Problème

Étant donné le vecteur $\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j})$ m, trouvez le vecteur $\vec{B}$ de module 5 m qui est perpendiculaire à $\vec{A}$ et qui est situé dans les plans suivants : (a) le plan xz; (b) le plan xy. [1]

Résolution

Ce problème requiert certaines notions de géométrie vectorielle. Si deux vecteurs sont perpendiculaires, le produit scalaire de ces deux vecteurs est nulle. Par définition, le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant séparé par un angle θ est :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos\theta \tag{1}$$

Si l'angle θ est de 90°, on remarque que le produit scalaire est nulle, car $\cos 90° = 0$. Pour le problème, on peut simplifier l'équation (1) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

Il existe une deuxième définition du produit scalaire. On peut calculer le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ en utilisant les composantes :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot B_x) + (A_y \cdot B_y) + (A_z \cdot B_z) \tag{3}$$

où A_x, A_y et A_z représentent les composantes du vecteur $\vec{A}$, et B_x, B_y et B_z représentent les composantes du vecteur $\vec{B}$.

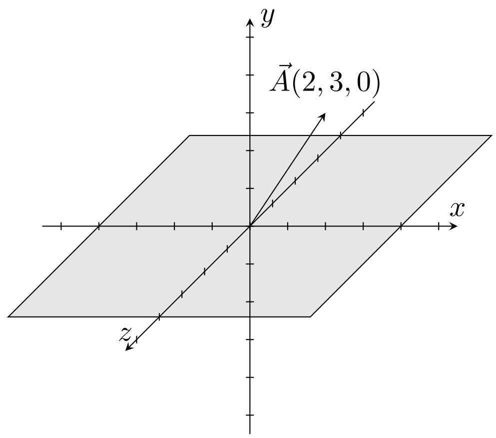
Si l'on insère l'équation (2) dans (3), on obtient l'équation :

$$0 = (A_x \cdot B_x) + (A_y \cdot B_y) + (A_z \cdot B_z) \tag{4}$$

À partir de l'équation (4), il suffit de substituer les composantes du vecteur $\vec{A}$ dans l'énoncer du problème pour ensuite résoudre les composantes du vecteur $\vec{B}$:

$$\begin{aligned} 0 &= (2 \cdot B_x) + (3 \cdot B_y) + (0 \cdot B_z) \\ &= 2B_x + 3B_y + 0B_z \end{aligned} \tag{5}$$

Il existe une infinité de solutions à cette équation. On peut simplifier $0B_z = 0$, mais il est idéale de le garder afin de montrer que B_z peut prendre n'importe quelles valeurs. Afin de trouver une solution précise, il faut prendre compte des restrictions du problème. La partie (a) du problème demande un vecteur $\vec{B}$ dans le plan xz, alors il n'y a pas de composante y :

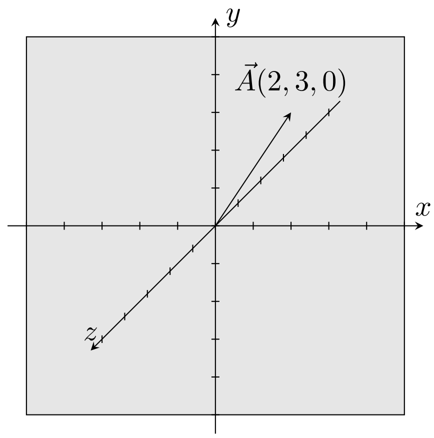


Alors, l'équation (5) se simplifie :

$$\begin{aligned} 0 &= 2B_x + 3B_y + 0B_z \\ &= 2B_x + 3 \cdot 0 + 0B_z \\ &= 2B_x + 0B_z \\ B_x &= 0B_z = 0 \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\vec{B}$ n'a pas de composante en x ni en y. Cela ne veut pas dire que la composante en z est nulle pour autant. Comme mentionnée plus tôt, la composante B_z peut prendre n'importe quelles valeurs, puisqu'elle est multipliée par le facteur nulle. Une norme de 5 m est demandée pour le vecteur $\vec{B}$, alors on peut simplement associer $B_z = \pm 5$ m. Donc, le vecteur $\vec{B} = 0\vec{i} + 0\vec{j} \pm 5\vec{k} = \pm 5\vec{k}$.

Dans la partie (b) du problème, on cherche un vecteur similaire, mais dans le plan xy , alors il n'y a pas de composante en z :



Alors, l'équation (4) se simplifie :

$$\begin{aligned} 0 &= 2B_x + 3B_y + 0 \cdot 0 \\ &= 2B_x + 3B_y \end{aligned} \tag{6}$$

Contrairement à la partie (a), on obtient une équation avec deux inconnues. Par contre, on demande une norme de 5 m. On peut obtenir une deuxième équation afin de résoudre nos deux inconnues :

$$\begin{aligned} ||\vec{B}|| &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \\ \Leftrightarrow \quad 5 &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \end{aligned}$$

Donc, la dernière équation et (6) sont nos deux équations à résoudre. On peut isoler B_x dans la dernière.

$$\begin{aligned} 5 &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\ \Leftrightarrow 25 &= B_x^2 + B_y^2 \\ \Leftrightarrow B_x^2 &= 25 - B_y^2 \\ \Leftrightarrow B_x &= \sqrt{25 - B_y^2} \end{aligned}$$

Ensuite, on substitue B_x dans (6) :

$$\begin{aligned}
0 &= 2B_x + 3B_y \\
&= 2\sqrt{25 - B_y^2} + 3B_y \\
\Leftrightarrow -3B_y &= 2\sqrt{25 - B_y^2} \\
\Leftrightarrow \quad 9B_y^2 &= 4(25 - B_y^2) \\
&= 100 - 4B_y^2 \\
\Leftrightarrow 13B_y^2 &= 100 \\
\Leftrightarrow \quad B_y^2 &= \frac{100}{13} \\
\Leftrightarrow \quad B_y &= \pm\frac{10}{\sqrt{13}} \approx \pm 2,77
\end{aligned}$$

On peut reprendre (6) et substituer B_y :

$$\begin{aligned}
0 &= 2B_x + 3B_y \\
&= 2B_x + 3\left(\pm\frac{10}{\sqrt{13}}\right) \\
\Leftrightarrow -2B_x &= \pm\frac{30}{\sqrt{13}} \\
\Leftrightarrow \quad B_x &= \mp\frac{15}{\sqrt{13}} \approx \mp 4,16
\end{aligned}$$

Finalement, le vecteur $\vec{B} = \mp\frac{15}{\sqrt{13}}\vec{i} \pm \frac{10}{\sqrt{13}}\vec{i} + 0\vec{k} \approx \mp 4,16\vec{i} \pm 2,77\vec{j}$. Pour conclure, ce problème est très mathématique. La notion de vecteur est très important en physique. Par contre, il est rare que les problèmes de mécanique soit autant centré sur la géométrie vectorielle.

Bibliographie

[1] Harris Benson. *Physique 1: Mécanique.* Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 2009.