



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 2  
7 Marzo 2023 — Compito n. 00080

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

**Punteggi:** 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia  $a_k > 0$  una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

1A) La serie di termine generico  $a_k$  diverge.

1B) La serie di termine generico  $\frac{a_k+4}{a_k+9}$  è convergente.

1C) Se  $b_k \geq a_k + 3$ , la serie di termine generico  $b_k$  è convergente.

1D) La serie di termine generico  $\frac{e^{-5a_k}}{k^2}$  è convergente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico  $\sin(\frac{2^k}{k!})$  è divergente.

2B) La serie di termine generico  $\arctg(\frac{7}{k^3})$  è divergente.

2C) La serie di termine generico  $k^6 (\frac{3}{4})^k$  è divergente.

2D) La serie di termine generico  $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \ln(2 + \frac{3^k}{k!})$  è convergente.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k!}$  è convergente.

3B) La serie di termine generico  $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+6}$  è convergente.

3C) La serie di termine generico  $k! \sin(5k\pi)$  è indeterminata.

3D) La serie di termine generico  $(-1)^k \frac{6^k}{k!}$  è convergente.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k^2}$  converge semplicemente e assolutamente.

4B) La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k+4}$  converge semplicemente e assolutamente.

4C) La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k k}{k+3}$  è indeterminata.

4D) Se  $a_k \geq 0$  è tale che la serie di termine generico  $a_k$  è convergente, la serie di termine generico  $(-1)^k a_k$  converge semplicemente e assolutamente.

**Docente:** \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00080

5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 3^k .$$

- a) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = \frac{(-1)^k}{8^k}$ .
- b) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = \frac{k!}{k!}$ .
- c) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = 1$  se  $k \leq 10^{100}$  e  $a_k = 0$  se  $k > 10^{100}$ .
- d) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^3 3^k}\right)$ .

--	--	--	--	--	--	--	--

**Cognome****Nome****Matricola****Compito 00080**

---

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^3}.$$

- a) Si studi la convergenza della serie per  $A = 1$ .
  - b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per  $A = -1$ .
  - c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per  $-1 < A < 1$ .
  - d) Si studi la convergenza della serie per  $A > 1$ .
-

## Soluzioni del compito 00080

1) Sia  $a_k > 0$  una successione tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

---

1A) La serie di termine generico  $a_k$  diverge.

**Falso:** Essendo la serie a termini positivi, la serie può o convergere, o divergere positivamente. Senza ulteriori condizioni, però, il solo fatto che la successione  $a_k$  tenda a zero **non è sufficiente** a stabilire quale delle due eventualità si verifica. Ad esempio, se  $a_k = \frac{1}{k}$  la serie diverge, mentre se  $a_k = \frac{1}{k^2}$  la serie converge.

---

1B) La serie di termine generico  $\frac{a_k+4}{a_k+9}$  è convergente.

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k + 4}{a_k + 9} = \frac{0 + 4}{0 + 9} = \frac{4}{9} \neq 0,$$

la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata. Essendo la serie a termini positivi, o converge o diverge positivamente, e dato che non converge, deve obbligatoriamente divergere.

---

1C) Se  $b_k \geq a_k + 3$ , la serie di termine generico  $b_k$  è convergente.

**Falso:** Dato che  $a_k > 0$ , si ha

$$b_k \geq a_k + 3 > 0 + 3 = 3,$$

da cui segue che la successione  $b_k$  non tende a zero. Dato che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, e la serie è a termini positivi, la serie diverge. Analogamente, si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k \geq \sum_{k=1}^n [a_k + 3] > \sum_{k=1}^n 3 = 3n.$$

Dato che la successione  $3n$  diverge, anche la successione  $S_n$  diverge.

---

1D) La serie di termine generico  $\frac{e^{-5a_k}}{k^2}$  è convergente.

**Vero:** Si ha, dato che  $a_k > 0$ ,

$$0 \leq \frac{e^{-5a_k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Dato che la serie di termine generico  $\frac{1}{k^2}$  è convergente (è una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 2 > 1$ ), la serie data converge per il criterio del confronto.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**2A)** La serie di termine generico  $\sin(\frac{2^k}{k!})$  è divergente.

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^k}{k!} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{2^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{k+1} = 0,$$

e quindi la serie converge.

---

**2B)** La serie di termine generico  $\arctg(\frac{7}{k^3})$  è divergente.

**Falso:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7}{k^3} = 0,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{7}{k^3},$$

che è convergente essendo (a meno del fattore 7) una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 3 > 1$ .

---

**2C)** La serie di termine generico  $k^6 (\frac{3}{4})^k$  è divergente.

**Falso:** Appliciamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k^6 \left(\frac{3}{4}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} (\sqrt[k]{k})^6 = \frac{3}{4} 1^6 = \frac{3}{4} < 1,$$

e quindi la serie converge.

---

**2D)** La serie di termine generico  $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \ln(2 + \frac{3^k}{k!})$  è convergente.

**Falso:** Osserviamo che, essendo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3^k}{k!} = 0,$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{3^k}{k!}\right) = \ln(2) \neq 0.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}},$$

che diverge essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ .

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**3A)** La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k!}$  è convergente.

**Vero:** Dato che la successione  $b_k = \frac{1}{k!}$  è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

---

**3B)** La serie di termine generico  $\frac{\cos(k\pi/2)}{k+6}$  è convergente.

**Vero:** Osserviamo che  $\cos(k\pi/2)$  vale zero se  $k$  è dispari, mentre vale  $(-1)^h$  se  $k = 2h$  è pari. Pertanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k+6} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+6},$$

e l'ultima serie è convergente per il criterio di Leibniz (dato che  $b_h = \frac{1}{2h+6}$  è positiva, decrescente e infinitesima).

---

**3C)** La serie di termine generico  $k! \sin(5k\pi)$  è indeterminata.

**Falso:** Dato che  $\sin(5k\pi) = 0$  per ogni  $k$ , la serie è la serie nulla. . .

---

**3D)** La serie di termine generico  $(-1)^k \frac{6^k}{k!}$  è convergente.

**Vero:** Osserviamo che la successione  $\frac{6^k}{k!}$  è decrescente per ogni  $k \geq 5$ . Infatti, si ha

$$\frac{6^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{6^k}{k!} \iff \frac{6}{k+1} \leq 1 \iff k \geq 5.$$

Se ne deduce che la serie data converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione  $b_k = \frac{6^k}{k!}$  è positiva, decrescente e infinitesima.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**4A)** La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k^2}$  converge semplicemente e assolutamente.

**Vero:** Dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2},$$

e che la serie di termine generico  $\frac{1}{k^2}$  è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 2 > 1$ ), la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

---

**4B)** La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k}{k+4}$  converge semplicemente e assolutamente.

**Falso:** Dato che la successione  $b_k = \frac{1}{k+4}$  è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. D'altra parte, la serie dei moduli diverge essendo la serie armonica, dato che

$$\left| \frac{(-1)^k}{k+4} \right| = \frac{1}{k+4},$$

e quindi la serie non converge assolutamente.

---

**4C)** La serie di termine generico  $\frac{(-1)^k k}{k+3}$  è indeterminata.

**Vero:** Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+3} = 1,$$

la serie non soddisfa la condizione necessaria; essendo a termini di segno variabile, la serie è indeterminata.

---

**4D)** Se  $a_k \geq 0$  è tale che la serie di termine generico  $a_k$  è convergente, la serie di termine generico  $(-1)^k a_k$  converge semplicemente e assolutamente.

**Vero:** Dato che

$$|(-1)^k a_k| = |a_k| = a_k,$$

e dato che per ipotesi la serie di termine generico  $a_k$  è convergente, la serie di termine generico  $(-1)^k a_k$  converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

---



5) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k 3^k.$$

a) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = \frac{(-1)^k}{8^k}$ .

b) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = \frac{k^7}{k!}$ .

c) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = 1$  se  $k \leq 10^{100}$  e  $a_k = 0$  se  $k > 10^{100}$ .

d) Si studi la convergenza della serie se  $a_k = \sin\left(\frac{1}{(k+1)^3 3^k}\right)$ .

**Soluzione:**

a) Se  $a_k = \frac{(-1)^k}{8^k}$ , la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{8^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^k,$$

che converge essendo una serie geometrica con  $q = -\frac{3}{8}$  appartenente a  $(-1, 1)$ .

b) Se  $a_k = \frac{k^7}{k!}$ , la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^7 3^k}{k!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^7 3^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^7 3^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^7 \frac{3}{k+1} = 1^7 \cdot 0 = 0,$$

e quindi la serie converge.

c) Sia

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 3^k.$$

Se  $n = 10^{100}$ , allora, per la formula sulla somma di una progressione geometrica, e dato che  $a_k \equiv 1$  per ogni  $k \leq n$ ,

$$S_{10^{100}} = \sum_{k=0}^{10^{100}} 1 \cdot 3^k = \frac{3^{10^{100}+1} - 1}{2} = \bar{S}.$$

Se  $n > 10^{100}$ , allora

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k 3^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 3^k + \sum_{k=10^{100}+1}^n a_k 3^k = \sum_{k=0}^{10^{100}} a_k 3^k = \bar{S},$$

dato che  $a_k = 0$  per ogni  $k > 10^{100}$ . Se ne deduce che la successione  $S_n$  è definitivamente uguale a  $\bar{S}$  e quindi converge (a  $\bar{S}$ ).

d) Dato che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)^3 3^k} = 0,$$

e dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3 3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 3 > 1$ .

6) Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{(k+1)^3}.$$

a) Si studi la convergenza della serie per  $A = 1$ .

b) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per  $A = -1$ .

c) Si studi la convergenza semplice e assoluta della serie per  $-1 < A < 1$ .

d) Si studi la convergenza della serie per  $A > 1$ .

---

**Soluzione:**

a) Se  $A = 1$ , la serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3},$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 3 > 1$ .

b) Se  $A = -1$ , la serie è la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^3},$$

che converge semplicemente (per il criterio di Leibniz, dato che  $b_k = \frac{1}{(k+1)^3}$  è una successione positiva, decrescente e infinitesima) e assolutamente (dato che la serie dei moduli è la serie della parte **a**)).

c) Se  $-1 < A < 1$ , si ha  $|A^k| \leq 1$ , e quindi

$$\left| \frac{A^k}{(k+1)^3} \right| = \frac{|A^k|}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Dato che la serie di termine generico  $\frac{1}{(k+1)^3}$  è convergente (si veda la parte **a**)), la serie data converge assolutamente (per il criterio del confronto), e quindi converge anche semplicemente.

d) Se  $A > 1$  si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{(k+1)^3} = +\infty.$$

Dato che la serie è a termini positivi, e non soddisfa la condizione necessaria, la serie è divergente.