



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 2
7 Marzo 2023 — Compito n. 00019

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| V | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| F | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| C | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

1A) La serie di termine generico a_k converge.

1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+10}{a_k+7}$ è divergente.

1C) Se $b_k \geq a_k + 7$, la serie di termine generico b_k è divergente.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-3a_k}}{k^2}$ è convergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{7^k}{k!})$ è divergente.

2B) La serie di termine generico $\arctg(\frac{2}{k^5})$ è convergente.

2C) La serie di termine generico $k^5 (\frac{2}{3})^k$ è convergente.

2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[5]{k}} \ln(2 + \frac{3^k}{k!})$ è divergente.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è convergente.

3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+5}$ è indeterminata.

3C) La serie di termine generico $k! \sin(6k\pi)$ è convergente.

3D) La serie di termine generico $(-1)^k \frac{2^k}{k!}$ è indeterminata.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^5}$ converge semplicemente e assolutamente.

4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+7}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k k}{k+2}$ converge.

4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge semplicemente e assolutamente.

Docente: _____

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00019

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 4^k .$$

- a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{10^k}$.
- b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^7}{k!}$.
- c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.
- d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^5 4^k}\right)$.

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00019**

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^7}.$$

- a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.
b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.
c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.
d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.
-

Soluzioni del compito 00019

1) Sia $a_k > 0$ una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

1A) La serie di termine generico a_k converge.

Falso: Essendo la serie a termini positivi, la serie può o convergere, o divergere positivamente. Senza ulteriori condizioni, però, il solo fatto che la successione a_k tenda a zero **non è sufficiente** a stabilire quale delle due eventualità si verifica. Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k}$ la serie diverge, mentre se $a_k = \frac{1}{k^2}$ la serie converge.

1B) La serie di termine generico $\frac{a_k+10}{a_k+7}$ è divergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k + 10}{a_k + 7} = \frac{0 + 10}{0 + 7} = \frac{10}{7} \neq 0,$$

la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata. Essendo la serie a termini positivi, o converge o diverge positivamente, e dato che non converge, deve obbligatoriamente divergere.

1C) Se $b_k \geq a_k + 7$, la serie di termine generico b_k è divergente.

Vero: Dato che $a_k > 0$, si ha

$$b_k \geq a_k + 7 > 0 + 7 = 7,$$

da cui segue che la successione b_k non tende a zero. Dato che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, e la serie è a termini positivi, la serie diverge. Analogamente, si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k \geq \sum_{k=1}^n [a_k + 7] > \sum_{k=1}^n 7 = 7n.$$

Dato che la successione $7n$ diverge, anche la successione S_n diverge.

1D) La serie di termine generico $\frac{e^{-3a_k}}{k^2}$ è convergente.

Vero: Si ha, dato che $a_k > 0$,

$$0 \leq \frac{e^{-3a_k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ è convergente (è una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin(\frac{7^k}{k!})$ è divergente.

Falso: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7^k}{k!} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{7^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7}{k+1} = 0,$$

e quindi la serie converge.

2B) La serie di termine generico $\arctg(\frac{2}{k^5})$ è convergente.

Vero: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{k^5} = 0,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^5},$$

che è convergente essendo (a meno del fattore 2) una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 5 > 1$.

2C) La serie di termine generico $k^5 (\frac{2}{3})^k$ è convergente.

Vero: Appliciamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} (\sqrt[k]{k})^5 = \frac{2}{3} 1^5 = \frac{2}{3} < 1,$$

e quindi la serie converge.

2D) La serie di termine generico $\frac{1}{\sqrt[5]{k}} \ln(2 + \frac{3^k}{k!})$ è divergente.

Vero: Osserviamo che, essendo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3^k}{k!} = 0,$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{3^k}{k!}\right) = \ln(2) \neq 0.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{5}}},$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{1}{5} < 1$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k!}$ è convergente.

Vero: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

3B) La serie di termine generico $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+5}$ è indeterminata.

Falso: Osserviamo che $\cos(k\pi/2)$ vale zero se k è dispari, mentre vale $(-1)^h$ se $k = 2h$ è pari. Pertanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k+5} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+5},$$

e l'ultima serie è convergente per il criterio di Leibniz (dato che $b_h = \frac{1}{2h+5}$ è positiva, decrescente e infinitesima).

3C) La serie di termine generico $k! \sin(6k\pi)$ è convergente.

Vero: Dato che $\sin(6k\pi) = 0$ per ogni k , la serie è la serie nulla...

3D) La serie di termine generico $(-1)^k \frac{2^k}{k!}$ è indeterminata.

Falso: Osserviamo che la successione $\frac{2^k}{k!}$ è decrescente per ogni $k \geq 1$. Infatti, si ha

$$\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{2^k}{k!} \iff \frac{2}{k+1} \leq 1 \iff k \geq 1.$$

Se ne deduce che la serie data converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{2^k}{k!}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^5}$ converge semplicemente e assolutamente.

Vero: Dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^5} \right| = \frac{1}{k^5},$$

e che la serie di termine generico $\frac{1}{k^5}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 5 > 1$), la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

4B) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k+7}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Vero: Dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+7}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. D'altra parte, la serie dei moduli diverge essendo la serie armonica, dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k+7} \right| = \frac{1}{k+7},$$

e quindi la serie non converge assolutamente.

4C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k k}{k+2}$ converge.

Falso: Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+2} = 1,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria; essendo a termini di segno variabile, la serie è indeterminata.

4D) Se $a_k \geq 0$ è tale che la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge semplicemente e assolutamente.

Vero: Dato che

$$|(-1)^k a_k| = |a_k| = a_k,$$

e dato che per ipotesi la serie di termine generico a_k è convergente, la serie di termine generico $(-1)^k a_k$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 4^k.$$

a) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{(-1)^k}{10^k}$.

b) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \frac{k^7}{k!}$.

c) Si studi la convergenza della serie se $a_k = 1$ se $k \leq 10^{100}$ e $a_k = 0$ se $k > 10^{100}$.

d) Si studi la convergenza della serie se $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^5 4^k}\right)$.

Soluzione:

a) Se $a_k = \frac{(-1)^k}{10^k}$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{10^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k,$$

che converge essendo una serie geometrica con $q = -\frac{2}{5}$ appartenente a $(-1, 1)$.

b) Se $a_k = \frac{k^7}{k!}$, la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^7 4^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^7 4^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^7 4^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^7 \frac{4}{k+1} = 1^7 \cdot 0 = 0,$$

e quindi la serie converge.

c) Sia

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 4^k.$$

Se $n = 10^{100}$, allora, per la formula sulla somma di una progressione geometrica, e dato che $a_k \equiv 1$ per ogni $k \leq n$,

$$S_{10^{100}} = \sum_{k=0}^{10^{100}} 1 \cdot 4^k = \frac{4^{10^{100}+1} - 1}{3} = \bar{S}.$$

Se $n > 10^{100}$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 4^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 4^k + \sum_{k=10^{100}+1}^n a_k 4^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 4^k = \bar{S},$$

dato che $a_k = 0$ per ogni $k > 10^{100}$. Se ne deduce che la successione S_n è definitivamente uguale a \bar{S} e quindi converge (a \bar{S}).

d) Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)^5 4^k} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^5 4^k} 4^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^5},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 5 > 1$.

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^7}.$$

a) Si studi la convergenza della serie per $A = 1$.

b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $A = -1$.

c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per $-1 < A < 1$.

d) Si studi la convergenza della serie per $A > 1$.

Soluzione:

a) Se $A = 1$, la serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^7},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 7 > 1$.

b) Se $A = -1$, la serie è la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^7},$$

che converge semplicemente (per il criterio di Leibniz, dato che $b_k = \frac{1}{(k+1)^7}$ è una successione positiva, decrescente e infinitesima) e assolutamente (dato che la serie dei moduli è la serie della parte **a**)).

c) Se $-1 < A < 1$, si ha $|A^k| \leq 1$, e quindi

$$\left| \frac{A^k}{(k+1)^7} \right| = \frac{|A^k|}{(k+1)^7} \leq \frac{1}{(k+1)^7}.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{(k+1)^7}$ è convergente (si veda la parte **a**)), la serie data converge assolutamente (per il criterio del confronto), e quindi converge anche semplicemente.

d) Se $A > 1$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{(k+1)^7} = +\infty.$$

Dato che la serie è a termini positivi, e non soddisfa la condizione necessaria, la serie è divergente.