La Valeur Absolue

Gabriel-Andrew Pollo-Guilbert

Mars 6, 2016

Théorème 1 *Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la valeur absolue de x dénotée $|x|$ retourne toujours une valeur positive.*

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Exemple. Soit $a = -2$, donc $|a| = -a$, car $a < 0$. Finalement, $-a = -(-2) = 2$, ce qui est une valeur positive.

Théorème 2 *Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la racine carrée de x au carré retourne toujours une valeur positive.*

$$\sqrt{x^2} = |x| \tag{2}$$

Exemple. Soit $b = -4$, donc $\sqrt{b^2} = |b| = -b$, car $b < 0$. Finalement, $-b = -(-4) = 4$, ce qui est une valeur positive.

L'exemple précédent ne contredit pas le fait qu'une équation polynomiale du deuxième degré peut avoir une solution positive et négative. Il y a une différence entre résoudre une équation et faire la racine carré d'une valeur. Lors d'une résolution, on cherche la valeur de x. Donc, on ne sait pas si elle est négative ou positive de sorte que $\sqrt{x^2} = |x| = \pm x$.

Exemple. Soit l'équation réelle $x^2 - 4 = 0$ où $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & x^2 - 4 = 0 & \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 4 & \quad \textit{isoler } x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2} = \sqrt{4} & \quad \textit{simplification de la racine} \\ \Leftrightarrow \quad & |x| = 2 & \quad \textit{théorème 2} \\ \Leftrightarrow \quad & \pm x = 2 & \quad \textit{théorème 1} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm 2 & \quad \textit{isoler } x \end{aligned}$$

L'important à retenir de l'exemple précédènt est qu'en aucun cas, la racine carré peut donner une valeur positive ou négative comme $\sqrt{4} \neq \pm 2$. Le $\pm$ provient du fait que l'on ne sait pas si l'expression à l'intérieur de la valeur absolue est négative ou positive, donc $|x| = \pm x$. C'est en isolant x que le $\pm$ semble provenir de la racine carré.

Exemple. Soit l'équation réelle $\left(\dfrac{1}{x}+3\right)^2-16=0$ où $x\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{x}+3\right)^2-16=0 & \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{1}{x}+3\right)^2=16 & \textit{isoler l'expression au carré} \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{\left(\frac{1}{x}+3\right)^2}=\sqrt{16} & \textit{simplification de la racine} \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{1}{x}+3\right|=4 & \textit{théorème 2} \\
\Leftrightarrow\quad & \pm\left(\frac{1}{x}+3\right)=4 & \textit{théorème 1} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x}+3=\pm 4 & \textit{isoler l'expression} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x}=\pm 4-3 & \\
\Leftrightarrow\quad & x=\frac{1}{\pm 4-3} & \textit{isoler } x
\end{aligned}
$$

Donc, $x=\dfrac{1}{+4-3}=1$ ou $x=\dfrac{1}{-4-3}=-\dfrac{1}{7}$.

Exemple. Soit la limite réelle $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+1}{\sqrt{2x^2+3x}}$ où $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\dfrac{3}{2}, 0\right]$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{2x^2+3x}} \qquad \left(\textit{forme } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}} \qquad \textit{mise en évidance}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{2+\dfrac{3}{x}}} \qquad \textit{propriété des racines}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{2+\dfrac{3}{x}}} \qquad \textit{théorème 2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{2+\dfrac{3}{x}}} \qquad \textit{théorème 1, } x \to -\infty \Rightarrow x < 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{3}{x}}} \qquad \left(\textit{forme } \frac{-2}{-\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$