Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 2
7 Marzo 2023 — Compito n. 00122

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che
$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,.$$

1A) La serie di termine generico a_k è indeterminata.
1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+2}{a_k+9}$ è convergente.
1C) Se $b_k \geq a_k + 1$, la serie di termine generico b_k è divergente.
1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-6\,a_k}}{k^2}$ è convergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{5^k}{k!})$ è divergente.
2B) La serie di termine generico $\mathrm{arc\,tg}(\frac{4}{k^4})$ è divergente.
2C) La serie di termine generico $k^2\,(\frac{3}{4})^k$ è convergente.
2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\,\ln(2+\frac{6^k}{k!})$ è divergente.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è indeterminata.
3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\,\pi/2)}{k+4}$ è convergente.
3C) La serie di termine generico $k!\,\sin(5\,k\,\pi)$ è indeterminata.
3D) La serie di termine generico $(-1)^k\,\frac{4^k}{k!}$ è indeterminata.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^6}$ converge semplicemente ma non assolutamente.
4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+3}$ converge semplicemente ma non assolutamente.
4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k\,k}{k+7}$ è indeterminata.
4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k\,a_k$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Docente: ______________________

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, 4^k\,.$$

a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{8^k}$.
b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^4}{k!}$.
c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.
d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin(\frac{1}{(k+1)^6\, 4^k})$.

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00122**

---

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^2}\,.$$

a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

Soluzioni del compito 00122

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,.$$

1A) La serie di termine generico a_k è indeterminata.

Falso: Essendo la serie a termini positivi, la serie può o convergere, o divergere positivamente; in ogni caso, non può essere indeterminata (ovvero: la successione delle somme parziali ha sempre limite, finito o infinito che sia).

1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+2}{a_k+9}$ è convergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k+2}{a_k+9} = \frac{0+2}{0+9} = \frac{2}{9} \neq 0\,,$$

la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata. Essendo la serie a termini positivi, o converge o diverge positivamente, e dato che non converge, deve obbligatoriamente divergere.

1C) Se $b_k \geq a_k + 1$, la serie di termine generico b_k è divergente.

Vero: Dato che $a_k > 0$, si ha

$$b_k \geq a_k + 1 > 0 + 1 = 1\,,$$

da cui segue che la successione b_k non tende a zero. Dato che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, e la serie è a termini positivi, la serie diverge. Analogamente, si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{n} [a_k + 1] > \sum_{k=1}^{n} 1 = 1\,n\,.$$

Dato che la successione $1\,n$ diverge, anche la successione S_n diverge.

1D) La serie di termine generico $\frac{\mathrm{e}^{-6\,a_k}}{k^2}$ è convergente.

Vero: Si ha, dato che $a_k > 0$,

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-6\,a_k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ è convergente (è una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{5^k}{k!})$ è divergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{5^k}{k!} = 0\,,$$

e dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!}\,.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{5^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{5^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{5}{k+1} = 0\,,$$

e quindi la serie converge.

2B) La serie di termine generico $\operatorname{arc\,tg}(\frac{4}{k^4})$ è divergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{4}{k^4} = 0\,,$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^4}\,,$$

che è convergente essendo (a meno del fattore 4) una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 4 > 1$.

2C) La serie di termine generico $k^2\,(\frac{3}{4})^k$ è convergente.

Vero: Applichiamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k^2\left(\frac{3}{4}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3}{4}\,(\sqrt[k]{k})^2 = \frac{3}{4}\,1^2 = \frac{3}{4} < 1\,,$$

e quindi la serie converge.

2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\,\ln(2 + \frac{6^k}{k!})$ è divergente.

Vero: Osserviamo che, essendo

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{6^k}{k!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \ln\left(2 + \frac{6^k}{k!}\right) = \ln(2) \neq 0\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}\,,$$
che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è indeterminata.

Falso: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k!}$ è positiva, decresecente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\,\pi/2)}{k+4}$ è convergente.

Vero: Osserviamo che $\cos(k\,\pi/2)$ vale zero se k è dispari, mentre vale $(-1)^h$ se $k = 2h$ è pari. Pertanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\,\pi/2)}{k+4} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+4},$$

e l'ultima serie è convergente per il criterio di Leibniz (dato che $b_h = \frac{1}{2h+4}$ è positiva, decrescente e infinitesima).

3C) La serie di termine generico $k!\,\sin(5\,k\,\pi)$ è indeterminata.

Falso: Dato che $\sin(5\,k\,\pi) = 0$ per ogni k, la serie è la serie nulla...

3D) La serie di termine generico $(-1)^k\,\frac{4^k}{k!}$ è indeterminata.

Falso: Osserviamo che la successione $\frac{4^k}{k!}$ è decrescente per ogni $k \geq 3$. Infatti, si ha

$$\frac{4^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{4^k}{k!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{4}{k+1} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k \geq 3\,.$$

Se ne deduce che la serie data converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{4^k}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^6}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Falso: Dato che

$$\Big|\frac{(-1)^k}{k^6}\Big| = \frac{1}{k^6}\,,$$

e che la serie di termine generico $\frac{1}{k^6}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 6 > 1$), la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+3}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Vero: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+3}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. D'altra parte, la serie dei moduli diverge essendo la serie armonica, dato che

$$\Big|\frac{(-1)^k}{k+3}\Big| = \frac{1}{k+3}\,,$$

e quindi la serie non converge assolutamente.

4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k\,k}{k+7}$ è indeterminata.

Vero: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+7} = 1\,,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria; essendo a termini di segno variabile, la serie è indeterminata.

4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k\,a_k$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Falso: Dato che

$$|(-1)^k\,a_k| = |a_k| = a_k\,,$$

e dato che per ipotesi la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k\,a_k$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

---

5) Si consideri la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,4^k\,.$$
a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{8^k}$.
b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^4}{k!}$.
c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.
d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin(\frac{1}{(k+1)^6\,4^k})$.

Soluzione:
a) Se $a_k = \frac{(-1)^k}{8^k}$, la serie diventa
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,4^k}{8^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k\,,$$
che converge essendo una serie geometrica con $q = -\frac{1}{2}$ appartenente a $(-1,1)$.

b) Se $a_k = \frac{k^4}{k!}$, la serie diventa
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^4\,4^k}{k!}\,.$$
Applicando il criterio del rapporto, si ha
$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^4\,4^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{k^4\,4^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^4 \frac{4}{k+1} = 1^4 \cdot 0 = 0\,,$$
e quindi la serie converge.

c) Sia
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,4^k\,.$$
Se $n = 10^{100}$, allora, per la formula sulla somma di una progressione geometrica, e dato che $a_k \equiv 1$ per ogni $k \leq n$,
$$S_{10^{100}} = \sum_{k=0}^{10^{100}} 1 \cdot 4^k = \frac{4^{10^{100}+1} - 1}{3} = \overline{S}\,.$$
Se $n > 10^{100}$, allora
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,4^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k\,4^k + \sum_{k=10^{100}+1}^{n} a_k\,4^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k\,4^k = \overline{S}\,,$$
dato che $a_k = 0$ per ogni $k > 10^{100}$. Se ne deduce che la successione S_n è definitivamente uguale a $\overline{S}$ e quindi converge (a $\overline{S}$).

d) Dato che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(k+1)^6\,4^k} = 0\,,$$
e dato che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^6\,4^k}\,4^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^6}\,,$$
che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 6 > 1$.

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^2}\,.$$

a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

Soluzione:
a) Se $A = 1$, la serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\,,$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$.

b) Se $A = -1$, la serie è la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\,,$$

che converge semplicemente (per il criterio di Leibniz, dato che $b_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ è una successione positiva, descrescente e infinitesima) e assolutamente (dato che la serie dei moduli è la serie della parte **a)**).

c) Se $-1 < A < 1$, si ha $|A^k| \leq 1$, e quindi

$$\left|\frac{A^k}{(k+1)^2}\right| = \frac{|A^k|}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{(k+1)^2}$ è convergente (si veda la parte **a)**), la serie data converge assolutamente (per il criterio del confronto), e quindi converge anche semplicemente.

d) Se $A > 1$ si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^2} = +\infty\,.$$

Dato che la serie è a termini positivi, e non soddisfa la condizione necessaria, la serie è divergente.