**Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 2**
**7 Marzo 2023 — Compito n. 00076**

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

**Nome:** ______________________________

**Cognome:** ______________________________

**Matricola:** | | | | | | | |

**Punteggi**: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| **F** | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| **C** | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |

---

**1)** Sia $a_k > 0$ una successione tale che
$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,.$$

**1A)** La serie di termine generico $a_k$ è indeterminata.
**1B)** La serie di termine generico $\frac{a_k+2}{a_k+7}$ è convergente.
**1C)** Se $b_k \geq a_k + 3$, la serie di termine generico $b_k$ è convergente.
**1D)** La serie di termine generico $\frac{\mathrm{e}^{-6\,a_k}}{k^2}$ è convergente.

---

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**2A)** La serie di termine generico $\sin(\frac{4^k}{k!})$ è divergente.
**2B)** La serie di termine generico $\mathrm{arc\,tg}(\frac{5}{k^3})$ è convergente.
**2C)** La serie di termine generico $k^3\,(\frac{6}{7})^k$ è convergente.
**2D)** La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[7]{k}}\,\ln(2+\frac{6^k}{k!})$ è divergente.

---

**3)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**3A)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è indeterminata.
**3B)** La serie di termine generico $\frac{\cos(k\,\pi/2)}{k+5}$ è convergente.
**3C)** La serie di termine generico $k!\,\sin(2\,k\,\pi)$ è indeterminata.
**3D)** La serie di termine generico $(-1)^k\,\frac{7^k}{k!}$ è indeterminata.

---

**4)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**4A)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^3}$ converge semplicemente e assolutamente.
**4B)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+7}$ converge semplicemente e assolutamente.
**4C)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k\,k}{k+7}$ converge.
**4D)** Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico $a_k$ è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k\,a_k$ converge semplicemente e assolutamente.

---

**Docente:** ______________________________

**5)** Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, 3^k \, .$$

**a)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{7^k}$.

**b)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^6}{k!}$.

**c)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.

**d)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin(\frac{1}{(k+1)^3 \, 3^k})$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| □□□□□□□□ | **Cognome** | **Nome** | **Matricola** | **Compito 00076** |

**6)** Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^4} \,.$$

**a)** Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
**b)** Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
**c)** Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
**d)** Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

# Soluzioni del compito 00076

**1)** Sia $a_k > 0$ una successione tale che
$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,.$$

---

**1A)** La serie di termine generico $a_k$ è indeterminata.

**Falso:** Essendo la serie a termini positivi, la serie può o convergere, o divergere positivamente; in ogni caso, non può essere indeterminata (ovvero: la successione delle somme parziali ha sempre limite, finito o infinito che sia).

---

**1B)** La serie di termine generico $\frac{a_k+2}{a_k+7}$ è convergente.

**Falso:** Dato che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k+2}{a_k+7} = \frac{0+2}{0+7} = \frac{2}{7} \neq 0\,,$$
la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata. Essendo la serie a termini positivi, o converge o diverge positivamente, e dato che non converge, deve obbligatoriamente divergere.

---

**1C)** Se $b_k \geq a_k + 3$, la serie di termine generico $b_k$ è convergente.

**Falso:** Dato che $a_k > 0$, si ha
$$b_k \geq a_k + 3 > 0 + 3 = 3\,,$$
da cui segue che la successione $b_k$ non tende a zero. Dato che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, e la serie è a termini positivi, la serie diverge. Analogamente, si ha
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{n} [a_k + 3] > \sum_{k=1}^{n} 3 = 3\,n\,.$$
Dato che la successione $3\,n$ diverge, anche la successione $S_n$ diverge.

---

**1D)** La serie di termine generico $\frac{\mathrm{e}^{-6\,a_k}}{k^2}$ è convergente.

**Vero:** Si ha, dato che $a_k > 0$,
$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-6\,a_k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}\,.$$
Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ è convergente (è una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto.

---

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**2A)** La serie di termine generico $\sin(\frac{4^k}{k!})$ è divergente.

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{4^k}{k!} = 0\,,$$

e dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!}\,.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{4^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{4^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{4}{k+1} = 0\,,$$

e quindi la serie converge.

---

**2B)** La serie di termine generico $\operatorname{arc\,tg}(\frac{5}{k^3})$ è convergente.

**Vero:** Dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{5}{k^3} = 0\,,$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{k^3}\,,$$

che è convergente essendo (a meno del fattore 5) una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

---

**2C)** La serie di termine generico $k^3\,(\frac{6}{7})^k$ è convergente.

**Vero:** Applichiamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k^3\left(\frac{6}{7}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{6}{7}\,(\sqrt[k]{k})^3 = \frac{6}{7}\,1^3 = \frac{6}{7} < 1\,,$$

e quindi la serie converge.

---

**2D)** La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[7]{k}}\,\ln(2 + \frac{6^k}{k!})$ è divergente.

**Vero:** Osserviamo che, essendo

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{6^k}{k!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \ln\left(2 + \frac{6^k}{k!}\right) = \ln(2) \neq 0\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{7}}},$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{7} < 1$.

---

**3)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**3A)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è indeterminata.

**Falso:** Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k!}$ è positiva, decresecente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

---

**3B)** La serie di termine generico $\frac{\cos(k\,\pi/2)}{k+5}$ è convergente.

**Vero:** Osserviamo che $\cos(k\,\pi/2)$ vale zero se $k$ è dispari, mentre vale $(-1)^h$ se $k = 2h$ è pari. Pertanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\,\pi/2)}{k+5} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+5}\,,$$

e l'ultima serie è convergente per il criterio di Leibniz (dato che $b_h = \frac{1}{2h+5}$ è positiva, decrescente e infinitesima).

---

**3C)** La serie di termine generico $k!\,\sin(2\,k\,\pi)$ è indeterminata.

**Falso:** Dato che $\sin(2\,k\,\pi) = 0$ per ogni $k$, la serie è la serie nulla...

---

**3D)** La serie di termine generico $(-1)^k\,\frac{7^k}{k!}$ è indeterminata.

**Falso:** Osserviamo che la successione $\frac{7^k}{k!}$ è decrescente per ogni $k \geq 6$. Infatti, si ha

$$\frac{7^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{7^k}{k!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{7}{k+1} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k \geq 6\,.$$

Se ne deduce che la serie data converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{7^k}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

---

**4)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**4A)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^3}$ converge semplicemente e assolutamente.

**Vero:** Dato che
$$\left|\frac{(-1)^k}{k^3}\right| = \frac{1}{k^3}\,,$$
e che la serie di termine generico $\frac{1}{k^3}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$), la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

---

**4B)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+7}$ converge semplicemente e assolutamente.

**Falso:** Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+7}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. D'altra parte, la serie dei moduli diverge essendo la serie armonica, dato che
$$\left|\frac{(-1)^k}{k+7}\right| = \frac{1}{k+7}\,,$$
e quindi la serie non converge assolutamente.

---

**4C)** La serie di termine generico $\frac{(-1)^k\,k}{k+7}$ converge.

**Falso:** Dato che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+7} = 1\,,$$
la serie non soddisfa la condizione necessaria; essendo a termini di segno variabile, la serie è indeterminata.

---

**4D)** Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico $a_k$ è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k\,a_k$ converge semplicemente e assolutamente.

**Vero:** Dato che
$$|(-1)^k\,a_k| = |a_k| = a_k\,,$$
e dato che per ipotesi la serie di termine generico $a_k$ è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k\,a_k$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

---

**5)** Si consideri la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, 3^k\,.$$
**a)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{7^k}$.
**b)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^6}{k!}$.
**c)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \le 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.
**d)** Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin(\frac{1}{(k+1)^3\, 3^k})$.

---

**Soluzione:**
**a)** Se $a_k = \frac{(-1)^k}{7^k}$, la serie diventa
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 3^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{7}\right)^k,$$
che converge essendo una serie geometrica con $q = -\frac{3}{7}$ appartenente a $(-1,1)$.

**b)** Se $a_k = \frac{k^6}{k!}$, la serie diventa
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^6\, 3^k}{k!}\,.$$
Applicando il criterio del rapporto, si ha
$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^6\, 3^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{k^6\, 3^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^6 \frac{3}{k+1} = 1^6 \cdot 0 = 0\,,$$
e quindi la serie converge.

**c)** Sia
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, 3^k\,.$$
Se $n = 10^{100}$, allora, per la formula sulla somma di una progressione geometrica, e dato che $a_k \equiv 1$ per ogni $k \le n$,
$$S_{10^{100}} = \sum_{k=0}^{10^{100}} 1 \cdot 3^k = \frac{3^{10^{100}+1} - 1}{2} = \overline{S}\,.$$
Se $n > 10^{100}$, allora
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, 3^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k\, 3^k + \sum_{k=10^{100}+1}^{n} a_k\, 3^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k\, 3^k = \overline{S}\,,$$
dato che $a_k = 0$ per ogni $k > 10^{100}$. Se ne deduce che la successione $S_n$ è definitivamente uguale a $\overline{S}$ e quindi converge (a $\overline{S}$).

**d)** Dato che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(k+1)^3\, 3^k} = 0\,,$$
e dato che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3\, 3^k}\, 3^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\,,$$
che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

**6)** Si consideri la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^4}\,.$$
**a)** Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
**b)** Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
**c)** Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
**d)** Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

---

**Soluzione:**
**a)** Se $A = 1$, la serie è
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^4}\,,$$
che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 4 > 1$.

**b)** Se $A = -1$, la serie è la serie a segni alterni
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^4}\,,$$
che converge semplicemente (per il criterio di Leibniz, dato che $b_k = \frac{1}{(k+1)^4}$ è una successione positiva, descrescente e infinitesima) e assolutamente (dato che la serie dei moduli è la serie della parte **a)**).

**c)** Se $-1 < A < 1$, si ha $|A^k| \leq 1$, e quindi
$$\left|\frac{A^k}{(k+1)^4}\right| = \frac{|A^k|}{(k+1)^4} \leq \frac{1}{(k+1)^4}\,.$$
Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{(k+1)^4}$ è convergente (si veda la parte **a)**), la serie data converge assolutamente (per il criterio del confronto), e quindi converge anche semplicemente.

**d)** Se $A > 1$ si ha
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^4} = +\infty\,.$$
Dato che la serie è a termini positivi, e non soddisfa la condizione necessaria, la serie è divergente.