



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 2
7 Marzo 2023 — Compito n. 00104

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

1A) La serie di termine generico a_k converge.

1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+6}{a_k+11}$ è convergente.

1C) Se $b_k \geq a_k + 5$, la serie di termine generico b_k è divergente.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-4a_k}}{k^2}$ è divergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{4^k}{k!})$ è convergente.

2B) La serie di termine generico $\arctg(\frac{7}{k^6})$ è divergente.

2C) La serie di termine generico $k^2(\frac{3}{4})^k$ è convergente.

2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[7]{k}} \ln(2 + \frac{7^k}{k!})$ è divergente.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è convergente.

3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+3}$ è indeterminata.

3C) La serie di termine generico $k! \sin(6k\pi)$ è indeterminata.

3D) La serie di termine generico $(-1)^k \frac{4^k}{k!}$ è convergente.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^4}$ converge semplicemente e assolutamente.

4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+3}$ converge semplicemente e assolutamente.

4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k k}{k+7}$ è indeterminata.

4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00104

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 3^k .$$

- a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{9^k}$.
- b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^5}{k!}$.
- c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.
- d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^6 3^k}\right)$.
-

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00104**

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^2}.$$

- a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
 - b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
 - c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
 - d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.
-

Soluzioni del compito 00104

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

1A) La serie di termine generico a_k converge.

Falso: Essendo la serie a termini positivi, la serie può o convergere, o divergere positivamente. Senza ulteriori condizioni, però, il solo fatto che la successione a_k tenda a zero **non è sufficiente** a stabilire quale delle due eventualità si verifica. Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k}$ la serie diverge, mentre se $a_k = \frac{1}{k^2}$ la serie converge.

1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+6}{a_k+11}$ è convergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k + 6}{a_k + 11} = \frac{0 + 6}{0 + 11} = \frac{6}{11} \neq 0,$$

la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata. Essendo la serie a termini positivi, o converge o diverge positivamente, e dato che non converge, deve obbligatoriamente divergere.

1C) Se $b_k \geq a_k + 5$, la serie di termine generico b_k è divergente.

Vero: Dato che $a_k > 0$, si ha

$$b_k \geq a_k + 5 > 0 + 5 = 5,$$

da cui segue che la successione b_k non tende a zero. Dato che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, e la serie è a termini positivi, la serie diverge. Analogamente, si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k \geq \sum_{k=1}^n [a_k + 5] > \sum_{k=1}^n 5 = 5n.$$

Dato che la successione $5n$ diverge, anche la successione S_n diverge.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-4a_k}}{k^2}$ è divergente.

Falso: Si ha, dato che $a_k > 0$,

$$0 \leq \frac{e^{-4a_k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ è convergente (è una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{4^k}{k!})$ è convergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4^k}{k!} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{4^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4}{k+1} = 0,$$

e quindi la serie converge.

2B) La serie di termine generico $\arctg(\frac{7}{k^6})$ è divergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7}{k^6} = 0,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{7}{k^6},$$

che è convergente essendo (a meno del fattore 7) una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 6 > 1$.

2C) La serie di termine generico $k^2 (\frac{3}{4})^k$ è convergente.

Vero: Appliciamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} (\sqrt[k]{k})^2 = \frac{3}{4} 1^2 = \frac{3}{4} < 1,$$

e quindi la serie converge.

2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \ln(2 + \frac{7^k}{k!})$ è divergente.

Vero: Osserviamo che, essendo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7^k}{k!} = 0,$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{7^k}{k!}\right) = \ln(2) \neq 0.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{7}}},$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{7} < 1$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è convergente.

Vero: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+3}$ è indeterminata.

Falso: Osserviamo che $\cos(k\pi/2)$ vale zero se k è dispari, mentre vale $(-1)^h$ se $k = 2h$ è pari. Pertanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k+3} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+3},$$

e l'ultima serie è convergente per il criterio di Leibniz (dato che $b_h = \frac{1}{2h+3}$ è positiva, decrescente e infinitesima).

3C) La serie di termine generico $k! \sin(6k\pi)$ è indeterminata.

Falso: Dato che $\sin(6k\pi) = 0$ per ogni k , la serie è la serie nulla. . .

3D) La serie di termine generico $(-1)^k \frac{4^k}{k!}$ è convergente.

Vero: Osserviamo che la successione $\frac{4^k}{k!}$ è decrescente per ogni $k \geq 3$. Infatti, si ha

$$\frac{4^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{4^k}{k!} \iff \frac{4}{k+1} \leq 1 \iff k \geq 3.$$

Se ne deduce che la serie data converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{4^k}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^4}$ converge semplicemente e assolutamente.

Vero: Dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^4} \right| = \frac{1}{k^4},$$

e che la serie di termine generico $\frac{1}{k^4}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 4 > 1$), la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+3}$ converge semplicemente e assolutamente.

Falso: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+3}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. D'altra parte, la serie dei moduli diverge essendo la serie armonica, dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k+3} \right| = \frac{1}{k+3},$$

e quindi la serie non converge assolutamente.

4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k k}{k+7}$ è indeterminata.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+7} = 1,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria; essendo a termini di segno variabile, la serie è indeterminata.

4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Falso: Dato che

$$|(-1)^k a_k| = |a_k| = a_k,$$

e dato che per ipotesi la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 3^k.$$

a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{9^k}$.

b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^5}{k!}$.

c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.

d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^6 3^k}\right)$.

Soluzione:

a) Se $a_k = \frac{(-1)^k}{9^k}$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{9^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k,$$

che converge essendo una serie geometrica con $q = -\frac{1}{3}$ appartenente a $(-1, 1)$.

b) Se $a_k = \frac{k^5}{k!}$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^5 3^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^5 3^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^5 3^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^5 \frac{3}{k+1} = 1^5 \cdot 0 = 0,$$

e quindi la serie converge.

c) Sia

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 3^k.$$

Se $n = 10^{100}$, allora, per la formula sulla somma di una progressione geometrica, e dato che $a_k \equiv 1$ per ogni $k \leq n$,

$$S_{10^{100}} = \sum_{k=0}^{10^{100}} 1 \cdot 3^k = \frac{3^{10^{100}+1} - 1}{2} = \bar{S}.$$

Se $n > 10^{100}$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 3^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 3^k + \sum_{k=10^{100}+1}^n a_k 3^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 3^k = \bar{S},$$

dato che $a_k = 0$ per ogni $k > 10^{100}$. Se ne deduce che la successione S_n è definitivamente uguale a \bar{S} e quindi converge (a \bar{S}).

d) Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)^6 3^k} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^6 3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^6},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 6 > 1$.

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^2}.$$

a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.

b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.

c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.

d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

Soluzione:

a) Se $A = 1$, la serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$.

b) Se $A = -1$, la serie è la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2},$$

che converge semplicemente (per il criterio di Leibniz, dato che $b_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ è una successione positiva, decrescente e infinitesima) e assolutamente (dato che la serie dei moduli è la serie della parte **a**)).

c) Se $-1 < A < 1$, si ha $|A^k| \leq 1$, e quindi

$$\left| \frac{A^k}{(k+1)^2} \right| = \frac{|A^k|}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{(k+1)^2}$ è convergente (si veda la parte **a**)), la serie data converge assolutamente (per il criterio del confronto), e quindi converge anche semplicemente.

d) Se $A > 1$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{(k+1)^2} = +\infty.$$

Dato che la serie è a termini positivi, e non soddisfa la condizione necessaria, la serie è divergente.