



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 3
14 Marzo 2023 — Compito n. 00015

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| V | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| F | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| C | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

1C) Si ha

$$x e^{6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k x^k}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+7x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 7^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^4 \sin(2x),$$

e sia $T_n(x; 0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

2A) Si ha $T_1(x; 0) = 2x$.

2B) Si ha $T_4(x; 0) = 0$.

2C) Si ha $f^{(5)}(0) = 2 \cdot 5!$.

2D) Si ha $f^{(5)}(0) = 2 \cdot 6!$.

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-2)^k.$$

3A) Il centro della serie è $x_0 = 0$.

3B) Se L in $(0, +\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 7$, la serie converge per $x = 16$.

3D) Se $a_3 \neq 0$, si ha $f^{(3)}(2) = a_3$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10x-17)^k}{(k+1)11^k}.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = \frac{17}{10}$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{10}$.

4C) La serie diverge per $x = \frac{39}{10}$.

4D) La serie converge per $x = \frac{3}{5}$.

Docente: _____

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00015

5) Sia

$$f(x) = x^7 \cos(6x^2) .$$

- a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 10 di $f(x)$.
c) Si calcoli $f^{(7)}(0)$.
d) Si calcoli $f^{(9)}(0)$.
-

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00015**

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{k \cdot 5^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzioni del compito 00015

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^k x^k}{k!}.$$

Vero: Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo $y = -6x$ si ha

$$e^{-6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Vero: Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione $y = 4x$ si ha

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

1C) Si ha

$$x e^{6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k x^k}{k!}.$$

Falso: Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo $y = 6x$ si ha

$$e^{6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k x^k}{k!},$$

da cui segue che

$$x e^{6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k x^{k+1}}{k!} \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k x^k}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+7x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 7^k x^k.$$

Vero: Ricordando che

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k,$$

con la sostituzione $y = -7\,x$ si ha

$$\frac{1}{1+7\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 7^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^4 \sin(2x),$$

e sia $T_n(x; 0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

Ricordando che

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

con la sostituzione $y = 2x$ si ha

$$\sin(2x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^4 \sin(2x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+5}}{(2k+1)!} = 2x^5 - \frac{4}{3}x^7 + \text{termini di grado maggiore di 7}.$$

2A) Si ha $T_1(x; 0) = 2x$.

Falso: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 1. Ne segue che $T_1(x; 0) = 0 \neq 2x$.

2B) Si ha $T_4(x, 0) = 0$.

Vero: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 4. Ne segue che $T_4(x; 0) = 0$.

2C) Si ha $f^{(5)}(0) = 2 \cdot 5!$.

Vero: Dalla (1) si ha che

$$T_5(x; 0) = 2x^5.$$

Dato che il termine di grado 5 nel polinomio di Taylor di $f(x)$ è $\frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5$, si ha

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(5)}(0) = 2 \cdot 5!.$$

2D) Si ha $f^{(5)}(0) = 2 \cdot 6!$.

Falso: Dalla (1) si vede che non ci sono termini di grado 6 nel polinomio di Taylor di $f(x)$. Ne segue che $f^{(6)}(0) = 0 \neq 2 \cdot 6!$.

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-2)^k.$$

Ricordiamo che in una serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

il punto x_0 si dice **centro** della serie, mentre la successione $\{a_k\}$ è la **successione dei coefficienti della serie**.

3A) Il centro della serie è $x_0 = 0$.

Falso: Dalla (1) segue che il centro della serie è $x_0 = 2 \neq 0$.

3B) Se L in $(0, +\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

Vero: Se L è come nella domanda, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 7$, la serie converge per $x = 16$.

Falso: Dato che il raggio di convergenza è $R = 7$, e il centro è $x_0 = 2$, la serie non converge se $|x-2| > 7$. Dato che $|16-2| = 14 > 7$, la serie non converge per $x = 16$.

3D) Se $a_3 \neq 0$, si ha $f^{(3)}(2) = a_3$.

Falso: Confrontando la serie di potenze con il polinomio di Taylor di ordine 3 di $f(x)$, che è

$$T_3(x; 2) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k,$$

si ha che i termini di grado 3 sono

$$a_3 (x-2)^3 \quad \text{e} \quad \frac{f^{(3)}(2)}{3!} (x-2)^3,$$

da cui si deduce che

$$f^{(3)}(2) = a_3 \cdot 3! \neq a_3,$$

dato che $a_3 \neq 0$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10x - 17)^k}{(k+1) 11^k}.$$

Mettendo in evidenza 10 al numeratore, si ha

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10x - 17)^k}{(k+1) 11^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{10^k}{(k+1) 11^k} \left(x - \frac{17}{10}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro $x_0 = \frac{17}{10}$ e di coefficienti

$$a_k = \frac{10^k}{(k+1) 11^k}.$$

Siccome

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{10^k}{(k+1) 11^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{10}{11} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{10}{11},$$

si ha che il raggio di convergenza della serie è

$$(2) \quad R = \frac{1}{L} = \frac{11}{10},$$

e quindi la serie converge se $|x - \frac{17}{10}| < \frac{11}{10}$, e non converge se $|x - \frac{17}{10}| > \frac{11}{10}$.

4A) Il centro della serie è $x_0 = \frac{17}{10}$.

Vero: Per la (1) il centro della serie è $x_0 = \frac{17}{10}$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{10}$.

Vero: Per la (2) il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{10}$.

4C) La serie diverge per $x = \frac{39}{10}$.

Vero: Dato che $|\frac{39}{10} - \frac{17}{10}| = \frac{11}{5} > \frac{11}{10} = R$, la serie non converge per $x = \frac{39}{10}$. Dato che per tale valore di x la serie è a termini positivi, la serie diverge.

4D) La serie converge per $x = \frac{3}{5}$.

Vero: Per $x = \frac{3}{5}$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{10^k}{(k+1) 11^k} \left(\frac{3}{5} - \frac{17}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{10^k}{(k+1) 11^k} \left(-\frac{11}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

che è una serie convergente per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+1}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

5) Sia

$$f(x) = x^7 \cos(6x^2).$$

a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.

b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 10 di $f(x)$.

c) Si calcoli $f^{(7)}(0)$.

d) Si calcoli $f^{(9)}(0)$.

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione $y = 6x^2$ si ha

$$\cos(6x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k} x^{4k}}{(2k)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^7 \cos(6x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 6^{2k} x^{4k+7}}{(2k)!}.$$

b) Dalla (1), scrivendo i termini corrispondenti a $k = 0$ e $k = 1$ si ha

$$f(x) = x^7 - 18x^{11} + \text{termini di grado maggiore di 11},$$

da cui segue che

$$T_{10}(x; 0) = x^7.$$

c) Sempre dalla (1), si ha

$$f(x) = x^7 + \text{termini di grado maggiore di 7},$$

da cui segue (per confronto con i coefficienti del polinomio di Taylor di ordine 7 di $f(x)$) che

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!} x^7 = x^7,$$

e quindi che

$$f^{(7)}(0) = 7!.$$

d) Nello sviluppo di Taylor di $f(x)$ non compaiono termini di grado 9, dato che $4k + 7 \neq 9$ per ogni k naturale. Ne segue che si ha

$$f^{(9)}(0) = 0.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{k \cdot 5^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzione:

a) Il centro della serie di potenze è $x_0 = 4$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k \cdot 5^k}$, e che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 5^k}} = \frac{1}{5},$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{1}{L} = 5$.

c) Dato che il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 5$, e che il centro è $x_0 = 4$, la serie converge se $|x - 4| < 5$, ovvero se x appartiene a $(-1, 9)$, e non converge se $|x - 4| > 5$, ovvero se x non appartiene a $[-1, 9]$. Rimane da studiare la convergenza per $x = -1$ e per $x = 9$. Per $x = -1$ si ha $x - 4 = -5$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per $x = 9$ si ha $x - 4 = 5$, e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$

che diverge essendo la serie armonica. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie è

$$E = [-1, 9).$$

d) Derivando termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-4)^{k-1}}{k \cdot 5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^{k-1}}{5 \cdot 5^{k-1}} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x-4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{5} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-4}{5}\right)^h.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{5} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-4}{5}\right)^h = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{x-4}{5}} = \frac{1}{9-x}.$$