



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 2
7 Marzo 2023 — Compito n. 00036

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

- 1A) La serie di termine generico a_k diverge.
1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+4}{a_k+3}$ è divergente.
1C) Se $b_k \geq a_k + 6$, la serie di termine generico b_k è divergente.
1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-2} a_k}{k^2}$ è convergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- 2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{6^k}{k!})$ è divergente.
2B) La serie di termine generico $\arctg(\frac{5}{k^3})$ è convergente.
2C) La serie di termine generico $k^5 (\frac{6}{7})^k$ è divergente.
2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt{k}} \ln(2 + \frac{2^k}{k!})$ è divergente.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- 3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è convergente.
3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+6}$ è convergente.
3C) La serie di termine generico $k! \sin(4k\pi)$ è indeterminata.
3D) La serie di termine generico $(-1)^k \frac{6^k}{k!}$ è convergente.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- 4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^5}$ converge semplicemente ma non assolutamente.
4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+5}$ converge semplicemente ma non assolutamente.
4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k k}{k+5}$ è indeterminata.
4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge semplicemente e assolutamente.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00036

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 5^k .$$

- a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{7^k}$.
- b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^3}{k!}$.
- c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.
- d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^5 5^k}\right)$.
-

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00036**

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^3}.$$

- a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
 - b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
 - c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
 - d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.
-

Soluzioni del compito 00036

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

1A) La serie di termine generico a_k diverge.

Falso: Essendo la serie a termini positivi, la serie può o convergere, o divergere positivamente. Senza ulteriori condizioni, però, il solo fatto che la successione a_k tenda a zero **non è sufficiente** a stabilire quale delle due eventualità si verifica. Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k}$ la serie diverge, mentre se $a_k = \frac{1}{k^2}$ la serie converge.

1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+4}{a_k+3}$ è divergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k + 4}{a_k + 3} = \frac{0 + 4}{0 + 3} = \frac{4}{3} \neq 0,$$

la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata. Essendo la serie a termini positivi, o converge o diverge positivamente, e dato che non converge, deve obbligatoriamente divergere.

1C) Se $b_k \geq a_k + 6$, la serie di termine generico b_k è divergente.

Vero: Dato che $a_k > 0$, si ha

$$b_k \geq a_k + 6 > 0 + 6 = 6,$$

da cui segue che la successione b_k non tende a zero. Dato che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, e la serie è a termini positivi, la serie diverge. Analogamente, si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k \geq \sum_{k=1}^n [a_k + 6] > \sum_{k=1}^n 6 = 6n.$$

Dato che la successione $6n$ diverge, anche la successione S_n diverge.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-2a_k}}{k^2}$ è convergente.

Vero: Si ha, dato che $a_k > 0$,

$$0 \leq \frac{e^{-2a_k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ è convergente (è una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{6^k}{k!})$ è divergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6^k}{k!} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{6^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6}{k+1} = 0,$$

e quindi la serie converge.

2B) La serie di termine generico $\arctg(\frac{5}{k^3})$ è convergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{5}{k^3} = 0,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{k^3},$$

che è convergente essendo (a meno del fattore 5) una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

2C) La serie di termine generico $k^5 (\frac{6}{7})^k$ è divergente.

Falso: Appliciamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k^5 \left(\frac{6}{7}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6}{7} (\sqrt[k]{k})^5 = \frac{6}{7} 1^5 = \frac{6}{7} < 1,$$

e quindi la serie converge.

2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[2]{k}} \ln(2 + \frac{2^k}{k!})$ è divergente.

Vero: Osserviamo che, essendo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^k}{k!} = 0,$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{2^k}{k!}\right) = \ln(2) \neq 0.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}},$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è convergente.

Vero: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+6}$ è convergente.

Vero: Osserviamo che $\cos(k\pi/2)$ vale zero se k è dispari, mentre vale $(-1)^h$ se $k = 2h$ è pari. Pertanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k+6} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+6},$$

e l'ultima serie è convergente per il criterio di Leibniz (dato che $b_h = \frac{1}{2h+6}$ è positiva, decrescente e infinitesima).

3C) La serie di termine generico $k! \sin(4k\pi)$ è indeterminata.

Falso: Dato che $\sin(4k\pi) = 0$ per ogni k , la serie è la serie nulla. . .

3D) La serie di termine generico $(-1)^k \frac{6^k}{k!}$ è convergente.

Vero: Osserviamo che la successione $\frac{6^k}{k!}$ è decrescente per ogni $k \geq 5$. Infatti, si ha

$$\frac{6^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{6^k}{k!} \iff \frac{6}{k+1} \leq 1 \iff k \geq 5.$$

Se ne deduce che la serie data converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{6^k}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^5}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Falso: Dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^5} \right| = \frac{1}{k^5},$$

e che la serie di termine generico $\frac{1}{k^5}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 5 > 1$), la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+5}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Vero: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+5}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. D'altra parte, la serie dei moduli diverge essendo la serie armonica, dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k+5} \right| = \frac{1}{k+5},$$

e quindi la serie non converge assolutamente.

4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k k}{k+5}$ è indeterminata.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+5} = 1,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria; essendo a termini di segno variabile, la serie è indeterminata.

4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge semplicemente e assolutamente.

Vero: Dato che

$$|(-1)^k a_k| = |a_k| = a_k,$$

e dato che per ipotesi la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 5^k.$$

a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{7^k}$.

b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^3}{k!}$.

c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.

d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^5 5^k}\right)$.

Soluzione:

a) Se $a_k = \frac{(-1)^k}{7^k}$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{5}{7}\right)^k,$$

che converge essendo una serie geometrica con $q = -\frac{5}{7}$ appartenente a $(-1, 1)$.

b) Se $a_k = \frac{k^3}{k!}$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3 5^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^3 5^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^3 5^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \frac{5}{k+1} = 1^3 \cdot 0 = 0,$$

e quindi la serie converge.

c) Sia

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 5^k.$$

Se $n = 10^{100}$, allora, per la formula sulla somma di una progressione geometrica, e dato che $a_k \equiv 1$ per ogni $k \leq n$,

$$S_{10^{100}} = \sum_{k=0}^{10^{100}} 1 \cdot 5^k = \frac{5^{10^{100}+1} - 1}{4} = \bar{S}.$$

Se $n > 10^{100}$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 5^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 5^k + \sum_{k=10^{100}+1}^n a_k 5^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 5^k = \bar{S},$$

dato che $a_k = 0$ per ogni $k > 10^{100}$. Se ne deduce che la successione S_n è definitivamente uguale a \bar{S} e quindi converge (a \bar{S}).

d) Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)^5 5^k} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^5 5^k} 5^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^5},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 5 > 1$.

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^3}.$$

a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.

b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.

c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.

d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

Soluzione:

a) Se $A = 1$, la serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

b) Se $A = -1$, la serie è la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^3},$$

che converge semplicemente (per il criterio di Leibniz, dato che $b_k = \frac{1}{(k+1)^3}$ è una successione positiva, decrescente e infinitesima) e assolutamente (dato che la serie dei moduli è la serie della parte **a**)).

c) Se $-1 < A < 1$, si ha $|A^k| \leq 1$, e quindi

$$\left| \frac{A^k}{(k+1)^3} \right| = \frac{|A^k|}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{(k+1)^3}$ è convergente (si veda la parte **a**)), la serie data converge assolutamente (per il criterio del confronto), e quindi converge anche semplicemente.

d) Se $A > 1$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{(k+1)^3} = +\infty.$$

Dato che la serie è a termini positivi, e non soddisfa la condizione necessaria, la serie è divergente.