



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 3
14 Marzo 2023 — Compito n. 00019

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-2x} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(5x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

1C) Si ha

$$x e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 2^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^5 \sin(3x),$$

e sia $T_n(x; 0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

2A) Si ha $T_1(x; 0) = 3x$.

2B) Si ha $T_5(x; 0) = 3x^5$.

2C) Si ha $f^{(6)}(0) = 3$.

2D) Si ha $f^{(6)}(0) = 3 \cdot 7!$.

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-3)^k.$$

3A) Il centro della serie è $x_0 = 3$.

3B) Se L in $(0, +\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 7$, la serie converge per $x = 17$.

3D) Se $a_3 \neq 0$, si ha $f^{(3)}(3) = a_3$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-19)^k}{(k+1)11^k}.$$

4A) Il centro della serie è $x_0 = 19$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{2}$.

4C) La serie converge per $x = \frac{41}{2}$.

4D) La serie non converge per $x = 4$.

Docente: _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00019

5) Sia

$$f(x) = x^2 \cos(2x^2) .$$

- a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.
b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 5 di $f(x)$.
c) Si calcoli $f^{(2)}(0)$.
d) Si calcoli $f^{(4)}(0)$.
-

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00019**

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^k}{k \cdot 11^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
 - b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
 - c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
 - d) Si calcoli $f'(x)$.
-

Soluzioni del compito 00019

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha

$$e^{-2x} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

Falso: Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo $y = -2x$ si ha

$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k x^k}{k!} \neq - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

1B) Si ha

$$\cos(5x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Vero: Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione $y = 5x$ si ha

$$\cos(5x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

1C) Si ha

$$x e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

Falso: Ricordando che

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!},$$

sostituendo $y = 3x$ si ha

$$e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!},$$

da cui segue che

$$x e^{3x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^{k+1}}{k!} \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

1D) Si ha

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 2^k x^k.$$

Vero: Ricordando che

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k,$$

con la sostituzione $y = -2x$ si ha

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 2^k x^k.$$

2) Sia

$$f(x) = x^5 \sin(3x),$$

e sia $T_n(x; 0)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ nell'origine.

Ricordando che

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

con la sostituzione $y = 3x$ si ha

$$\sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^5 \sin(3x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} x^{2k+6}}{(2k+1)!} = 3x^6 - \frac{9}{2}x^8 + \text{termini di grado maggiore di 8}.$$

2A) Si ha $T_1(x; 0) = 3x$.

Falso: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 1. Ne segue che $T_1(x; 0) = 0 \neq 3x$.

2B) Si ha $T_5(x, 0) = 3x^5$.

Falso: Dalla (1) si vede che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado minore o uguale a 5. Ne segue che $T_5(x; 0) = 0 \neq 3x^5$.

2C) Si ha $f^{(6)}(0) = 3$.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$T_6(x; 0) = 3x^6.$$

Dato che il termine di grado 6 nel polinomio di Taylor di $f(x)$ è $\frac{f^{(6)}(0)}{6!} x^6$, si ha

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(6)}(0) = 3 \cdot 6! \neq 3.$$

2D) Si ha $f^{(6)}(0) = 3 \cdot 7!$.

Falso: Dalla (1) si vede che non ci sono termini di grado 7 nel polinomio di Taylor di $f(x)$. Ne segue che $f^{(7)}(0) = 0 \neq 3 \cdot 7!$.

3) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-3)^k.$$

Ricordiamo che in una serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

il punto x_0 si dice **centro** della serie, mentre la successione $\{a_k\}$ è la **successione dei coefficienti della serie**.

3A) Il centro della serie è $x_0 = 3$.

Vero: Dalla (1) segue che il centro della serie è $x_0 = 3$.

3B) Se L in $(0, +\infty)$, $L \neq 1$, è il limite di $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

Vero: Se L è come nella domanda, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L}$.

3C) Se il raggio di convergenza della serie è $R = 7$, la serie converge per $x = 17$.

Falso: Dato che il raggio di convergenza è $R = 7$, e il centro è $x_0 = 3$, la serie non converge se $|x-3| > 7$. Dato che $|17-3| = 14 > 7$, la serie non converge per $x = 17$.

3D) Se $a_3 \neq 0$, si ha $f^{(3)}(3) = a_3$.

Falso: Confrontando la serie di potenze con il polinomio di Taylor di ordine 3 di $f(x)$, che è

$$T_3(x; 3) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(3)}{k!} (x-3)^k,$$

si ha che i termini di grado 3 sono

$$a_3 (x-3)^3 \quad \text{e} \quad \frac{f^{(3)}(3)}{3!} (x-3)^3,$$

da cui si deduce che

$$f^{(3)}(3) = a_3 \cdot 3! \neq a_3,$$

dato che $a_3 \neq 0$.

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x - 19)^k}{(k+1) 11^k}.$$

Mettendo in evidenza 2 al numeratore, si ha

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x - 19)^k}{(k+1) 11^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1) 11^k} \left(x - \frac{19}{2}\right)^k,$$

che è una serie di potenze di centro $x_0 = \frac{19}{2}$ e di coefficienti

$$a_k = \frac{2^k}{(k+1) 11^k}.$$

Siccome

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{(k+1) 11^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{11} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{2}{11},$$

si ha che il raggio di convergenza della serie è

$$(2) \quad R = \frac{1}{L} = \frac{11}{2},$$

e quindi la serie converge se $|x - \frac{19}{2}| < \frac{11}{2}$, e non converge se $|x - \frac{19}{2}| > \frac{11}{2}$.

4A) Il centro della serie è $x_0 = 19$.

Falso: Per la (1) il centro della serie è $x_0 = \frac{19}{2} \neq 19$.

4B) Il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{2}$.

Vero: Per la (2) il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{11}{2}$.

4C) La serie converge per $x = \frac{41}{2}$.

Falso: Dato che $|\frac{41}{2} - \frac{19}{2}| = 11 > \frac{11}{2} = R$, la serie non converge per $x = \frac{41}{2}$. Dato che per tale valore di x la serie è a termini positivi, la serie diverge.

4D) La serie non converge per $x = 4$.

Falso: Per $x = 4$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1) 11^k} \left(4 - \frac{19}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1) 11^k} \left(-\frac{11}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

che è una serie convergente per il criterio di Leibniz, dato che la successione $b_k = \frac{1}{k+1}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

5) Sia

$$f(x) = x^2 \cos(2x^2).$$

a) Si scriva la serie di Taylor di $f(x)$.

b) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 5 di $f(x)$.

c) Si calcoli $f^{(2)}(0)$.

d) Si calcoli $f^{(4)}(0)$.

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!},$$

con la sostituzione $y = 2x^2$ si ha

$$\cos(2x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{4k}}{(2k)!},$$

e quindi

$$(1) \quad x^2 \cos(2x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{4k+2}}{(2k)!}.$$

b) Dalla (1), scrivendo i termini corrispondenti a $k = 0$ e $k = 1$ si ha

$$f(x) = x^2 - 2x^6 + \text{termini di grado maggiore di 6},$$

da cui segue che

$$T_5(x; 0) = x^2.$$

c) Sempre dalla (1), si ha

$$f(x) = x^2 + \text{termini di grado maggiore di 2},$$

da cui segue (per confronto con i coefficienti del polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$) che

$$\frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 = x^2,$$

e quindi che

$$f^{(2)}(0) = 2!.$$

d) Nello sviluppo di Taylor di $f(x)$ non compaiono termini di grado 4, dato che $4k + 2 \neq 4$ per ogni k naturale. Ne segue che si ha

$$f^{(4)}(0) = 0.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^k}{k \cdot 11^k}.$$

- a) Si determini il centro della serie di potenze.
- b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze.
- c) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze.
- d) Si calcoli $f'(x)$.

Soluzione:

a) Il centro della serie di potenze è $x_0 = 6$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k \cdot 11^k}$, e che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 11^k}} = \frac{1}{11},$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = \frac{1}{L} = 11$.

c) Dato che il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 11$, e che il centro è $x_0 = 6$, la serie converge se $|x - 6| < 11$, ovvero se x appartiene a $(-5, 17)$, e non converge se $|x - 6| > 11$, ovvero se x non appartiene a $[-5, 17]$. Rimane da studiare la convergenza per $x = -5$ e per $x = 17$. Per $x = -5$ si ha $x - 6 = -11$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per $x = 17$ si ha $x - 6 = 11$, e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$

che diverge essendo la serie armonica. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie è

$$E = [-5, 17).$$

d) Derivando termine a termine si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(x-6)^{k-1}}{k \cdot 11^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^{k-1}}{11 \cdot 11^{k-1}} = \frac{1}{11} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x-6}{11}\right)^{k-1} = \frac{1}{11} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-6}{11}\right)^h.$$

Ricordando la formula per la somma di una serie geometrica, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{11} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{x-6}{11}\right)^h = \frac{1}{11} \frac{1}{1 - \frac{x-6}{11}} = \frac{1}{17-x}.$$