Axiomes

- $\mathbb{P}[A] \geq 0$.
- $\mathbb{P}[S] = 1$.
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$, si $A \cup B = \emptyset$.

Permutations

$$\mathcal{P}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutations semblables

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Combinaisons

$$\mathcal{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- $\mathcal{C}_n^k = \mathcal{C}_{n-1}^{k-1} + \mathcal{C}_{n-1}^k$.

Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Probabilité conditionnelles

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}[B]$.
- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) = 0$, si $A \cap B = \emptyset$.
- $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$, en général.
- $\mathbb{P}(A|S) = \mathbb{P}[A]$, si $A \in S$.

Probabilité totales

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}[B_i]$$

si $B_1, B_2, \dots, B_n$ des partitions.

Règles d'inversion

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}$$

Règles de Bayes

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}[B]}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}[B_i]}$$

si $B_1, B_2, \dots, B_n$ des partitions.

Médiane

$$F_X(x_{1/2}) = 1/2$$

Fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
- $x_0 < x_1 \Leftrightarrow F_X(x_0) < F_X(x_1)$.
- $F_X(x^+) = F_X(x)$.

Fonction de masse

$$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x]$$

- $p_X(x_k) \geq 0$.
- $\sum_{a < x_k \leq b} p_X(x_k) = \mathbb{P}[A < X \leq b]$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(x_k) = 1$.

Fonction de densité

$$f_X(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}\left[x - \frac{\epsilon}{2} \leq X \leq x + \frac{\epsilon}{2}\right]$$

- $f_X(x) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Règles de calcul

- $\mathbb{P}[a < X \leq B] = F_X(b) - F_X(a)$.
- $\mathbb{P}[X = x] = F_X(x) - F_X(x^-)$.
- $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x)$, si X est continue.
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$, si X est continue.
- $F_X(x) = \sum_{x_k < x} p_X(x_k)$, si X est discrète.

Fonction conditionnelle

- $F_X(x|A) = \frac{\mathbb{P}[\{X \leq x\} \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$.
- $f_X(x|A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x|A)$, si X est continue.
- $P_X(x_k|A) = \begin{cases} \frac{p_X(x_k)}{\mathbb{P}[A]}, & x_k \in A \\ 0, & x_k \notin A \end{cases}$, si X est discrète.

Indépendance

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}[A] \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}[B]$$

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$.
- $\mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B^c]$.

Quantile

$$F_X(x_p) = p$$

Espérance

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_X(x_k) \\ \bullet\ \mathrm{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_X(x_k). \\ \bullet\ \mathrm{E}[X|A] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_X(x_k|A). \end{array}\right\} \text{si } X \text{ est discrète}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ \bullet\ \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x. \\ \bullet\ \mathrm{E}[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|A)\,\mathrm{d}x. \end{array}\right\} \text{si } X \text{ est continue}$$

- $\mathrm{E}[c] = c$.
- $\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b$.
- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X|B_i]\,\mathbb{P}[B_i]$ si $B_1, B_2, \dots, B_n$ des partitions.

Variance

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$$

- $\mathrm{Var}[c] = c$.
- $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$.
- $\mathrm{Var}[X|A] = \mathrm{E}\left[X^2|A\right] - (\mathrm{E}[X|A])^2$.
- $\mathrm{Std}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

Inégalité de Markov

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{a}, \forall a > 0$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \forall a > 0$$

Fonction caractéristique

$$\phi_X(\omega) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{i\omega X}\right]$$

- $\phi_X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega x_k} p_X(x_k)$, si X est discrète.
- $\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega x} f_X(x)\,\mathrm{d}x$, si X est continue.
- $\phi_X(0) = 1$.
- $\mathrm{E}[X^n] = (-i)^n \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} \phi_X(\omega)\right]_{\omega=0}$.

	Loi	Notation	S_X	F_X	f_X	p_X	$\mathrm{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$	ϕ_X
Distributions discrètes	Bernoulli	$X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k<0 \\ 1-p & \text{si} \quad 0 \le k < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le k \end{cases}$	—	$\begin{cases} q & \text{si} \ k=0 \\ p & \text{si} \ k=1 \end{cases}$	p	pq	$p\mathrm{e}^{i\omega}+q$
	Binomiale	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \mathcal{C}_n^i p^i q^{n-i}$	—	$\mathcal{C}_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq	$\left(p\mathrm{e}^{i\omega}+q\right)^n$
	Géométrique	$X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,\ldots\}$	$1-q^k$	—	$q^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p\mathrm{e}^{i\omega}}{1-q\mathrm{e}^{i\omega}}$
	Poisson	$X \sim \mathrm{Poi}(\alpha)$	$\{0,1,\ldots\}$	$\mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \frac{\alpha^i}{i!}$	—	$\frac{\alpha^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha}$	λ	λ	$\exp\left\{\lambda\left(\mathrm{e}^{i\omega}-1\right)\right\}$
Distributions continues	Uniforme	$X \sim \mathcal{U}(a,b)$	$[a,b]$	$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \le x < b \\ 1 & \text{si} \quad a \le x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \ a \le x < b \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	—	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{\mathrm{e}^{i\omega b}-\mathrm{e}^{i\omega a}}{i\omega(b-a)}$
	Exponentielle	$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0,\infty[$	$\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \ x \ge 0 \\ 0 & \text{si} \ x<0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \ x \ge 0 \\ 0 & \text{si} \ x<0 \end{cases}$	—	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-i\omega}$
	Gamma	$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$	$[0,\infty[$	$1-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k \mathrm{e}^{-\lambda x}}{k!}$ si $\alpha = n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$	—	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{i\omega}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
	Gaussienne	$X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left\{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right\}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	—	μ	σ^2	$\exp\left\{i\mu\omega-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right\}$

Fonction de fiabilité

$$R(t) = \mathbb{P}[T>t] = 1 - F_T(t)$$

Taux de défaillance

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{s \to t} f_T(s \mid T>t) \\ &= -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)} \end{aligned}$$

- $R(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right\}$.

Durée de vie moyenne

$$\mathrm{E}[T] = \int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t$$

Système en série

$$R(t) = \prod_{k=1}^n R_k(t)$$

Système en parrallèle

$$R(t) = 1 - \prod_{k=1}^n \left[1 - R_k(t)\right]$$

Indépendance

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}[A] \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}[B]$$

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$.
- $\mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B^c]$.

Approximation par une loi de Poisson

$$X \sim \mathcal{B}(n,p) \approx \mathrm{Poi}(np) \ \text{ si } n \ge 30$$

- $\mathbb{P}[X=k] \approx \frac{(np)^k}{k!}\mathrm{e}^{-np}$ si $p \le 0.05$.
- $\mathbb{P}[X=k] \approx \frac{(nq)^k}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-nq}$ si $p \to 1$.

Fonction de masse conjointe

$$p_{X,Y}(j,k) = \mathbb{P}[\{X=j\}\cap\{Y=k\}]$$

- $p_X(j) = \sum_{\forall k \in S_Y} p_{X,Y}(j,k)$.
- $\sum_{\forall (j,k)\in S_{X,Y}} p_{X,Y}(j,k) = 1$.

Fonction de masse conjointe

$$p_{X|Y}(k|j) = \mathbb{P}(X=k|Y=j)$$

- $p_{X|Y}(j|k) = \dfrac{p_{X,Y}(j,k)}{p_Y(k)}$.

Fonction de densité conjointe

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\,\mathrm{d}y$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

Fonction de masse conjointe

- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Fonction de répartition conjointe

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}[\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}]$$

- $F_{X,Y}(x,y) = \sum_{j\le x}\sum_{k\le y} p_{X,Y}(j,k)$ si (X,Y) est discret.
- $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ si (X,Y) est continu.
- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F_{X,Y}(x,y)$ si (X,Y) est continu.
- $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$.

Indépendance

1. $S_{X,Y} = S_X \times S_Y$
2. $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
   $\Rightarrow\ p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$
   $\Rightarrow\ f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Espérance et Variance

- $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X|Y]]$.
- $\mathrm{Var}[X|Y] = \mathrm{E}[X^2|Y] - (\mathrm{E}[X|Y])^2$.
- $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[X|Y]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[X]Y]$.
- Si X et Y sont indépendantes et $g(x,y) = g(x)g(y)$, alors $\mathrm{E}[g(X,Y)] = \mathrm{E}[g_x(X)]\,\mathrm{E}[g_y(Y)]$.

Orthogonalité

$$\mathrm{E}[XY] = 0$$

Covariance

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]$$

- $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.
- $\mathrm{Cov}[X,X] = \mathrm{Var}[X]$.

Coefficient de corrélation

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Std}[X]\,\mathrm{Std}[Y]}$$

- $\rho_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow Y = aX+b$ où $a>0$.
- $\rho_{X,Y} = -1 \Leftrightarrow Y = aX+b$ où $a<0$.
- $\rho_{X,Y} = 0$ si X et Y indépendantes.
- Si $\rho_{X,Y} = 0$, X et Y des normales, alors X et Y sont indépendantes.

Loi binormale

$$(X,Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho)$$

- $X|\{Y=y\} \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, où $\mu = \mu_X + \rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)$ et $\sigma^2 = \sigma_X^2(1-\rho)^2$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X,\sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y,\sigma_Y^2)$

Estimateur

$$\min \mathrm{E}\left[(X-g(Y))^2\right]$$

Estimateur constant

$$g(Y) = \mathrm{E}[X]$$

- $\mathrm{E}\left[(X-g(Y))^2\right] = \mathrm{Var}[X]$.

Estimateur linéaire

$$g(Y) = \hat{a}Y + \hat{b}$$

où

$$\hat{a} = \frac{\mathrm{Std}[X]}{\mathrm{Std}[Y]}\rho$$

et

$$\hat{b} = \mathrm{E}[X] - \hat{a}\mathrm{E}[Y]$$

- $\mathrm{E}\left[(X-g(Y))^2\right] = \mathrm{Var}[X](1-\rho^2)$.

Estimateur non linéaire

$$g(Y) = \mathrm{E}[X|Y]$$

- Si (X,Y) suit une binormale, alors le meilleur estimateur de X en fonction de Y est linéaire.

Combinaison linéaire

$$Z = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

- $\mathrm{E}[Z] = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\mathrm{E}[X_k]$.
- $\mathrm{Var}[Z] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}[X_i,X_j]$.

Variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- $\mathrm{E}[S_n] = n\mathrm{E}[X]$.
- $\mathrm{Var}[S_n] = n\mathrm{Var}[X]$.

Loi faible des grands nombres

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right| < c\right] = 1,$$

pour tout $c>0$ avec μ connue.

Loi faible des grands nombres

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \mu\right] = 1,$$

avec μ et σ^2 connues.

Théorème central limite

$$S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

lorsque n est grand.

Moyenne de l'échantillon

$$\bar{x} = frac1n\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Médianne de l'échantillon

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1/2)} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Variance de l'échantillon

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Étendue de l'échantillon

$$R = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Fonction de répartition d'ordre n

$$F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{n}\{X(t_k)\le x_k\}\right]$$

Fonction de densité d'ordre n

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{n}\{X(t_k)= x_k\}\right] = \frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$$

Accroissement

$$X(t_1,t_2)=X(t_2)-X(t_1)$$

Moyenne d'un processus stochastique

$$m_x(t)=\mathrm{E}\left[\,X(t)\,\right]$$

Fonction d'autocorrélation

$$R_X(t,\tau)=\mathrm{E}\left[\,X(t)X(\tau)\,\right]$$

Fonction d'autocovariance

$$C_X(t,\tau)=\mathrm{Cov}\left[\,X(t),X(\tau)\right]$$

- $C_X(t,\tau)=R_X(t,\tau)-m_X(t)m_X(\tau)$.

Processus stochastique SSL

$$m_X(t)=c \quad \text{et} \quad R_X(t_1,t_2)=h(t_2-t_1)$$

Chaîne de Markov

$$\{X_n : n=0,1,\ldots\}$$

- $p_{i,j}=\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j|X_n=i\right)$.
- $p_{i,j}^n=\mathbb{P}\left(X_{m+n}=j|X_m=i\right)$.

Processus de Poisson

$$\{N(t):t\ge 0\}$$

- $N(0)=0$.
- $N(t_1,t_2)$ et $N(t_3,t_4)$ indépendants si $t_1<t_2\le t_3<t_4$.
- $N(\tau,\tau+t)\sim \mathrm{Poi}\left(\lambda t\right)$.

Différence entre deux événements

$$T_n\sim \mathrm{E}\left[\,\lambda\,\right]$$

Temps d'arrivé d'un événement

$$S_n\sim \Gamma\left(n,\lambda\right)$$

Processus de Wiener

$$\{W(t):t\ge 0\}$$

- $W(0)=0$.
- $W(t_1,t_2)$ et $W(t_3,t_4)$ indépendants si $t_1<t_2\le t_3<t_4$.
- $W(t_1,t_2)$ et $W(t_1+\tau,t_2+\tau)$ suivent la même loi.
- $W(t)\sim\mathcal{N}\left(0,\sigma^2 t\right)$.
- $C_W(t_1,t_2)=\sigma^2\min\{t_1,t_2\}$.

Mouvement Brownien

$$\sigma^2=0$$

TABLE 1 – Test d'une moyenne (variance connue)

	Hypothèse nulle	Statistique du test	Constante
	$H_0 : \mu = \mu_0$	$z_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\delta = \mu - \mu_0$

Contre-hypothèse	On rejette H_0 si	Erreur de 2^e espèce	Taille nécessaire
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}$	$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \dfrac{\left(z_{\alpha/2} + z_\beta\right)^2 \sigma^2}{\delta^2}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$z_0 > z_\alpha$	$\beta = \Phi\left(z_\alpha - \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \dfrac{\left(z_\alpha + z_\beta\right)^2 \sigma^2}{\delta^2}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$z_0 < -z_\alpha$	$\beta = \Phi\left(z_\alpha + \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \dfrac{\left(z_\alpha + z_\beta\right)^2 \sigma^2}{\delta^2}$

TABLE 2 – Test d'une moyenne (variance inconnue)

Hypothèse nulle	Statistique du test
$H_0 : \mu = \mu_0$	$t_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Contre-hypothèse	On rejette H_0 si
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2,n-1}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

TABLE 3 – Test d'une variance (moyenne inconnue)

	Hypothèse nulle	Statistique du test	Constante	Distribution
	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\lambda = \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$	$\chi_n^2 \approx \mathcal{N}(n, 2n)$

Contre-hypothèse	On rejette H_0 si	Erreur de 2^e espèce	Taille nécessaire
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$	$\beta = \mathbb{P}\left[\lambda\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq \chi^2_{n-1} \leq \lambda\chi^2_{\alpha/2,n-1}\right]$	$n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sigma_0 z_{\alpha/2} + \sigma z_\beta}{\sigma - \sigma_0}\right]^2$
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$	$\beta = \mathbb{P}\left[\chi^2_{n-1} \leq \lambda\chi^2_{\alpha,n-1}\right]$	$n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sigma_0 z_\alpha + \sigma z_\beta}{\sigma - \sigma_0}\right]^2$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$	$\beta = \mathbb{P}\left[\chi^2_{n-1} \geq \lambda\chi^2_{1-\alpha,n-1}\right]$	$n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sigma_0 z_\alpha + \sigma z_\beta}{\sigma - \sigma_0}\right]^2$

TABLE 4 – Test de 2 moyennes (variances inconnues)

	Hypothèse nulle	Statistique du test	Constante
	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$z_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\delta = \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

Contre-hypothèses	On rejette H_0 si	Erreur de 2^e espèce	Taille nécessaire
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}$	$\beta = \Phi(z_{\alpha/2} - \delta) - \Phi(-z_{\alpha/2} - \delta)$	$n = \dfrac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$z_0 > z_\alpha$	$\beta = \Phi(z_\alpha - \delta)$	$n = \dfrac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$\beta = \Phi(z_\alpha + \delta)$	$n = \dfrac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$