Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 1
28 Febbraio 2023 — Compito n. 00187

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La serie di termine generico $\frac{1}{k+1}$ è convergente.

1B) La serie di termine generico $\frac{5^k}{6^k}$ è convergente.

1C) La serie di termine generico $\frac{1}{k\sqrt{k}}$ è convergente.

1D) La serie di termine generico $\frac{6^k}{(-5)^k}$ non converge.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\frac{4^k}{5^k}$ converge a 4.

2B)
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}\,.$$

2C)
$$\sum_{k=19}^{+\infty} 3^k = +\infty\,.$$

2D) La serie di termine generico $\frac{11}{3^k}$ converge a $\frac{33}{2}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{k}{k+6}$ può essere convergente.

3B) La serie di termine generico $\cos^2(\frac{1}{k+6})$ è divergente.

3C) La serie di termine generico $\sin(\frac{1}{k+4})$ o converge, o diverge positivamente.

3D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+2}$ soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $e^{\frac{2}{k^2}} - 1$ è divergente.

4B) La serie di termine generico $\ln(1 + \frac{5}{k})$ è convergente.

4C) La serie di termine generico $\mathrm{tg}(\frac{k}{k+6})$ è divergente.

4D) La serie di termine generico $k^7 \sin(\frac{1}{k^{10}})$ è convergente.

Docente: ______________________

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00187**

---

5) Sia $a_k = \frac{1}{k^8}$ per $k \geq 1$.
a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \,.$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{k+6}} \,.$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathrm{tg}(a_k) \,.$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(a_k)}{\ln(1+a_k)} \,.$$

---

6) Sia $a_k = 3^k$ per $k \geq 0$.

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k} \, .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k} \, .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 \, a_k}{k!} \, .$$

Soluzioni del compito 00187

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La serie di termine generico $\frac{1}{k+1}$ è convergente.

Falso: La serie è la serie armonica (o, volendo, la serie armonica generalizzata con $\alpha = 1$), e quindi è divergente.

1B) La serie di termine generico $\frac{5^k}{6^k}$ è convergente.

Vero: Si tratta della serie geometrica di termine generico $\frac{5}{6} < 1$, ed è quindi convergente.

1C) La serie di termine generico $\frac{1}{k\sqrt{k}}$ è convergente.

Vero: Si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, ed è quindi una serie convergente.

1D) La serie di termine generico $\frac{6^k}{(-5)^k}$ non converge.

Vero: Si tratta della serie geometrica con $q = -\frac{6}{5} < -1$, che è una serie non convergente.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che, se $-1 < q < 1$, si ha

(1) $$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,,$$

mentre, se $q \geq 1$, si ha

(2) $$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = +\infty\,,$$

nel senso che la serie diverge positivamente.

2A) La serie di termine generico $\frac{4^k}{5^k}$ converge a 4.

Falso: Dalla (1), con $q = \frac{4}{5}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5 \neq 4\,.$$

2B)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}\,.$$

Falso: Si ha, usando la (1) con $q = \frac{1}{3}$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-2}} = \frac{1}{9}\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{3^h} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{2}\,.$$

2C)

$$\sum_{k=19}^{+\infty} 3^k = +\infty\,.$$

Vero: Si ha, per la (2) con $q = 3 > 1$,

$$\sum_{k=19}^{+\infty} 3^k = 3^{19}\sum_{k=19}^{+\infty} 3^{k-19} = 3^{19}\sum_{h=0}^{+\infty} 3^h = +\infty\,.$$

2D) La serie di termine generico $\frac{11}{3^k}$ converge a $\frac{33}{2}$.

Vero: Si ha, dalla (1) con $q = \frac{1}{3}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{11}{3^k} = 11\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = 11\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{33}{2}\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che:

(1) se il termine generico di una serie non tende a zero, la serie non può essere convergente (condizione necessaria);

(2) una serie a termini positivi o converge, o diverge positivamente.

3A) La serie di termine generico $\frac{k}{k+6}$ può essere convergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+6} = 1 \neq 0\,,$$

la serie non può essere convergente per la (1). Osservando poi che la serie è a termini positivi, per la (2) si ha che la serie diverge.

3B) La serie di termine generico $\cos^2(\frac{1}{k+6})$ è divergente.

Vero: La serie è a termini positivi; per la (2), o converge o diverge. Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \cos^2\left(\frac{1}{k+6}\right) = 1\,,$$

il termine generico della serie non è infinitesimo e quindi, per la (1), la serie non può convergere. Ne consegue che la serie è divergente.

3C) La serie di termine generico $\sin(\frac{1}{k+4})$ o converge, o diverge positivamente.

Vero: Si tratta di una serie a termini positivi; per la (2), quindi, la serie o converge o diverge positivamente. Dato che il termine generico della serie tende a zero, dalla (1) non si può concludere nulla.

3D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+2}$ soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

Vero: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} = 0\,,$$

la serie soddisfa la condizione necessaria di convergenza.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo il criterio del confronto asintotico: date due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$, entrambe a termini positivi, se si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L\,,$$

con

$$0 < L < +\infty\,, \tag{1}$$

allora la serie di termine generico a_k è convergente se e solo se la serie di termine generico b_k è convergente (ricordiamo, che, essendo a termini positivi, entrambe le serie o convergono o divergono positivamente).

4A) La serie di termine generico $\mathrm{e}^{\frac{2}{k^2}} - 1$ è divergente.

Falso: Si ha, per uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{k^2}} - 1}{\frac{2}{k^2}} = 1 = L\,.$$

Dato che L soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2}\,,$$

che è convergente, essendo — a meno del fattore moltiplicativo 2 — una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è dunque convergente.

4B) La serie di termine generico $\ln(1 + \frac{5}{k})$ è convergente.

Falso: Si ha, per uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{5}{k}\right)}{\frac{5}{k}} = 1 = L\,.$$

Dato che L soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{k}\,,$$

che è divergente, essendo — a meno del fattore moltiplicativo 5 — la serie armonica. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è dunque divergente.

4C) La serie di termine generico $\mathrm{tg}(\frac{k}{k+6})$ è divergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{k}{k+6}\right) = \mathrm{tg}(1) \neq 0\,,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Essendo a termini positivi, la serie diverge.

4D) La serie di termine generico $k^7\,\sin(\frac{1}{k^{10}})$ è convergente.

Vero: Si ha, ricordando uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^7\,\sin\left(\frac{1}{k^{10}}\right)}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k^{10}}\right)}{\frac{1}{k^{10}}} = 1 = L\,.$$

Dato che L soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3},$$

che è convergente essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha = 3 > 1$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è convergente.

5) Sia $a_k = \frac{1}{k^8}$ per $k \geq 1$.

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \,.$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{k+6}} \,.$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathrm{tg}(a_k) \,.$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(a_k)}{\ln(1+a_k)} \,.$$

Soluzione:

a) Si tratta di una serie armonica generalizzata con $\alpha = 8 > 1$; la serie, pertanto, converge.

b) Dato che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{a_{k+6}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+6)^8}{k^8} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k+6}{k}\right)^8 = 1^8 = 1 \,,$$
la serie non soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Dato che è a termini positivi, la serie diverge.

c) Dato che, essendo a_k infinitesima, si ha $\mathrm{tg}(a_k) \approx a_k$, per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportamento della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} \,.$$
Quest'ultima serie è convergente, essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha = 6 > 1$. Ne segue che la serie data converge.

d) Ricordando che, essendo a_k infinitesima, si ha $1 - \cos(a_k) \approx \frac{a_k^2}{2}$ e $\ln(1+a_k) \approx a_k$, per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso comportamento della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{2a_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \,,$$
che è convergente (si veda l'esercizio a)). Ne segue che la serie data converge.

6) Sia $a_k = 3^k$ per $k \geq 0$.
a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \,.$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k} \,.$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k} \,.$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2\, a_k}{k!} \,.$$

Soluzione:
a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 3 > 1$; la serie, pertanto, diverge positivamente.
b) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{3} < 1$; la serie, pertanto, converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \,.$$

c) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{3}{4} < 1$; la serie, pertanto, converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{4^k} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \,.$$

d) Applichiamo il criterio del rapporto alla serie di termine generico

$$b_k = \frac{k^2\, a_k}{k!} = \frac{k^2\, 3^k}{k!} \,.$$

Si ha

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^2\, 3^{k+1}}{(k+1)!}\, \frac{k!}{k^2\, 3^k} = 3 \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1}{k+1} \,,$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} 3 \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1}{k+1} = 3 \cdot 1^2 \cdot 0 = 0 \,,$$

e quindi la serie converge (dato che $0 < 1$).