



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 1  
28 Febbraio 2023 — Compito n. 00219

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

**Punteggi:** 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La serie di termine generico  $\frac{1}{k+1}$  è divergente.

1B) La serie di termine generico  $\frac{2^k}{3^k}$  è convergente.

1C) La serie di termine generico  $\frac{1}{k\sqrt{k}}$  è divergente.

1D) La serie di termine generico  $\frac{5^k}{(-4)^k}$  converge.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico  $\frac{2^k}{3^k}$  converge a 3.

2B)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{30}.$$

2C)

$$\sum_{k=20}^{+\infty} 4^k = +\infty.$$

2D) La serie di termine generico  $\frac{11}{3^k}$  converge a  $\frac{11}{2}$ .

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico  $\frac{k}{k+3}$  può essere convergente.

3B) La serie di termine generico  $\cos^2(\frac{1}{k+1})$  è convergente.

3C) La serie di termine generico  $\sin(\frac{1}{k+2})$  o converge, o diverge positivamente.

3D) La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k+2}$  non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico  $e^{\frac{3}{k^2}} - 1$  è divergente.

4B) La serie di termine generico  $\ln(1 + \frac{6}{k})$  è convergente.

4C) La serie di termine generico  $\operatorname{tg}(\frac{k}{k+5})$  è divergente.

4D) La serie di termine generico  $k^5 \sin(\frac{1}{k^8})$  è divergente.

**Docente:** \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00219

---

5) Sia  $a_k = \frac{1}{k^7}$  per  $k \geq 1$ .

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{k+6}} .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \operatorname{tg}(a_k) .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(a_k)}{\ln(1 + a_k)} .$$

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00219

6) Sia  $a_k = 3^k$  per  $k \geq 0$ .

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k} .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k} .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3 a_k}{k!} .$$

## Soluzioni del compito 00219

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**1A)** La serie di termine generico  $\frac{1}{k+1}$  è divergente.

**Vero:** La serie è la serie armonica (o, volendo, la serie armonica generalizzata con  $\alpha = 1$ ), e quindi è divergente.

---

**1B)** La serie di termine generico  $\frac{2^k}{3^k}$  è convergente.

**Vero:** Si tratta della serie geometrica di termine generico  $\frac{2}{3} < 1$ , ed è quindi convergente.

---

**1C)** La serie di termine generico  $\frac{1}{k\sqrt{k}}$  è divergente.

**Falso:** Si tratta della serie armonica generalizzata con  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ , ed è quindi una serie convergente.

---

**1D)** La serie di termine generico  $\frac{5^k}{(-4)^k}$  converge.

**Falso:** Si tratta della serie geometrica con  $q = -\frac{5}{4} < -1$ , che è una serie non convergente.

---

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

Ricordiamo che, se  $-1 < q < 1$ , si ha

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

mentre, se  $q \geq 1$ , si ha

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = +\infty,$$

nel senso che la serie diverge positivamente.

---

**2A)** La serie di termine generico  $\frac{2^k}{3^k}$  converge a 3.

**Vero:** Dalla (1), con  $q = \frac{2}{3}$ , si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

---

**2B)**

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{30}.$$

**Vero:** Si ha, usando la (1) con  $q = \frac{1}{6}$ ,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{36} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^{k-2}} = \frac{1}{36} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{6^h} = \frac{1}{36} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{30}.$$

---

**2C)**

$$\sum_{k=20}^{+\infty} 4^k = +\infty.$$

**Vero:** Si ha, per la (2) con  $q = 4 > 1$ ,

$$\sum_{k=20}^{+\infty} 4^k = 4^{20} \sum_{k=20}^{+\infty} 4^{k-20} = 4^{20} \sum_{h=0}^{+\infty} 4^h = +\infty.$$

---

**2D)** La serie di termine generico  $\frac{11}{3^k}$  converge a  $\frac{11}{2}$ .

**Falso:** Si ha, dalla (1) con  $q = \frac{1}{3}$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{11}{3^k} = 11 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = 11 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{33}{2} \neq \frac{11}{2}.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

Ricordiamo che:

- (1) se il termine generico di una serie non tende a zero, la serie non può essere convergente (condizione necessaria);
  - (2) una serie a termini positivi o converge, o diverge positivamente.
- 

**3A)** La serie di termine generico  $\frac{k}{k+3}$  può essere convergente.

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+3} = 1 \neq 0,$$

la serie non può essere convergente per la (1). Osservando poi che la serie è a termini positivi, per la (2) si ha che la serie diverge.

---

**3B)** La serie di termine generico  $\cos^2(\frac{1}{k+1})$  è convergente.

**Falso:** La serie è a termini positivi; per la (2), o converge o diverge. Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \cos^2\left(\frac{1}{k+1}\right) = 1,$$

il termine generico della serie non è infinitesimo e quindi, per la (1), la serie non può convergere. Ne consegue che la serie è divergente.

---

**3C)** La serie di termine generico  $\sin(\frac{1}{k+2})$  o converge, o diverge positivamente.

**Vero:** Si tratta di una serie a termini positivi; per la (2), quindi, la serie o converge o diverge positivamente. Dato che il termine generico della serie tende a zero, dalla (1) non si può concludere nulla.

---

**3D)** La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k+2}$  non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} = 0,$$

la serie soddisfa la condizione necessaria di convergenza.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo il criterio del confronto asintotico: date due successioni  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$ , entrambe a termini positivi, se si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

con

$$(1) \quad 0 < L < +\infty,$$

allora la serie di termine generico  $a_k$  è convergente se e solo se la serie di termine generico  $b_k$  è convergente (ricordiamo, che, essendo a termini positivi, entrambe le serie o convergono o divergono positivamente).

---

4A) La serie di termine generico  $e^{\frac{3}{k^2}} - 1$  è divergente.

**Falso:** Si ha, per uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{3}{k^2}} - 1}{\frac{3}{k^2}} = 1 = L.$$

Dato che  $L$  soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k^2},$$

che è convergente, essendo — a meno del fattore moltiplicativo 3 — una serie armonica generalizzata con  $\alpha = 2 > 1$ . Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è dunque convergente.

---

4B) La serie di termine generico  $\ln(1 + \frac{6}{k})$  è convergente.

**Falso:** Si ha, per uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{6}{k})}{\frac{6}{k}} = 1 = L.$$

Dato che  $L$  soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{k},$$

che è divergente, essendo — a meno del fattore moltiplicativo 6 — la serie armonica. Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è dunque divergente.

---

4C) La serie di termine generico  $\operatorname{tg}(\frac{k}{k+5})$  è divergente.

**Vero:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{k+5}\right) = \operatorname{tg}(1) \neq 0,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Essendo a termini positivi, la serie diverge.

---

4D) La serie di termine generico  $k^5 \sin(\frac{1}{k^8})$  è divergente.

**Falso:** Si ha, ricordando uno dei limiti notevoli,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^5 \sin(\frac{1}{k^8})}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{k^8})}{\frac{1}{k^8}} = 1 = L.$$

Dato che  $L$  soddisfa (1), la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3},$$

che è convergente essendo una serie armonica generalizzata con  $\alpha = 3 > 1$ . Per il criterio del confronto asintotico, la serie data è convergente.

---



5) Sia  $a_k = \frac{1}{k^7}$  per  $k \geq 1$ .

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k .$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{k+6}} .$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \operatorname{tg}(a_k) .$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(a_k)}{\ln(1 + a_k)} .$$

---

**Soluzione:**

a) Si tratta di una serie armonica generalizzata con  $\alpha = 7 > 1$ ; la serie, pertanto, converge.

b) Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_{k+6}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+6)^7}{k^7} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{k+6}{k} \right)^7 = 1^7 = 1 ,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Dato che è a termini positivi, la serie diverge.

c) Dato che, essendo  $a_k$  infinitesima, si ha  $\operatorname{tg}(a_k) \approx a_k$ , per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} .$$

Quest'ultima serie è convergente, essendo una serie armonica generalizzata con  $\alpha = 5 > 1$ . Ne segue che la serie data converge.

d) Ricordando che, essendo  $a_k$  infinitesima, si ha  $1 - \cos(a_k) \approx \frac{a_k^2}{2}$  e  $\ln(1 + a_k) \approx a_k$ , per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{2a_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k ,$$

che è convergente (si veda l'esercizio a)). Ne segue che la serie data converge.

6) Sia  $a_k = 3^k$  per  $k \geq 0$ .

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k}.$$

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3 a_k}{k!}.$$

---

**Soluzione:**

a) Si tratta di una serie geometrica di ragione  $q = 3 > 1$ ; la serie, pertanto, diverge positivamente.

b) Si tratta di una serie geometrica di ragione  $q = \frac{1}{3} < 1$ ; la serie, pertanto, converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

c) Si tratta di una serie geometrica di ragione  $q = \frac{3}{4} < 1$ ; la serie, pertanto, converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{4^k} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

d) Applichiamo il criterio del rapporto alla serie di termine generico

$$b_k = \frac{k^3 a_k}{k!} = \frac{k^3 3^k}{k!}.$$

Si ha

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^3 3^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^3 3^k} = 3 \left( \frac{k+1}{k} \right)^3 \frac{1}{k+1},$$

da cui segue che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 3 \left( \frac{k+1}{k} \right)^3 \frac{1}{k+1} = 3 \cdot 1^2 \cdot 0 = 0,$$

e quindi la serie converge (dato che  $0 < 1$ ).