



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 3  
14 Marzo 2023 — Compito n. 00108

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

**Punteggi:** 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-3x} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

1C) Si ha

$$x e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^{k+1}}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 6^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^2 \sin(3x),$$

e sia  $T_n(x; 0)$  il polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f(x)$  nell'origine.

2A) Si ha  $T_1(x; 0) = 3x$ .

2B) Si ha  $T_2(x; 0) = 0$ .

2C) Si ha  $f^{(3)}(0) = 3 \cdot 3!$ .

2D) Si ha  $f^{(3)}(0) = 0$ .

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-5)^k.$$

3A) Il centro della serie è  $x_0 = 5$ .

3B) Se  $L$  in  $(0, +\infty)$ ,  $L \neq 1$ , è il limite di  $\sqrt[k]{|a_k|}$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = L$ .

3C) Se il raggio di convergenza della serie è  $R = 2$ , la serie converge per  $x = 9$ .

3D) Se  $a_6 \neq 0$ , si ha  $f^{(6)}(5) = a_6 \cdot 6!$ .

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4x-13)^k}{(k+1)5^k}.$$

4A) Il centro della serie è  $x_0 = 13$ .

4B) Il raggio di convergenza della serie è  $R = 5$ .

4C) La serie converge per  $x = \frac{23}{4}$ .

4D) La serie converge per  $x = 2$ .

**Docente:** \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00108

---

5) Sia

$$f(x) = x^2 \cos(2x^2) .$$

- a) Si scriva la serie di Taylor di  $f(x)$ .  
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 5 di  $f(x)$ .  
c) Si calcoli  $f^{(2)}(0)$ .  
d) Si calcoli  $f^{(4)}(0)$ .
-

--	--	--	--	--	--	--	--

**Cognome****Nome****Matricola****Compito 00108**

---

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^k}{k \cdot 3^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
  - b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
  - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
  - d) Si calcoli  $f'(x)$ .
-

## Soluzioni del compito 00108

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

1A) Si ha

$$e^{-3x} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

**Falso:** Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo  $y = -3x$  si ha

$$e^{-3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^k x^k}{k!} \neq - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

---

1B) Si ha

$$\cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

**Vero:** Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione  $y = 6x$  si ha

$$\cos(6x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

---

1C) Si ha

$$x e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^{k+1}}{k!}.$$

**Vero:** Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo  $y = 3x$  si ha

$$e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!},$$

da cui segue che

$$x e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^{k+1}}{k!}.$$

---

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 6^k x^k.$$

**Falso:** Ricordando che

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k,$$

con la sostituzione  $y = -6x$  si ha

$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 6^k x^k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} 6^k x^k.$$

---

2) Sia

$$f(x) = x^2 \sin(3x),$$

e sia  $T_n(x; 0)$  il polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f(x)$  nell'origine.

---

Ricordando che

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

con la sostituzione  $y = 3x$  si ha

$$\sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^2 \sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+3}}{(2k+1)!} = 3x^3 - \frac{9}{2}x^5 + \text{termini di grado maggiore di 5}.$$

---

**2A)** Si ha  $T_1(x; 0) = 3x$ .

**Falso:** Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di  $f(x)$  non ha termini di grado minore o uguale a 1. Ne segue che  $T_1(x; 0) = 0 \neq 3x$ .

---

**2B)** Si ha  $T_2(x; 0) = 0$ .

**Vero:** Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di  $f(x)$  non ha termini di grado minore o uguale a 2. Ne segue che  $T_2(x; 0) = 0$ .

---

**2C)** Si ha  $f^{(3)}(0) = 3 \cdot 3!$ .

**Vero:** Dalla (1) si ha che

$$T_3(x; 0) = 3x^3.$$

Dato che il termine di grado 3 nel polinomio di Taylor di  $f(x)$  è  $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3$ , si ha

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(3)}(0) = 3 \cdot 3!.$$

---

**2D)** Si ha  $f^{(3)}(0) = 0$ .

**Vero:** Dalla (1) si vede che non ci sono termini di grado 4 nel polinomio di Taylor di  $f(x)$ . Ne segue che  $f^{(4)}(0) = 0$ .

---

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-5)^k.$$

---

Ricordiamo che in una serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

il punto  $x_0$  si dice **centro** della serie, mentre la successione  $\{a_k\}$  è la **successione dei coefficienti della serie**.

---

**3A)** Il centro della serie è  $x_0 = 5$ .

**Vero:** Dalla (1) segue che il centro della serie è  $x_0 = 5$ .

---

**3B)** Se  $L$  in  $(0, +\infty)$ ,  $L \neq 1$ , è il limite di  $\sqrt[k]{|a_k|}$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = L$ .

**Falso:** Se  $L$  è come nella domanda, il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} \neq L$ .

---

**3C)** Se il raggio di convergenza della serie è  $R = 2$ , la serie converge per  $x = 9$ .

**Falso:** Dato che il raggio di convergenza è  $R = 2$ , e il centro è  $x_0 = 5$ , la serie non converge se  $|x-5| > 2$ . Dato che  $|9-5| = 4 > 2$ , la serie non converge per  $x = 9$ .

---

**3D)** Se  $a_6 \neq 0$ , si ha  $f^{(6)}(5) = a_6 \cdot 6!$ .

**Vero:** Confrontando la serie di potenze con il polinomio di Taylor di ordine 6 di  $f(x)$ , che è

$$T_6(x; 5) = \sum_{k=0}^6 \frac{f^{(k)}(5)}{k!} (x-5)^k,$$

si ha che i termini di grado 6 sono

$$a_6 (x-5)^6 \quad \text{e} \quad \frac{f^{(6)}(5)}{6!} (x-5)^6,$$

da cui si deduce che

$$f^{(6)}(5) = a_6 \cdot 6!.$$

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4x - 13)^k}{(k+1)5^k}.$$

---

Mettendo in evidenza 4 al numeratore, si ha

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4x - 13)^k}{(k+1)5^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(k+1)5^k} \left(x - \frac{13}{4}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro  $x_0 = \frac{13}{4}$  e di coefficienti

$$a_k = \frac{4^k}{(k+1)5^k}.$$

Siccome

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{4^k}{(k+1)5^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{4}{5},$$

si ha che il raggio di convergenza della serie è

$$(2) \quad R = \frac{1}{L} = \frac{5}{4},$$

e quindi la serie converge se  $|x - \frac{13}{4}| < \frac{5}{4}$ , e non converge se  $|x - \frac{13}{4}| > \frac{5}{4}$ .

---

**4A)** Il centro della serie è  $x_0 = 13$ .

**Falso:** Per la (1) il centro della serie è  $x_0 = \frac{13}{4} \neq 13$ .

---

**4B)** Il raggio di convergenza della serie è  $R = 5$ .

**Falso:** Per la (2) il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{5}{4} \neq 5$ .

---

**4C)** La serie converge per  $x = \frac{23}{4}$ .

**Falso:** Dato che  $|\frac{23}{4} - \frac{13}{4}| = \frac{5}{2} > \frac{5}{4} = R$ , la serie non converge per  $x = \frac{23}{4}$ . Dato che per tale valore di  $x$  la serie è a termini positivi, la serie diverge.

---

**4D)** La serie converge per  $x = 2$ .

**Vero:** Per  $x = 2$  la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(k+1)5^k} \left(2 - \frac{13}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(k+1)5^k} \left(-\frac{5}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

che è una serie convergente per il criterio di Leibniz, dato che la successione  $b_k = \frac{1}{k+1}$  è positiva, decrescente e infinitesima.

---



5) Sia

$$f(x) = x^2 \cos(2x^2).$$

a) Si scriva la serie di Taylor di  $f(x)$ .

b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 5 di  $f(x)$ .

c) Si calcoli  $f^{(2)}(0)$ .

d) Si calcoli  $f^{(4)}(0)$ .

---

**Soluzione:**

a) Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione  $y = 2x^2$  si ha

$$\cos(2x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{4k}}{(2k)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^2 \cos(2x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{4k+2}}{(2k)!}.$$

b) Dalla (1), scrivendo i termini corrispondenti a  $k = 0$  e  $k = 1$  si ha

$$f(x) = x^2 - 2x^6 + \text{termini di grado maggiore di 6},$$

da cui segue che

$$T_5(x; 0) = x^2.$$

c) Sempre dalla (1), si ha

$$f(x) = x^2 + \text{termini di grado maggiore di 2},$$

da cui segue (per confronto con i coefficienti del polinomio di Taylor di ordine 2 di  $f(x)$ ) che

$$\frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 = x^2,$$

e quindi che

$$f^{(2)}(0) = 2!.$$

d) Nello sviluppo di Taylor di  $f(x)$  non compaiono termini di grado 4, dato che  $4k + 2 \neq 4$  per ogni  $k$  naturale. Ne segue che si ha

$$f^{(4)}(0) = 0.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^k}{k \cdot 3^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
- b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
- c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
- d) Si calcoli  $f'(x)$ .

---

**Soluzione:**

a) Il centro della serie di potenze è  $x_0 = 8$ .

b) Dato che  $a_k = \frac{1}{k \cdot 3^k}$ , e che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 3^k}} = \frac{1}{3},$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è  $R = \frac{1}{L} = 3$ .

c) Dato che il raggio di convergenza della serie di potenze è  $R = 3$ , e che il centro è  $x_0 = 8$ , la serie converge se  $|x - 8| < 3$ , ovvero se  $x$  appartiene a  $(5, 11)$ , e non converge se  $|x - 8| > 3$ , ovvero se  $x$  non appartiene a  $[5, 11]$ . Rimane da studiare la convergenza per  $x = 5$  e per  $x = 11$ . Per  $x = 5$  si ha  $x - 8 = -3$  e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per  $x = 11$  si ha  $x - 8 = 3$ , e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$

che diverge essendo la serie armonica. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie è

$$E = [5, 11).$$

d) Derivando termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-8)^{k-1}}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^{k-1}}{3 \cdot 3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x-8}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-8}{3}\right)^h.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-8}{3}\right)^h = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x-8}{3}} = \frac{1}{11-x}.$$