{37}{6}$.

4D) La serie non converge per $x = \frac{5}{3}$.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00104

5) Sia

$$f(x) = x^5 \cos(4x^2) .$$

- a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 8 di $f(x)$.
c) Si calcoli $f^{(5)}(0)$.
d) Si calcoli $f^{(7)}(0)$.
-

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00104**

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{k \cdot 3^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzioni del compito 00104

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-2x} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

Falso: Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo $y = -2x$ si ha

$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k x^k}{k!} \neq - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Falso: Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione $y = 6x$ si ha

$$\cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

La risposta proposta, invece, è lo sviluppo di Taylor di $\sin(6x)$.

1C) Si ha

$$x e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k x^k}{k!}.$$

Falso: Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo $y = 5x$ si ha

$$e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k x^k}{k!},$$

da cui segue che

$$x e^{5x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k x^{k+1}}{k!} \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k x^k}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

Vero: Ricordando che

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k,$$

con la sostituzione $y = -3x$ si ha

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^6 \sin(3x),$$

e sia $T_n(x; 0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

Ricordando che

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

con la sostituzione $y = 3x$ si ha

$$\sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^6 \sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+7}}{(2k+1)!} = 3x^7 - \frac{9}{2}x^9 + \text{termini di grado maggiore di 9}.$$

2A) Si ha $T_1(x; 0) = 3x$.

Falso: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 1. Ne segue che $T_1(x; 0) = 0 \neq 3x$.

2B) Si ha $T_6(x, 0) = 3x^6$.

Falso: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 6. Ne segue che $T_6(x; 0) = 0 \neq 3x^6$.

2C) Si ha $f^{(7)}(0) = 3 \cdot 7!$.

Vero: Dalla (1) si ha che

$$T_7(x; 0) = 3x^7.$$

Dato che il termine di grado 7 nel polinomio di Taylor di $f(x)$ è $\frac{f^{(7)}(0)}{7!} x^7$, si ha

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(7)}(0) = 3 \cdot 7!.$$

2D) Si ha $f^{(7)}(0) = 3 \cdot 8!$.

Falso: Dalla (1) si vede che non ci sono termini di grado 8 nel polinomio di Taylor di $f(x)$. Ne segue che $f^{(8)}(0) = 0 \neq 3 \cdot 8!$.

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-6)^k.$$

Ricordiamo che in una serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

il punto x_0 si dice **centro** della serie, mentre la successione $\{a_k\}$ è la **successione dei coefficienti della serie**.

3A) Il centro della serie è $x_0 = 6$.

Vero: Dalla (1) segue che il centro della serie è $x_0 = 6$.

3B) Se L in $(0, +\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

Vero: Se L è come nella domanda, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 3$, la serie converge per $x = 12$.

Falso: Dato che il raggio di convergenza è $R = 3$, e il centro è $x_0 = 6$, la serie non converge se $|x-6| > 3$. Dato che $|12-6| = 6 > 3$, la serie non converge per $x = 12$.

3D) Se $a_7 \neq 0$, si ha $f^{(7)}(6) = a_7 \cdot 7!$.

Vero: Confrontando la serie di potenze con il polinomio di Taylor di ordine 7 di $f(x)$, che è

$$T_7(x; 6) = \sum_{k=0}^7 \frac{f^{(k)}(6)}{k!} (x-6)^k,$$

si ha che i termini di grado 7 sono

$$a_7 (x-6)^7 \quad \text{e} \quad \frac{f^{(7)}(6)}{7!} (x-6)^7,$$

da cui si deduce che

$$f^{(7)}(6) = a_7 \cdot 7!.$$

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6x - 19)^k}{(k+1)9^k}.$$

Mettendo in evidenza 6 al numeratore, si ha

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6x - 19)^k}{(k+1)9^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k}{(k+1)9^k} \left(x - \frac{19}{6}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro $x_0 = \frac{19}{6}$ e di coefficienti

$$a_k = \frac{6^k}{(k+1)9^k}.$$

Siccome

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{6^k}{(k+1)9^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6}{9} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{2}{3},$$

si ha che il raggio di convergenza della serie è

$$(2) \quad R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2},$$

e quindi la serie converge se $|x - \frac{19}{6}| < \frac{3}{2}$, e non converge se $|x - \frac{19}{6}| > \frac{3}{2}$.

4A) Il centro della serie è $x_0 = \frac{19}{6}$.

Vero: Per la (1) il centro della serie è $x_0 = \frac{19}{6}$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = 9$.

Falso: Per la (2) il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{3}{2} \neq 9$.

4C) La serie converge per $x = \frac{37}{6}$.

Falso: Dato che $|\frac{37}{6} - \frac{19}{6}| = 9 > \frac{3}{2} = R$, la serie non converge per $x = \frac{37}{6}$. Dato che per tale valore di x la serie è a termini positivi, la serie diverge.

4D) La serie non converge per $x = \frac{5}{3}$.

Falso: Per $x = \frac{5}{3}$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k}{(k+1)9^k} \left(\frac{5}{3} - \frac{19}{6}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k}{(k+1)9^k} \left(-\frac{9}{6}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

che è una serie convergente per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+1}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

5) Sia

$$f(x) = x^5 \cos(4x^2).$$

a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.

b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 8 di $f(x)$.

c) Si calcoli $f^{(5)}(0)$.

d) Si calcoli $f^{(7)}(0)$.

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione $y = 4x^2$ si ha

$$\cos(4x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k} x^{4k}}{(2k)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^5 \cos(4x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k} x^{4k+5}}{(2k)!}.$$

b) Dalla (1), scrivendo i termini corrispondenti a $k = 0$ e $k = 1$ si ha

$$f(x) = x^5 - 8x^9 + \text{termini di grado maggiore di 9},$$

da cui segue che

$$T_8(x; 0) = x^5.$$

c) Sempre dalla (1), si ha

$$f(x) = x^5 + \text{termini di grado maggiore di 5},$$

da cui segue (per confronto con i coefficienti del polinomio di Taylor di ordine 5 di $f(x)$) che

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 = x^5,$$

e quindi che

$$f^{(5)}(0) = 5!.$$

d) Nello sviluppo di Taylor di $f(x)$ non compaiono termini di grado 7, dato che $4k + 5 \neq 7$ per ogni k naturale. Ne segue che si ha

$$f^{(7)}(0) = 0.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{k \cdot 3^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzione:

a) Il centro della serie di potenze è $x_0 = 2$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k \cdot 3^k}$, e che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 3^k}} = \frac{1}{3},$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{1}{L} = 3$.

c) Dato che il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 3$, e che il centro è $x_0 = 2$, la serie converge se $|x - 2| < 3$, ovvero se x appartiene a $(-1, 5)$, e non converge se $|x - 2| > 3$, ovvero se x non appartiene a $[-1, 5]$. Rimane da studiare la convergenza per $x = -1$ e per $x = 5$. Per $x = -1$ si ha $x - 2 = -3$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per $x = 5$ si ha $x - 2 = 3$, e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$

che diverge essendo la serie armonica. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie è

$$E = [-1, 5).$$

d) Derivando termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-2)^{k-1}}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{k-1}}{3 \cdot 3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^h.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^h = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x-2}{3}} = \frac{1}{5-x}.$$