Polytechnique de Montréal

MTH2302A
Probabilités et Statistique

Devoir 2

Gabriel-Andrew Pollo-Guilbert (1837776)

Remis à
Simon Demontigny

16 juillet 2017

Question 1

a) Soit T la durée de vie d'un composant k avec comme fonction de densité de probabilités

$$f_T(t) = \begin{cases} A^2 t\mathrm{e}^{-At} & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

où A est une constante positive.

On obtient la fonction de répartition en intégrant. Pour $x \geq 0$, on obtient par intégration par partie :

$$F_T(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = A^2 \int_0^t s\mathrm{e}^{-As}\,\mathrm{d}s = 1 - (At+1)\mathrm{e}^{-At},$$

de sorte à obtenir la fonction de fiabilité d'un composant, soit

$$R_k(t) = 1 - F_T(t) = \begin{cases} (At+1)\mathrm{e}^{-At} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases},$$

car $F_T(t) = 0$ pour $x < 0$.

La figure **??** montre un système contenant m de ces composants en série.

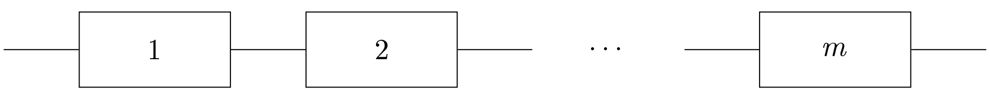


FIGURE 1 – système en série à m composants

Soit X la durée de vie du système en entier dont la fonction de fiabilité est donnée par

$$R(x) = \prod_{k=1}^{m} R_k(x) = \Big[R_k(x)\Big]^m = \Big[(Ax+1)\mathrm{e}^{-Ax}\Big]^m = (Ax+1)^m\mathrm{e}^{-Amx},$$

pour $x \geq 0$, car les composants sont indépendant.

La durée de vie moyenne de ce système est l'espérance de X, soit

$$\mathrm{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R(t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} (Ax+1)^m\mathrm{e}^{-Amx}\,\mathrm{d}x$$

En posant $u = Ax + 1 \Leftrightarrow u - 1 = Ax$ et $\mathrm{d}u = A\,\mathrm{d}x$, on obtient

$$\mathrm{E}\left[X\right] = \frac{1}{A}\int_0^{\infty} u^m\mathrm{e}^{-(u-1)m}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{A}\int_0^{\infty} u^m\mathrm{e}^{-um+m}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^m}{A}\int_0^{\infty} u^m\mathrm{e}^{-um}\,\mathrm{d}u$$

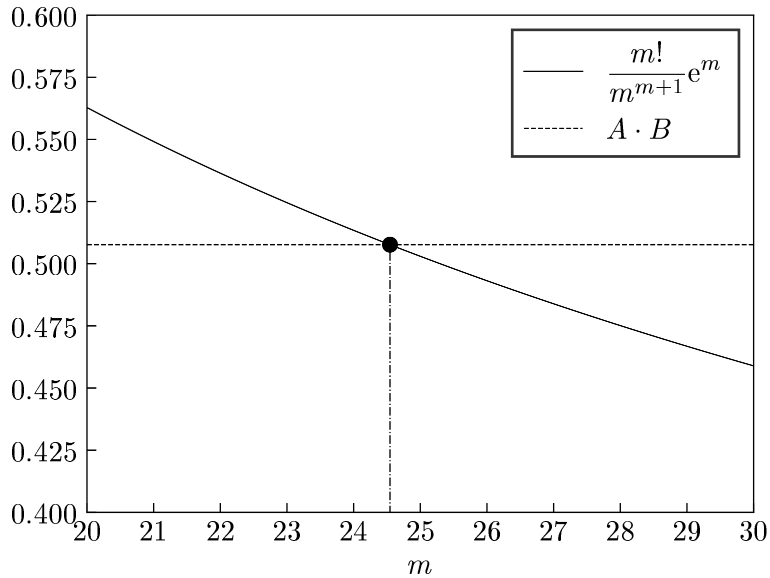
Hors, l'ingénieur estime que la durée de vie moyenne du système est B de sorte qu'on obtient

$$B = \frac{\mathrm{e}^m}{A} \cdot \frac{m!}{m^{m+1}} \Leftrightarrow AB = \frac{m!}{m^{m+1}}\mathrm{e}^m,$$

avec le théorème **??** présenté en annexe.

Dans notre situation, $A = 0.710$ et $B = 715$. Puisqu'on cherche une valeur m entière et positive, il es possible de la déterminer en regardant simplement un graphique. La figure **??** montre l'équation.

FIGURE 2 – Graphique de l'équation $AB = \dfrac{m!}{m^{m+1}}\mathrm{e}^m$



On remarque l'intersection entre les deux courbes est entre $m = 24$ et $m = 25$. L'intersection donnée par le calcul du graphique est d'environ $m \approx 24.54$. Par conséquent, on peut déduire que $m = 25$ est le nombre de composants qui reflète le mieux l'estimation de l'ingénieur.

b) Soit T la durée de vie d'un composant k avec le taux de défaillance donnée par

$$r(t) = Ct,$$

où C est une constante. On obtient la fonction de fiabilité avec

$$R_k(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right\} = \exp\left\{-C\int_0^t s\,\mathrm{d}s\right\} = \mathrm{e}^{-Ct^2/2}.$$

La figure **??** montre un système contenant n de ces composants en parallèle.

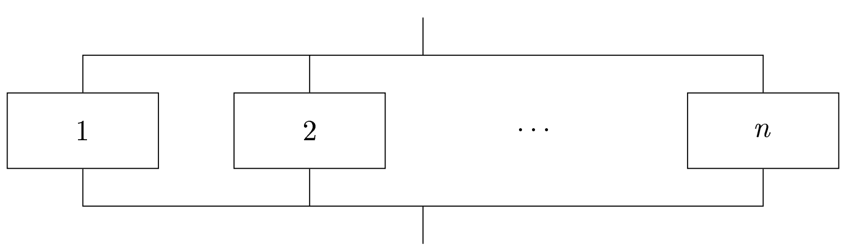


FIGURE 3 – système en parallèle à n composants

Soit X la durée de vie du système en entier donc la fonction de fiabilité est donnée par

$$R(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left[1 - R_k(x)\right] = 1 - \left[1 - \mathrm{e}^{-Cx^2/2}\right]^n,$$

pour $x \geq 0$, car les composants sont indépendant.

On obtient la fonction de répartition de X avec

$$R(x) = 1 - F_X(x) \Leftrightarrow F_X(x) = 1 - R(x) = \left[1 - \mathrm{e}^{-Cx^2/2}\right]^n$$

de sorte que la médianne de X est la valeur de x tel que

$$\frac{1}{2} = \left[1 - \mathrm{e}^{-Cx^2/2}\right]^n.$$

En prenant le logarithme naturel, on obtient

$$-\ln 2 = n \ln \left[1 - \mathrm{e}^{-Cx^2/2}\right],$$

de sorte à isoler n, soit

$$n = -\frac{\ln 2}{\ln \left[1 - \mathrm{e}^{-Cx^2/2}\right]}.$$

L'ingénieur estime la médiane à $x = D$, donc

$$n \approx -\frac{\ln 2}{\ln \left[1 - \mathrm{e}^{-CD^2/2}\right]} \approx 28.511,$$

avec $C = 2.950$ et $D = 1.590$. Par conséquent, on peut déduire que $n = 29$ est le nombre de composants qui reflète le mieux l'estimation de l'ingénieur.

Question 2

Soit une expérience aléatoire dont le résultat est modélisé par la variable aléatoire

$$X \sim \mathcal{N}\left(E, F^2\right),$$

où E et F sont des constantes.

a) On s'intérèsse au nombre d'essaies M de l'expérience jusqu'à obtenir un premier résultat supérieur à une constante G. Par conséquent, M suit une loi géométrique tel que

$$M \sim \mathcal{G}(p),$$

où $p = \mathbb{P}[X > G]$, la probabilité que le résultat soit supérieur à G.

La probabilité m que M soit une valeur impaire est donnée par

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[M = 2k-1] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1-1}p = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2(k-1)}p = q^2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p,$$

où $q = 1-p$. On remarque que la somme est effectuée sur tout l'espace échantillion d'une distribution géométrique. Par conséquent,

$$m = q^2 = (1-p)^2.$$

On calcule p avec la distribution normale centrée réduite, c'est-à-dire

$$p = 1 - \mathbb{P}[X \leq G] = 1 - \Phi\left(\frac{G-E}{F^2}\right).$$

Avec $E = 0.770$, $F = 1.780$ et $G = 1.535$, on obtient

$$p \approx 1 - \Phi(0.42978) \approx 1 - 0.6628 = 0.3372,$$

de sorte que la probabilité que M prenne une valeur impaire est $m \approx 0.4393$.

b) On répète l'expérience H fois, où H est une constante. Soit N le nombre de fois où le carré du résultat est supérieur à une constante I. Par conséquent, N suit une loi binomiale tel que

$$N \sim \mathcal{B}(H, p),$$

où $p = \mathbb{P}\left[X^2 > I\right] = \mathbb{P}\left[-\sqrt{I} < X < \sqrt{I}\right]$, la probabilité que le carré du résultat soit supérieur à I.

On évalue à l'aide de la distribution normale centrée réduite, alors

$$p = \Phi\left(\frac{\sqrt{I}-E}{F^2}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{I}-E}{F^2}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{I}-E}{F^2}\right) + \Phi\left(\frac{\sqrt{I}+E}{F^2}\right) - 1.$$

Avec $E = 0.770$, $F = 1.780$ et $I = 1.160$, on obtient

$$p \approx \Phi(0.0969) + \Phi(0.5830) - 1 \approx 0.5359 + 0.7190 - 1 = 0.2549.$$

La probabilité n que N soit une valeur paire est donnée par

$$n = \sum_{k=0}^{\lfloor H/2 \rfloor} \mathbb{P}[N = 2k] = \sum_{k=0}^{\lfloor H/2 \rfloor} \binom{2k}{H} p^{2k} q^{H-2k}$$

Par évaluation numérique, avec $H = 59$, on obtient $n \approx 0.500$.

Question 3

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu dont la fonction de densité conjointe est donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\mathrm{e}^{-Jy} & \text{si} \quad K \leq x \leq L, y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où J, K et L sont des constantes connues et c une constante inconnue.

a) On obtient la fonction de densité de X en intégrant une première fois, soit

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = c\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-Jy}\,\mathrm{d}y = -\frac{c}{J}\mathrm{e}^{-Jy}\Big|_0^{\infty} = \frac{c}{J},$$

et celle de répartition en intégrant une deuxième fois, soit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{c}{J}\int_K^x \mathrm{d}t = \frac{c}{J}(x-K),$$

car $K \leq x \leq L$.

D'une manière similaire, on obtient la fonction de densité de Y en intégrant une première fois, soit

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = c\mathrm{e}^{-Jy}\int_K^L \mathrm{d}x = (L-K)c\mathrm{e}^{-Jy},$$

et celle de répartition en intégrant une deuxième fois, soit

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,\mathrm{d}t = (L-K)c\int_0^y \mathrm{e}^{-Jt}\,\mathrm{d}t = -\frac{c}{J}(L-K)\mathrm{e}^{-Jt}\Big|_0^y = \frac{c}{J}(L-K)(1-\mathrm{e}^{-Jy}),$$

car $y \geq 0$.

Soit T une variable aléatoire définie par $T = g(X)$, où $g(x)$ est une fonction quelconque. On cherche la fonction $g(X)$ tel que $T = Y$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}[T \leq t] = \mathbb{P}[g(X) \leq t] = \mathbb{P}[Y \leq t],$$

de sorte que les fonctions de répartition de T et Y soient identiques.

Avec l'inverse de $g(x)$, on peut isoler X de sorte à obtenir

$$\mathbb{P}\left[g^{-1}(g(X)) \leq g^{-1}(t)\right] = \mathbb{P}\left[X \leq g^{-1}(t)\right] = \mathbb{P}[Y \leq t].$$

Par conséquent, on a

$$F_X\left(g^{-1}(t)\right) = F_Y(t) \Leftrightarrow \frac{c}{J}\left(g^{-1}(t) - K\right) = \frac{c}{J}(L-K)(1-\mathrm{e}^{-Jt}),$$

et en isolant, on obtient

$$g^{-1}(t) = (L-K)(1-\mathrm{e}^{-Jt}) + K.$$

On a donc

$$\mathbb{P}\left[X \leq (K-L)(1-\mathrm{e}^{-Jt}) + K\right] = \mathbb{P}\left[\frac{X-K}{L-K} \leq 1-\mathrm{e}^{-Jt}\right] = \mathbb{P}\left[1-\frac{X-K}{L-K} \geq \mathrm{e}^{-Jt}\right],$$

car $L-K>0$, de sorte qu'en appliquant le logarithme, on obtient

$$\mathbb{P}\left[1-\frac{X-K}{L-K}\geq \mathrm{e}^{-Jt}\right]=\mathbb{P}\left[-\frac{1}{J}\ln\left(1-\frac{X-K}{L-K}\right)\leq t\right].$$

Le terme à droite est la transformation pour obtenir T. Par conséquent,

$$g(x)=-\frac{1}{J}\ln\left(1-\frac{x-K}{L-K}\right).$$

b) Soit Z la variable aléatoire définie par Z=max (X,Y). Cette fonction peut se définir par partie, soit

$$\max(x,y)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq y,\\ y & \text{si} \quad x<y.\end{cases}$$

de sorte que la fonction de répartition de Z est

$$F_Z(z)=\mathbb{P}\left[Z\leq z\right]=\mathbb{P}\left[\max(X,Y)\leq z\right]=\mathbb{P}\left[\{X\leq z\}\cap\{Y\leq z\}\right].$$

Hors, c'est la fonction de répartition du vecteur aléatoire (X,Y) évaluée en (z,z), soit

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{K}^{z}\int_{0}^{z} c\mathrm{e}^{-Jy}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=c\int_{K}^{z}\mathrm{d}x\int_{0}^{z}\mathrm{e}^{-Jy}\,\mathrm{d}y,$$

de sorte à obtenir

$$F_Z(z)=\frac{c}{J}(z-K)(1+\mathrm{e}^{-Jz}),$$

pour $K\leq z\leq L$, car $K\leq x\leq L$.

Lorsque $z>L$, on a

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{K}^{L}\int_{0}^{z} c\mathrm{e}^{-Jy}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=c\int_{K}^{L}\mathrm{d}x\int_{0}^{z}\mathrm{e}^{-Jy}\,\mathrm{d}y,$$

de sorte à obtenir

$$F_Z(z)=\frac{c}{J}(L-K)(1-\mathrm{e}^{-Jz}).$$

Par conséquent, la fonction de répartition de Z est

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad z<K,\\ \frac{c}{J}(z-K)(1+\mathrm{e}^{-Jz}) & \text{si} \quad K\leq z\leq L,\\ \frac{c}{J}(L-K)(1-\mathrm{e}^{-Jz}) & \text{si} \quad L<z.\end{cases}$$

Question 4

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire discret dont la fonction de masse conjointe est donnée par

$$p_{X,Y}(j,k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-M} & \text{si} \quad (j,k) = (0,0), \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^k}{k!} & \text{si} \quad (j,k) \in \{1,2,\dots\} \times \{0,1,\dots\}, \end{cases}$$

où M et N sont des constantes connues.

a) La fonction de masse de Y est donnée par

$$p_Y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k).$$

Cas où $k = 0$

Il faut séparer la somme en deux, soit

$$p_Y(0) = \mathrm{e}^{-M} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^0}{0!} = \mathrm{e}^{-M} + \mathrm{e}^{-M} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \cdot \mathrm{e}^{-(Nj)},$$

car $p_{X,Y}(j,k)$ est définie par partie. On peut écrire la somme comme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \cdot \mathrm{e}^{-(Nj)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} - \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^0}{0!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} - 1.$$

Hors, on remarque que la somme est la série de MacLaurin de la fonction exponentielle, alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} - 1 = \mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} - 1,$$

de sorte à obtenir

$$p_Y(0) = \mathrm{e}^{-M} + \mathrm{e}^{-M}\left(\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} - 1\right) = \mathrm{e}^{-M}\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} = \mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}-M}.$$

Cas où $k = 1$

Puisque $(j,k) \neq (0,0)$, on a

$$p_Y(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^1}{1!} = N\mathrm{e}^{-M} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j$$

Le terme de la somme à $j = 0$ est nul, alors on peut écrire

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{(j-1)!}, \tag{1}$$

de sorte qu'avec une translation de la série, on obtient

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^{j+1}}{j!} = M\mathrm{e}^{-N} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} = M\mathrm{e}^{-N}\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}}, \tag{2}$$

car la somme est le développement en série de la fonction exponentielle. Par conséquent, on a

$$p_Y(1) = N\mathrm{e}^{-M} M\mathrm{e}^{-N}\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} = NM\mathrm{e}^{-N}\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}-M}.$$

Cas où $k = 2$

Puisque $(j, k) \neq (0, 0)$, on a

$$p_Y(2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^2}{2!} = \frac{N^2}{2}\mathrm{e}^{-M} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j^2.$$

Le terme de la somme à $j = 0$ est nul, alors on peut écrire

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{(j-1)!} j,$$

de sorte qu'avec une translation de la série, on obtient

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{(j-1)!} j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^{j+1}}{j!} (j+1) = M\mathrm{e}^{-N} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!}\right]$$

On remarque que la première somme est celle développée dans le cas où $k = 1$ dans les équations (**??**) et (**??**), et que la deuxième somme est le développement en série de la fonction exponentielle, comme dans le cas $k = 0$. Par conséquent, la somme est

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j^2 = M\mathrm{e}^{-N} \left[M\mathrm{e}^{-N}\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} + \mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}}\right] = M\mathrm{e}^{-N}(M\mathrm{e}^{-N}+1)\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}}$$

de sorte à obtenir

$$p_Y(2) = \frac{N^2}{2}\mathrm{e}^{-M} M\mathrm{e}^{-N}(M\mathrm{e}^{-N}+1)\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} = \frac{N^2}{2} M\mathrm{e}^{-N}(M\mathrm{e}^{-N}+1)\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}-M}.$$

Cas où $k > 0$

Puisque $(j, k) \neq (0, 0)$, on a

$$p_Y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^k}{k!} = \frac{N^k}{k!}\mathrm{e}^{-M} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j^k \tag{3}$$

Hors, soit $T \sim \text{Poi}(\alpha)$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre α. Le k-ième moment de T est donné par

$$\mathrm{E}\left[T^k\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \mathrm{e}^{-\alpha} j^k = \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} j^k.$$

On remarque que la somme dans l'équation (**??**) est le k-ième moment d'une distribution de poisson avec $\alpha = M\mathrm{e}^{-N}$. Par conséquent, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)^j}{j!} j^k = \mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}} \mathrm{E}\left[T^k\right],$$

où $T \sim \text{Poi}\left(M\mathrm{e}^{-N}\right)$, et

$$p_Y(k) = \frac{N^k}{k!} \mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N} - M} \mathrm{E}\left[T^k\right].$$

On remarque que ce résultat est aussi valide avec $k = 0$. La table **??** montre les moments de T ainsi que les $p_Y(k)$ reliées à ceux-ci.

Table 1 – Liste des moments de T

k	$\mathrm{E}\left[T^k\right]$	$p_Y(k)$
0	1	$\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}-M}$
1	$M\mathrm{e}^{-N}$	$N\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}-M} M\mathrm{e}^{-N}$
2	$M\left(M\mathrm{e}^{-N}+1\right)\mathrm{e}^{-N}$	$\frac{N^2}{2}\mathrm{e}^{M\mathrm{e}^{-N}-M} M\left(M\mathrm{e}^{-N}+1\right)\mathrm{e}^{-N}$
n	$\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \exp\left\{M\mathrm{e}^{-N}\left(\mathrm{e}^t-1\right)\right\}\right\rvert_{t=0}$	$\cdots$

b) Soit $W = g(X)$, où $g(X)$ est le meilleur estimateur de Y en fonction de X. Par conséquent, on a

$$g(j) = \mathrm{E}\left[Y|X=j\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_{Y|X}(k|X=j) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{p_{X,Y}(j,k)}{p_X(j)}. \tag{4}$$

Fonction de masse de X

Par définition, on a

$$p_X(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k).$$

Si $j \neq 0$, alors on a

$$p_X(j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-M} M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^k}{k!} = \frac{M^j}{j!} \mathrm{e}^{-M} \mathrm{e}^{-(Nj)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Nj)^k}{k!}.$$

Hors, la somme est le développement en série de la fonction exponentielle, alors on a

$$p_X(j) = \frac{M^j}{j!}\mathrm{e}^{-M}\mathrm{e}^{-(Nj)}\mathrm{e}^{(Nj)} = \frac{M^j}{j!}\mathrm{e}^{-M}.$$

Dans le cas où $j = 0$, on a

$$p_X(j) = \mathrm{e}^{-M} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^k}{k!}}_{0} = \mathrm{e}^{-M}.$$

de sorte que

$$p_X(j) = \frac{M^j}{j!}\mathrm{e}^{-M}$$

est valide pour tout $j \geq 0$. On remarque alors que $X \sim \mathrm{Poi}\,(M)$.

Estimateur de $\boldsymbol{Y}$

En continuant l'équation (**??**) pour tout $j \geq 0$, on a

$$g(j) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{p_{X,Y}(j,k)}{p_X(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{p_{X,Y}(j,k)}{p_X(j)}$$

et donc

$$g(j) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\frac{\mathrm{e}^{-M}M^j}{j!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(Nj)}(Nj)^k}{k!}\right]\left[\frac{M^j}{j!}\mathrm{e}^{-M}\right]^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(Nj)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(Nj)} = Nj,$$

car on remarque que c'est l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre $\alpha = Nj$.

Fonction de masse de $\boldsymbol{W}$

Par définition, on a

$$p_W(k) = \mathbb{P}\left[W = k\right] = \mathbb{P}\left[g(X) = k\right] = \mathbb{P}\left[NX = k\right] = \mathbb{P}\left[X = \frac{k}{N}\right].$$

Puisque $X \sim \mathrm{Poi}\,(M)$, alors

$$p_W(k) = \frac{M^{K/N}}{(K/N)!}\mathrm{e}^{-M}.$$

Question 5

a) Soit X une variable aléatoire discrète telle que

$$\mathbb{P}\left[X=2\right] = O \mathrm{Var}\left[X\right] \mathbb{P}\left[X=1\right], \tag{5}$$

où O est une constante rationelle donnée par

$$O = 2\frac{(9+a)}{(10+a)}, \quad a = 1, 2, \ldots, 9,$$

et

$$\phi_X(P\pi) = 0, \tag{6}$$

où P une constante entière, positive et impaire.

Puisque deux équations sont fournies, il est fort probable que la distribution de X ait deux paramètres. Supposons que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, où n est un nombre entier positif et p une probabilité telle que $0 \leq p \leq 1$.

Par conséquent, on a

$$\phi_X(\omega) = \left(p\mathrm{e}^{i\omega} + q\right)^n = \left(p\mathrm{e}^{i\omega} + 1 - p\right)^n = \left[p\left(\mathrm{e}^{i\omega} - 1\right) + 1\right]^n,$$

où $q = 1-p$, de sorte qu'avec l'équation (**??**), on a

$$\phi_X(P\pi) = \left[p\left(\mathrm{e}^{iP\pi} - 1\right) + 1\right]^n = 0.$$

Hors, $\mathrm{e}^{iP\pi} = \cos P\pi + i \sin P\pi = -1$ pour tout P impair de sorte que

$$-2p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2},$$

ce qui en accord avec l'hypothèse $0 \leq p \leq 1$.

De plus, la variance et la fonction de masse d'une loi Binomial sont

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = np(1-p) \quad \text{et} \quad p_X(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

de sorte que l'équation (**??**) devient

$$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2} = O \cdot npq \cdot \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}.$$

En simplifiant et en appliquant la définition d'un binôme, on a

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} q^{-2} = O \cdot n \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!}$$

et

$$n(n-1)\frac{1}{2q^2} = O \cdot n \cdot n \Rightarrow n - 1 = 2q^2 O n$$

En isolant n, on obtient finalement

$$n = \frac{1}{1 - 2q^2 O}.$$

Au dénominateur, on a

$$1 - 2q^2 O = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2\frac{(9+a)}{(10+a)}\right) = 1 - \frac{(9+a)}{(10+a)} = \frac{(10+a)-(9+a)}{(10+a)} = \frac{1}{10+a}$$

de sorte qu'on a

$$n = 10 + a,$$

ce qui est en accord avec l'hypothèse que n est une nombre entier et positif. Avec $a = 6$, ou $O = {}^{15}/_{8}$, on a que

$$X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, 16\right).$$

b) Soit Y une variable aléatoire continue telle que

$$\mathrm{E}\left[Y | Y \geq Q\right] = R, \tag{7}$$

et

$$\mathbb{P}\left[Y \leq S | Y \leq T\right] = U, \quad S < T, \tag{8}$$

où Q, R, S, T et U sont des constantes.

Puisque deux équations sont fournies, il est fort probable que la distribution de Y ait deux paramètres. Supposons que Y suit la distribution la plus simple à deux paramètres, soit $Y \sim \mathcal{U}\left(a, b\right)$, où a et b sont des constantes telles que $a < b$.

Par définition, on a que l'équation (**??**) devient

$$\mathbb{P}\left[Y \leq S | Y \leq T\right] = \frac{\mathbb{P}\left[\{Y \leq S\} \cap \{Y \leq T\}\right]}{\mathbb{P}\left[Y \leq T\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[Y \leq S\right]}{\mathbb{P}\left[Y \leq T\right]} = \frac{F_Y(S)}{F_Y(T)}$$

car $S < T$. On suppose que $a \leq S < T \leq b$, alors

$$\mathbb{P}\left[Y \leq S | Y \leq T\right] = \frac{S-a}{b-a} \cdot \frac{b-a}{T-a} = \frac{S-a}{T-a} = U$$

de sorte à obtenir

$$a = \frac{UT - S}{U - 1} = 1.640,$$

avec $S = 1.870$, $T = 2.640$ et $U = 0.230$.

Pour développer l'équation (**??**), il faut déterminer la fonction de densité. Premièrement, on a que

$$F_Y(y | Y \geq Q) = \frac{\mathbb{P}\left[\{Y \leq y\} \cap \{Y \geq Q\}\right]}{\mathbb{P}\left[Y \geq Q\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[Q \leq Y \leq y\right]}{1 - \mathbb{P}\left[Y \leq Q\right]} = \frac{F_Y(y) - F_Y(Q)}{1 - F_Y(Q)},$$

si $Q \leq y$. Par conséquent, on a

$$f_Y(y | Y \geq Q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y | Y \geq Q) = \frac{f_Y(y)}{1 - F_Y(Q)}.$$

Dans le cas où $y < Q$, on a $F_Y(y | Y \geq Q) = f_Y(y | Y \geq Q) = 0$.

À la lumière de ce résultat, l'équation (**??**) devient

$$\mathrm{E}\left[Y|Y \geq Q\right] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|Y \geq Q)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1-F_Y(Q)}\int_Q^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Puisque $1.640 = a < Q = 4.760$ et $a \leq y \leq b$, on a

$$\mathrm{E}\left[Y|Y \geq Q\right] = \frac{1}{1-F_Y(Q)}\int_Q^{b} y\cdot\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1-F_Y(Q)}\frac{1}{b-a}\int_Q^{b} y\,\mathrm{d}y\,.$$

Le facteur en avant de l'intégrale est

$$\frac{1}{1-F_Y(Q)}\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-\dfrac{Q-a}{b-a}}\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-Q}$$

de sorte que

$$\mathrm{E}\left[Y|Y \geq Q\right] = \frac{1}{b-Q}\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_Q^b = \frac{b^2-Q^2}{2(b-Q)} = \frac{(b-Q)(b+Q)}{2(b-Q)} = \frac{b+Q}{2} = R.$$

On obtient alors que

$$b = 2R - Q = 6.130,$$

ce qui est en accord avec l'hypothèse que $a < b$. Par conséquent,

$$Y \sim \mathcal{U}\left(1.640, 6.130\right)$$

Annexe

Théorème 1. $\displaystyle\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x = \frac{m!}{m^{m+1}}.$

Démonstration. Soit l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x,$$

où m est un nombre entier positif. En posant

$$u = x^m \Leftrightarrow \mathrm{d}u = mx^{m-1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-mx}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow v = -\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-mx},$$

on obtient par intégration par partie :

$$I = -\frac{1}{m}x^m\mathrm{e}^{-mx}\Big|_0^\infty + \frac{m}{m}\int_0^\infty x^{m-1}\mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{m}\int_0^\infty x^{m-1}\mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x\,.$$

En appliquant une intégration par partie à nouveau avec

$$u = x^{m-1} \Leftrightarrow \mathrm{d}u = (m-1)x^{m-2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-mx}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow v = -\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-mx},$$

on obtient

$$I = -\frac{1}{m}x^{m-1}\mathrm{e}^{-mx}\Big|_0^\infty + \frac{m(m-1)}{m^2}\int_0^\infty x^{m-2}\mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x = \frac{m(m-1)}{m^2}\int_0^\infty x^{m-2}\mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x\,.$$

Après n intégrations par partie, on remarque que

$$I = \frac{m(m-1)\cdots(m-[n-1])}{m^n}\int_0^\infty x^{m-n}\mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x,$$

de sorte qu'en appliquant $n = m$ intégrations par partie, on obtient

$$I = \frac{m(m-1)\cdots(2)(1)}{m^m}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hors, le numérateur est la définition du factoriel de m et l'intégrale à droite est

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-xm}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{m}\left[\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-mx} - \mathrm{e}^0\right] = \frac{1}{m}.$$

de sorte que

$$\int_0^\infty x^m\mathrm{e}^{-xm}\,\mathrm{d}x = \frac{m!}{m^{m+1}}. \qquad \square$$

Table 2 – table des valeurs

lettre	nombre	lettre	nombre
A	0,710	L	3,370
B	0,715	M	2,770
C	2,950	N	0,750
D	1,590	O	1,875
E	0,770	P	43,000
F	1,780	Q	4,670
G	1,535	R	5,400
H	59,000	S	1,870
I	1,160	T	2,640
J	0,265	U	0,230
K	1,760		