Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 3
14 Marzo 2023 — Compito n. 00079

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha
$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 2^k\, x^k}{k!}\,.$$

1B) Si ha
$$\cos(5\,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 5^{2k+1}\, x^{2k+1}}{(2k1)!}\,.$$

1C) Si ha
$$x\, e^{4\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^x\, x^{k+1}}{k!}\,.$$

1D) Si ha
$$\frac{1}{1+6\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, 6^k\, x^k\,.$$

2) Sia
$$f(x) = x^4\, \sin(4\,x)\,,$$
e sia $T_n(x;0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

2A) Si ha $T_1(x;0) = 0$.
2B) Si ha $T_4(x,0) = 0$.
2C) Si ha $f^{(5)}(0) = 4$.
2D) Si ha $f^{(5)}(0) = 4 \cdot 6!$.

3) Si consideri la serie di potenze
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, (x-2)^k\,.$$

3A) Il centro della serie è $x_0 = 0$.
3B) Se L in $(0,+\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\sqrt[k]{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = L$.
3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 5$, la serie converge per $x = 12$.
3D) Se $a_4 \neq 0$, si ha $f^{(4)}(2) = a_4 \cdot 4!$.

4) Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10\,x-13)^k}{(k+1)\,11^k}\,.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = 13$.
4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = 11$.
4C) La serie converge per $x = \frac{7}{2}$.
4D) La serie non converge per $x = \frac{1}{5}$.

Docente: ______________________

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00079**

5) Sia

$$f(x) = x^7 \cos(2\,x^2)\,.$$

a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 10 di $f(x)$.
c) Si calcoli $f^{(7)}(0)$.
d) Si calcoli $f^{(9)}(0)$.

Cognome **Nome** **Matricola** **Compito 00079**

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{k \cdot 3^k} \,.$$

a) Si determini il centro della serie di potenze.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
d) Si calcoli $f'(x)$.

Soluzioni del compito 00079

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha
$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 2^k\, x^k}{k!}\,.$$

Vero: Ricordando che
$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}\,,$$
sostituendo $y = -2x$ si ha
$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 2^k\, x^k}{k!}\,.$$

1B) Si ha
$$\cos(5x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 5^{2k+1}\, x^{2k+1}}{(2k1)!}\,.$$

Falso: Ricordando che
$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k}}{(2k)!}\,,$$
con la sostituzione $y = 5x$ si ha
$$\cos(5x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 5^{2k}\, x^{2k}}{(2k)!}\,.$$
La risposta proposta, invece, è lo sviluppo di Taylor di $\sin(5x)$.

1C) Si ha
$$x\, e^{4x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^x\, x^{k+1}}{k!}\,.$$

Vero: Ricordando che
$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}\,,$$
sostituendo $y = 4x$ si ha
$$e^{4x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k\, x^k}{k!}\,,$$
da cui segue che
$$x\, e^{4x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k\, x^{k+1}}{k!}\,.$$

1D) Si ha
$$\frac{1}{1+6x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, 6^k\, x^k\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \,,$$

con la sostituzione $y = -6\,x$ si ha

$$\frac{1}{1+6\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, 6^k\, x^k \,.$$

---

2) Sia
$$f(x) = x^4 \sin(4\,x)\,,$$
e sia $T_n(x;0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

Ricordando che
$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$
con la sostituzione $y = 4\,x$ si ha
$$\sin(4\,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 4^{2k+1}\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$
e quindi
$$(1) \qquad x^4 \sin(4\,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 4^{2k+1}\, x^{2k+5}}{(2k+1)!} = 4\,x^5 - \frac{32}{3}\,x^7 + \text{ termini di grado maggiore di 7.}$$

2A) Si ha $T_1(x;0) = 0$.

Vero: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 1. Ne segue che $T_1(x;0) = 0$.

2B) Si ha $T_4(x,0) = 0$.

Vero: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 4. Ne segue che $T_4(x;0) = 0$.

2C) Si ha $f^{(5)}(0) = 4$.

Falso: Dalla (1) si ha che
$$T_5(x;0) = 4\,x^5\,.$$
Dato che il termine di grado 5 nel polinomio di Taylor di $f(x)$ è $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5$, si ha
$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f^{(5)}(0) = 4 \cdot 5! \neq 4\,.$$

2D) Si ha $f^{(5)}(0) = 4 \cdot 6!$.

Falso: Dalla (1) si vede che non ci sono termini di grado 6 nel polinomio di Taylor di $f(x)$. Ne segue che $f^{(6)}(0) = 0 \neq 4 \cdot 6!$.

---

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,(x-2)^k\,.$$

Ricordiamo che in una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,(x-x_0)^k\,, \tag{1}$$

il punto x_0 si dice **centro** della serie, mentre la successione $\{a_k\}$ è la **successione dei coefficienti della serie**.

3A) Il centro della serie è $x_0 = 0$.

Falso: Dalla (1) segue che il centro della serie è $x_0 = 2 \neq 0$.

3B) Se L in $(0,+\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\sqrt[k]{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = L$.

Falso: Se L è come nella domanda, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} \neq L$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 5$, la serie converge per $x = 12$.

Falso: Dato che il raggio di convergenza è $R = 5$, e il centro è $x_0 = 2$, la serie non converge se $|x-2| > 5$. Dato che $|12-2| = 10 > 5$, la serie non converge per $x = 12$.

3D) Se $a_4 \neq 0$, si ha $f^{(4)}(2) = a_4 \cdot 4!$.

Vero: Confrontando la serie di potenze con il polinomio di Taylor di ordine 4 di $f(x)$, che è

$$T_4(x;2) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}\,(x-2)^k\,,$$

si ha che i termini di grado 4 sono

$$a_4\,(x-2)^4 \qquad \text{e} \qquad \frac{f^{(4)}(2)}{4!}\,(x-2)^4\,,$$

da cui si deduce che

$$f^{(4)}(2) = a_4 \cdot 4!\,.$$

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10\,x-13)^k}{(k+1)\,11^k}\,.$$

Mettendo in evidenza 10 al numeratore, si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10\,x-13)^k}{(k+1)\,11^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{10^k}{(k+1)\,11^k}\left(x-\frac{13}{10}\right)^k, \tag{1}$$

che è una serie di potenze di centro $x_0 = \frac{13}{10}$ e di coefficienti

$$a_k = \frac{10^k}{(k+1)\,11^k}\,.$$

Siccome

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{10^k}{(k+1)\,11^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{10}{11}\,\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{10}{11}\,,$$

si ha che il raggio di convergenza della serie è

$$R = \frac{1}{L} = \frac{11}{10}\,, \tag{2}$$

e quindi la serie converge se $|x-\frac{13}{10}| < \frac{11}{10}$, e non converge se $|x-\frac{13}{10}| > \frac{11}{10}$.

4A) Il centro della serie è $x_0 = 13$.

Falso: Per la (1) il centro della serie è $x_0 = \frac{13}{10} \neq 13$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = 11$.

Falso: Per la (2) il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{10} \neq 11$.

4C) La serie converge per $x = \frac{7}{2}$.

Falso: Dato che $|\frac{7}{2} - \frac{13}{10}| = \frac{11}{5} > \frac{11}{10} = R$, la serie non converge per $x = \frac{7}{2}$. Dato che per tale valore di x la serie è a termini positivi, la serie diverge.

4D) La serie non converge per $x = \frac{1}{5}$.

Falso: Per $x = \frac{1}{5}$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{10^k}{(k+1)\,11^k}\left(\frac{1}{5}-\frac{13}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{10^k}{(k+1)\,11^k}\left(-\frac{11}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\,,$$

che è una serie convergente per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+1}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

---

5) Sia
$$f(x) = x^7 \cos(2\,x^2)\,.$$
a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 10 di $f(x)$.
c) Si calcoli $f^{(7)}(0)$.
d) Si calcoli $f^{(9)}(0)$.

Soluzione:
a) Ricordando che
$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k}}{(2k)!}\,,$$
con la sostituzione $y = 2\,x^2$ si ha
$$\cos(2\,x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}\, x^{4k}}{(2k)!}\,,$$
e quindi

(1)
$$x^7\, \cos(2\,x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}\, x^{4k+7}}{(2k)!}\,.$$

b) Dalla (1), scrivendo i termini corrispondenti a $k = 0$ e $k = 1$ si ha
$$f(x) = x^7 - 2\,x^{11} + \text{ termini di grado maggiore di 11,}$$
da cui segue che
$$T_{10}(x;0) = x^7\,.$$

c) Sempre dalla (1), si ha
$$f(x) = x^7 + \text{ termini di grado maggiore di 7,}$$
da cui segue (per confronto con i coefficienti del polinomio di Taylor di ordine 7 di $f(x)$) che
$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!}\, x^7 = x^7\,,$$
e quindi che
$$f^{(7)}(0) = 7!\,.$$

d) Nello sviluppo di Taylor di $f(x)$ non compaiono termini di grado 9, dato che $4k + 7 \neq 9$ per ogni k naturale. Ne segue che si ha
$$f^{(9)}(0) = 0\,.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{k \cdot 3^k}\,.$$

a) Si determini il centro della serie di potenze.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
d) Si calcoli $f'(x)$.

Soluzione:
a) Il centro della serie di potenze è $x_0 = 4$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k\,3^k}$, e che

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 3^k}} = \frac{1}{3}\,,$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{1}{L} = 3$.

c) Dato che il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 3$, e che il centro è $x_0 = 4$, la serie converge se $|x-4| < 3$, ovvero se x appartiene a $(1,7)$, e non converge se $|x-4| > 3$, ovvero se x non appartiene a $[1,7]$. Rimane da studiare la convergenza per $x = 1$ e per $x = 7$. Per $x = 1$ si ha $x - 4 = -3$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,,$$

che convege per il criterio di Leibniz. Per $x = 7$ si ha $x - 4 = 3$, e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,,$$

che diverge essendo la serie armonica. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie è

$$E = [1,7)\,.$$

d) Derivando termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\,(x-4)^{k-1}}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^{k-1}}{3 \cdot 3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x-4}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-4}{3}\right)^{h}.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-4}{3}\right)^{h} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1 - \frac{x-4}{3}} = \frac{1}{7-x}\,.$$