



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 1
28 Febbraio 2023 — Compito n. 00193

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La serie di termine generico $\frac{1}{k+1}$ è convergente.

1B) La serie di termine generico $\frac{4^k}{5^k}$ è convergente.

1C) La serie di termine generico $\frac{1}{k\sqrt{k}}$ è divergente.

1D) La serie di termine generico $\frac{3^k}{(-2)^k}$ converge.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\frac{2^k}{3^k}$ converge a 3.

2B)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{6}{5}.$$

2C)

$$\sum_{k=21}^{+\infty} 4^k = \frac{4^{21+1}}{3}.$$

2D) La serie di termine generico $\frac{7}{4^k}$ converge a $\frac{28}{3}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{k}{k+3}$ può essere convergente.

3B) La serie di termine generico $\cos^2(\frac{1}{k+1})$ è convergente.

3C) La serie di termine generico $\sin(\frac{1}{k+3})$ può essere non convergente.

3D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+3}$ soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $e^{\frac{3}{k^2}} - 1$ è convergente.

4B) La serie di termine generico $\ln(1 + \frac{5}{k})$ è convergente.

4C) La serie di termine generico $\operatorname{tg}(\frac{k}{k+5})$ è divergente.

4D) La serie di termine generico $k^3 \sin(\frac{1}{k^6})$ è convergente.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00193

5) Sia $a_k = \frac{1}{k^6}$ per $k \geq 1$.

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{k+3}} .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \operatorname{tg}(a_k) .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(a_k)}{\ln(1 + a_k)} .$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00193

6) Sia $a_k = 4^k$ per $k \geq 0$.

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k} .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{5^k} .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 a_k}{k!} .$$

Soluzioni del compito 00193

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La serie di termine generico $\frac{1}{k+1}$ è convergente.

Falso: La serie è la serie armonica (o, volendo, la serie armonica generalizzata con $\alpha = 1$), e quindi è divergente.

1B) La serie di termine generico $\frac{4^k}{5^k}$ è convergente.

Vero: Si tratta della serie geometrica di termine generico $\frac{4}{5} < 1$, ed è quindi convergente.

1C) La serie di termine generico $\frac{1}{k\sqrt{k}}$ è divergente.

Falso: Si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, ed è quindi una serie convergente.

1D) La serie di termine generico $\frac{3^k}{(-2)^k}$ converge.

Falso: Si tratta della serie geometrica con $q = -\frac{3}{2} < -1$, che è una serie non convergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che, se $-1 < q < 1$, si ha

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

mentre, se $q \geq 1$, si ha

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = +\infty,$$

nel senso che la serie diverge positivamente.

2A) La serie di termine generico $\frac{2^k}{3^k}$ converge a 3.

Vero: Dalla (1), con $q = \frac{2}{3}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

2B)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{6}{5}.$$

Falso: Si ha, usando la (1) con $q = \frac{1}{6}$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{36} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^{k-2}} = \frac{1}{36} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{6^h} = \frac{1}{36} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{30} \neq \frac{6}{5}.$$

2C)

$$\sum_{k=21}^{+\infty} 4^k = \frac{4^{21+1}}{3}.$$

Falso: Si ha, per la (2) con $q = 4 > 1$,

$$\sum_{k=21}^{+\infty} 4^k = 4^{21} \sum_{k=21}^{+\infty} 4^{k-21} = 4^{21} \sum_{h=0}^{+\infty} 4^h = +\infty.$$

2D) La serie di termine generico $\frac{7}{4^k}$ converge a $\frac{28}{3}$.

Vero: Si ha, dalla (1) con $q = \frac{1}{4}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7}{4^k} = 7 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = 7 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{28}{3}.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che:

- (1) se il termine generico di una serie non tende a zero, la serie non può essere convergente (condizione necessaria);
 - (2) una serie a termini positivi o converge, o diverge positivamente.
-

3A) La serie di termine generico $\frac{k}{k+3}$ può essere convergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+3} = 1 \neq 0,$$

la serie non può essere convergente per la (1). Osservando poi che la serie è a termini positivi, per la (2) si ha che la serie diverge.

3B) La serie di termine generico $\cos^2(\frac{1}{k+1})$ è convergente.

Falso: La serie è a termini positivi; per la (2), o converge o diverge. Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \cos^2\left(\frac{1}{k+1}\right) = 1,$$

il termine generico della serie non è infinitesimo e quindi, per la (1), la serie non può convergere. Ne consegue che la serie è divergente.

3C) La serie di termine generico $\sin(\frac{1}{k+3})$ può essere non convergente.

Falso: Si tratta di una serie a termini positivi; per la (2), quindi, la serie o converge o diverge positivamente. Dato che il termine generico della serie tende a zero, dalla (1) non si può concludere nulla.

3D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+3}$ soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^k}{k+3} = 0,$$

la serie soddisfa la condizione necessaria di convergenza.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo il criterio del confronto asintotico: date due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$, entrambe a termini positivi, se si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

con

$$(1) \quad 0 < L < +\infty,$$

allora la serie di termine generico a_k è convergente se e solo se la serie di termine generico b_k è convergente (ricordiamo, che, essendo a termini positivi, entrambe le serie o convergono o divergono positivamente).

4A) La serie di termine generico $e^{\frac{3}{k^2}} - 1$ è convergente.

Vero: Si ha, per uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{3}{k^2}} - 1}{\frac{3}{k^2}} = 1 = L.$$

Dato che L soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k^2},$$

che è convergente, essendo — a meno del fattore moltiplicativo 3 — una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è dunque convergente.

4B) La serie di termine generico $\ln(1 + \frac{5}{k})$ è convergente.

Falso: Si ha, per uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{5}{k})}{\frac{5}{k}} = 1 = L.$$

Dato che L soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{k},$$

che è divergente, essendo — a meno del fattore moltiplicativo 5 — la serie armonica. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è dunque divergente.

4C) La serie di termine generico $\operatorname{tg}(\frac{k}{k+5})$ è divergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{k+5}\right) = \operatorname{tg}(1) \neq 0,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Essendo a termini positivi, la serie diverge.

4D) La serie di termine generico $k^3 \sin(\frac{1}{k^6})$ è convergente.

Vero: Si ha, ricordando uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^3 \sin(\frac{1}{k^6})}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{k^6})}{\frac{1}{k^6}} = 1 = L.$$

Dato che L soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3},$$

che è convergente essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha = 3 > 1$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è convergente.

5) Sia $a_k = \frac{1}{k^6}$ per $k \geq 1$.

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{k+3}} .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \operatorname{tg}(a_k) .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(a_k)}{\ln(1 + a_k)} .$$

Soluzione:

a) Si tratta di una serie armonica generalizzata con $\alpha = 6 > 1$; la serie, pertanto, converge.

b) Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_{k+3}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+3)^6}{k^6} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k+3}{k} \right)^6 = 1^6 = 1 ,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Dato che è a termini positivi, la serie diverge.

c) Dato che, essendo a_k infinitesima, si ha $\operatorname{tg}(a_k) \approx a_k$, per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} .$$

Quest'ultima serie è convergente, essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha = 4 > 1$. Ne segue che la serie data converge.

d) Ricordando che, essendo a_k infinitesima, si ha $1 - \cos(a_k) \approx \frac{a_k^2}{2}$ e $\ln(1 + a_k) \approx a_k$, per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{2a_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k ,$$

che è convergente (si veda l'esercizio a)). Ne segue che la serie data converge.

6) Sia $a_k = 4^k$ per $k \geq 0$.

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{5^k}.$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 a_k}{k!}.$$

Soluzione:

a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 4 > 1$; la serie, pertanto, diverge positivamente.

b) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{4} < 1$; la serie, pertanto, converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

c) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{4}{5} < 1$; la serie, pertanto, converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{5^k} = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 5.$$

d) Applichiamo il criterio del rapporto alla serie di termine generico

$$b_k = \frac{k^2 a_k}{k!} = \frac{k^2 4^k}{k!}.$$

Si ha

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^2 4^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^2 4^k} = 4 \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 \frac{1}{k+1},$$

da cui segue che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 \frac{1}{k+1} = 4 \cdot 1^2 \cdot 0 = 0,$$

e quindi la serie converge (dato che $0 < 1$).