



**Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 3**  
**14 Marzo 2023 — Compito n. 00053**

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

**Punteggi:** 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
<b>V</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>C</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**1)** Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**1A)** Si ha

$$e^{-4x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k x^k}{k!}.$$

**1B)** Si ha

$$\cos(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**1C)** Si ha

$$x e^{7x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^k x^k}{k!}.$$

**1D)** Si ha

$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 6^k x^k.$$

**2)** Sia

$$f(x) = x^7 \sin(3x),$$

e sia  $T_n(x; 0)$  il polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f(x)$  nell'origine.

**2A)** Si ha  $T_1(x; 0) = 0$ .

**2B)** Si ha  $T_7(x; 0) = 0$ .

**2C)** Si ha  $f^{(8)}(0) = 3$ .

**2D)** Si ha  $f^{(8)}(0) = 3 \cdot 9!$ .

**3)** Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-4)^k.$$

**3A)** Il centro della serie è  $x_0 = 4$ .

**3B)** Se  $L$  in  $(0, +\infty)$ ,  $L \neq 1$ , è il limite di  $\sqrt[k]{|a_k|}$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = L$ .

**3C)** Se il raggio di convergenza della serie è  $R = 5$ , la serie non converge per  $x = 14$ .

**3D)** Se  $a_5 \neq 0$ , si ha  $f^{(5)}(4) = a_5$ .

**4)** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-15)^k}{(k+1)3^k}.$$

**4A)** Il centro della serie è  $x_0 = 15$ .

**4B)** Il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{3}{2}$ .

**4C)** La serie converge per  $x = \frac{21}{2}$ .

**4D)** La serie converge per  $x = 6$ .

**Docente:** \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00053

---

5) Sia

$$f(x) = x^6 \cos(7x^2).$$

- a) Si scriva la serie di Taylor di  $f(x)$ .  
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 9 di  $f(x)$ .  
c) Si calcoli  $f^{(6)}(0)$ .  
d) Si calcoli  $f^{(8)}(0)$ .
-

--	--	--	--	--	--	--	--

**Cognome**

**Nome**

**Matricola**

**Compito 00053**

---

**6)** Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^k}{k \cdot 11^k}.$$

- a)** Si determini il centro della serie di potenze.
  - b)** Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
  - c)** Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
  - d)** Si calcoli  $f'(x)$ .
-

## Soluzioni del compito 00053

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

1A) Si ha

$$e^{-4x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k x^k}{k!}.$$

**Vero:** Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo  $y = -4x$  si ha

$$e^{-4x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k x^k}{k!}.$$

---

1B) Si ha

$$\cos(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**Falso:** Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione  $y = 3x$  si ha

$$\cos(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

La risposta proposta, invece, è lo sviluppo di Taylor di  $\sin(3x)$ .

---

1C) Si ha

$$x e^{7x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^k x^k}{k!}.$$

**Falso:** Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo  $y = 7x$  si ha

$$e^{7x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^k x^k}{k!},$$

da cui segue che

$$x e^{7x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^k x^{k+1}}{k!} \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^k x^k}{k!}.$$

---

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 6^k x^k.$$

**Falso:** Ricordando che

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k,$$

con la sostituzione  $y = -6x$  si ha

$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 6^k x^k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} 6^k x^k.$$

---

2) Sia

$$f(x) = x^7 \sin(3x),$$

e sia  $T_n(x; 0)$  il polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f(x)$  nell'origine.

---

Ricordando che

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

con la sostituzione  $y = 3x$  si ha

$$\sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^7 \sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+8}}{(2k+1)!} = 3x^8 - \frac{9}{2}x^{10} + \text{termini di grado maggiore di 10}.$$

---

**2A)** Si ha  $T_1(x; 0) = 0$ .

**Vero:** Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di  $f(x)$  non ha termini di grado minore o uguale a 1. Ne segue che  $T_1(x; 0) = 0$ .

---

**2B)** Si ha  $T_7(x, 0) = 0$ .

**Vero:** Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di  $f(x)$  non ha termini di grado minore o uguale a 7. Ne segue che  $T_7(x; 0) = 0$ .

---

**2C)** Si ha  $f^{(8)}(0) = 3$ .

**Falso:** Dalla (1) si ha che

$$T_8(x; 0) = 3x^8.$$

Dato che il termine di grado 8 nel polinomio di Taylor di  $f(x)$  è  $\frac{f^{(8)}(0)}{8!} x^8$ , si ha

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(8)}(0) = 3 \cdot 8! \neq 3.$$

---

**2D)** Si ha  $f^{(8)}(0) = 3 \cdot 9!$ .

**Falso:** Dalla (1) si vede che non ci sono termini di grado 9 nel polinomio di Taylor di  $f(x)$ . Ne segue che  $f^{(9)}(0) = 0 \neq 3 \cdot 9!$ .

---

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-4)^k.$$

---

Ricordiamo che in una serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

il punto  $x_0$  si dice **centro** della serie, mentre la successione  $\{a_k\}$  è la **successione dei coefficienti della serie**.

---

**3A)** Il centro della serie è  $x_0 = 4$ .

**Vero:** Dalla (1) segue che il centro della serie è  $x_0 = 4$ .

---

**3B)** Se  $L$  in  $(0, +\infty)$ ,  $L \neq 1$ , è il limite di  $\sqrt[k]{|a_k|}$ , il raggio di convergenza della serie è  $R = L$ .

**Falso:** Se  $L$  è come nella domanda, il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{L} \neq L$ .

---

**3C)** Se il raggio di convergenza della serie è  $R = 5$ , la serie non converge per  $x = 14$ .

**Vero:** Dato che il raggio di convergenza è  $R = 5$ , e il centro è  $x_0 = 4$ , la serie non converge se  $|x-4| > 5$ . Dato che  $|14-4| = 10 > 5$ , la serie non converge per  $x = 14$ .

---

**3D)** Se  $a_5 \neq 0$ , si ha  $f^{(5)}(4) = a_5$ .

**Falso:** Confrontando la serie di potenze con il polinomio di Taylor di ordine 5 di  $f(x)$ , che è

$$T_5(x; 4) = \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(4)}{k!} (x-4)^k,$$

si ha che i termini di grado 5 sono

$$a_5 (x-4)^5 \quad \text{e} \quad \frac{f^{(5)}(4)}{5!} (x-4)^5,$$

da cui si deduce che

$$f^{(5)}(4) = a_5 \cdot 5! \neq a_5,$$

dato che  $a_5 \neq 0$ .

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x - 15)^k}{(k+1)3^k}.$$

---

Mettendo in evidenza 2 al numeratore, si ha

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x - 15)^k}{(k+1)3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)3^k} \left(x - \frac{15}{2}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro  $x_0 = \frac{15}{2}$  e di coefficienti

$$a_k = \frac{2^k}{(k+1)3^k}.$$

Siccome

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{(k+1)3^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{2}{3},$$

si ha che il raggio di convergenza della serie è

$$(2) \quad R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2},$$

e quindi la serie converge se  $|x - \frac{15}{2}| < \frac{3}{2}$ , e non converge se  $|x - \frac{15}{2}| > \frac{3}{2}$ .

---

**4A)** Il centro della serie è  $x_0 = 15$ .

**Falso:** Per la (1) il centro della serie è  $x_0 = \frac{15}{2} \neq 15$ .

---

**4B)** Il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{3}{2}$ .

**Vero:** Per la (2) il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{3}{2}$ .

---

**4C)** La serie converge per  $x = \frac{21}{2}$ .

**Falso:** Dato che  $|\frac{21}{2} - \frac{15}{2}| = 3 > \frac{3}{2} = R$ , la serie non converge per  $x = \frac{21}{2}$ . Dato che per tale valore di  $x$  la serie è a termini positivi, la serie diverge.

---

**4D)** La serie converge per  $x = 6$ .

**Vero:** Per  $x = 6$  la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)3^k} \left(6 - \frac{15}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)3^k} \left(-\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

che è una serie convergente per il criterio di Leibniz, dato che la successione  $b_k = \frac{1}{k+1}$  è positiva, decrescente e infinitesima.

---



5) Sia

$$f(x) = x^6 \cos(7x^2).$$

a) Si scriva la serie di Taylor di  $f(x)$ .

b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 9 di  $f(x)$ .

c) Si calcoli  $f^{(6)}(0)$ .

d) Si calcoli  $f^{(8)}(0)$ .

---

**Soluzione:**

a) Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione  $y = 7x^2$  si ha

$$\cos(7x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 7^{2k} x^{4k}}{(2k)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^6 \cos(7x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 7^{2k} x^{4k+6}}{(2k)!}.$$

b) Dalla (1), scrivendo i termini corrispondenti a  $k = 0$  e  $k = 1$  si ha

$$f(x) = x^6 - \frac{49}{2} x^{10} + \text{termini di grado maggiore di 10},$$

da cui segue che

$$T_9(x; 0) = x^6.$$

c) Sempre dalla (1), si ha

$$f(x) = x^6 + \text{termini di grado maggiore di 6},$$

da cui segue (per confronto con i coefficienti del polinomio di Taylor di ordine 6 di  $f(x)$ ) che

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} x^6 = x^6,$$

e quindi che

$$f^{(6)}(0) = 6!.$$

d) Nello sviluppo di Taylor di  $f(x)$  non compaiono termini di grado 8, dato che  $4k + 6 \neq 8$  per ogni  $k$  naturale. Ne segue che si ha

$$f^{(8)}(0) = 0.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^k}{k \cdot 11^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
- b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
- c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
- d) Si calcoli  $f'(x)$ .

---

**Soluzione:**

a) Il centro della serie di potenze è  $x_0 = 6$ .

b) Dato che  $a_k = \frac{1}{k \cdot 11^k}$ , e che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 11^k}} = \frac{1}{11},$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è  $R = \frac{1}{L} = 11$ .

c) Dato che il raggio di convergenza della serie di potenze è  $R = 11$ , e che il centro è  $x_0 = 6$ , la serie converge se  $|x - 6| < 11$ , ovvero se  $x$  appartiene a  $(-5, 17)$ , e non converge se  $|x - 6| > 11$ , ovvero se  $x$  non appartiene a  $[-5, 17]$ . Rimane da studiare la convergenza per  $x = -5$  e per  $x = 17$ . Per  $x = -5$  si ha  $x - 6 = -11$  e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per  $x = 17$  si ha  $x - 6 = 11$ , e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$

che diverge essendo la serie armonica. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie è

$$E = [-5, 17).$$

d) Derivando termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-6)^{k-1}}{k \cdot 11^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^{k-1}}{11 \cdot 11^{k-1}} = \frac{1}{11} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x-6}{11}\right)^{k-1} = \frac{1}{11} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-6}{11}\right)^h.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{11} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-6}{11}\right)^h = \frac{1}{11} \frac{1}{1 - \frac{x-6}{11}} = \frac{1}{17-x}.$$