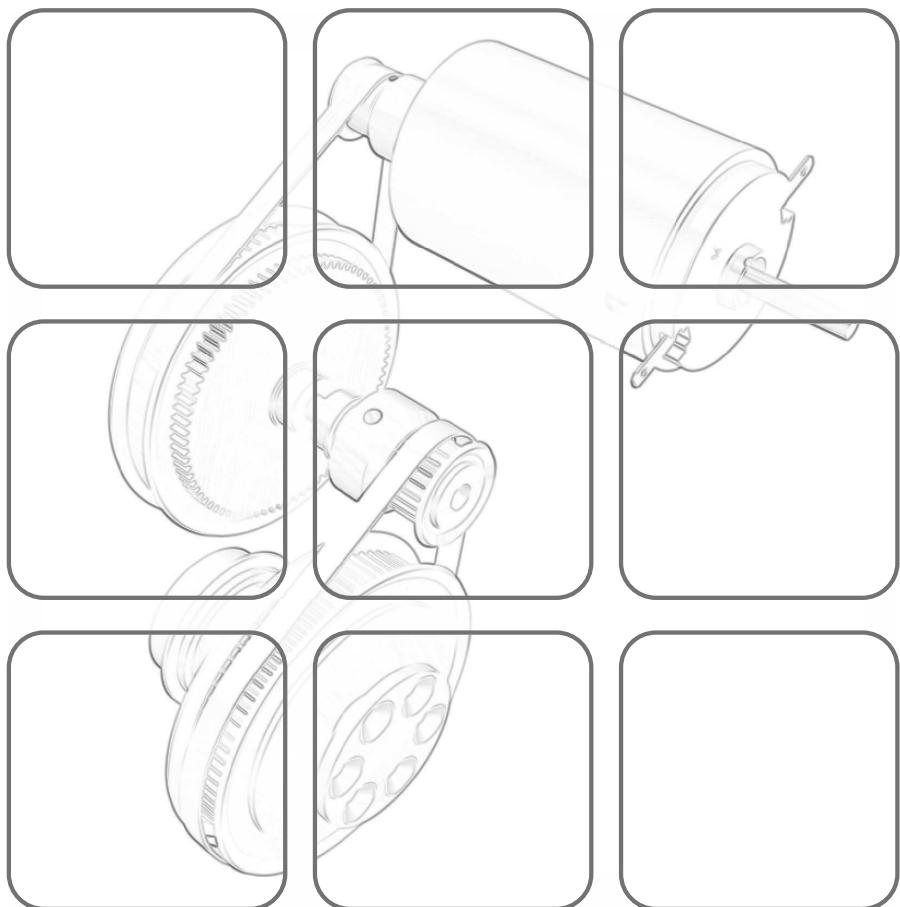


# MODELLENTWICKLUNG

Vorlesung und Übung  
SS 2013

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas KUGI  
Dr. techn. Tobias Glück  
Dr.-Ing. Wolfgang Kemmetmüller  
Dr. techn. Andreas Steinböck



## **Modellbildung**

Vorlesung und Übung  
SS 2013

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas KUGI  
Dr. techn. Tobias Glück  
Dr.-Ing. Wolfgang Kemmetmüller  
Dr. techn. Andreas Steinböck

TU Wien  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik  
Gruppe für komplexe dynamische Systeme

Gusshausstrasse 27-29  
1040 Wien  
Telefon: +43 1 58801 – 37615  
Internet: <http://www.acin.tuwien.ac.at>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Literatur . . . . .	6
<b>2 Mechanische Systeme</b>	<b>7</b>
2.1 Punkt-Kinematik . . . . .	7
2.2 Newtonsche Gesetze . . . . .	12
2.2.1 Kräftesysteme . . . . .	12
2.2.2 Schwerpunkt . . . . .	20
2.2.3 Impulserhaltung . . . . .	24
2.2.4 Translatorische kinetische Energie und potentielle Energie . . . . .	28
2.2.5 Dissipative Kräfte . . . . .	33
2.2.6 Feder-Masse-Dämpfer System . . . . .	40
2.2.7 Körper mit veränderlicher Masse . . . . .	47
2.2.8 Drehimpulserhaltung . . . . .	48
2.3 Euler-Lagrange Gleichungen . . . . .	58
2.4 Literatur . . . . .	69
<b>3 Pneumatische und hydraulische Systeme</b>	<b>71</b>
3.1 Thermodynamische Grundlagen . . . . .	71
3.2 Hauptsätze der Thermodynamik und Gibbssche Fundamentalgleichung . . . . .	72
3.3 Beziehungen zwischen thermischer und kalorischer Zustandsgleichung . . . . .	74
3.4 Prozessführung . . . . .	76
3.5 Spezifische Wärmekapazität . . . . .	76
3.6 Materialgesetze von Gasen und Flüssigkeiten . . . . .	78
3.6.1 Materialgesetz idealer Gase . . . . .	79
3.6.1.1 Prozessführungen idealer Gase . . . . .	80
3.6.2 Materialgesetz für Flüssigkeiten . . . . .	84
3.7 Massenerhaltung . . . . .	87
3.8 Impulserhaltung . . . . .	91
3.9 Energieerhaltung . . . . .	104
3.10 Literatur . . . . .	109
<b>4 Wärmeübertragung</b>	<b>110</b>
4.1 Wärmeleitung . . . . .	112
4.2 Randbedingungen . . . . .	114
4.2.1 Erzwungene Konvektion . . . . .	115
4.2.2 Freie Konvektion . . . . .	120
4.2.3 Wärmeleitung . . . . .	120

4.2.4	Wärmestrahlung . . . . .	121
4.3	Wärmequellen . . . . .	132
4.4	Stationäre Wärmeübertragung . . . . .	135
4.4.1	Ebene Wand . . . . .	135
4.4.2	Zylinderförmige Wand . . . . .	136
4.4.3	Vorspringende Teile und Rippen . . . . .	138
4.4.4	Wärmetauscher . . . . .	141
4.5	Transiente Wärmeübertragung . . . . .	144
4.6	Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen . . . . .	146
4.6.1	Finite Differenzen Methode . . . . .	146
4.6.2	Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk . . . . .	150
4.7	Literatur . . . . .	157

# 1 Einleitung

Im Rahmen dieser Vorlesung wollen wir uns mit der Modellbildung technischer Systeme beschäftigen. In einem ersten Schritt soll daher geklärt werden, was man unter einem *System* versteht. Einfach formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher Komponenten, die miteinander in Interaktion stehen, zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben*. Die Wechselwirkung eines Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen*, siehe Abbildung 1.1.

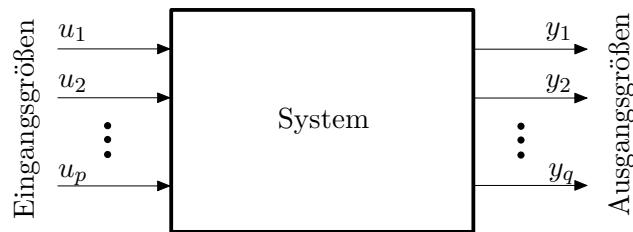


Abbildung 1.1: Zum Systembegriff.

Die Eingangsgrößen  $u_1, u_2, \dots, u_p$  sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken und nicht vom Verhalten des Systems selbst beeinflusst werden. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen man das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflussen kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man auch *Messgrößen*.

Ein *Modell* ist im Wesentlichen ein *beschränktes Abbild der Wirklichkeit*, in dem die für die jeweilige Aufgabe wesentlichen Eigenschaften des Systems berücksichtigt werden. Bei einem *mathematischen Modell* wird das Verhalten des realen Systems in abstrakter Form beispielsweise durch algebraische Gleichungen, gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen abgebildet. An dieser Stelle ist es wichtig zu betonen, dass *kein mathematisches Modell ein System exakt abbildet*. Vielmehr stellt ein mathematisches Modell immer einen *Kompromiss* zwischen *Modellkomplexität* und *Modellgenauigkeit* bezüglich der gewünschten Eigenschaften dar. Um ein für die jeweilige Fragestellung geeignetes mathematisches Modell zu entwickeln, müssen teilweise in wiederkehrenden Schleifen verschiedene Schritte der Dekomposition (Zerlegung des Systems in einzelne Subsysteme und Komponenten), der Reduktion und Abstraktion (Weglassen von für die Aufgabenstellung unwesentlichen Details und Überführen auf ein einfacheres Ersatzsystem) und der Aggregation (Zusammenfassung von Komponenten und Subsystemen zu einem Ganzen)

durchgeführt werden. Diese Schritte lassen sich nur beschränkt systematisieren, weshalb die Erstellung eines geeigneten mathematischen Modells zumindest zum Teil eine Ingenieurskunst ist und immer bleiben wird. Das mathematische Modell bildet nicht nur die Grundlage für die *Systemanalyse*, bei der das statische und dynamische Verhalten des Systems in Abhängigkeit der Eingangsgrößen und Systemparameter untersucht wird, sondern auch für die *Systemsynthese*, also den Entwurf des Gesamtsystems. Zum letzteren Punkt zählt insbesondere auch die Auslegung von geeigneten Sensoren und Aktoren bis hin zum Steuerungs- und Regelungsentwurf, der ausführlich in der Vorlesung Automatisierung im kommenden Semester behandelt wird.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen der theoretischen und experimentellen Modellbildung. Bei der *experimentellen Modellbildung* wird das mathematische Modell auf Basis der gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen so erstellt, dass das Eingangs-Ausgangsverhalten möglichst gut wiedergegeben wird. Diese Art der Modellbildung wird auch als *Systemidentifikation* bezeichnet und man spricht bei Modellen, die ausschließlich auf experimenteller Information beruhen, von *Black-Box Modelle*n. Da Black-Box Modelle sich lediglich auf experimentelle Ergebnisse stützen und kein (oder sehr wenig) *a priori* Wissen des Systems nutzen, hat das so gewonnene Modell nur in dem durch die Identifikation abgedeckten Datensatz Gültigkeit. Der Hauptvorteil besteht wohl darin, dass man relativ wenig Wissen über das System benötigt. Im Gegensatz dazu werden die mathematischen Modelle bei der *theoretischen Modellbildung* auf Basis physikalischer Grundgesetze hergeleitet. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *White-Box Modelle*n oder *first-principles models*. Zwischen den Black-Box und White-Box Modellen gibt es je nach Verhältnis von experimenteller zu physikalisch basierter Modellinformation verschiedene Grade von *Grey-Box Modelle*n. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, ein mathematisches Modell ausschließlich über physikalische Gesetze herzuleiten und vollständig zu parametrieren, denn einige sogenannte konstitutive Parameter (Reibungsparameter, Streuinduktivitäten, Leckölstromkoeffizienten) müssen aus Experimenten ermittelt werden, auch wenn der Modellansatz physikalisch motiviert ist. Die Vorteile dieser letzteren Modelle (White-Box Modelle mit wenigen experimentell ermittelten Konstitutivparametern) besteht in der sehr guten Extrapolierbarkeit des Modells über die durch Experimente gewonnenen Daten hinaus, einer hohen Zuverlässigkeit, einer guten Einsicht in das Modell, sowie in der Tatsache, dass das Modell skalierbar und auch für noch nicht realisierte Systeme (Prototyping) anwendbar ist. Als Nachteil kann angegeben werden, dass diese Art der Modellbildung im Allgemeinen relativ zeitintensiv ist und man das System genau verstehen muss. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns ausschließlich auf letztgenannte mathematische Modelle konzentrieren.

Im Folgenden betrachte man die zwei einfachen elektrischen Systeme von Abbildung 1.2, nämlich einen Widerstand und einen idealen Kondensator, mit der Eingangsgröße  $i(t)$  (Strom), der Ausgangsgröße  $u(t)$  (Spannung) und der Zeit  $t$ . Beim Widerstand  $R$  ist die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch die Eingangsgröße zum Zeitpunkt  $t$  bestimmt, es gilt nämlich

$$u(t) = Ri(t) . \quad (1.1)$$

Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Im Gegensatz dazu muss zur

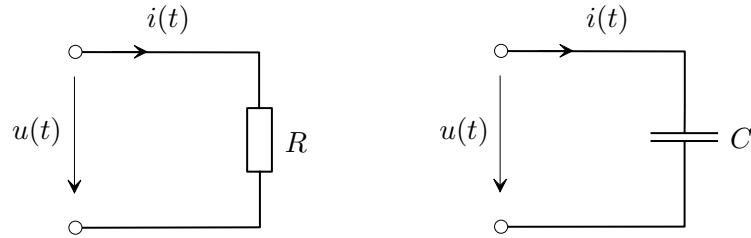


Abbildung 1.2: Zu statischen und dynamischen Systemen.

Berechnung der Spannung  $u(t)$  des Kondensators  $C$  zum Zeitpunkt  $t$  der Eingangsstrom  $i(\tau)$  für die gesamte Vergangenheit  $\tau \leq t$  bekannt sein, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Kennt man die Eingangsgröße  $i(\tau)$  lediglich für das Zeitintervall  $t_0 \leq \tau \leq t$ , dann muss zusätzlich die Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anfangsbedingung  $u(t_0) = u_0$  bekannt sein. Wie man aus (1.2) erkennt, beinhaltet die Anfangsbedingung die gesamte Information über die Vergangenheit  $\tau < t_0$ . Man sagt auch,  $u(t_0)$  beschreibt den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt  $t_0$ . Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Vergangenheit abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.1, wie im Falle des Widerstandes und des Kondensators, die Werte der Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  zum Zeitpunkt  $t$  ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$  für  $\tau \leq t$  abhängen, dann nennt man das System *kausal*. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden wir uns im Folgenden auf diesen Fall beschränken.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems anzugeben:

**Definition 1.1 (Zustand).** Existieren für ein dynamisches System Größen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$  auf dem Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  und den Werten von  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  für ein beliebiges  $t_0$  festgelegt sind, dann heißen die Größen  $x_1, \dots, x_n$  *Zustandsgrößen* des Systems.

**Aufgabe 1.1.** Welche Größe wählen Sie als Zustandsgröße bei einer Induktivität? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung von Aufgabe 1.1.** Strom durch die Induktivität.

Dynamische Systeme, die sich durch eine endliche Anzahl  $n$  von Zustandsgrößen charakterisieren lassen, werden auch als *Systeme mit finitem Zustand* der *Ordnung n* bezeichnet. Diese Systeme mit finitem Zustand, oft auch *konzentriert-parametrische Systeme* genannt, werden durch mathematische Modelle in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschrieben. Im Rahmen dieser Vorlesung schränken wir uns auf jene Systemklasse mit finitem Zustand ein, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* folgender Form erlaubt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), \quad x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), \quad x_n(t_0) = x_{n,0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zustandsdifferen-} \\ \text{tialgleichungen} \\ \text{mit Anfangs-} \\ \text{bedingungen} \end{array} \quad (1.3a)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ y_2 = h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ \vdots \\ y_q = h_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \end{array} \right\} \quad \text{Ausgangsgleichungen} \quad (1.3b)$$

Fasst man die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = [u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_p]^T \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_q]^T \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n]^T \quad (1.4c)$$

zusammen und schreibt zur Vereinfachung der Notation an Stelle von  $\frac{d}{dt}$  einen Punkt über die abzuleitende Größe, dann lässt sich (1.3) in kompakter Vektorschreibweise in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.5b)$$

angeben. Die Größen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{x}$  werden einfach als *Eingang*, *Ausgang* und *Zustand* des dynamischen mathematischen Modells bezeichnet.

Wird der Zustand  $\mathbf{x}$  als Element eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $t$  kann dann als Punkt im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche Zeit  $t$  in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abbildung 1.3 zur Veranschaulichung einer Trajektorie im 3-dimensionalen Zustandsraum.

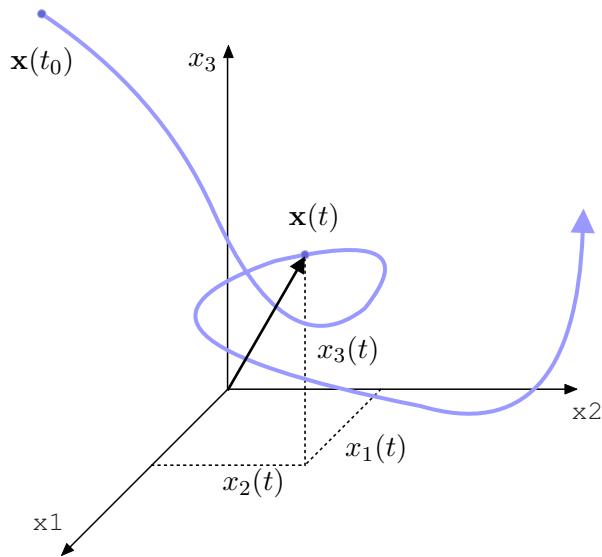


Abbildung 1.3: Zum Begriff der Trajektorie.

Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass *Systeme mit infinit-dimensionalem Zustand*, auch *verteilt-parametrische Systeme* genannt, durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Beispiele dazu wären Balken, Platten, Membranen und elektromagnetische Felder.

## 1.1 Literatur

- [1.1] R. Cannon, *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [1.2] F. E. Cellier, *Continuous System Modeling*. New York: Springer, 1991.
- [1.3] S. W. Director und R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [1.4] O. Föllinger und D. Franke, *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. München, Wien: Oldenbourg, 1982.
- [1.5] R. Isermann, *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [1.6] D. Karnopp, D. Margolis und R. Rosenberg, *System Dynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [1.7] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995.
- [1.8] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [1.9] L. Padulo und M. A. Arbib, *System Theory*. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1974.
- [1.10] J. L. Shearer und B. T. Kulakowski, *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.

## 2 Mechanische Systeme

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung einfacher mechanischer Systeme diskutiert. Im Speziellen liegt der Fokus auf der Beschreibung der Bewegung von Punktmassen sowie einfacher Starrkörpersysteme in der Ebene.

### 2.1 Punkt-Kinematik

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern oder einzelnen materiellen Punkten im Raum bezüglich eines Bezugssystems. Betrachtet man als Bezugssystem das raumfeste kartesische Koordinatensystem ( $0xyz$ ) mit dem Ursprung 0 und den orthonormalen Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$ , d. h.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

dann kann der Ortsvektor vom Ursprung 0 zu einem materiellen Punkt  $P$  in der Form

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

mit den in der Zeit  $t$  parametrisierten Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  beschrieben werden, siehe Abbildung 2.1. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und die Beschleunigung  $\mathbf{a}(t)$  des

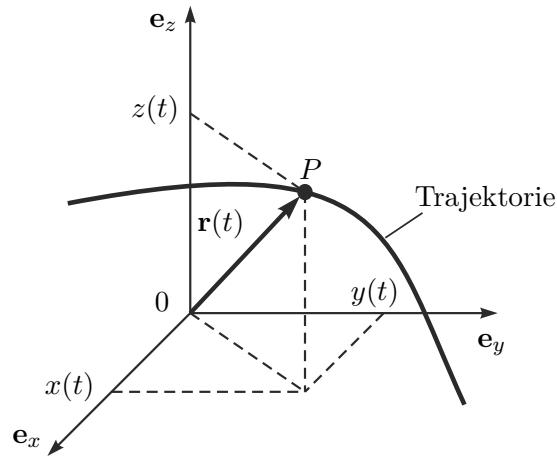


Abbildung 2.1: Trajektorie im kartesischen Koordinatensystem.

materiellen Punktes  $P$  erhält man durch zeitliche Differentiation in der Form

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

bzw.

$$\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z , \quad (2.4)$$

wobei  $v_x, v_y, v_z$  und  $a_x, a_y, a_z$  die jeweiligen Komponenten bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  beschreiben. Es sei angemerkt, dass in weiterer Folge die totale zeitliche Ableitung einer Funktion  $x(t)$  mit  $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  bzw.  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$  bezeichnet wird. Im einfachsten Fall, wenn das Koordinatensystem immer so gewählt werden kann, dass der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  für alle Zeiten  $t$  mit einer Koordinatenachse zusammenfällt, dann spricht man von einer *geradlinigen Bewegung*.

**Beispiel 2.1.** Eine Masse wird von einem Motor geradlinig gemäß dem in Abbildung 2.2 dargestellten Beschleunigungsverlauf beschleunigt.

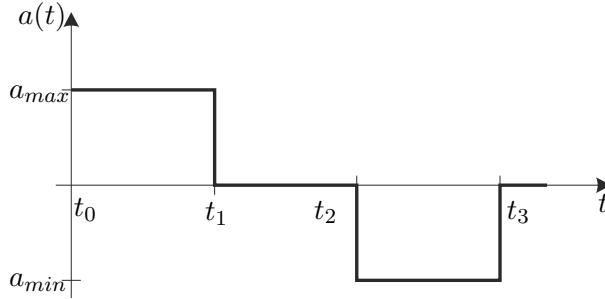


Abbildung 2.2: Zeitverlauf der Beschleunigung  $a(t)$ .

Wie groß muss die Zeit  $t_3$  und die minimale Beschleunigung  $a_{min}$  gewählt werden, dass zum Zeitpunkt  $t = t_3$  die Geschwindigkeit Null ist und die Position einen vorgegebenen Wert  $x_{soll}$  annimmt? Es wird dabei vorausgesetzt, dass zum Zeitpunkt  $t = t_0$  gilt  $v(t_0) = v_0 = 0, x(t_0) = x_0 = 0$ . Für das Zeitintervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  errechnet sich der Geschwindigkeits- und Positionsverlauf zu

$$v_1(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a_{max} d\tau = \underbrace{v_0}_{=0} + a_{max}(t - t_0) \quad (2.5a)$$

$$x_1(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t a_{max}(\tau - t_0) d\tau = \underbrace{x_0}_{=0} + \frac{1}{2}a_{max}(t - t_0)^2 , \quad (2.5b)$$

für  $t_1 \leq t \leq t_2$  folgt

$$v_2(t) = v_1(t_1) + \int_{t_1}^t 0 d\tau = a_{max}(t_1 - t_0) \quad (2.6a)$$

$$x_2(t) = x_1(t_1) + \int_{t_1}^t a_{max}(t_1 - t_0) d\tau = \frac{1}{2}a_{max}(t_1 - t_0)^2 + a_{max}(t_1 - t_0)(t - t_1) \quad (2.6b)$$

und für  $t_2 \leq t \leq t_3$  ergibt sich

$$v_3(t) = v_2(t_2) + \int_{t_2}^t a_{min} d\tau = a_{max}(t_1 - t_0) + a_{min}(t - t_2) \quad (2.7a)$$

$$x_3(t) = x_2(t_2) + \int_{t_2}^t v_3(\tau) d\tau = \frac{1}{2}a_{max}(t_0^2 - t_1^2) + a_{max}(t_1 - t_0)t + \frac{1}{2}a_{min}(t - t_2)^2. \quad (2.7b)$$

Mit der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = t_3$

$$v_3(t_3) = a_{max}(t_1 - t_0) + a_{min}(t_3 - t_2) \quad (2.8)$$

errechnet sich die gewünschte Zeit  $t_3$  aus der Bedingung  $v_3(t_3) = 0$  zu

$$t_3 = t_2 - \frac{a_{max}}{a_{min}}(t_1 - t_0) \quad (2.9)$$

und die gewünschte Position  $x_3(t_3) = x_{soll}$  mit

$$x_3(t_3) = \frac{1}{2a_{min}}a_{max}(t_1 - t_0)(a_{min}(2t_2 - t_0 - t_1) + a_{max}(t_0 - t_1)) \quad (2.10)$$

wird durch die Beschleunigung

$$a_{min} = \frac{-a_{max}^2(t_1 - t_0)^2}{a_{max}((t_1 - t_0)(t_1 + t_0 - 2t_2)) + 2x_{soll}} \quad (2.11)$$

erreicht. Der Positions- und Geschwindigkeitsverlauf ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

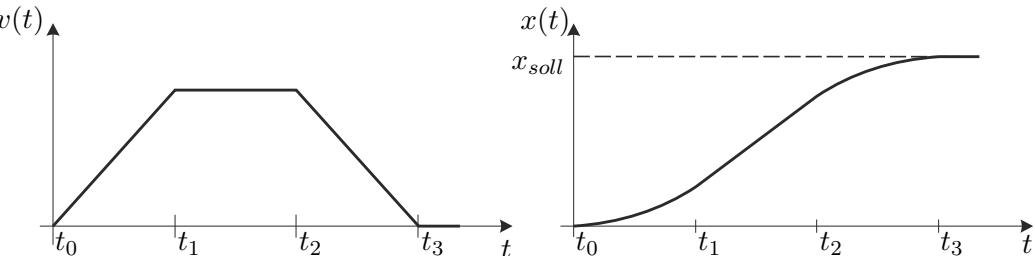


Abbildung 2.3: Zeitverlauf der Geschwindigkeit  $v(t)$  und der Position  $x(t)$ .

Im Weiteren soll die Bewegung eines materiellen Punktes  $P$  in der Ebene bezüglich des raumfesten Koordinatensystems  $(0xy)$  betrachtet und mit Hilfe von *Polarkoordinaten*

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t) \sin(\varphi(t)) \quad (2.12)$$

beschrieben werden, siehe Abbildung 2.4. Damit lautet der Ortsvektor vom Ursprung 0 zu einem materiellen Punkt  $P$

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \mathbf{e}_x + r(t) \sin(\varphi(t)) \mathbf{e}_y. \quad (2.13)$$

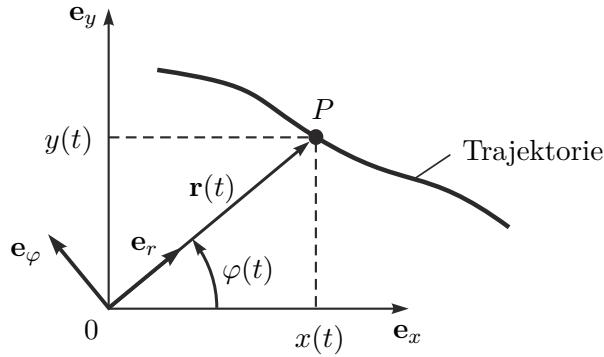


Abbildung 2.4: Trajektorie im Polarkoordinatensystem.

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  gemäß (2.3) erhält man durch Anwendung der Kettenregel der Differentiation in der Form

$$\mathbf{v}(t) = \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} \right) \dot{r} + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} \right) \dot{\varphi}, \quad (2.14)$$

wobei nun die Basisvektoren der Polarkoordinaten sich zu

$$\tilde{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = -r \sin(\varphi) \mathbf{e}_x + r \cos(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.15b)$$

ergeben. Die Vektoren  $\tilde{\mathbf{e}}_r$  und  $\tilde{\mathbf{e}}_\varphi$  bilden genau dann eine zulässige Basis, wenn die Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

regulär ist, also  $\det(\mathbf{J}) = r \neq 0$  ist. Dies ist abgesehen vom Punkt  $r = 0$  überall der Fall. Normiert man nun die Basisvektoren auf die Länge 1

$$\mathbf{e}_r = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_r}{\|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_\varphi}{\|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\|_2} \quad (2.17)$$

mit

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_2 = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1 \quad \text{und} \quad \|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\|_2 = r, \quad (2.18)$$

dann lässt sich (2.14) in der Form

$$\mathbf{v}(t) = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.19)$$

mit den Komponenten  $v_r = \dot{r}$  (*radiale Komponente*) und  $v_\varphi = r \dot{\varphi}$  (*zirkulare Komponente*) der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  schreiben. In der Zeit  $dt$  überstreicht der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  einen Winkel  $d\varphi$  und die auf die Zeit bezogene Winkeländerung  $\omega = \dot{\varphi}$  wird als *Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet. Bei einer reinen Kreisbewegung (siehe Abbildung 2.5) ist die radiale Geschwindigkeitskomponente  $v_r = 0$  und für die zirkulare Geschwindigkeitskomponente gilt  $v_\varphi = r\omega$ .

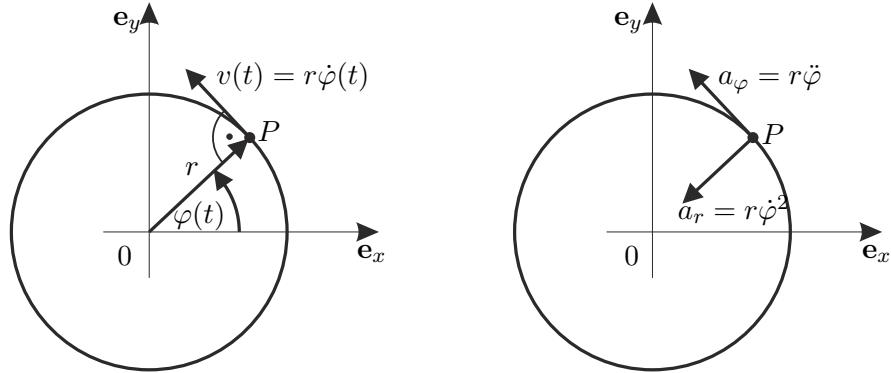


Abbildung 2.5: Kreisbahn im Polarkoordinatensystem.

*Aufgabe 2.1.* Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeitskomponenten eines materiellen Punktes  $P$  im Raum bezüglich der normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\theta) \quad (2.20)$$

zu

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin(\theta) \dot{\varphi} \quad (2.21)$$

errechnen.

Die Komponenten der Beschleunigung  $\mathbf{a}(t)$  in Polarkoordinaten bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  erhält man durch totale zeitliche Differentiation von  $\mathbf{v}(t)$  nach (2.19)

$$\mathbf{a}(t) = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{v}_r \mathbf{e}_r + v_r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (2.22)$$

wobei darauf geachtet werden muss, dass sich die Basisvektoren (siehe (2.15) und (2.17))

$$\mathbf{e}_r = \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \mathbf{e}_x + \cos(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.23b)$$

ebenfalls zeitlich ändern. Man ist nun bestrebt,  $\dot{\mathbf{e}}_r$  und  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$  durch  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  auszudrücken. Dazu wird (2.23) invertiert

$$\mathbf{e}_x = \cos(\varphi) \mathbf{e}_r - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin(\varphi) \mathbf{e}_r + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi \quad (2.24b)$$

und in  $\dot{\mathbf{e}}_r$  und  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$  substituiert, d. h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= -\sin(\varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_x + \cos(\varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_y \\ &= -\sin(\varphi) \dot{\varphi} (\cos(\varphi) \mathbf{e}_r - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) + \cos(\varphi) \dot{\varphi} (\sin(\varphi) \mathbf{e}_r + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.25)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\cos(\varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_x - \sin(\varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_y \\ &= -\cos(\varphi) \dot{\varphi} (\cos(\varphi) \mathbf{e}_r - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) - \sin(\varphi) \dot{\varphi} (\sin(\varphi) \mathbf{e}_r + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) \\ &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Setzt man (2.25) und (2.26) in (2.22) ein

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \dot{v}_r \mathbf{e}_r + v_r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\mathbf{e}}_\varphi \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi} (-\dot{\varphi} \mathbf{e}_r) \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}\quad (2.27)$$

dann folgt die *radiale Beschleunigung* zu  $a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$  und die zirkulare Beschleunigung zu  $a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}$ . Bei einer reinen Kreisbewegung vereinfacht sich die Tangentialkomponente zu  $a_\varphi = r \ddot{\varphi}$  und die Radialkomponente  $a_r = -r \dot{\varphi}^2$  wird auch als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet, siehe Abbildung 2.5.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass im allgemeinen Fall eines Koordinatenwechsels die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren sehr elegant über die so genannten *Christoffel Symbole* mit Hilfe der Basisvektoren selbst ausgedrückt werden können. Effiziente Möglichkeiten zur Berechnung dieser Christoffel Symbole findet man beispielsweise in [2.1].

**Aufgabe 2.2.** Zeigen Sie, dass sich die Beschleunigungskomponenten eines materiellen Punktes  $P$  im Raum bezüglich der normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\theta)$$

zu

$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2 \\ a_\theta &= 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi &= (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \sin(\theta) + 2 r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta)\end{aligned}$$

errechnen.

**Hinweis:** Verwenden Sie zur Lösung ein Computeralgebraprogramm!

## 2.2 Newtonsche Gesetze

### 2.2.1 Kräftesysteme

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir nur Einzelkräfte betrachten, die an diskreten Punkten (*Angriffspunkten*) eines *Starrkörpers* wirken. Ein Starrkörper hat die Eigenschaft, dass unter der Wirkung von Kräften der Abstand beliebiger Körperpunkte immer

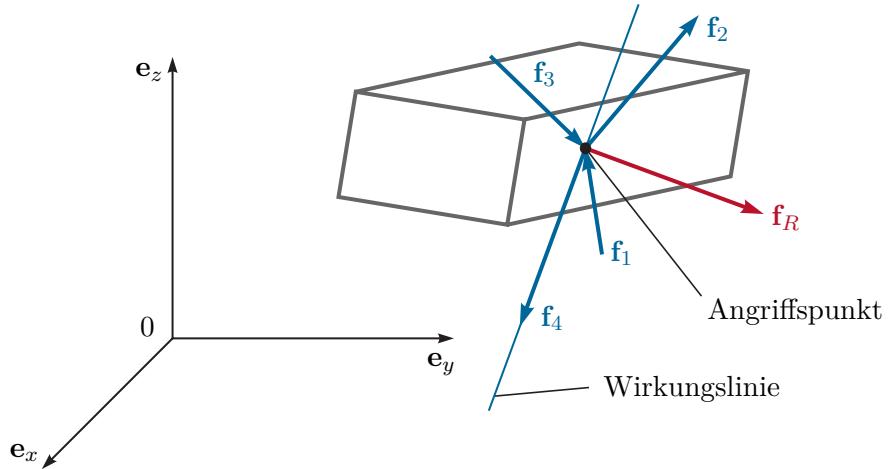


Abbildung 2.6: Zentrales Kräftesystem.

gleich bleibt. Die Richtung der Kraft wird durch ihre *Wirkungslinie* und durch den Richtungssinn beschrieben. Die SI Einheit der Kraft ist Newton ( $N = \text{kgms}^{-2}$ ).

Bei einem sogenannten *zentralen Kräftesystem* wirken alle Einzelkräfte  $\mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  am gleichen Angriffspunkt und die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  ergibt sich zu (siehe Abbildung 2.6)

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i . \quad (2.28)$$

Drückt man nun die Kräfte  $\mathbf{f}_i$  mit ihren Komponenten im Koordinatensystem ( $0xyz$ ) mit den orthonormalen Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  aus, d. h.  $\mathbf{f}_i = f_{i,x}\mathbf{e}_x + f_{i,y}\mathbf{e}_y + f_{i,z}\mathbf{e}_z$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann ergibt sich (2.28) zu

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n (f_{i,x}\mathbf{e}_x + f_{i,y}\mathbf{e}_y + f_{i,z}\mathbf{e}_z) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,x}\mathbf{e}_x}_{f_{R,x}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,y}\mathbf{e}_y}_{f_{R,y}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,z}\mathbf{e}_z}_{f_{R,z}} . \quad (2.29)$$

Ein zentrales Kräftesystem ist nun im *Gleichgewicht*, wenn die resultierende Kraft verschwindet

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad f_{R,x} = 0, f_{R,y} = 0 \text{ und } f_{R,z} = 0 \quad (2.30)$$

Das *dritte Newtonsche Gesetz (Wechselwirkungsgesetz)* besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große entgegengesetzt wirkende Gegenkraft existiert (*actio gleich reactio*). Wenn man beispielsweise mit der Hand eine Kraft auf die Tischplatte ausübt, dann wirkt eine gleich große entgegengesetzte Kraft von der Tischplatte auf unsere Hand. Dies kann man dadurch darstellen, dass man an der Kontaktstelle Hand/Tischplatte die beiden Körper auseinanderschneidet und die zugehörigen Kräfte einzeichnet (*Schnittprinzip*), siehe Abbildung 2.7. Ein anderes Beispiel ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Nimmt man an, dass das Gewicht des Seils vernachlässigbar ist und die Rolle reibungsfrei gelagert ist, dann

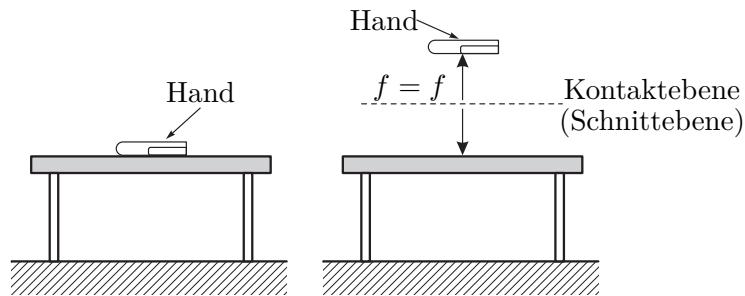


Abbildung 2.7: Kräfte zwischen der Tischplatte und der darauf drückenden Hand.

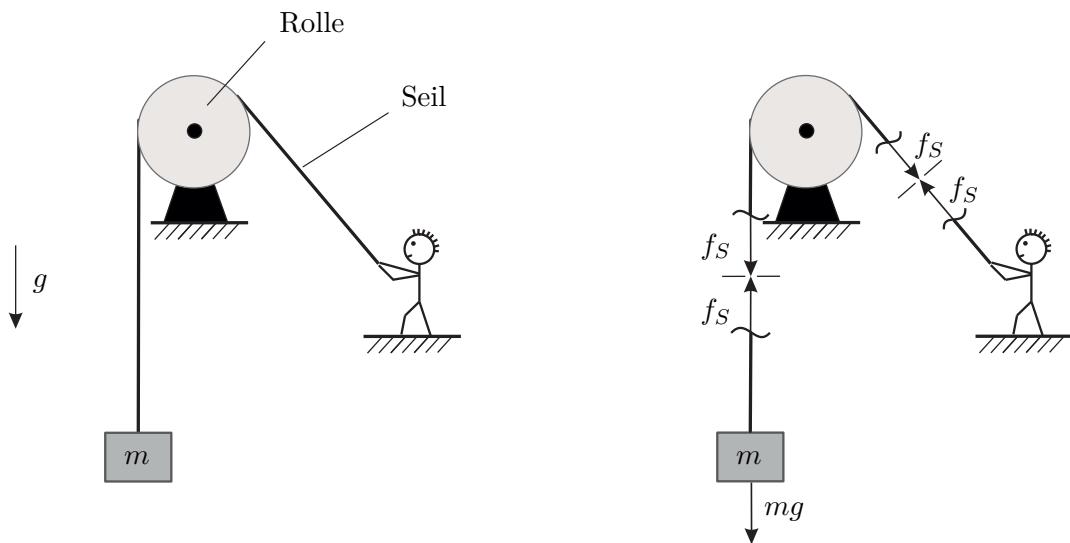


Abbildung 2.8: Kraft in einem Seil.

wirkt auf die Masse  $m$  die Seilkraft  $f_S$  und auch der Mensch muss die Kraft  $f_S$  aufbringen, um die Last zu halten.

*Beispiel 2.2.* Ein Zylinder der Masse  $m$  mit dem Radius  $r$  wird durch ein im Mittelpunkt befestigtes Seil mit der Länge  $l$  auf einer glatten Ebene gehalten, siehe Abbildung 2.9(a). Die Kräfte, die auf den freigeschnittenen Zylinder wirken, sind in Abbildung 2.9(b) dargestellt.

Da das zentrale Kräftesystem im Gleichgewicht ist, muss nach (2.29) gelten

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & f_N - f_S \sin(\alpha) = 0 \\ \mathbf{e}_z : \quad & f_S \cos(\alpha) - mg = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

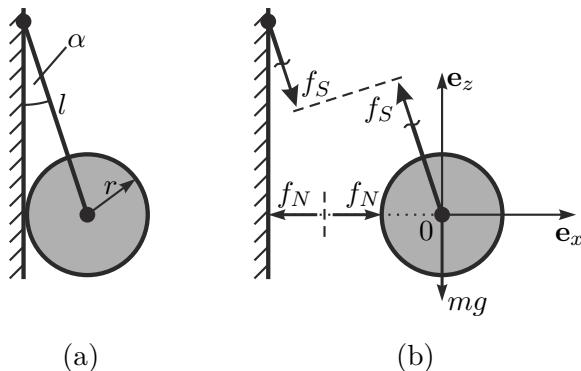


Abbildung 2.9: Zylinder am Seil.

mit der Erdbeschleunigung  $g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$  und dem Winkel  $\alpha = \arcsin(r/l)$ . Aus (2.31) lassen sich nun die Kräfte  $f_S$  und  $f_N$  in der Form

$$f_S = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \quad \text{und} \quad f_N = mg \tan(\alpha) \quad (2.32)$$

berechnen.

*Aufgabe 2.3.* Ein vertikaler Mast  $M$  wird gemäß Abbildung 2.10 durch Seile abgespannt.

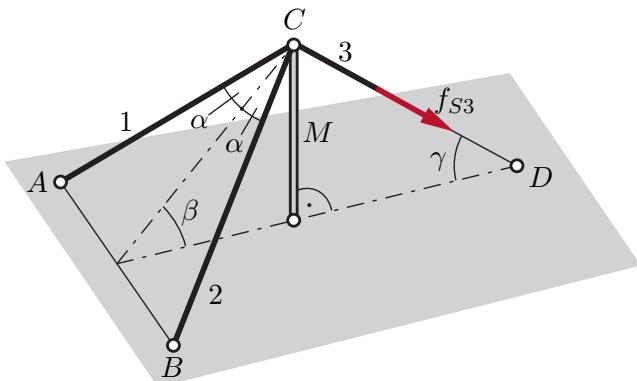


Abbildung 2.10: Vertikaler Mast mit drei Seilen.

Wie groß sind die Kräfte  $f_{S1}$  und  $f_{S2}$  in den Seilen 1 und 2 und die Kraft  $f_M$  im Mast, wenn am Seil 3 die Zugkraft  $f_{S3}$  aufgebracht wird?

## *Lösung von Aufgabe 2.3.*

$$f_{S1} = f_{S2} = f_{S3} \frac{\cos(\gamma)}{2 \cos(\alpha) \cos(\beta)} \quad \text{und} \quad f_M = -f_{S3} \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta)}$$

Bei einem *allgemeinen Kräftesystem* wirken die einzelnen Kräfte nicht an einem einzigen Angriffspunkt und können daher auch nicht mehr zu einer einzigen resultierenden Kraft zusammengefasst werden, siehe Abbildung 2.11. In diesem Fall bedingen die Kräfte -

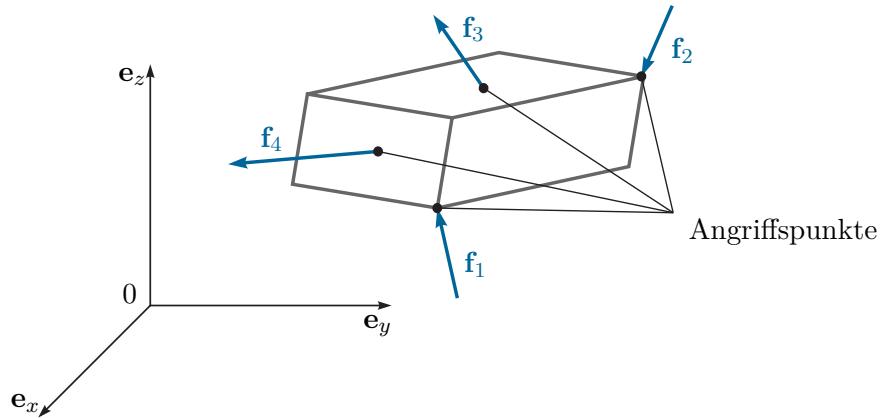


Abbildung 2.11: Allgemeines Kräftesystem.

falls sie nicht im Gleichgewicht sind - nicht nur eine translatorische Verschiebung des Starrkörpers sondern werden diesen auch verdrehen. Im einfachsten Fall betrachte man den Starrkörper von Abbildung 2.12, bei dem die beiden Kräfte  $f_{z,1}e_z$  und  $f_{z,2}e_z$  ein resultierendes *Moment* um die Drehachse  $e_y$  erzeugen und damit den Starrkörper um diese Achse rotieren, falls nicht das *Hebelgesetz*  $f_{z,1}l_1 = f_{z,2}l_2$  (Kraft mal Kraftarm ist gleich Last mal Lastarm) erfüllt ist. Das Moment bezüglich der Drehachse wird positiv gezählt, wenn die Wirkung des Moments im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung des zur Achse gehörigen Richtungsvektors liegt. Für positive Kraftkomponenten  $f_{z,1}$  und  $f_{z,2}$  ist für Abbildung 2.12 das Moment  $\tau_{y,1}^{(0)} = f_{z,1}l_1$  bezüglich der Drehachse  $e_y$  positiv und das Moment  $\tau_{y,2}^{(0)} = -f_{z,2}l_2$  negativ. Die SI Einheit des Moments ist Newton-Meter (Nm = kgm<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>).

Das Moment

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \tau_x^{(0)}\mathbf{e}_x + \tau_y^{(0)}\mathbf{e}_y + \tau_z^{(0)}\mathbf{e}_z \quad (2.33)$$

der Kraft

$$\mathbf{f} = f_x\mathbf{e}_x + f_y\mathbf{e}_y + f_z\mathbf{e}_z \quad (2.34)$$

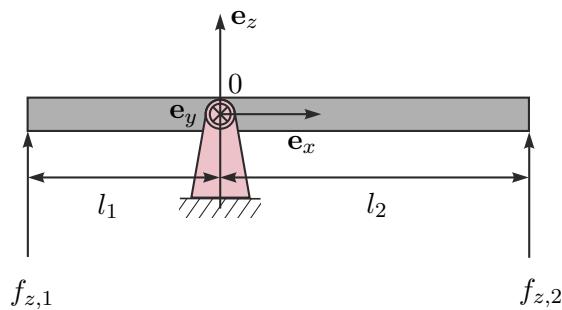
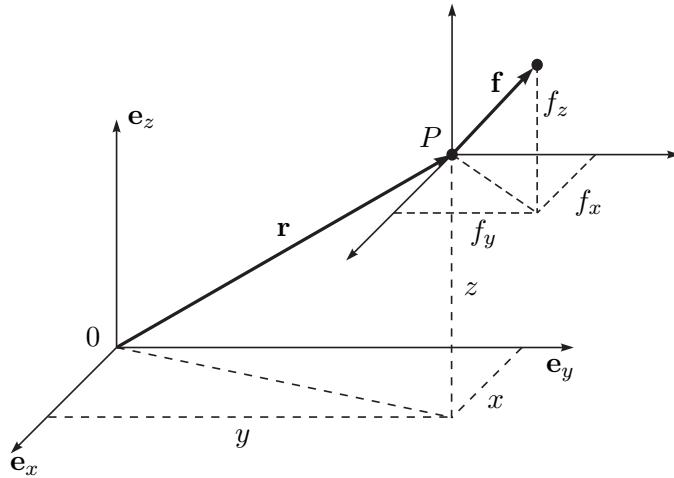


Abbildung 2.12: Drehbar gelagerter Balken.

Abbildung 2.13: Zum Moment der Kraft  $\mathbf{f}$  bezüglich des Punktes 0.

bezüglich des Punktes 0 im kartesischen Koordinatensystem ( $0xyz$ ) mit dem Ortsvektor vom Punkt 0 zum Kraftangriffspunkt  $P$ , siehe Abbildung 2.13,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.35)$$

lautet

$$\tau_x^{(0)} = (yf_z - zf_y), \quad \tau_y^{(0)} = (zf_x - xf_z), \quad \tau_z^{(0)} = (xf_y - yf_x). \quad (2.36)$$

Man erkennt damit unmittelbar, dass das Moment in der Form

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yf_z - zf_y \\ zf_x - xf_z \\ xf_y - yf_x \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

geschrieben werden kann<sup>1</sup>. Wirken nun auf einen Starrkörper mehrere Momente  $\boldsymbol{\tau}_i^{(A)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  bezüglich des selben Punktes  $A$ , dann errechnet sich das resultierende Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$  zu

$$\boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i^{(A)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,x}^{(A)} \mathbf{e}_x}_{\boldsymbol{\tau}_{R,x}^{(A)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,y}^{(A)} \mathbf{e}_y}_{\boldsymbol{\tau}_{R,y}^{(A)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,z}^{(A)} \mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\tau}_{R,z}^{(A)}}. \quad (2.38)$$

Ein allgemeines Kräftesystem gemäß Abbildung 2.11 lässt sich stets bezüglich eines *beliebig gewählten* Bezugspunktes  $A$  durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  am Angriffspunkt  $A$

---

<sup>1</sup>Zur vereinfachten und kompakteren Schreibweise werden hier und im Folgenden häufig die Komponenten der vektoriellen Größen einfach in einem Vektor zusammengefasst, d. h. mit  $\mathbf{f}^T = [f_x, f_y, f_z]$  bzw.  $\mathbf{r}^T = [x, y, z]$  ist gemeint  $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$  bzw.  $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ .

und ein resultierendes Moment  $\tau_R^{(A)}$  bezüglich dieses Punktes  $A$  reduzieren. Ein allgemeines Kräftesystem ist nun im *Gleichgewicht*, wenn sowohl die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  als auch das resultierende Moment  $\tau_R^{(A)}$  verschwinden, d. h.

$$\begin{array}{lll} \text{Kräftebilanz:} & \mathbf{f}_R = \mathbf{0} & \text{bzw.} \quad f_{R,x} = 0, f_{R,y} = 0 \text{ und } f_{R,z} = 0 \\ \text{Momentenbilanz:} & \tau_R^{(A)} = \mathbf{0} & \text{bzw.} \quad \tau_{R,x}^{(A)} = 0, \tau_{R,y}^{(A)} = 0 \text{ und } \tau_{R,z}^{(A)} = 0 . \end{array} \quad (2.39)$$

*Beispiel 2.3.* Man betrachte den Starrkörper von Abbildung 2.14 mit den Kräften

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} f_{A,x} \\ f_{A,y} \\ f_{A,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \\ f_{B,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} f_{C,x} \\ f_{C,y} \\ f_{C,z} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

an den Angriffspunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  sowie den Bezugspunkt  $D$  mit den zugehörigen Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_{0A} = \begin{bmatrix} a_x/2 \\ 0 \\ a_z/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0B} = \begin{bmatrix} a_x/2 \\ a_y/2 \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0D} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (2.41)$$

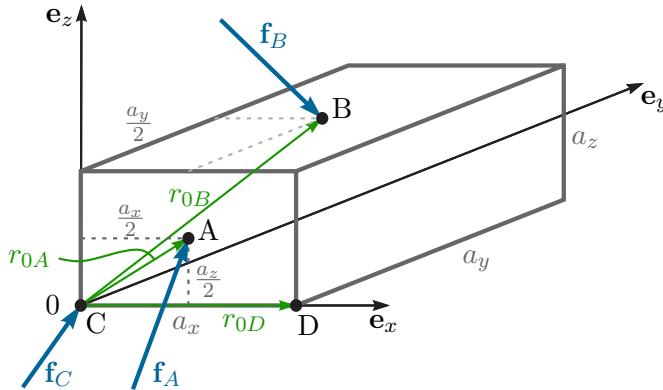


Abbildung 2.14: Zur Reduktion eines allgemeinen Kräftesystems.

Für den Bezugspunkt  $D$  folgen die Momente zu

$$\tau_A^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0A} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DA}} \times \mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} -a_x/2 \\ 0 \\ a_z/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{A,x} \\ f_{A,y} \\ f_{A,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{A,y}a_z/2 \\ f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 \\ -f_{A,y}a_x/2 \end{bmatrix} \quad (2.42a)$$

$$\tau_B^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0B} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DB}} \times \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} -a_x/2 \\ a_y/2 \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \\ f_{B,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z \\ f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z \\ -f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 \end{bmatrix} \quad (2.42b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_C^{(D)} = (\underbrace{\mathbf{r}_{0C} - \mathbf{r}_{0D}}_{\mathbf{r}_{DC}}) \times \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} -a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{C,x} \\ f_{C,y} \\ f_{C,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_x f_{C,z} \\ -a_x f_{C,y} \end{bmatrix} \quad (2.42c)$$

und das allgemeine Kräftesystem  $\mathbf{f}_A$ ,  $\mathbf{f}_B$  und  $\mathbf{f}_C$  kann durch die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C$  und durch das resultierende Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(D)} = \boldsymbol{\tau}_A^{(D)} + \boldsymbol{\tau}_B^{(D)} + \boldsymbol{\tau}_C^{(D)}$  ersetzt werden. Damit ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen aus der Kräftebilanz ( $\mathbf{f}_R = \mathbf{0}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & f_{A,x} + f_{B,x} + f_{C,x} = 0 \\ \mathbf{e}_y : \quad & f_{A,y} + f_{B,y} + f_{C,y} = 0 \\ \mathbf{e}_z : \quad & f_{A,z} + f_{B,z} + f_{C,z} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

und der Momentenbilanz ( $\boldsymbol{\tau}_R^{(D)} = \mathbf{0}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & -f_{A,y}a_z/2 + f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z = 0 \\ \mathbf{e}_y : \quad & f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 + f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z + f_{C,z}a_x = 0 \\ \mathbf{e}_z : \quad & -f_{A,y}a_x/2 - f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 - f_{C,y}a_x = 0 . \end{aligned} \quad (2.44)$$

*Aufgabe 2.4.* Geben Sie die Momentenbilanz für das Beispiel von Abbildung 2.14 um den Bezugspunkt  $C$  an.

*Lösung von Aufgabe 2.4.*

$$\boldsymbol{\tau}_A^{(C)} = \begin{bmatrix} -f_{A,y}a_z/2 \\ -f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 \\ f_{A,y}a_x/2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau}_B^{(C)} = \begin{bmatrix} f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z \\ -f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z \\ f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau}_C^{(C)} = \mathbf{0}$$

*Beispiel 2.4.* Der Mechanismus gemäß Abbildung 2.15(a) ist im Punkt  $A$  drehbar gelagert und wird an den Punkten  $B$  und  $C$  über ein Seil gehalten. Es wird angenommen, dass die Seilrollen reibungsfrei gelagert sind und die Seilmasse sowie die Dicke der einzelnen Balken vernachlässigt werden können. Schneidet man den Mechanismus frei, so erhält man die in Abbildung 2.15(b) gezeigten Kräfte.

Im Gleichgewicht müssen nun die Kräftebilanz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & f_{A,x} + f_S \cos(\alpha) = 0 \\ \mathbf{e}_z : \quad & f_{A,z} + f_S + f_S \sin(\alpha) - f_{ext} = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

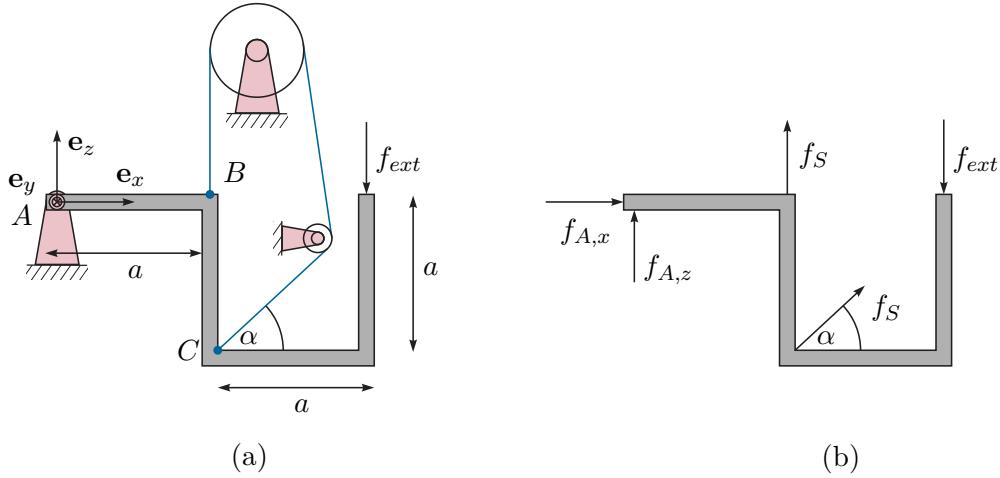


Abbildung 2.15: Einfacher Mechanismus.

und die Momentenbilanz (gewählter Bezugspunkt  $A$ )

$$\mathbf{e}_y : -afs + 2af_{ext} - af_S (\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = 0 \quad (2.46)$$

erfüllt sein.

## 2.2.2 Schwerpunkt

Die bisherigen Überlegungen erlauben nun die Definition des sogenannten *Schwerpunktes* eines Starrkörpers. Dazu betrachte man in einem ersten Schritt eine masselose starre Stange, die die Punktmassen  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  gemäß Abbildung 2.16 miteinander verbindet. Zufolge der Erdbeschleunigung  $g$  in negativer  $\mathbf{e}_z$ -Richtung wirken auf die Stange

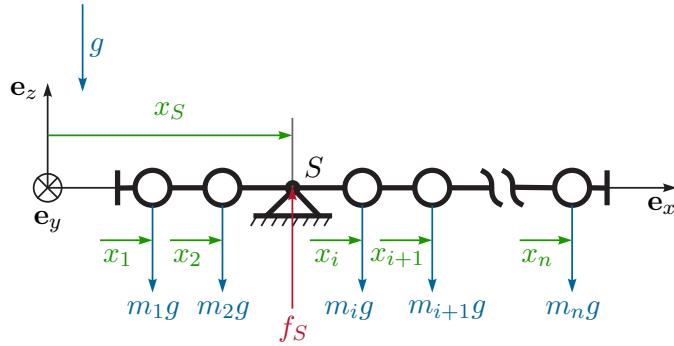


Abbildung 2.16: Zur Definition des Schwerpunktes: Masselose Stange mit Punktmassen.

die Gravitationskräfte  $\mathbf{f}_i = -m_i g \mathbf{e}_z$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Man weiß nun, dass die Kräfte  $\mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  bezüglich eines *beliebig gewählten* Bezugspunktes  $A$  durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  am Angriffspunkt  $A$  und ein resultierendes Moment  $\tau_R^{(A)}$  bezüglich dieses Punktes  $A$  ersetzt werden können. Der Schwerpunkt beschreibt nun jenen Angriffspunkt  $S$ ,

bei dem das resultierende Moment  $\tau_R^{(S)}$  verschwindet und damit die Stange alleinig durch Aufhängen im Punkt  $S$  mit der Haltekraft  $f_S$  im Gleichgewicht gehalten werden kann. Aus der Momentenbilanz

$$\mathbf{e}_y : \sum_{i=1}^n m_i g x_i - f_S x_S = 0 \quad (2.47)$$

und der Kräftebilanz

$$\mathbf{e}_z : - \sum_{i=1}^n m_i g + f_S = 0 \quad (2.48)$$

lässt sich  $x_S$  in der Form

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.49)$$

berechnen.

**Aufgabe 2.5.** Zeigen Sie, dass sich für ein allgemeines System, bestehend aus  $n$  starr gekoppelten Massepunkten mit den Massen  $m_i$  und den Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i$  vom Ursprung 0 des Koordinatensystems ( $0xyz$ ) zu den Massepunkten, der Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  zum Schwerpunkt sich wie folgt

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.50)$$

errechnet.

Dies lässt sich nun direkt auf einen allgemeinen Starrkörper übertragen. Dazu nehme man an, dass der Starrkörper das Volumen  $\mathcal{V}$  und die (ortsabhängige) Dichte  $\rho(x, y, z)$  besitze, weshalb sich die Masse  $m$  des Starrkörpers zu

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \quad (2.51)$$

ergibt. Der Schwerpunkt  $S$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  gemessen im Koordinatensystem ( $0xyz$ ) ist nun jener Punkt, an dem der Körper aufgehängt werden müsste (Haltekraft  $f_S$ ), damit sich der Körper im Gleichgewicht befindet unabhängig von der Richtung der Erdbeschleunigung  $g$ . Angenommen, die Erdbeschleunigung wirke in Richtung  $\mathbf{e}_g$ , dann wirkt auf das Volumenelement  $d\mathcal{V}$  die Gravitationskraft  $g\rho(x, y, z) d\mathcal{V} \mathbf{e}_g$  und bezüglich des Koordinatenursprungs 0 das Moment  $\mathbf{r} \times g\rho(x, y, z) d\mathcal{V} \mathbf{e}_g = \mathbf{r} g\rho(x, y, z) d\mathcal{V} \times \mathbf{e}_g$ , siehe Abbildung 2.17. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich durch Integration über das Starrkörpervolumen  $\mathcal{V}$  wiederum aus der Kräftebilanz

$$-f_S \mathbf{e}_g + g \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \mathbf{e}_g}_{m} = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

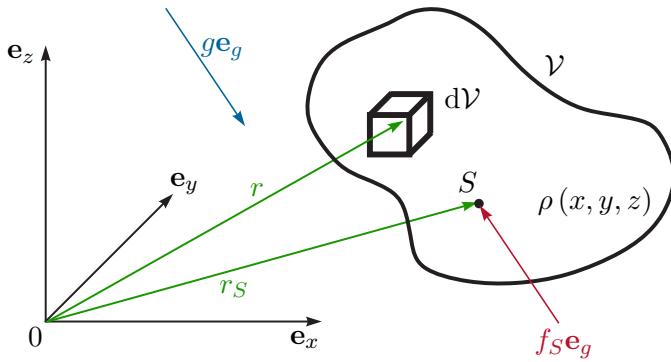


Abbildung 2.17: Zur Definition des Schwerpunktes eines Starrkörpers.

und der Momentenbilanz

$$-(\mathbf{r}_S \times f_S \mathbf{e}_g) + g \int_V \mathbf{r} \rho(x, y, z) dV \times \mathbf{e}_g = \mathbf{0}. \quad (2.53)$$

Setzt man  $f_S = mg$  aus (2.52) in (2.53) ein, so folgt

$$\left\{ -m g \mathbf{r}_S + g \int_V \mathbf{r} \rho(x, y, z) dV \right\} \times \mathbf{e}_g = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

und da  $\mathbf{e}_g$  beliebig ist, muss der Ausdruck in der geschwungenen Klammer identisch verschwinden, d. h.

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(x, y, z) dV}{m} \quad (2.55)$$

bzw. in Komponentenschreibweise  $\mathbf{r}_S = r_{S,x} \mathbf{e}_x + r_{S,y} \mathbf{e}_y + r_{S,z} \mathbf{e}_z$

$$r_{S,x} = \frac{\int_V x \rho(x, y, z) dV}{m}, \quad r_{S,y} = \frac{\int_V y \rho(x, y, z) dV}{m}, \quad r_{S,z} = \frac{\int_V z \rho(x, y, z) dV}{m}. \quad (2.56)$$

Wenn ein Körper sich aus mehreren Teilkörpern  $j = 1, \dots, N$  mit den Volumina  $\mathcal{V}_j$  und der Dichte  $\rho_j(x, y, z)$  zusammensetzt, dann errechnen sich die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{Sj}$  zu den Schwerpunkten der Teilkörper gemessen im gleichen Koordinatensystem  $(0xyz)$  zu

$$\mathbf{r}_{Sj} = \frac{\int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) dV_j}{m_j} \quad \text{mit} \quad m_j = \int_{\mathcal{V}_j} \rho_j(x, y, z) dV_j. \quad (2.57)$$

Daraus erkennt man unmittelbar, dass sich der Schwerpunkt des gesamten Körpers gemäß (2.55) in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_S &= \frac{\int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \rho_1(x, y, z) d\mathcal{V}_1 + \dots + \int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j + \dots + \int_{\mathcal{V}_N} \mathbf{r} \rho_N(x, y, z) d\mathcal{V}_N}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{r}_{Sj} m_j}{\sum_{j=1}^N m_j}\end{aligned}\quad (2.58)$$

berechnen lässt.

*Beispiel 2.5.* Gesucht ist für den homogenen Starrkörper (Dichte  $\rho$  ist konstant) von Abbildung 2.18 der Ortsvektor zum Schwerpunkt.

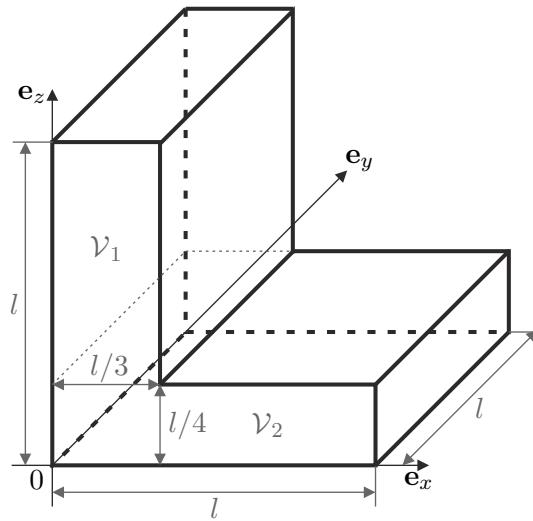


Abbildung 2.18: Zur Schwerpunktberechnung zusammengesetzter Teilkörper.

Dazu werden vorerst gemäß (2.57) die Schwerpunkte getrennt für die beiden Volumina  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  berechnet. Für den ersten Teilkörper mit dem Volumen  $\mathcal{V}_1$  folgt damit

$$\begin{aligned}r_{S1,x} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} x dx dy dz = \frac{\rho}{\rho \frac{l}{3} \frac{3l}{4}} \frac{l^4}{24} = \frac{l}{6} \\ r_{S1,y} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} y dx dy dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S1,z} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} z dx dy dz = \frac{4}{l^3} \frac{5l^4}{32} = \frac{5l}{8}\end{aligned}$$

und für den zweiten Teilkörper  $\mathcal{V}_2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} r_{S2,x} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l x dx dy dz = \frac{\rho}{\rho \frac{l}{4} l^2} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S2,y} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l y dx dy dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S2,z} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l z dx dy dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{32} = \frac{l}{8}. \end{aligned}$$

Damit lautet nach (2.58) der Ortsvektor des Schwerpunktes des gesamten Körpers

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2}) = \frac{1}{\frac{\rho}{4} l^3 + \frac{\rho}{4} l^3} \left( \frac{\rho}{4} l^3 \begin{bmatrix} \frac{l}{6} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{5l}{8} \end{bmatrix} + \frac{\rho}{4} l^3 \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{l}{8} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{l}{3} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{3l}{8} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

*Aufgabe 2.6.* Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel gemäß Abbildung 2.19.

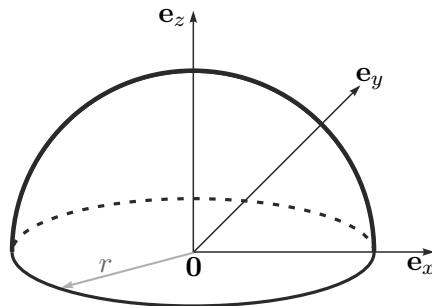


Abbildung 2.19: Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel.

*Lösung von Aufgabe 2.6.*

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}r \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 Impulserhaltung

Das *zweite Newtonsche Gesetz (Impulserhaltungssatz)* formuliert für eine Punktmasse besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses  $\mathbf{p}$  gleich der auf die Punktmasse wirkenden Kraft  $\mathbf{f}$  ist, d. h.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (2.60)$$

mit der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . Man beachte, dass die Formulierung (2.60) nur bezüglich eines ruhenden Bezugskoordinatensystems (*Inertialsystem*) gültig ist. Für die in dieser Vorlesung betrachteten Systeme kann die Erde als Inertialsystem angesehen werden.

**Beispiel 2.6.** Ein Ball der Masse  $m$  wird aus der Höhe  $h$  gegenüber dem Erdboden mit der Geschwindigkeit  $v(0) = v_0 > 0$  abgeschossen, siehe Abbildung 2.20.

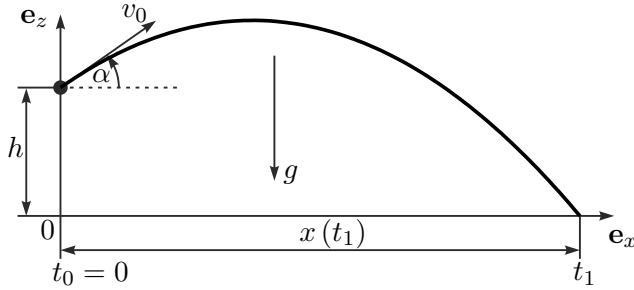


Abbildung 2.20: Wurfparabel.

Im Weiteren soll berechnet werden, unter welchem Winkel  $\alpha$  der Ball abgeschossen werden muss, damit die Wurfweite unter der Annahme verschwindender Luftreibung maximiert wird. Da die Masse  $m$  konstant ist, lautet der Impulserhaltungssatz im Inertialsystem  $(0xyz)$

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{und} \quad m\ddot{z} = -mg \quad (2.61)$$

mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha)$ ,  $z(0) = h$ ,  $\dot{z}(0) = v_0 \sin(\alpha)$ . Aus (2.61) erhält man mit  $\dot{x}(t) = v_x(t)$  und  $\dot{z}(t) = v_z(t)$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha) \\ x(t) &= v_0 \cos(\alpha) t \\ v_z(t) &= -gt + v_0 \sin(\alpha) \\ z(t) &= -\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) t + h . \end{aligned}$$

Die Zeit  $t$  kann nun in der zweiten Gleichung eliminiert und in die letzte Gleichung eingesetzt werden, woraus die bekannte Wurfparabel

$$z = -g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + h \quad (2.62)$$

resultiert. Der Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem der Ball auf dem Boden trifft, ergibt sich aus der Bedingung  $z(t_1) = 0$  zu

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} \quad (2.63)$$

und damit lautet die Wurfweite

$$x(t_1) = v_0 \cos(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g}. \quad (2.64)$$

Um die Wurfweite zu maximieren, leitet man  $x(t_1)$  nach  $\alpha$  ab und setzt den Ausdruck gleich Null. Als Ergebnis erhält man

$$\alpha_{\max} = \arctan \left( \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \right). \quad (2.65)$$

Man kann sich einfach überzeugen, dass für  $h = 0$  der Winkel  $\alpha_{\max} = 45^\circ$  und die maximale Weite  $x_{\max}(t_1) = v_0^2/g$  beträgt.

*Aufgabe 2.7.* Zeigen Sie die Gültigkeit von (2.65).

Abbildung 2.21 zeigt zwei Punktmassen  $m_i$  und  $m_j$ , die über eine masselose Stange starr miteinander verbunden sind. Wenn man die Stange aufschneidet, so folgt nach dem Schnittprinzip  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ . Der Impulserhaltungssatz für jede Punktmasse getrennt angeschrieben lautet

$$m_i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{ij} \quad \text{und} \quad m_j \frac{d}{dt} \mathbf{v}_j = \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{ji} \quad (2.66)$$

bzw. durch Summation erhält man

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i + m_j \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j = \underbrace{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}_{\mathbf{f}_R} + \underbrace{\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}}_{=0}. \quad (2.67)$$

Setzt man die Beziehung für den Schwerpunkt gemäß (2.50)

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j}{m_i + m_j}$$

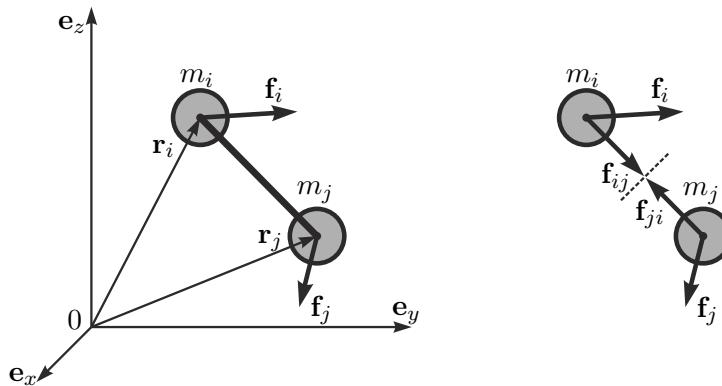


Abbildung 2.21: Zwei Punktmassen verbunden mit einer masselosen Stange.

in (2.67) ein, vereinfacht sich (2.67) zu

$$\underbrace{(m_i + m_j)}_m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S = \underbrace{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}_{\mathbf{f}_R}. \quad (2.68)$$

Man kann sich unmittelbar überzeugen, dass dies auch für einen Starrkörper mit dem Volumen  $\mathcal{V}$ , der Masse  $m$  nach (2.51) und dem Ortsvektor zum Schwerpunkt  $\mathbf{r}_S$  gemäß (2.55) gilt, siehe dazu Abbildung 2.17. Schreibt man nämlich den Impulserhaltungssatz (2.60) für ein Masseelement  $dm = \rho(x, y, z) d\mathcal{V}$  mit dem zugehörigen Ortsvektor  $\mathbf{r}$  an und integriert über das Volumen  $\mathcal{V}$ , so folgt

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}_{m \mathbf{r}_S} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S = \mathbf{f}_R. \quad (2.69)$$

Gleichung (2.69) ist in der Literatur unter dem Namen *Schwerpunktsatz* bekannt und besagt, dass der Schwerpunkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  eines Systems von Körpern sich wie eine Punktmasse verhält, deren Masse  $m$  die Summe der Massen aller einzelnen Körper ist, und auf den die vektorielle Summe  $\mathbf{f}_R$  aller von außen an den einzelnen Körpern angreifenden Kräfte wirkt.

**Beispiel 2.7.** Abbildung 2.22 zeigt einen einfachen Flaschenzug mit zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die über reibungsfreie masselose Rollen durch ein masseloses Seil miteinander verbunden sind.

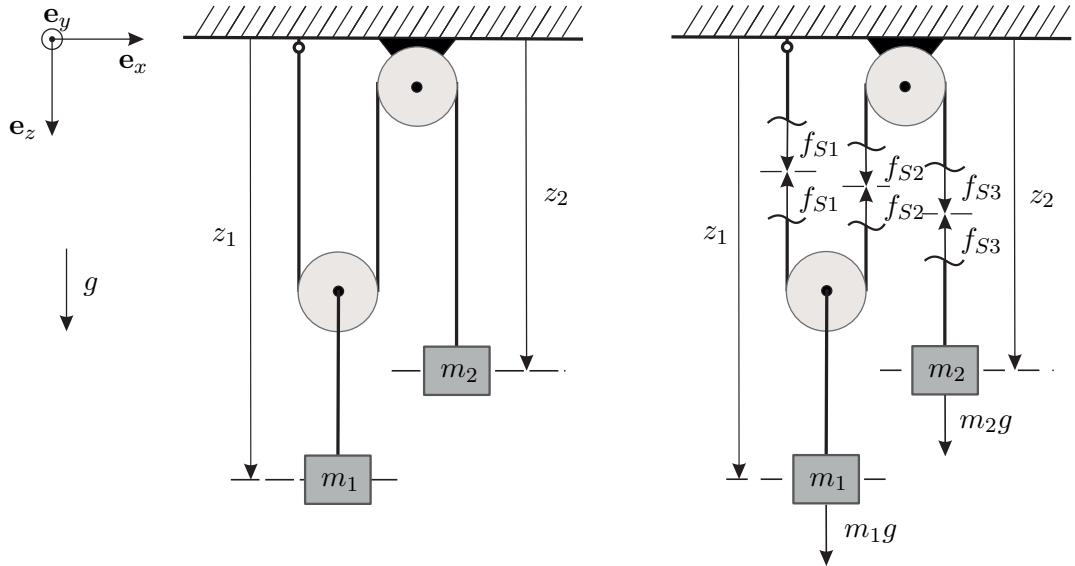


Abbildung 2.22: Flaschenzug mit zwei Massen.

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= m_1 g - f_{S1} - f_{S2} \\ m_2 \ddot{z}_2 &= m_2 g - f_{S3} . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Aufgrund der obigen Annahmen ist die Kraft im gesamten Seil gleich groß, d. h.

$$f_{S1} = f_{S2} = f_{S3} = f_S . \quad (2.71)$$

Bezeichnet man mit  $z_{10}$  und  $z_{20}$  die Position der Masse  $m_1$  und  $m_2$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , dann bedingt eine Änderung von  $z_2$  um  $\Delta z_2$  eine Verschiebung der Masse  $m_1$  um  $-\Delta z_2/2$  (Flaschenzug), d. h.

$$z_2(t) = z_{20} + \Delta z_2(t), \quad z_1(t) = z_{10} - \frac{\Delta z_2(t)}{2} . \quad (2.72)$$

Setzt man (2.71) und (2.72) in (2.70) ein, erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{m_1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 &= m_1 g - 2f_S \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 &= m_2 g - f_S , \end{aligned} \quad (2.73)$$

woraus sich unmittelbar die Bewegungsgleichung des gekoppelten Systems und die Seilkraft  $f_S$  in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 &= 2g \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} \\ f_S &= \frac{3m_1 m_2 g}{4m_2 + m_1} \end{aligned} \quad (2.74)$$

berechnen lassen.

#### 2.2.4 Translatorische kinetische Energie und potentielle Energie

Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen ist eine Punktmasse mit der Masse  $m$ , dem Ortsvektor  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  vom Ursprung 0 des Inertialsystems ( $0xyz$ ), der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$  und der Summe der auf die Punktmasse wirkenden Kräfte  $\mathbf{f}_R = f_{R,x}\mathbf{e}_x + f_{R,y}\mathbf{e}_y + f_{R,z}\mathbf{e}_z$ . Damit gilt nach (2.60) der Impulserhaltungssatz

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f}_R . \quad (2.75)$$

Die durch die Kraft  $\mathbf{f}_R$  zum Zeitpunkt  $t$  verrichtete Arbeit wird auch als *Leistung* (SI Einheit Watt ( $W = Nms^{-1}$ )))

$$P = \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} \quad (2.76)$$

bezeichnet<sup>2</sup>. Die zugehörige im Zeitintervall  $[t_0, t]$  transferierte *Energie*  $E$  lautet (SI Einheit Joule ( $J = \text{Nm}$ ))

$$E(t) - E(t_0) = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} d\tau . \quad (2.77)$$

Setzt man nun die linke Seite von (2.75) in (2.77) ein, so erhält man die zum Zeitpunkt  $t$  in der Masse  $m$  gespeicherte *kinetische Energie* zu

$$\begin{aligned} T(t) &= T(t_0) + \int_{t_0}^t \left( m \frac{d}{d\tau} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} d\tau = T(t_0) + m \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\tilde{\mathbf{v}} \\ &= T(t_0) + m \left( \int_{v_{0x}}^{v_x} \tilde{v}_x d\tilde{v}_x + \int_{v_{0y}}^{v_y} \tilde{v}_y d\tilde{v}_y + \int_{v_{0z}}^{v_z} \tilde{v}_z d\tilde{v}_z \right) \\ &= T(t_0) - \underbrace{\frac{m}{2} (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2)}_{=0} + \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (2.78)$$

wobei sämtliche Integrale entlang einer Lösungskurve des Systems im Zeitintervall  $[t_0, t]$  mit der zugehörigen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}]^T$  und  $\mathbf{v}(t) = [v_x, v_y, v_z]^T$  ausgewertet werden.

Der *translatorische Anteil der kinetischen Energie eines Starrkörpers* errechnet sich zu (Schwerpunktsatz)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S \quad (2.79)$$

mit der Gesamtmasse  $m$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  zum Schwerpunkt gemessen im Inertialsystem ( $0xyz$ ).

Im nächsten Schritt soll für die Klasse der *Potentialkräfte*  $\mathbf{f}_R$  die zugehörige *potentielle Energie*  $V$  berechnet werden. Dazu formuliert man (2.77) mit  $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}$  in der Form

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} d\tau = V(t_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} \\ &= V(t_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} [f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{x} + f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} + f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{z}] \end{aligned} \quad (2.80)$$

um, wobei die Integrale wiederum entlang einer Lösungskurve des Systems im Zeitintervall  $[t_0, t]$  mit der zugehörigen Position  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$  und  $\mathbf{r}(t) = [x, y, z]^T$  zu verstehen sind. Das Integral in (2.80) ist genau dann<sup>3</sup> *wegenabhängig*, wenn die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

<sup>2</sup>Hier und im Folgenden bezeichnet  $\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v}$  das innere Produkt  $\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}_R^T \mathbf{v} = f_{R,x} v_x + f_{R,y} v_y + f_{R,z} v_z$ .

<sup>3</sup>Genau genommen gilt dies nur in einer sternförmigen Menge (Lemma von Poincaré für Differentialformen).

erfüllt sind bzw. äquivalent dazu die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}_R = [f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})]^T$  bezüglich  $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^T$  symmetrisch ist, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,x} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,x} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,x} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,y} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,y} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,y} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,z} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,z} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,z} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{f}_R \right)^T. \quad (2.82)$$

In diesem Fall sagt man auch, die Kraft  $\mathbf{f}_R$  ist *konservativ* und besitzt ein *Potential* (potentielle Energie) gemäß (2.80). Nimmt man nun an, dass  $\mathbf{r}_I$  jene Position bezeichnet, an der  $V(\mathbf{r}_I) = 0$  ist (Bezugspunkt), dann gilt

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_I) + \underbrace{\int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}}_{=V(\mathbf{r}_0)} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}. \quad (2.83)$$

Damit hängt die potentielle Energie  $V$  ausschließlich vom Endwert  $\mathbf{r}$  der Lösungskurve und vom Bezugspunkt  $\mathbf{r}_I$  ab und ist unabhängig davon, wie man zu diesem Endwert gelangt<sup>4</sup>. Wenn  $\mathbf{f}_R = [f_{R,x}(x, y, z), f_{R,y}(x, y, z), f_{R,z}(x, y, z)]^T$  konservativ ist und damit die Integrabilitätsbedingungen (2.81) erfüllt sind, ist der Integrationsweg frei wählbar und das zugehörige Potential lässt sich wie folgt

$$V(\mathbf{r}) = \int_{x_I}^x f_{r,x}(\tilde{x}, y_I, z_I) d\tilde{x} + \int_{y_I}^y f_{r,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_I) d\tilde{y} + \int_{z_I}^z f_{r,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{z} \quad (2.84)$$

mit  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  und  $\mathbf{r}_I = [x_I, y_I, z_I]^T$  berechnen.

**Beispiel 2.8.** Ein anschauliches Beispiel bildet die potentielle Energie zufolge der Gravitationskraft. Wenn eine Person der Masse  $m$  einen Berg der Höhe  $h$  besteigt, dann hat diese Person am Berggipfel die potentielle Energie<sup>a</sup>  $V = mgh$ , unabhängig davon, von welchem Ort sie die Bergtour gestartet und auf welchem Weg sie den Berggipfel erreicht hat.

<sup>a</sup>Hier wird angenommen, dass als Bezugspunkt das Niveau des Meeresspiegels gewählt wurde.

Wenn  $V(x, y, z)$  die potentielle Energie bezeichnet, dann kann  $V$  auch in der Form

$$V = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} dV = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{x} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{z} \quad (2.85)$$

geschrieben werden und durch Vergleich mit (2.83) folgen aus der Unabhängigkeit der Ortsvariablen  $x, y$  und  $z$  die Beziehungen

$$f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (2.86)$$

bzw.

$$\mathbf{f}_R = \text{grad}(V) = \nabla V. \quad (2.87)$$

<sup>4</sup>Man beachte, dass eine Änderung des Bezugspunktes  $\mathbf{r}_I$  lediglich eine konstante Verschiebung in  $V$  bewirkt

**Aufgabe 2.8.** Zeigen Sie, dass die Kraft, die aus einem Potential berechnet werden kann, immer *wirbelfrei* ist, d. h. rot ( $\mathbf{f}_R$ ) =  $\nabla \times \mathbf{f}_R = \mathbf{0}$ .

**Beispiel 2.9.** Abbildung 2.23 zeigt eine mechanische Feder und deren nichtlineare Kraft-Weg Kennlinie. Im unbelasteten Fall (Federkraft  $f_F = 0$ ) hat das Federelement die Länge  $s_0$ , welche auch als *entspannte Länge der Feder* bezeichnet wird.

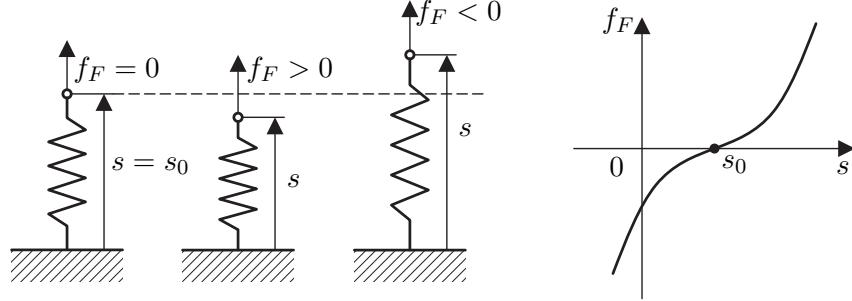


Abbildung 2.23: Das Federelement.

Die potentielle Energie der Feder mit der Federkraft  $f_F(s)$ ,  $f_F(s_0) = 0$ , berechnet sich nach (2.83) zu

$$V(s) = \int_{s_0}^s f_F(\tilde{s}) d\tilde{s}. \quad (2.88)$$

Im linearen Fall, d. h.  $f_F(s) = c(s - s_0)$  mit der *Federkonstanten*  $c > 0$ , vereinfacht sich die potentielle Energie zu

$$V(s) = \frac{1}{2}c(s - s_0)^2. \quad (2.89)$$

**Aufgabe 2.9.** Abbildung 2.24 zeigt die Serien- und Parallelschaltung zweier linearer Federelemente mit den Federkonstanten  $c_1$  und  $c_2$  und den zugehörigen entspannten Längen  $s_{01}$ ,  $s_{02}$  und  $s_{01} = s_{02} = s_0$ .

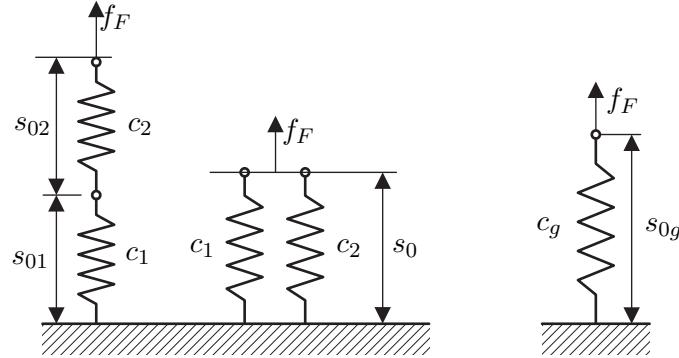


Abbildung 2.24: Zur Serien- und Parallelschaltung von linearen Federelementen.

Berechnen Sie jeweils die Gesamtsteifigkeit  $c_g$  sowie die zugehörige entspannte Länge  $s_{0g}$  der Ersatzschaltung gemäß Abbildung 2.24.

*Lösung von Aufgabe 2.9.*

$$\text{Serienschaltung: } s_{0g} = s_{01} + s_{02}, \quad c_g = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\text{Parallelschaltung: } s_{0g} = s_{01} = s_{02}, \quad c_g = c_1 + c_2$$

*Beispiel 2.10.* Gegeben ist das System in Abbildung 2.25 bestehend aus den zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie den beiden linearen Federelementen mit der Federsteifigkeit  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$  und den zugehörigen entspannten Längen  $s_{01}$  und  $s_{02}$ .

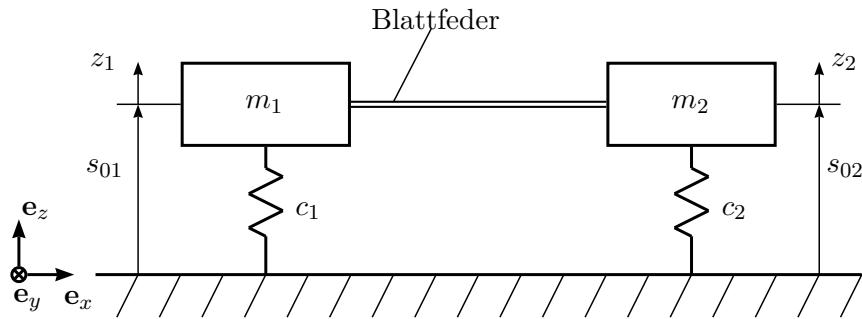


Abbildung 2.25: Massen mit Blattfeder.

Im Weiteren bezeichne  $z_1$  und  $z_2$  die Auslenkung der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  aus der Gleichgewichtslage, d. h.  $z_1 = s_1 - s_{01}$  und  $z_2 = s_2 - s_{02}$ . Wie in Abbildung 2.25 dargestellt, sind die beiden Massen über eine Blattfeder miteinander verbunden, so dass auf die Masse  $m_1$  zusätzlich die Kraft  $f_{12} = -c_{12}(z_1 - z_2)$ ,  $c_{12} > 0$  und auf die Masse  $m_2$  die Kraft  $f_{21} = -c_{21}(z_2 - z_1)$ ,  $c_{21} > 0$  wirkt. Nimmt man an, dass für  $z_1 = z_2 = 0$  die in den Federn gespeicherte potentielle Energie  $V$  gleich Null ist und fasst man die Kräfte auf die Massen in einen Vektor  $\mathbf{f}_F$  zusammen

$$\mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} f_{F1}(z_1, z_2) \\ f_{F2}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_1 z_1 + c_{12}(z_1 - z_2) \\ c_2 z_2 + c_{21}(z_2 - z_1) \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

so errechnet sich  $V$  mit  $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$  in der Form

$$V = - \int_0^{\mathbf{z}} \mathbf{f}_F \cdot d\tilde{\mathbf{z}} = \int_0^{\mathbf{z}} \underbrace{[c_1 \tilde{z}_1 + c_{12}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)]}_{-f_{F1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} d\tilde{z}_1 + \underbrace{[c_2 \tilde{z}_2 + c_{21}(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1)]}_{-f_{F2}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} d\tilde{z}_2. \quad (2.91)$$

Analog zu (2.80) ist die Wegunabhängigkeit der Integration von (2.91) genau dann

gegeben, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$-c_{12} = \frac{\partial f_{F1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)}{\partial \tilde{z}_2} = \frac{\partial f_{F2}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)}{\partial \tilde{z}_1} = -c_{21} \quad (2.92)$$

erfüllt ist, womit die potentielle Energie  $V$  zu der Kraft  $\mathbf{f}_F = -\mathbf{C}\mathbf{z}$  zu

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{z_1} f_{F1}(\tilde{z}_1, 0) d\tilde{z}_1 + \int_0^{z_2} f_{F2}(z_1, \tilde{z}_2) d\tilde{z}_2 \\ &= \int_0^{z_1} [c_1 \tilde{z}_1 + c_{12} \tilde{z}_1] d\tilde{z}_1 + \int_0^{z_2} [c_2 \tilde{z}_2 + c_{12} \tilde{z}_2 - c_{12} z_1] d\tilde{z}_2 \\ &= (c_1 + c_{12}) \frac{z_1^2}{2} + (c_2 + c_{12}) \frac{z_2^2}{2} - c_{12} z_1 z_2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix} \mathbf{z}}_{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (2.93)$$

folgt. Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist *symmetrisch* und *positiv definit* und wird auch als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet. Die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix ist somit eine Konsequenz der Integrabilitätsbedingung und notwendig dafür, dass zu  $\mathbf{f}_F$  eine potentielle Energie existiert.

## 2.2.5 Dissipative Kräfte

Unter einer *dissipativen Kraft*  $\mathbf{f}_D$  versteht man eine Kraft, deren Arbeit irreversibel in Wärme umgewandelt (dissipierte) wird, d. h.  $\mathbf{f}_D(t) \cdot \mathbf{v}(t) \leq 0$  für alle Zeiten  $t$ . Dies können volumenhaft verteilt wirkende Kräfte sein, wie beispielsweise bei der Wirbelstrombremse, oder flächenhaft verteilt wirkende Kräfte, wie dies bei der Bewegung eines starren Körpers durch ein (flüssiges) Medium zufolge der Reibung auftritt.

### Bewegung eines starren Körpers durch ein fluides Medium

Betrachtet man einen Starrkörper, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ohne Rotation durch ein (ruhendes) fluides Medium bewegt, so können die vom Fluid auf den Körper ausgeübten flächenhaft verteilten Kräfte durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  und ein resultierendes Moment  $\tau_R^{(Z)}$  bezüglich eines beliebig gewählten Punktes  $Z$  ausgedrückt werden (siehe dazu auch die bisherigen Ausführungen zum Thema *allgemeines Kräftesystem*). Die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  kann man in einen Anteil  $\mathbf{f}_A$  (*Auftriebskraft*) senkrecht zu  $\mathbf{v}$  und einen Anteil  $\mathbf{f}_D$  (*Widerstandskraft*), der parallel in entgegengesetzter Richtung von  $\mathbf{v}$  wirkt, zerlegen, siehe Abbildung 2.26. Ein einfacher Zusammenhang für die Widerstandskraft  $\mathbf{f}_D$  in einem weiten Geschwindigkeitsbereich unter der Schallgeschwindigkeit ist durch

$$\mathbf{f}_D = f_D \mathbf{e}_v = -c_W A \frac{\rho_f}{2} v^2 \mathbf{e}_v \quad (2.94)$$

mit  $v = \|\mathbf{v}\|_2$  und dem Richtungsvektor der Geschwindigkeit  $\mathbf{e}_v$  gegeben. Dabei bezeichnet  $c_W > 0$  den (dimensionslosen) Widerstandsbeiwert,  $A$  eine geeignete Bezugsfläche und  $\rho_f$  die Dichte des fluiden Mediums.

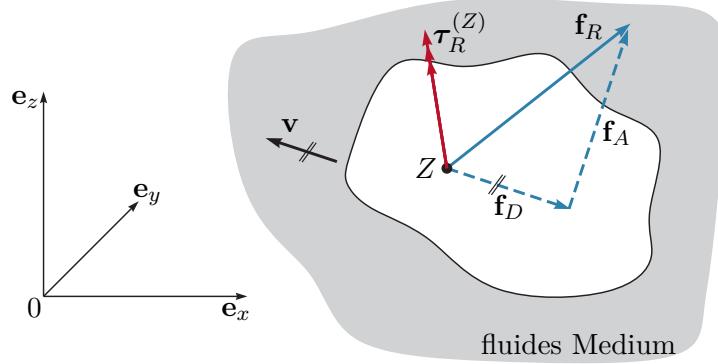


Abbildung 2.26: Bewegter Starrkörper in einem fluiden Medium.

### Reibung zwischen festen Körpern

Wenn zwei feste Körper, die sich berühren, Relativbewegungen ausführen, dann entstehen *zufolge der Rauigkeit der Oberflächen* in der Berührungsfläche flächenhaft wirkende tangentiale Reibungskräfte. Im Folgenden betrachte man eine Masse  $m$ , die durch eine externe horizontale Kraft  $f_e$  auf einer rauen Oberfläche bewegt werden soll, siehe Abbildung 2.27. Schneidet man die Masse frei, so wirken auf die Masse neben  $f_e$  die Normalkraft

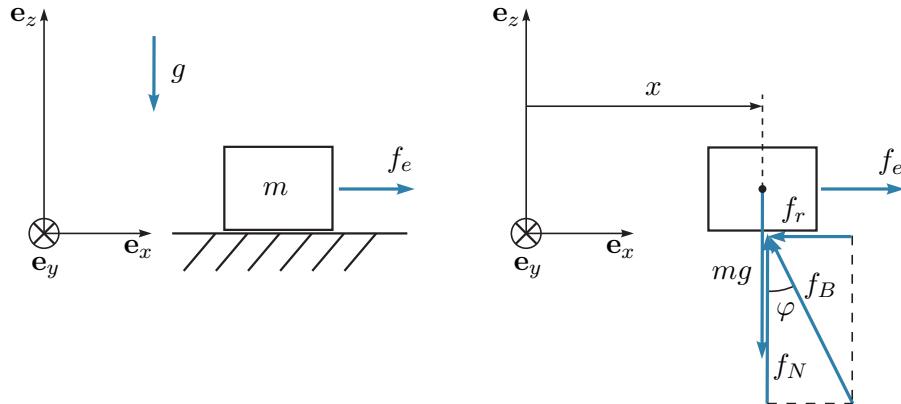


Abbildung 2.27: Zur Haftreibung.

$f_N$  und die Reibkraft  $f_r$ . Aus Erfahrung weiß man, dass die Masse  $m$  sich erst bewegt, wenn die Kraft  $f_e$  einen bestimmten Wert  $f_H$  überschreitet, d. h. solange die Ungleichung<sup>5</sup>  $|f_e| \leq f_H$  erfüllt ist, gelten die statischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & f_e - f_r = 0 \\ \mathbf{e}_z : \quad & f_N - mg = 0 \end{aligned} \tag{2.95}$$

<sup>5</sup>Man beachte, dass im Allgemeinen  $f_H$  für unterschiedliche Vorzeichen von  $f_e$  auch unterschiedliche Werte annehmen kann, was hier nicht betrachtet wird.

und die Masse bleibt an der Stelle haften. In diesem Zusammenhang wird  $f_r$  deshalb als *Hafreibungskraft* bezeichnet und stellt eine Reaktionskraft dar, wie dies zufolge des Schnittprinzips bereits bekannt ist. In einer ersten Näherung lässt sich  $f_H$  in der Form

$$f_H = \mu_H f_N \quad (2.96)$$

ausdrücken, wobei der *Hafreibungskoeffizient*  $\mu_H > 0$  lediglich von der Rauigkeit der sich berührenden Oberflächen abhängt. Wird die externe Kraft  $f_e$  so erhöht, dass die Hafreibung überwunden wird, dann beginnt sich die Masse zu bewegen und die Reibkraft  $f_r = f_C$  zufolge der *trockenen Gleitreibung* lautet

$$f_C = \mu_C f_N \operatorname{sign}(\dot{x}) \quad (2.97)$$

mit dem *Gleitreibungskoeffizienten*  $\mu_C > 0$ . In diesem Fall gilt für die  $\mathbf{e}_z$ -Richtung nach wie vor die Gleichgewichtsbedingung  $f_N = mg$  und in  $\mathbf{e}_x$ -Richtung folgt der Impulserhaltungssatz (2.60) zu

$$m\ddot{x} = f_e - \mu_C mg \operatorname{sign}(\dot{x}). \quad (2.98)$$

Das mathematische Modell der Masse von Abbildung 2.27 ist demnach durch eine *Strukturumschaltung* charakterisiert, d. h.

$$\begin{aligned} \text{Haften: wenn } |f_e| \leq f_H \text{ und } \dot{x} = 0 & \quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \\ \text{Gleiten: sonst} & \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ m\dot{v} = f_e - \mu_C mg \operatorname{sign}(v) \end{cases} . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Das Reibungsgesetz (2.96), (2.97) ist auch als *Coulombsches Reibungsgesetz* bekannt und gilt im Wesentlichen als elementare Näherungstheorie für trockene Reibung zwischen festen Körpern. Die Reibungskoeffizienten  $\mu_H$  und  $\mu_C$  müssen im Allgemeinen aus experimentellen Versuchen ermittelt werden. Typische Werte für einige Materialpaarungen findet man in einschlägigen Tabellenbüchern, siehe beispielsweise Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1: Typische Reibungskoeffizienten.

Materialpaarung	Hafreibung $\mu_H$	Gleitreibung $\mu_C$
Bronze auf Bronze	0,18	0,2
Grauguß auf Bronze	0,28	0,2
Stahl auf Stahl	0,15	0,12
Luftreifen auf Asphalt	0,55	0,3
Eiche auf Eiche	0,54	0,34

Im Haftzustand kann man gemäß Abbildung 2.27 einen Winkel  $\varphi$  in der Form

$$\tan(\varphi) = \frac{f_r}{f_N} \quad (2.100)$$

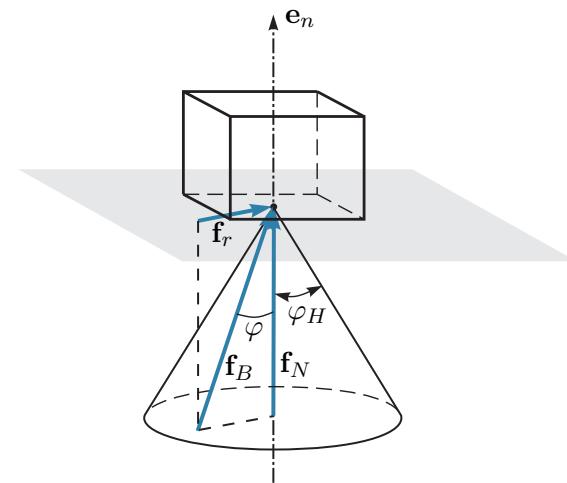


Abbildung 2.28: Haftungskegel.

einführen. Setzt man für  $f_r$  den Grenzwert  $f_H = \mu_H f_N$  ein, so erhält man den Zusammenhang

$$\tan(\varphi_H) = \mu_H \quad (2.101)$$

mit dem Haftungswinkel  $\varphi_H$ . Dies erlaubt eine anschauliche geometrische Interpretation der Haftreibung: Wird ein Körper einer beliebig gerichteten Belastung unterworfen, so bleibt er in Ruhe, solange die Reaktionskraft  $\mathbf{f}_B$  an der Berührfläche innerhalb des so genannten *Haftungskegels* liegt. Der Haftungskegel beschreibt dabei den Rotationskegel um die Normale  $\mathbf{e}_n$  der Berührflächen mit dem Öffnungswinkel  $2\varphi_H$ , siehe Abbildung 2.28.

*Aufgabe 2.10.* Eine Masse  $m$  liegt auf einer schießen Ebene und wird von einer Person mit der Kraft  $f_S$  nach oben gezogen (siehe Abbildung 2.29).

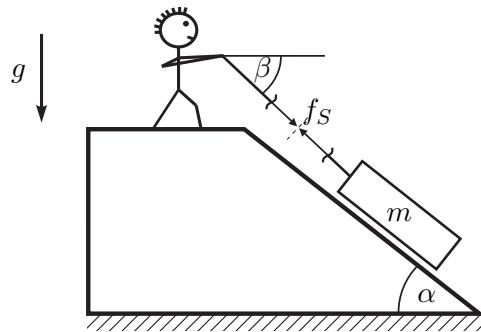


Abbildung 2.29: Masse auf schiefer Ebene.

Berechnen Sie die notwendige Zugkraft  $f_S$  als Funktion der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sowie der Masse  $m$  und des Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$ , damit die Masse bewegt werden

kann.

*Lösung von Aufgabe 2.10.*

$$f_S > \frac{mg(\mu_H \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{\cos(\beta - \alpha) + \mu_H \sin(\beta - \alpha)}$$

*Aufgabe 2.11.* Eine Person der Masse  $m$  steigt auf eine 20-stufige Leiter der Länge  $l$ , die an einer Wand angelehnt ist, siehe Abbildung 2.30. Wie viele Stufen darf die Person auf die Leiter steigen ohne dass die Leiter wegrutscht, wenn der Haftreibungskoeffizient zwischen Leiter und Wand Null und zwischen Leiter und Boden gleich  $\mu_H = 1/10$  ist?

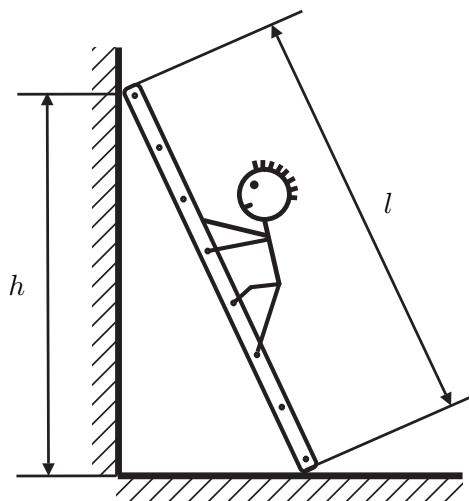


Abbildung 2.30: Person auf einer Leiter.

*Lösung von Aufgabe 2.11.* Die Anzahl der Stufen entspricht der auf die nächst kleinere ganze Zahl abgerundeten Zahl

$$\frac{20\mu_H}{\sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}}.$$

Befindet sich zwischen den beiden festen Körpern eine ununterbrochene Schmiermittelschicht, so hängen die zwischen den Körpern wirkenden Kräfte im Wesentlichen von der sich einstellenden Strömung im Spalt zwischen den beiden Körpern ab. Sehr häufig verwendet man in diesem Zusammenhang für die Reibkraft  $f_r$  ein einfaches Modell der Form

$$f_r = \mu_V \Delta v \quad (2.102)$$

mit dem *viskosen Reibungskoeffizienten*  $\mu_V > 0$  und der Relativgeschwindigkeit  $\Delta v$  der beiden sich berührenden Oberflächen der Starrkörper. Im allgemeinen Fall einer Misch-

reibung werden die Coulombsche Reibung (2.96), (2.97) und die viskose Reibung (2.102) kombiniert.

Es gibt nun Bauelemente, sogenannte *Dämpfer*, die eine vorgegebene (nichtlineare) Kraft-Geschwindigkeit Kennlinie  $f_D(\Delta v)$  mit  $f_D(\Delta v) \Delta v > 0$  gemäß Abbildung 2.31 realisieren. Im linearen Fall gilt für die Dämpferkraft  $f_D = d\Delta v$  mit dem *geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskoeffizienten*  $d > 0$ .

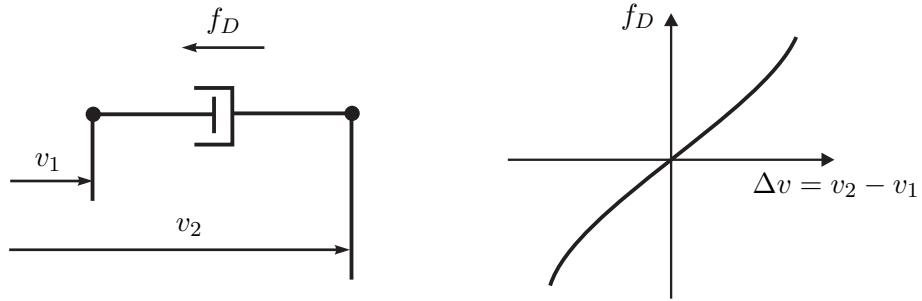


Abbildung 2.31: Nichtlinearer Dämpfer.

*Beispiel 2.11.* Ein masseloses Seil ist unter dem Umschlingungswinkel  $\alpha$  gemäß Abbildung 2.32 um einen feststehenden Zylinder geführt, wobei gilt  $f_{S2} > f_{S1}$ .

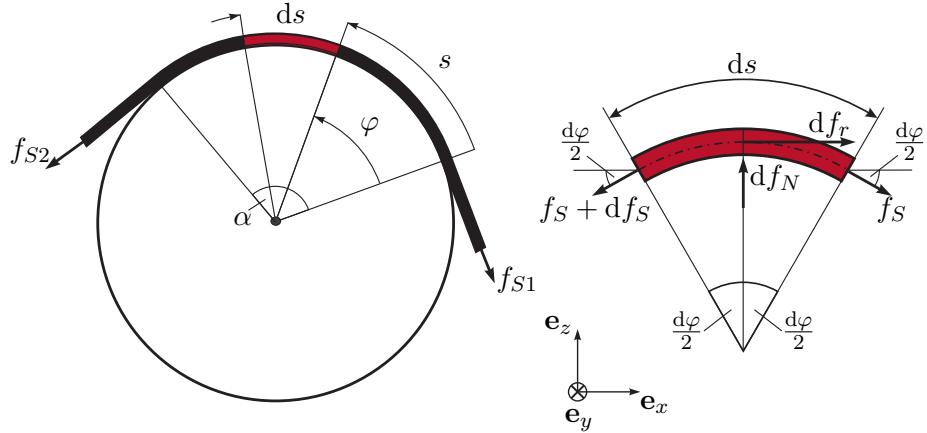


Abbildung 2.32: Zur Reibung eines Seils.

Nimmt man nun ein infinitesimales Seilelement heraus, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen unter der Annahme hinreichend kleiner Winkel  $d\varphi/2$  (d. h.  $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$ ,  $\cos(d\varphi/2) \approx 1$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & f_S + df_r - (f_S + df_S) = 0 \\ \mathbf{e}_z : \quad & df_N - f_S \frac{d\varphi}{2} - (f_S + df_S) \frac{d\varphi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

bzw. unter Vernachlässigung von  $df_S d\varphi / 2$  folgt

$$df_r = df_S \quad \text{und} \quad df_N = f_S d\varphi . \quad (2.104)$$

Mit dem Coulombschen Reibungsgesetz gemäß (2.96), (2.97), im Speziellen  $df_r = \mu df_N$ , erhält man

$$\frac{df_S}{d\varphi} = \mu f_S \quad (2.105)$$

bzw. durch Integration über den Umschlingungswinkel von  $\varphi = 0$  nach  $\varphi = \alpha$  ergibt sich die *Seilreibungsgleichung* zu

$$\int_{f_{S1}}^{f_{S2}} \frac{1}{f_S} df_S = \int_0^\alpha \mu d\varphi \quad \text{bzw.} \quad f_{S2} = f_{S1} \exp(\mu\alpha) . \quad (2.106)$$

Für den Fall  $f_{S1} > f_{S2}$  kann auf analoge Art und Weise die Beziehung  $f_{S1} = f_{S2} \exp(\mu\alpha)$  hergeleitet werden. Bezeichnet nun  $\mu = \mu_H$  den Haftreibungskoeffizienten, dann ist das System im Gleichgewicht solange die Ungleichung

$$f_{S1} \exp(-\mu_H \alpha) \leq f_{S2} \leq f_{S1} \exp(\mu_H \alpha) \quad (2.107)$$

erfüllt ist. Das Seil rutscht nach rechts für  $f_{S1} > f_{S2} \exp(\mu_H \alpha)$  und nach links für  $f_{S2} > f_{S1} \exp(\mu_H \alpha)$ .

*Aufgabe 2.12.* Eine Masse mit der Gewichtskraft  $mg$  hängt an einem (masselosen) Seil, welches einmal um einen feststehenden Zylinder (Umschlingungswinkel  $360^\circ$ ) gewickelt wurde und mit der Kraft von 10 N gerade im Gleichgewicht gehalten werden kann. Wie oft muss man das Seil um den Zylinder wickeln, damit die 10 fache Masse durch die Seilhaftreibung ebenfalls mit einer Kraft von 10 N im Gleichgewicht gehalten werden kann?

*Lösung von Aufgabe 2.12.* Der gesuchte Umschlingungswinkel  $\alpha$  lautet

$$\alpha = 2\pi \frac{\ln\left(\frac{10mg}{10N}\right)}{\ln\left(\frac{mg}{10N}\right)} .$$

### Rollreibung

Wenn ein starres Rad auf einer starren Unterlage rollt ohne dabei zu gleiten, dann gibt es theoretisch keinen *Rollwiderstand*. In der Realität kommt es jedoch bei jedem Rollvorgang zu Deformationen, die mit partiellen Gleitvorgängen in der Berührfläche verbunden sind. Abbildung 2.33 zeigt die jeweiligen Kräfteverhältnisse bei einem Laufrad und einem Treibrad. Beim Laufrad muss die horizontal wirkende Kraft  $f_H$  über die Achse in das Rad eingeleitet werden, um den Rollwiderstand auszugleichen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen für sehr kleine Winkel  $\varphi = \tan(f_H/f_V)$

$$f_H - f_R = 0, \quad f_N - f_V = 0 \quad \text{und} \quad r f_R - l_\mu f_N = 0 \quad (2.108)$$

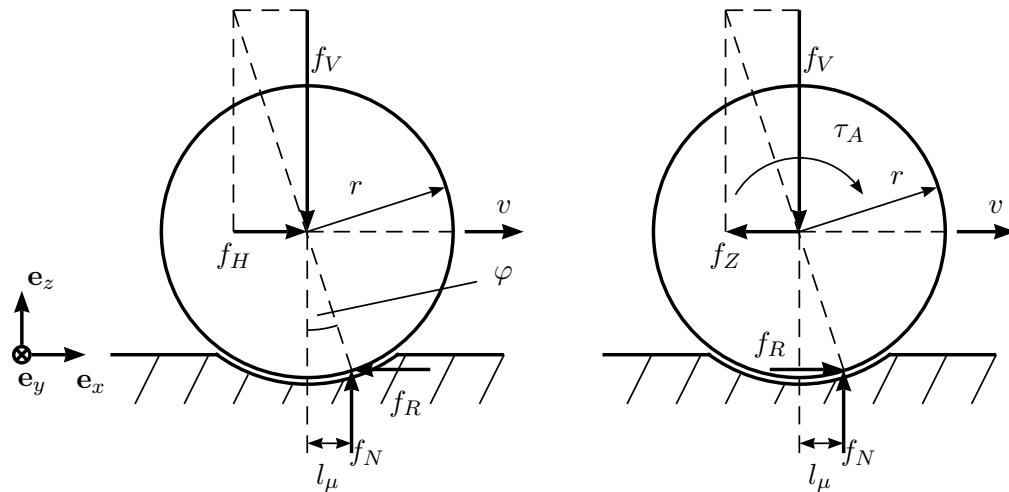


Abbildung 2.33: Lauf- und Treibrad.

folgt die Rollwiderstandskraft  $f_R$  zu

$$f_R = \frac{l_\mu}{r} f_N = \mu_R f_V \quad (2.109)$$

mit dem *Rollreibungskoeffizienten*  $\mu_R = l_\mu/r > 0$ . Bei gleicher Materialpaarung ist der Rollreibungskoeffizient deutlich kleiner als der Gleitreibungskoeffizient.

**Aufgabe 2.13.** Zeigen Sie, dass beim Treibrad das Antriebsmoment  $\tau_A = l_\mu f_V$  aufgebracht werden muss, um den Rollwiderstand zu überwinden und dass sich die Zugkraft zu  $f_Z = \tau_A/r - \mu_R f_V$  errechnet.

**Hinweis:** Die Gleichgewichtsbedingungen für das Treibrad unter der Annahme sehr kleiner Winkel  $\varphi = \tan(f_Z/f_V)$  lauten

$$f_Z - f_R = 0, \quad f_N - f_V = 0 \quad \text{und} \quad \tau_A - r f_R - l_\mu f_N = 0 .$$

## 2.2.6 Feder-Masse-Dämpfer System

Auf Basis der bisherigen Ergebnisse lassen sich bereits die Bewegungsgleichungen von Feder-Masse-Dämpfer Systemen herleiten. Dazu betrachte man folgendes Beispiel.

**Beispiel 2.12.** Gegeben ist das Feder-Masse-Dämpfer System von Abbildung 2.34 mit den Massen  $m_1, m_2$  und  $m_3$ , den linearen Dämpferelementen mit den positiven Dämpfungskonstanten  $d_{11}, d_{22}$  und  $d_{13}$  sowie den linearen Federelementen mit den positiven Federkonstanten  $c_{11}, c_{22}, c_{13}$  und  $c_{23}$  und den entspannten Längen  $s_{011},$

$s_{022}$ ,  $s_{013}$  und  $s_{023}$ . Im Weiteren wirke auf die Masse  $m_3$  die Kraft  $f_L$  und  $g$  bezeichne die Erdbeschleunigung. Wendet man für jede Masse den Impulserhaltungssatz (2.60) an, so erhält man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -m_1 g - c_{11} (s_1 - s_{011}) - d_{11} \dot{s}_1 + c_{13} (s_3 - s_1 - s_{013}) - d_{13} (\dot{s}_1 - \dot{s}_3) \\ m_2 \ddot{s}_2 &= -m_2 g - c_{22} (s_2 - s_{022}) - d_{22} \dot{s}_2 + c_{23} (s_3 - s_2 - s_{023}) \\ m_3 \ddot{s}_3 &= -m_3 g - c_{13} (s_3 - s_1 - s_{013}) + d_{13} (\dot{s}_1 - \dot{s}_3) - c_{23} (s_3 - s_2 - s_{023}) - f_L . \end{aligned} \quad (2.110)$$

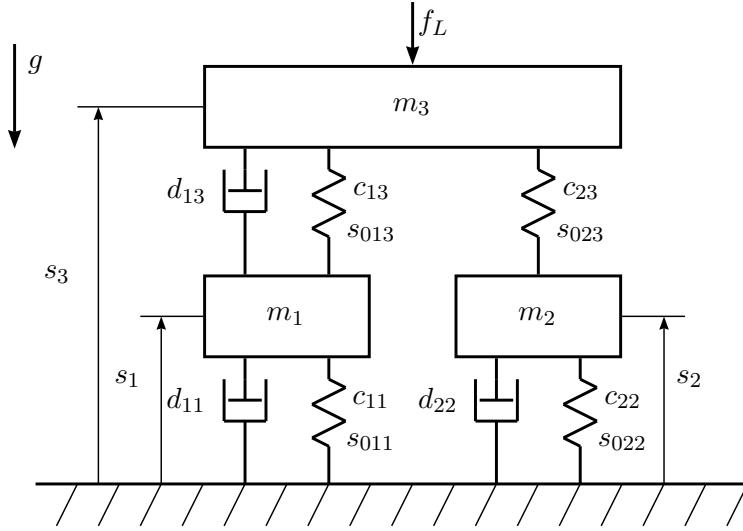


Abbildung 2.34: Feder-Masse-Dämpfer System mit drei Massen.

Das mathematische Modell (2.110) lässt sich auch kompakter in *Matrixschreibweise* in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{b}f_L \quad (2.111)$$

schreiben, mit  $\mathbf{q} = [s_1, s_2, s_3]^T$ , der *symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix*  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ , der *symmetrischen, positiv (semi-)definiten Dämpfungsma- trix*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} + d_{13} & 0 & -d_{13} \\ 0 & d_{22} & 0 \\ -d_{13} & 0 & d_{13} \end{bmatrix}, \quad (2.112)$$

der *symmetrischen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{13} & 0 & -c_{13} \\ 0 & c_{22} + c_{23} & -c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & c_{13} + c_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

dem konstanten Vektor  $\mathbf{k}$  und dem konstanten Eingangsvektor  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -m_1g + c_{11}s_{011} - c_{13}s_{013} \\ -m_2g + c_{22}s_{022} - c_{23}s_{023} \\ -m_3g + c_{13}s_{013} + c_{23}s_{023} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

**Aufgabe 2.14.** Zeigen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ .

Um nun die Gleichgewichtslage  $\mathbf{q}_R$  für  $f_L = 0$  zu berechnen, setzt man in (2.111)  $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  und löst das resultierende lineare Gleichungssystem  $\mathbf{C}\mathbf{q}_R = \mathbf{k}$  nach  $\mathbf{q}_R$  auf. Wegen der positiven Definitheit ist  $\mathbf{C}$  invertierbar und es folgt

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{k}. \quad (2.115)$$

Führt man nun die Abweichung  $\Delta\mathbf{q}$  von  $\mathbf{q}$  aus der Gleichgewichtslage (Ruhelage)  $\mathbf{q}_R$  ein, also  $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_R$ , dann folgt die Bewegungsgleichung (2.111) in der Form

$$\mathbf{M}\frac{d^2}{dt^2}\Delta\mathbf{q} + \mathbf{D}\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{q} + \mathbf{C}\Delta\mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{q}_R}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{B}f_L. \quad (2.116)$$

Das Ergebnis des vorigen Beispiels lässt sich insofern verallgemeinern, als jedes lineare Feder-Masse-Dämpfer System in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{f}_e \quad (2.117)$$

mit dem Vektor der Lagekoordinaten  $\mathbf{q}$  (relativ bezogen auf die Gleichgewichtslage), der *symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix*  $\mathbf{M}$ , der *symmetrischen, positiv semidefiniten Dämpfungsmatrix*  $\mathbf{D}$ , der *symmetrischen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{C}$ , der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  sowie dem Vektor der externen Kräfte  $\mathbf{f}_e$  geschrieben werden kann.

Die im System gespeicherte Energie setzt sich aus der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.118)$$

und der in den Federn gespeicherten potentiellen Energie

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (2.119)$$

zusammen. Berechnet man nun die zeitliche Änderung der Gesamtenergie  $E = T + V$  entlang einer Lösungskurve von (2.117), dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E &= \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{f}_e) + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}\mathbf{f}_e. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Dabei gibt der erste Term  $-\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \leq 0$  die in den Dämpferelementen dissipierte Leistung an und der zweite Term  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e$  beschreibt die Energiefüsse zum oder vom System zufolge der externen Kräfte  $\mathbf{f}_e$ .

Das System (2.117) lässt sich sehr einfach als Differentialgleichungssystem erster Ordnung in Zustandsdarstellung mit dem Zustand  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$  in der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \quad (2.121)$$

darstellen. In der Mechanik ist es oft üblich, das System (2.117) auf die so genannte *Modalform* zu transformieren. Dazu schreibt man (2.117) in folgender Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \mathbf{f}_e \quad (2.122)$$

mit den symmetrischen Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{H}$  um. Die Idee besteht nun darin, das *verallgemeinerte Eigenwertproblem*

$$(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{H}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2.123)$$

zu lösen, wobei  $\lambda$  einen (verallgemeinerten) Eigenwert als Wurzel des charakteristischen Polynoms  $\det(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{H})$  und  $\boldsymbol{\psi}$  den zugehörigen (verallgemeinerten) Eigenvektor bezeichnet. Im Weiteren sei angenommen, dass  $\dim(\mathbf{q}) = n$  und die  $2n$  Eigenwerte  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n$  paarweise verschieden sind<sup>6</sup>. Setzt man  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{H}$  von (2.122) in (2.123) mit  $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_a^T, \boldsymbol{\psi}_b^T]^T$  ein

$$\left( \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_a \\ \boldsymbol{\psi}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

so erhält man

$$(\lambda \mathbf{D} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi}_a + \lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_b = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_a - \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_b = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

und aus der zweiten Gleichung folgt wegen der positiven Definitheit und damit Regularität von  $\mathbf{M}$  die Beziehung

$$\lambda \boldsymbol{\psi}_a = \boldsymbol{\psi}_b. \quad (2.126)$$

Damit vereinfacht sich die erste Gleichung von (2.125) zu

$$(\mathbf{C} + \lambda \mathbf{D} + \lambda^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_a = \mathbf{0}. \quad (2.127)$$

Nach (2.123) gilt für die Eigenwerte  $\lambda_j, \lambda_k \neq 0$  mit den zugehörigen Eigenvektoren  $\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_k$ ,  $j, k = 1, \dots, 2n$

$$\boldsymbol{\psi}_k^T (\lambda_j \mathbf{A} + \mathbf{H}) \boldsymbol{\psi}_j = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\psi}_j^T (\lambda_k \mathbf{A} + \mathbf{H}) \boldsymbol{\psi}_k = 0 \quad (2.128)$$

<sup>6</sup>Man beachte, dass nur rein reelle und konjugiert komplexe Eigenwerte auftreten können, da die Einträge der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{H}$  rein reell sind.

und aufgrund der Symmetrie von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{H}$  gelten die Beziehungen

$$(\lambda_j - \lambda_k) \psi_k^T \mathbf{A} \psi_j = 0 \quad \text{und} \quad \left( \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_k} \right) \psi_k^T \mathbf{H} \psi_j = 0 . \quad (2.129)$$

Man erkennt aus (2.129), dass für  $j \neq k$  die *Orthogonalitätsbedingungen*

$$\psi_k^T \mathbf{A} \psi_j = 0 \quad \text{und} \quad \psi_k^T \mathbf{H} \psi_j = 0 \quad (2.130)$$

erfüllt sein müssen. Führt man nun die *Modalkoordinaten*  $\mathbf{y}$  mit Hilfe der regulären Matrix  $\Psi$  in der Form

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{y}, \quad \Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2n}] \quad (2.131)$$

mit  $\psi_j = [\psi_{a,j}^T, \lambda_j \psi_{a,j}^T]^T$ ,  $j = 1, \dots, 2n$  ein, dann ergibt sich (2.122) zu

$$\mathbf{A} \Psi \frac{d}{dt} \mathbf{y} + \mathbf{H} \Psi \mathbf{y} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{f}_e . \quad (2.132)$$

Durch Linksmultiplikation von (2.132) mit  $\Psi^T$  erhält man

$$\Psi^T \mathbf{A} \Psi \frac{d}{dt} \mathbf{y} + \Psi^T \mathbf{H} \Psi \mathbf{y} = \Psi^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{f}_e , \quad (2.133)$$

wobei die Matrizen  $\Psi^T \mathbf{A} \Psi = \text{diag}(\psi_k^T \mathbf{A} \psi_k)$  und  $\Psi^T \mathbf{H} \Psi = \text{diag}(\psi_k^T \mathbf{H} \psi_k)$  aufgrund der Orthogonalitätsbedingungen (2.130) Diagonalmatrizen sind. Wertet man die Diagonalelemente separat aus

$$\psi_k^T \mathbf{A} \psi_k = [\psi_{a,k}^T \ \lambda_k \psi_{a,k}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{a,k} \\ \lambda_k \psi_{a,k} \end{bmatrix} = \psi_{a,k}^T \mathbf{D} \psi_{a,k} + 2\lambda_k \psi_{a,k}^T \mathbf{M} \psi_{a,k} = \tilde{\alpha}_k \quad (2.134)$$

und

$$\psi_k^T \mathbf{H} \psi_k = [\psi_{a,k}^T \ \lambda_k \psi_{a,k}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{a,k} \\ \lambda_k \psi_{a,k} \end{bmatrix} = \psi_{a,k}^T \mathbf{C} \psi_{a,k} - \psi_{a,k}^T \lambda_k^2 \mathbf{M} \psi_{a,k} , \quad (2.135)$$

folgt mit  $\mathbf{C} \psi_{a,k} = -(\lambda_k \mathbf{D} + \lambda_k^2 \mathbf{M}) \psi_{a,k}$  zufolge von (2.127) die Beziehung

$$\psi_k^T \mathbf{H} \psi_k = -\lambda_k \psi_{a,k}^T (\mathbf{D} + 2\lambda_k \mathbf{M}) \psi_{a,k} = -\lambda_k \tilde{\alpha}_k . \quad (2.136)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (2.133) lässt sich ebenfalls noch vereinfachen, nämlich

$$\Psi^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \psi_{a,1}^T & \lambda_1 \psi_{a,1}^T \\ \psi_{a,2}^T & \lambda_2 \psi_{a,2}^T \\ \vdots & \vdots \\ \psi_{a,2n}^T & \lambda_{2n} \psi_{a,2n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f}_e = \Psi_a^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{f}_e, \quad \Psi_a = [\psi_{a,1}, \psi_{a,2}, \dots, \psi_{a,2n}] . \quad (2.137)$$

Setzt man nun (2.134) bis (2.137) in (2.133) ein, dann ergibt sich die *Modalform* der Bewegungsgleichung des linearen Feder-Masse-Dämpfer Systems (2.117) als *entkoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung*

$$\frac{d}{dt}y_k - \lambda_k y_k = \frac{1}{\tilde{\alpha}_k} \boldsymbol{\psi}_{a,k}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e, \quad k = 1, \dots, 2n. \quad (2.138)$$

Für vorgegebene Anfangswerte  $\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{x}(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und vorgegebene externe Kräfte  $\mathbf{f}_e(t)$  lassen sich die Differentialgleichungen (2.138) einfach lösen, womit der Zeitverlauf sämtlicher Lagekoordinaten und -geschwindigkeiten

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{y}(t) \quad (2.139)$$

festliegt.

**Aufgabe 2.15.** Berechnen Sie die Modalform für das mechanische System von Abbildung 2.34 für die Parameter  $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, c_{11} = 2, c_{13} = 0.5, c_{22} = 1, c_{23} = 1, d_{11} = 0.1, d_{22} = 0.2, d_{13} = 0.3$ .

**Lösung von Aufgabe 2.15.** Die  $2n = 6$  Eigenwerte  $\lambda_k, k = 1, \dots, 6$  lauten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.2654 + 1.6702I \\ \lambda_2 &= -0.2654 - 1.6702I \\ \lambda_3 &= -0.0983 + 1.5569I \\ \lambda_4 &= -0.0983 - 1.5569I \\ \lambda_5 &= -0.0863 + 0.7994I \\ \lambda_6 &= -0.0863 - 0.7994I \end{aligned}$$

und die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich zu<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\psi}_2^* &= \begin{bmatrix} -0.0603 - 0.3793I \\ -0.2113 - 0.1185I \\ 0.0977 + 0.2082I \\ 0.6494 \\ 0.2539 - 0.3215I \\ -0.3737 + 0.1079I \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_3 = \boldsymbol{\psi}_4^* = \begin{bmatrix} 0.2261 + 0.2584I \\ -0.0241 - 0.3812I \\ 0.0125 + 0.1653I \\ -0.4245 + 0.3266I \\ 0.5958 \\ -0.2586 + 0.0032I \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\psi}_5 = \boldsymbol{\psi}_6^* &= \begin{bmatrix} 0.1641 + 0.0636I \\ 0.4516 - 0.0073I \\ 0.6103 \\ -0.0649 + 0.1257I \\ -0.03312 + 0.3616I \\ -0.0527 + 0.4879I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit kann die Modalform gemäß (2.138) mit

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 &= -0.4837 - 0.4811I \\ \tilde{\alpha}_2 &= -0.4837 + 0.4811I \\ \tilde{\alpha}_3 &= -0.4164 - 0.5839I \\ \tilde{\alpha}_4 &= -0.4164 + 0.5839I \\ \tilde{\alpha}_5 &= -0.0246 + 0.9393I \\ \tilde{\alpha}_6 &= -0.0246 - 0.9393I\end{aligned}$$

angegeben werden.

<sup>a</sup>Hier und im Folgenden wird mit  $(\cdot)^*$  das konjugiert Komplexe von  $(\cdot)$  bezeichnet.

Zu jeder einzelnen Differentialgleichung von (2.138)

$$\frac{d}{dt}y_j - \lambda_j y_j = \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} \boldsymbol{\psi}_{a,j}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e \quad (2.140)$$

für einen komplexwertigen Eigenwert  $\lambda_j$  mit der komplexwertigen Lösung  $y_j(t)$  existiert eine Differentialgleichung für den konjugiert komplexen Eigenwert  $\lambda_j^*$  der Form

$$\frac{d}{dt}y_j^* - \lambda_j^* y_j^* = \frac{1}{\tilde{\alpha}_j^*} \boldsymbol{\psi}_{a,j}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{f}_e \quad (2.141)$$

mit der konjugiert komplexen Lösung  $y_j^*(t)$ . Führt man nun die reguläre Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix} y_{j,\text{Re}} \\ y_{j,\text{Im}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ y_j^* \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} y_j \\ y_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & I \\ 1 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{j,\text{Re}} \\ y_{j,\text{Im}} \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

durch, dann erhält man

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_{j,\text{Re}} \\ y_{j,\text{Im}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -I & I \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & I \\ 1 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{j,\text{Re}} \\ y_{j,\text{Im}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} \boldsymbol{\psi}_{a,j}^T \\ \frac{1}{\tilde{\alpha}_j^*} \boldsymbol{\psi}_{a,j}^{*T} \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{f}_e \right) \quad (2.143)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_{j,\text{Re}} \\ y_{j,\text{Im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\lambda_j) & -\text{Im}(\lambda_j) \\ \text{Im}(\lambda_j) & \text{Re}(\lambda_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{j,\text{Re}} \\ y_{j,\text{Im}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Re} \left( \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} \boldsymbol{\psi}_{a,j}^T \right) \\ \text{Im} \left( \frac{1}{\tilde{\alpha}_j} \boldsymbol{\psi}_{a,j}^T \right) \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{f}_e. \quad (2.144)$$

Im Gegensatz zu (2.140) und (2.141) hat das Differentialgleichungssystem (2.144) rein reelle Koeffizienten und reelle Lösungen  $y_{j,\text{Re}}(t)$ ,  $y_{j,\text{Im}}(t)$ .

### 2.2.7 Körper mit veränderlicher Masse

Der Impulserhaltungssatz (2.60) gilt auch für Körper mit veränderlicher Masse  $m(t)$ . Angenommen der Körper habe zum Zeitpunkt  $t$  die Masse  $m(t)$ , die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und es wirke auf ihn die Kraft  $\mathbf{f}$ . Stößt nun der Körper während des Zeitintervalls  $dt$  die Masse  $d\bar{m}$  mit der Ausstoßgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$  aus, so hat der Körper zum Zeitpunkt  $t + dt$  die Masse  $m(t + dt) = m(t) - d\bar{m}$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t + dt)$ . Der Impuls zum Zeitpunkt  $t$  lautet  $\mathbf{p}(t) = m(t)\mathbf{v}(t)$  und der Gesamtimpuls zum Zeitpunkt  $t + dt$  errechnet sich zu

$$\mathbf{p}(t + dt) = \underbrace{(m(t) - d\bar{m})(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v})}_{m(t+dt)} + d\bar{m}(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)) = \mathbf{p}(t) + d\mathbf{p} \quad (2.145)$$

bzw.

$$d\mathbf{p} = m(t)d\mathbf{v} + d\bar{m}\mathbf{w}(t) . \quad (2.146)$$

Der Impulserhaltungssatz (2.60) lautet also

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)\frac{d}{dt}\bar{m} = \mathbf{f} . \quad (2.147)$$

Dabei beschreibt  $\frac{d}{dt}\bar{m} = \mu > 0$  die *Ausstoßrate* bzw. mit  $m(t + dt) = m(t) + dm$  und damit

$$\frac{d}{dt}m = -\frac{d}{dt}\bar{m} = -\mu \quad (2.148)$$

die Masseabnahme des Körpers durch die ausgestoßene Masse und der Ausdruck

$$\mathbf{f}_{\text{Schub}} = -\mu\mathbf{w}(t) \quad (2.149)$$

wird als *Schubkraft* bezeichnet. Die Differentialgleichungen eines Körpers mit der veränderlichen Masse  $m(t)$  und der Ausstoßrate  $\mu > 0$  können demnach wie folgt zusammengefasst werden

$$\begin{aligned} m(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mu\mathbf{w}(t) \\ \frac{d}{dt}m &= -\mu . \end{aligned} \quad (2.150)$$

**Aufgabe 2.16.** Berechnen Sie das mathematische Modell einer einstufigen Rakete mit der zeitlich veränderlichen Masse  $m(t) = m_0 - m_f(t)$ , wobei  $m_0$  das Gewicht der Rakete vor dem Start (Eigenmasse + Traglast + Treibstoffmenge) und  $m_f(t)$  die zeitlich abnehmende Treibstoffmasse bezeichnen. Nehmen Sie an, dass die Treibstoffmasse  $m_f(t)$  mit der Treibstoffausstoßrate  $\dot{m}_f(t) = u(t)$  mit der Relativgeschwindigkeit  $w > 0$  von der Rakete ausgestoßen wird und die Rakete sich exakt gegen das Schwerkraftfeld der Erde mit der Gravitationskonstanten  $g$  bewegt.

*Lösung von Aufgabe 2.16.* Das mathematische Modell lautet

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -g - \frac{w}{m(t)} u(t) \\ \frac{dm}{dt} &= -u(t)\end{aligned}$$

mit der Höhe  $h(t)$  der Rakete gemessen von der Erdoberfläche, der Raketengeschwindigkeit  $v(t)$  und der Raketenmasse  $m(t)$ .

### 2.2.8 Drehimpulserhaltung

In (2.37) wurde gezeigt, dass sich das Moment  $\tau^{(0)}$  einer Kraft  $\mathbf{f}$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in der Form  $\tau^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$  berechnet. Betrachtet man nun eine Punktmasse mit der Masse  $m$ , dem Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  zum Ursprung des Inertialsystems ( $0xyz$ ) und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ , dann ist der *Drehimpuls* in der Form

$$\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2.151)$$

definiert. Bildet man für beide Seiten des Impulserhaltungssatzes (2.60) das Kreuzprodukt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , so erhält man

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \tau^{(0)} . \quad (2.152)$$

Mit

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \underbrace{\mathbf{p}}_{m\mathbf{v}}}_{=0} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{p} \quad (2.153)$$

folgt aus (2.152) der *Drehimpulserhaltungssatz (Drallsatz)* zu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}^{(0)} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \tau^{(0)} , \quad (2.154)$$

d. h., die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\mathbf{l}^{(0)}$  bezüglich eines *beliebigen raumfesten* Punktes 0 ist gleich dem Drehmoment  $\tau^{(0)}$  der an der Punktmasse angreifenden Summenkraft  $\mathbf{f}$  bezüglich desselben Punktes 0. Wie man in Abbildung 2.35 erkennen kann, überstreicht der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in der Zeit  $dt$  eine Fläche mit dem Flächenvektor  $d\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{n}_A dA = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ , wobei  $\mathbf{n}_A$  den Normalvektor und  $dA = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}\|_2$  die zugehörige Größe des Flächenelements beschreibt. Führt man nun die so genannte *vektorielle Flächengeschwindigkeit*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}^{(0)} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.155)$$

ein, so lässt sich der Drehimpuls (2.151) auch in der Form

$$\mathbf{l}^{(0)} = 2m \frac{d}{dt} \mathbf{A}^{(0)} \quad (2.156)$$

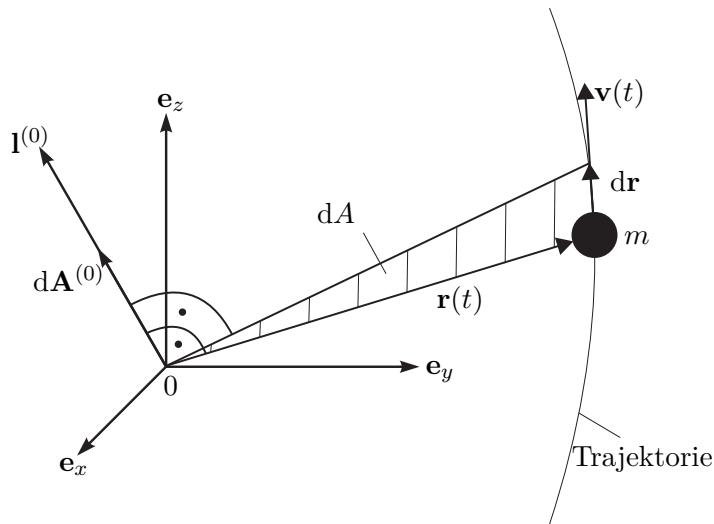


Abbildung 2.35: Zum Drehimpuls.

schreiben.

**Beispiel 2.13.** Zeigt bei einer Bewegung der Kraftvektor stets auf einen Punkt 0, das Zentrum, hin, dann spricht man von einer *Zentralbewegung*. Dies ist beispielsweise bei der Planetenbewegung der Fall, wobei die Sonne das Zentrum bildet. Da bei einer Zentralbewegung das Moment  $\tau^{(0)}$  bezüglich des Zentrums verschwindet, müssen nach (2.154) der Drehimpuls  $\mathbf{l}^{(0)}$  und nach (2.156) die Flächengeschwindigkeit  $\frac{d}{dt} \mathbf{A}^{(0)}$  konstant sein. Diese Aussage entspricht dem *zweiten Keplerschen Gesetz*, dass nämlich ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ in gleichen Zeiten gleich große Flächen überstreicht, siehe Abbildung 2.36.

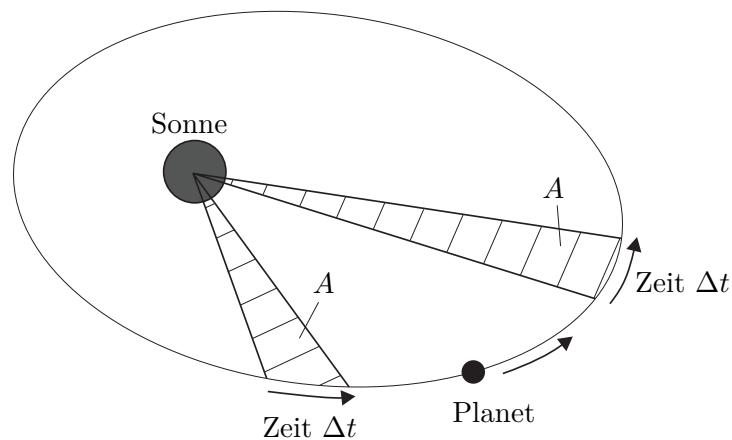


Abbildung 2.36: Zum zweiten Keplerschen Gesetz.

**Beispiel 2.14.** Man betrachte das mathematische Pendel von Abbildung 2.37 mit der Punktmasse  $m$  und dem masselosen starren Pendel der Länge  $l$  unter dem Einfluss der Gravitation mit der Erdbeschleunigung  $g$  in negativer  $\mathbf{e}_z$ -Richtung.

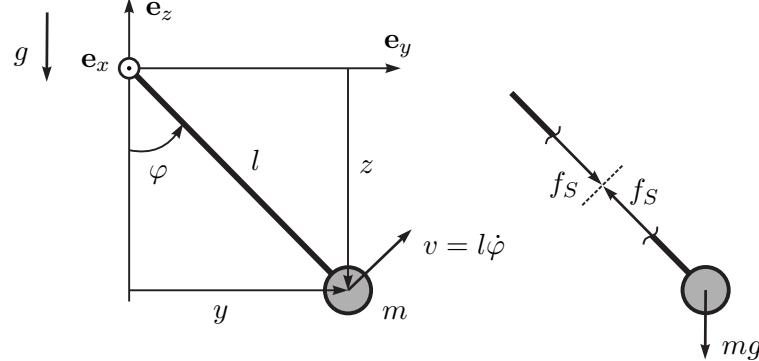


Abbildung 2.37: Mathematisches Pendel.

Schneidet man das Pendel auf und führt die Schnittkraft  $f_S$  ein, so lautet der Impulserhaltungssatz für die Masse  $m$

$$\mathbf{e}_y : m\ddot{y} = -f_S \sin(\varphi) \quad (2.157a)$$

$$\mathbf{e}_z : m\ddot{z} = -mg + f_S \cos(\varphi) . \quad (2.157b)$$

Setzt man nun die Beziehungen

$$y = l \sin(\varphi), \quad \dot{y} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \quad \ddot{y} = -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (2.158a)$$

$$z = -l \cos(\varphi), \quad \dot{z} = l \sin(\varphi) \dot{\varphi}, \quad \ddot{z} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (2.158b)$$

in (2.157) ein, so erhält man

$$m(-l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) = -f_S \sin(\varphi) \quad (2.159a)$$

$$m(l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi}) = -mg + f_S \cos(\varphi) . \quad (2.159b)$$

Aus den beiden Gleichungen (2.159) lassen sich nun eine Differentialgleichung für  $\varphi$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi) \quad (2.160)$$

und die Schnittkraft  $f_S$  in der Form

$$f_S = mg \cos(\varphi) + ml\dot{\varphi}^2 \quad (2.161)$$

berechnen. Die Differentialgleichung (2.160) kann man auch direkt über den Drehimpulserhaltungssatz (2.154) bezüglich des Ursprungs 0 des Koordinatensystems ( $xyz$ ) erhalten. Der zugehörige Drehimpuls  $\mathbf{l}^{(0)}$  gemäß (2.151) lautet (siehe auch

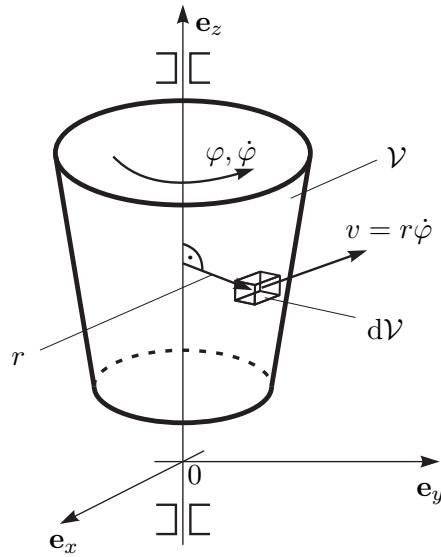


Abbildung 2.38: Zum Massenträgheitsmoment.

Abbildung 2.37)

$$\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ l \sin(\varphi) \\ -l \cos(\varphi) \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} 0 \\ l\dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ l\dot{\varphi} \sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml^2\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

und damit folgt der Drehimpulserhaltungssatz bezüglich der  $\mathbf{e}_x$ -Achse zu

$$\frac{d}{dt} l_x^{(0)} = ml^2\ddot{\varphi} = \tau_x^{(0)} = -mgl \sin(\varphi) . \quad (2.163)$$

Die Größe

$$\theta^{(0)} = ml^2 \quad (2.164)$$

wird auch als *Massenträgheitsmoment* bezeichnet.

Das vorige Beispiel lässt sich nun sehr einfach auf die Rotation eines Starrkörpers mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}$  um eine feste Drehachse (im vorliegenden Fall die  $\mathbf{e}_z$ -Achse) erweitern, siehe Abbildung 2.38. Schreibt man für ein Massenelement  $dm = \rho(x, y, z) dV$  mit dem Volumenelement  $dV$  und der Dichte  $\rho(x, y, z)$ , welches sich im Abstand  $r(x, y, z)$  von der Drehachse befindet, die zeitliche Änderung des Drehimpulses um die Drehachse an, so erhält man

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times dm\mathbf{v}) = r^2 dm\dot{\omega} \quad (2.165)$$

und durch Integration über das gesamte Starrkörpervolumen  $\mathcal{V}$  folgt der *Momentensatz* zu

$$\theta_{zz}\ddot{\varphi} = \tau_z \quad (2.166)$$

mit dem um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse wirkenden äußeren Gesamtdrehmoment  $\tau_z$  und dem Massenträgheitsmoment

$$\theta_{zz} = \int_{\mathcal{V}} r^2 dm = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) dm . \quad (2.167)$$

Die in der rotierenden Masse gespeicherte *rotatorische kinetische Energie* lautet

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{zz} \dot{\varphi}^2 . \quad (2.168)$$

**Beispiel 2.15.** Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit dem Radius  $R$ , der konstanten Dichte  $\rho$  und der Länge  $l$  lautet (siehe Abbildung 2.39)

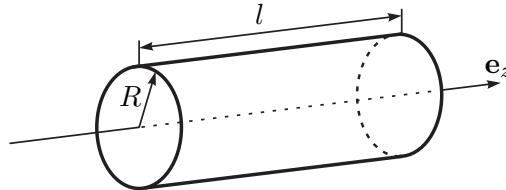


Abbildung 2.39: Zum Massenträgheitsmoment eines Zylinders.

$$\theta_{zz} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \rho r dr d\varphi dz = \rho \frac{R^4 \pi}{2} l = \frac{1}{2} m R^2 . \quad (2.169)$$

**Aufgabe 2.17.** Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment  $\theta$  einer homogenen Kugel mit dem Radius  $R$  und der Dichte  $\rho$  bezüglich einer Achse durch den Kugelmittelpunkt.

*Lösung von Aufgabe 2.17.*

$$\theta = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \quad (2.170)$$

Im Weiteren betrachte man den Starrkörper von Abbildung 2.40. Der Ursprung  $S$  des Koordinatensystems  $(Sx^{(S)}y^{(S)}z^{(S)})$  beschreibt dabei den Schwerpunkt des Körpers (siehe auch (2.55)) und über die Beziehung

$$\theta_{zz}^{(S)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(S)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} ((x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2) dm \quad (2.171)$$

kann das Massenträgheitsmoment um die  $\mathbf{e}_z^{(S)}$ -Achse errechnet werden. Möchte man nun das Massenträgheitsmoment  $\theta_{zz}^{(A)}$  desselben Körpers bezüglich der parallelen  $\mathbf{e}_z^{(A)}$ -Achse des Koordinatensystems  $(Ax^{(A)}y^{(A)}z^{(A)})$  berechnen (siehe Abbildung 2.40), dann folgt

$$\theta_{zz}^{(A)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(A)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} ((x^{(A)})^2 + (y^{(A)})^2) dm \quad (2.172)$$

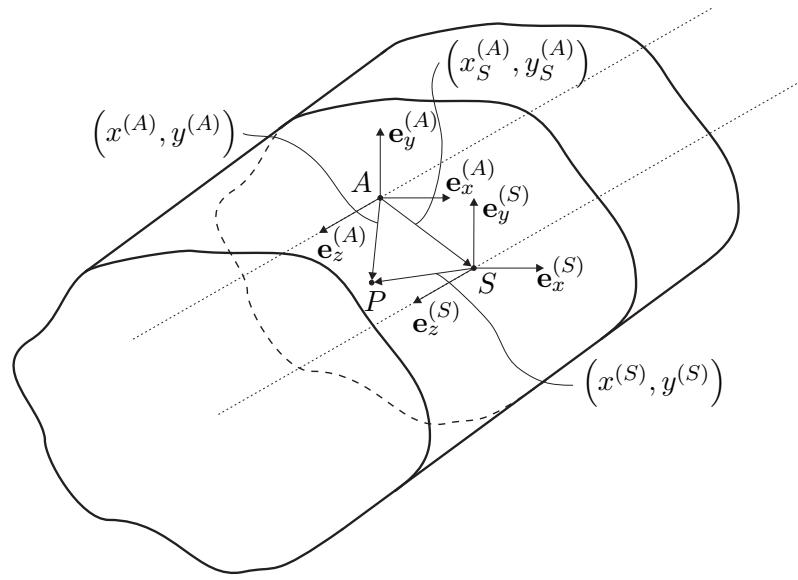


Abbildung 2.40: Zum Satz von Steiner.

bzw. mit  $x^{(A)} = x_S^{(A)} + x^{(S)}$  und  $y^{(A)} = y_S^{(A)} + y^{(S)}$  erhält man

$$\begin{aligned} \theta_{zz}^{(A)} &= \int_V \left( (x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2 \right) dm + 2 \int_V (x_S^{(A)} x^{(S)} + y_S^{(A)} y^{(S)}) dm \\ &\quad + \int_V \left( (x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2 \right) dm \\ &= \left( (x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2 \right) m + 2x_S^{(A)} \underbrace{\int_V x^{(S)} dm}_{=0} + 2y_S^{(A)} \underbrace{\int_V y^{(S)} dm}_{=0} + \theta_{zz}^{(S)}. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Gleichung (2.173) zeigt, dass sich das Massenträgheitsmoment  $\theta_{zz}^{(A)}$  bezüglich der  $e_z^{(A)}$ -Achse aus der Summe des Massenträgheitsmoments  $\theta_{zz}^{(S)}$  um die  $e_z^{(S)}$ -Achse durch den Schwerpunkt  $S$  und der Multiplikation aus der Gesamtmasse  $m$  mit dem quadratischen Abstand  $(x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2$  von der Achse  $e_z^{(A)}$  zur Achse  $e_z^{(S)}$  ergibt. Dieser Zusammenhang ist in der Literatur auch unter dem Namen *Satz von Steiner* zu finden.

**Beispiel 2.16.** Abbildung 2.41 zeigt einen Starrkörper bestehend aus vier symmetrisch angeordneten Vollzylindern jeweils mit der Masse  $m$  und dem Radius  $R$ , deren Mittelpunkte sich im Abstand  $H$  von der Drehachse  $e_z$  befinden.

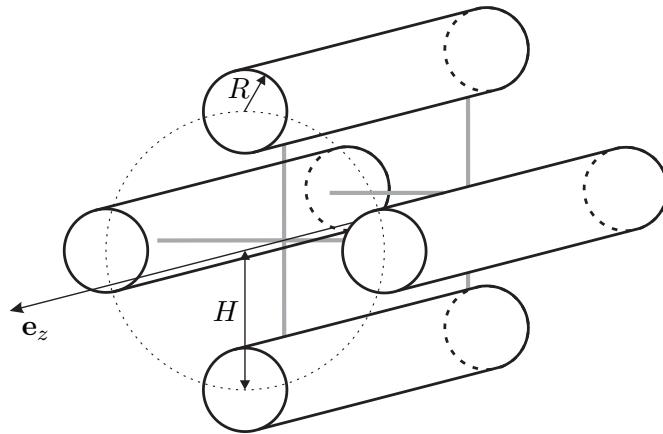


Abbildung 2.41: Starrkörper aus vier symmetrischen Zylindern.

Es sei angenommen, dass die Verbindungsstege zwischen den Zylindern masselos sind. Das Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders bezüglich der  $e_z$ -Achse durch den Schwerpunkt lautet gemäß (2.169)  $\theta_{zz}^{(S)} = \frac{1}{2}mR^2$ . Nach dem Satz von Steiner erhält man somit für das Massenträgheitsmoment des Gesamtkörpers

$$\theta_{zz} = 4 \frac{1}{2}mR^2 + 4H^2m = 2m(R^2 + 2H^2) . \quad (2.174)$$

*Beispiel 2.17.* Abbildung 2.42 zeigt einen reibungsfrei gelagerten, quaderförmigen Pendelstab mit der homogenen Dichte  $\rho_S$  und den geometrischen Abmessungen Länge  $l_S$ , Breite  $b_S$  und Höhe  $h_S$ .

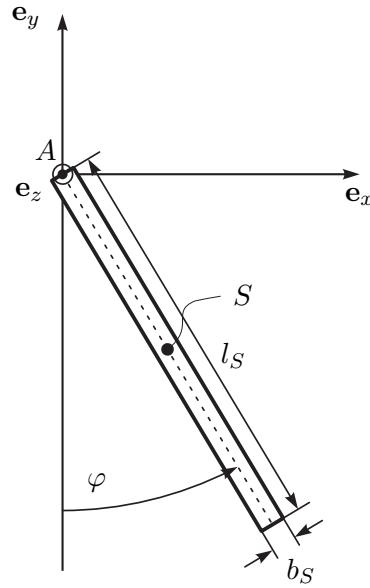


Abbildung 2.42: Pendelstab.

Zur Berechnung der kinetischen Energie sollen in weiterer Folge zwei Varianten vorgestellt werden. In der ersten Variante berechne man das Massenträgheitsmoment des Pendelstabes  $\theta_{S,zz}^{(A)}$  um die Drehachse ( $\mathbf{e}_z$ -Achse)

$$\theta_{S,zz}^{(A)} = \rho_S \int_{-h_S/2}^{h_S/2} \int_{-b_S/2}^{b_S/2} \int_0^{l_S} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_S \left( \frac{1}{3} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \quad (2.175)$$

und damit errechnet sich die kinetische Energie gemäß (2.168) zu

$$T = \frac{1}{2} \theta_{S,zz}^{(A)} \dot{\varphi}^2 . \quad (2.176)$$

Bei der zweiten Variante stellt man vorerst den Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  vom Ursprung 0 des Inertialsystems ( $0xyz$ ) zum Schwerpunkt  $S$  des Pendelstabes auf

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} l_S/2 \sin(\varphi) \\ -l_S/2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

und berechnet den translatorischen Anteil der kinetischen Energie gemäß (2.79) zu

$$T_t = \frac{1}{2} m_S \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S = \frac{1}{2} m_S \frac{l_S^2}{4} \dot{\varphi}^2 \quad (2.178)$$

mit der Pendelmasse  $m_S = \rho_S l_S b_S h_S$ . Wenn man nun den translatorischen Anteil der kinetischen Energie  $T_t$  um den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie gemäß (2.168) ergänzt, muss man beachten, dass nun das Massenträgheitsmoment  $\theta_{S,zz}^{(S)}$  bezüglich des Schwerpunktes  $S$  (also bezüglich einer Drehachse parallel zur  $\mathbf{e}_z$ -Achse durch den Schwerpunkt  $S$ ) berechnet werden muss

$$\theta_{S,zz}^{(S)} = \rho_S \int_{-h_S/2}^{h_S/2} \int_{-b_S/2}^{b_S/2} \int_{-l_S/2}^{l_S/2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_S \left( \frac{1}{12} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \quad (2.179)$$

und damit der rotatorische Anteil der kinetischen Energie zu

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{S,zz}^{(S)} \dot{\varphi}^2 \quad (2.180)$$

folgt. Die kinetische Energie des Pendelstabes lautet demnach

$$\begin{aligned} T &= T_t + T_r \\ &= \frac{1}{8} \rho_S b_S h_S l_S^3 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \rho_S \left( \frac{1}{12} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \dot{\varphi}^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \rho_S b_S h_S l_S^3 + \frac{1}{12} \rho_S b_S^3 l_S h_S \right) \dot{\varphi}^2}_{=\theta_{S,zz}^{(A)}} . \end{aligned} \quad (2.181)$$

Es sei angemerkt, dass der Zusammenhang

$$\theta_{S,zz}^{(A)} = \theta_{S,zz}^{(S)} + m_S \frac{l_S^2}{4} \quad (2.182)$$

gerade dem Satz von Steiner entspricht, siehe (2.173).

Generell ist zu beachten, dass bei der Berechnung der kinetischen Energie als Summe aus einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil das Massenträgheitsmoment immer bezüglich der in den Schwerpunkt parallel verschobenen Drehachse zu verwenden ist. Dies ist insbesondere in weiterer Folge bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen von essentieller Bedeutung!

**Beispiel 2.18.** Als Beispiel betrachte man den Antriebsstrang von Abbildung 2.43. Ein Motor mit dem Massenträgheitsmoment  $\theta_m$  erzeugt ein Drehmoment  $\tau_m$  und treibt über ein verlustloses Getriebe mit der Getriebeübersetzung  $i_g$  (Verhältnis von Antriebsdrehzahl zu Abtriebsdrehzahl) eine Masse mit dem Massenträgheitsmoment  $\theta_1$  an.

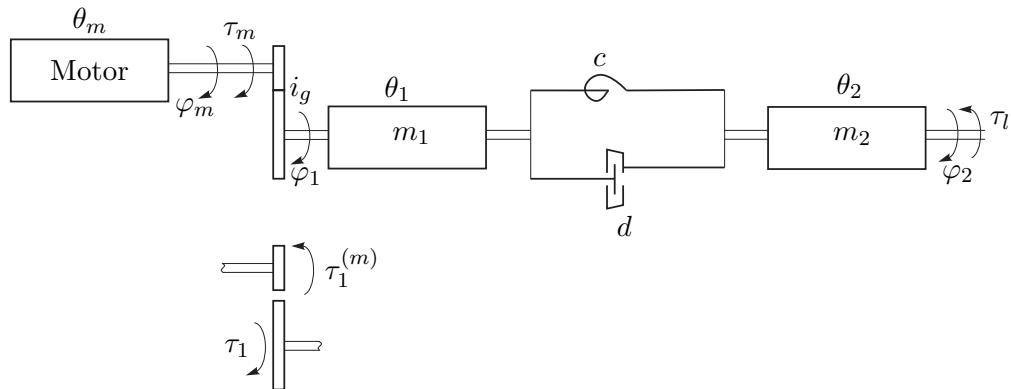


Abbildung 2.43: Antriebsstrang.

Diese Masse ist über eine lineare Drehfeder mit der Federkonstanten  $c > 0$  und einem drehwinkelgeschwindigkeitsproportionalen Drehdämpfer mit der Dämpferkonstanten  $d > 0$  mit einer weiteren Masse mit dem Massenträgheitsmoment  $\theta_2$  verbunden, auf die das Lastmoment  $\tau_l$  wirkt. Schneidet man das Getriebe auf (siehe Abbildung 2.43), so wirkt auf der Primärseite das Drehmoment  $\tau_1^{(m)}$ . Da das Getriebe als verlustlos angenommen wurde, wirkt zufolge der Getriebeübersetzung

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{i_g} \dot{\varphi}_m \quad (2.183)$$

auf der Abtriebsseite das Drehmoment

$$\tau_1 \dot{\varphi}_1 = \tau_1^{(m)} \dot{\varphi}_m \quad \text{bzw.} \quad \tau_1 = \tau_1^{(m)} i_g . \quad (2.184)$$

Wendet man nun für die beiden Massen und den Motor getrennt den Drehimpulserhaltungssatz (2.154) an, so folgt

$$\theta_m \ddot{\varphi}_m = \tau_m - \tau_1^{(m)} \quad (2.185a)$$

$$\theta_1 \ddot{\varphi}_1 = \tau_1 - c(\varphi_1 - \varphi_2) - d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (2.185b)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \tau_l \quad (2.185c)$$

bzw. durch Elimination von  $\tau_1^{(m)}$ ,  $\tau_1$  und  $\varphi_m$  folgt

$$\tau_1 = \tau_1^{(m)} i_g = \tau_m i_g - \theta_m i_g^2 \dot{\varphi}_1 \quad (2.186)$$

und

$$(\theta_1 + i_g^2 \theta_m) \ddot{\varphi}_1 = \tau_m i_g - c(\varphi_1 - \varphi_2) - d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (2.187a)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \tau_l . \quad (2.187b)$$

In Matrixschreibweise lässt sich (2.187) gemäß (2.117) kompakt in der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{b}_e \tau_l + \mathbf{b}_u \tau_m \quad (2.188)$$

mit  $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ ,  $\mathbf{M} = \text{diag}(\theta_1 + i_g^2 \theta_m, \theta_2)$  und

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

angeben.

*Aufgabe 2.18.* Eine Kugel der Masse  $m$  mit dem Radius  $R$  rollt eine schiefe Ebene hinab, siehe Abbildung 2.44. Geben Sie die Bewegungsgleichung für  $\varphi$  unter Vernachlässigung der Rollreibung an und bestimmen Sie den Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$ , für den ein Rollen möglich ist.

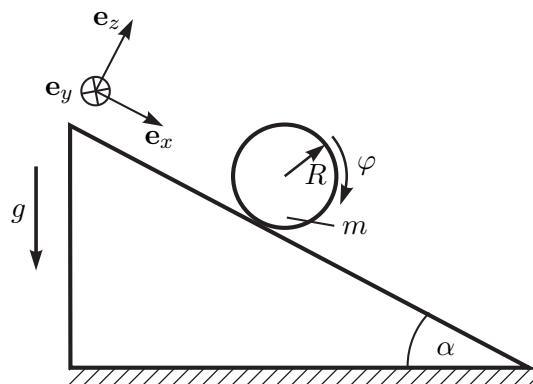


Abbildung 2.44: Rollende Kugel.

*Lösung von Aufgabe 2.18.*

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{7R}g \sin(\alpha) \quad \text{für } \mu_H \geq \frac{2}{7} \tan(\alpha)$$

**Hinweis:** Schneiden Sie die Kugel frei und stellen Sie den Impulserhaltungssatz in  $\mathbf{e}_x$ - und  $\mathbf{e}_z$ -Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems sowie den Drehimpulserhaltungssatz um den Kugelmittelpunkt auf.

## 2.3 Euler-Lagrange Gleichungen

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zweite Newtonsche Gesetz (2.60) angewandt auf ein Teilchen der Masse (Punktmasse)  $m$  in dem kartesischen Inertialkoordinatensystem  $(0xyz)$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}, \quad (2.190)$$

wobei  $\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T$  die Summe aller auf die Punktmasse wirkenden Kräfte und  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  den Positionsvektor vom Koordinatenursprung 0 zum Teilchen bezeichnet. Die Lage einer Punktmasse, deren Bewegung keinen Zwängen unterliegt, ist durch die Angabe der drei translatorischen Verschiebungen bezüglich eines Inertialsystems eindeutig bestimmt. Man sagt dann auch, die *Punktmasse* besitzt *3 Freiheitsgrade*. Im Gegensatz dazu wird die Konfiguration eines frei beweglichen *Starrkörpers* durch *6 Freiheitsgrade* beschrieben, nämlich 3 Freiheitsgrade für die translatorische Verschiebung und 3 Freiheitsgrade der Rotation zur Beschreibung der Orientierung des Starrkörpers zum Inertialsystem. Nun unterliegt die Bewegung eines Starrkörpersystems im Allgemeinen *Zwangsbedingungen*, die mit in Betracht gezogen werden müssen. Man betrachte dazu beispielsweise die Bewegung einer Masse auf einer schiefen Ebene gemäß Abbildung 2.45(a) mit der Zwangsbedingung  $y = a(1 - x/b)$  oder das sphärische Pendel gemäß Abbildung 2.45(b) mit der Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (2.191)$$

Zwei Masseteilchen  $i$  und  $j$  eines Starrkörpers, die durch eine Linie der festen Länge  $l_{ij}$  miteinander verbunden werden können, erfüllen die Zwangsbedingung  $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|_2^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = l_{ij}^2$ . Lässt sich eine Zwangsbedingung in der Form

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0 \quad (2.192)$$

ausdrücken, dann spricht man von einer *holonomen* Zwangsbedingung. Zwangsbedingungen, die nicht in dieser Art darstellbar sind, werden als *nichtholonom* bezeichnet. Dazu zählen unter anderem Ungleichungsbedingungen

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \geq 0, \quad (2.193)$$

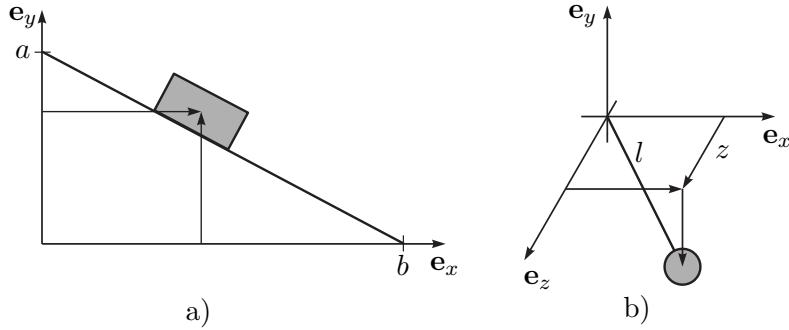


Abbildung 2.45: Zu den Zwangsbedingungen.

wie sie beispielsweise bei der Bewegung eines Partikels in einer Hohlkugel mit dem Radius  $a$  in der Form  $a^2 - \|\mathbf{r}\|_2^2 \geq 0$  auftreten. Auch Zwangsbedingungen, die explizit von der Geschwindigkeit abhängen und nicht integrierbar sind, d. h.,

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) = 0, \quad (2.194)$$

sind nichtholonom. In manchen Literaturstellen werden Zwangsbedingungen gemäß (2.192) und (2.194) auch als *geometrische* und *kinematische Zwangsbedingungen* klassifiziert. Ein typischer Fall für eine nichtholome (kinematische) Zwangsbedingung ist das Rollen einer Scheibe auf einer Ebene.

Man überzeugt sich nun leicht, dass ein System von  $N$  Punktmasse, das frei von Zwang ist,  $3N$  unabhängige Koordinaten oder Freiheitsgrade besitzt. Existieren nun beispielsweise  $(3N - n)$  holonome Zwangsbedingungen der Form

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, (3N - n), \quad (2.195)$$

dann ist unmittelbar einsichtig, dass

- (A) die Koordinaten nicht mehr linear unabhängig voneinander sind und
- (B) zur Einhaltung der Zwangsbedingungen entsprechende Zwangskräfte auftreten müssen, die a priori nicht bekannt sind.

Mit Hilfe der  $(3N - n)$  holonomen Zwangsbedingungen ist es nun möglich,  $(3N - n)$  der  $3N$  Koordinaten zu eliminieren bzw.  $n$  neue unabhängige Koordinaten  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  einzuführen, durch die sämtliche (alte) Koordinaten in der Form

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}, t), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.196)$$

ausgedrückt werden können. Man sagt dann auch, das System besitzt  $n$  *Freiheitsgrade* und die  $n$  neuen unabhängigen Koordinaten  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  bzw.  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  werden als *generalisierte Koordinaten* bezeichnet.

Zerlegt man gemäß (B) die auf die Masseteilchen wirkenden Kräfte  $\mathbf{f}_i$  in *eingeprägte Kräfte*  $\mathbf{f}_i^{(e)}$  und *Zwangskräfte*  $\mathbf{f}_i^{(z)}$ , dann lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

(2.190) für das System von  $N$  Punktmassen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i^{(e)} + \mathbf{f}_i^{(z)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.197)$$

Man beachte, dass durch (2.195) und (2.197) lediglich  $(6N - n)$  Gleichungen zur Bestimmung der  $6N$  Unbekannten  $\mathbf{r}_i$  und  $\mathbf{f}_i^{(z)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  zur Verfügung stehen. Betrachtet man beispielsweise die reibungsfrei gleitende Masse auf der schiefen Ebene gemäß Abbildung 2.46(a), dann hat man für die unbekannten Größen  $x, y$  sowie  $f_x^{(z)}, f_y^{(z)}$  zwei Bewegungsgleichungen und eine Zwangsbedingung. Die fehlende Gleichung ist durch die Tatsache gegeben, dass die Zwangskraft  $\mathbf{f}^{(z)}$  senkrecht zur schiefen Ebene steht. Generell erhält man die fehlenden Gleichungen aus dem *Prinzip der virtuellen Arbeit*, welches besagt, dass die *Summe der durch die Zwangskräfte verrichteten Arbeit gleich Null ist*. Man beachte aber, dass diese Aussage nicht gültig ist, wenn die Zwangsbedingungen zeitabhängig sind, also z. B. die schiefe Ebene sich mit der Zeit verändert. Aus diesem Grund führt man den Begriff der *virtuellen Verrückung* eines Systems ein. Dabei wird das System zu einem Zeitpunkt  $t$  festgehalten und in diesem festgehaltenen Zustand wird anschließend eine willkürliche infinitesimale Verschiebung  $\delta\mathbf{r}_i$ , die mit den Zwangsbedingungen (2.192) konsistent ist, durchgeführt. Beispielsweise für das sphärische Pendel von Abbildung 2.46(b) bedeutet dies, dass folgende Beziehung

$$(x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2 + (z + \delta z)^2 = l^2 \quad (2.198)$$

erfüllt sein muss. Unter Berücksichtigung von (2.191) und unter Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung, d. h.  $(\delta x)^2 = (\delta y)^2 = (\delta z)^2 = 0$ , folgt (2.198) zu

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0. \quad (2.199)$$

Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* besagt nun, dass die Summe der durch die Zwangskräfte  $\mathbf{f}_i^{(z)}$  verrichteten Arbeit  $\delta W^{(z)}$  bei einer virtuellen Verrückung gleich Null ist, d. h. für das System von  $N$  Punktmassen gilt

$$\delta W^{(z)} = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{f}_i^{(z)} \right)^T \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.200)$$

Betrachtet man wiederum das sphärische Pendel von Abbildung 2.46(b), so muss gemäß (2.200) offensichtlich die Bedingung

$$f_x^{(z)} \delta x + f_y^{(z)} \delta y + f_z^{(z)} \delta z = 0 \quad (2.201)$$

erfüllt sein. Löst man nun unter der Annahme  $z \neq 0$  (2.199) nach  $\delta z$  auf und setzt dies in (2.201) ein, so folgt

$$\left( f_x^{(z)} - \frac{x}{z} f_z^{(z)} \right) \delta x + \left( f_y^{(z)} - \frac{y}{z} f_z^{(z)} \right) \delta y = 0 \quad (2.202)$$

bzw. wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\delta x$  und  $\delta y$  müssen die Bedingungen

$$f_x^{(z)} = \frac{x}{z} f_z^{(z)} \quad \text{und} \quad f_y^{(z)} = \frac{y}{z} f_z^{(z)} \quad (2.203)$$

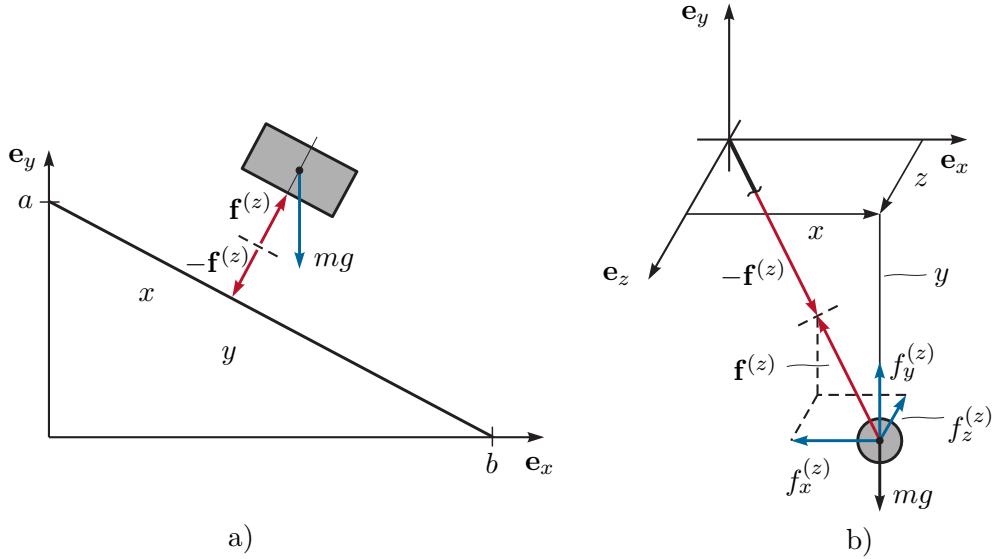


Abbildung 2.46: Zu den Zwangskräften.

gelten. Dies bedeutet aber, dass die Zwangskraft  $\mathbf{f}^{(z)} = [f_x^{(z)}, f_y^{(z)}, f_z^{(z)}]^T$  in Richtung des masselosen Stabes der Länge  $l$  zeigen muss, vergleiche dazu Abbildung 2.46(b). Auf analoge Art und Weise kann man zeigen, dass die Zwangskraft bei der reibungsfrei gleitenden Masse auf der schießen Ebene senkrecht auf die Ebene steht (Abbildung 2.46(a)).

Häufig ist man an den Zwangskräften nicht interessiert, weshalb man diese aus (2.197) berechnet und in (2.200) einsetzt. Man erhält dann das sogenannte *D'Alembertsche Prinzip* in der Form

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^{(e)} \right)^T \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (2.204)$$

Nimmt man nun an, dass das System  $n$  Freiheitsgrade besitzt und gemäß (2.196) durch die generalisierten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  beschrieben werden kann, dann gilt für die virtuelle Verrückung (man beachte, dass bei der virtuellen Verrückung die Zeit  $t$  konstant gehalten wird)

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.205)$$

und (2.204) folgt zu

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n f_{q,j} \delta q_j \quad \text{mit} \quad f_{q,j} = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{f}_i^{(e)} \right)^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (2.206)$$

Dabei bezeichnet  $f_{q,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  eine Komponente der *generalisierten Kraft*  $\mathbf{f}_q = [f_{q,1}, f_{q,2}, \dots, f_{q,n}]^T$ , die nicht notwendigerweise die Dimension einer Kraft aufweisen

muss, da auch die zugehörige generalisierte Koordinate  $q_j$  nicht unbedingt die Dimension einer Länge hat (deshalb auch der Name generalisiert). Das Produkt  $\dot{q}_j f_{q,j}$  muss aber auf jeden Fall eine Leistung ergeben.

Wendet man die Produktregel der Differentiation auf die linke Seite von (2.206) an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) . \quad (2.207)$$

Unter Verwendung der Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.208)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (2.209)$$

folgt (2.207) zu

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left[ m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T \quad (2.210)$$

mit der *kinetischen Energie*  $T$  gemäß (2.78)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i . \quad (2.211)$$

Setzt man (2.210) in (2.206) ein, dann ergibt sich

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T - f_{q,j} \right) \delta q_j = 0 \quad (2.212)$$

und da die virtuellen Verrückungen  $\delta q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  unabhängig voneinander sind, erhält man unmittelbar  $n$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung (*Euler-Lagrange Gleichungen*), die die Bewegung des Systems beschreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T = f_{q,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.213)$$

mit den *generalisierten Koordinaten*  $q_j$  und den *generalisierten Geschwindigkeiten*  $\dot{q}_j$ . Schreibt man die generalisierten Kräfte  $\mathbf{f}_q$  als Summe von generalisierten Kräften, die aus einer *skalaren Potentialfunktion*  $V(\mathbf{q})$  hergeleitet werden können (siehe (2.86) und (2.87)), und aus extern eingeprägten generalisierten Kräften sowie dissipativen generalisierten Kräften (siehe Abschnitt 2.2.5), zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{f}_{np}$ , d. h.

$$f_{q,j} = f_{np,j} - \frac{\partial}{\partial q_j} V , \quad (2.214)$$

dann können die Euler-Lagrange Gleichungen (2.213) in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = f_{np,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.215)$$

mit der *Lagrange-Funktion*  $L = T - V$  (Lagrange-Funktion = kinetische Energie minus potentielle Energie) formuliert werden.

Für  $f_{np,j} = 0, j = 1, \dots, n$  in (2.215) spricht man auch von einem *konservativen System*, ein System, bei dem sich die Gesamtenergie  $E = T + V$  zufolge der Bewegung nicht ändert bzw. keine Dissipation im System auftritt.

*Bemerkung 2.1.* Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.215) führen auch dann noch zu den richtigen Bewegungsgleichungen, wenn die generalisierten Kräfte nicht aus einem Potential der Form  $V(\mathbf{q})$  herrühren, sondern aus einem generalisierten Potential  $\bar{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , das folgende Bedingung

$$f_{q,j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \bar{V} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bar{V} \right) \quad (2.216)$$

erfüllt. Dies ist beispielsweise der Fall bei der Beschreibung elektromagnetischer Kräfte auf bewegte Ladungen.

*Bemerkung 2.2.* Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.213) lassen sich auch über ein Variationsprinzip, nämlich dem *Hamiltonschen Prinzip*, herleiten. Dieses besagt in seiner integralen Formulierung für konservative Systeme, dass die Bewegung eines Systems zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  so erfolgt, dass das Linienintegral  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  mit  $L = T - V$  für die durchlaufene Bahn ein Extremum ist. Es soll an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden, doch kann diese Formulierung formal sehr elegant auf den Fall verteilt-parametrischer Systeme (beschrieben durch partielle Differentialgleichungen) erweitert werden.

*Beispiel 2.19.* Als einfaches Beispiel betrachte man das sphärische Pendel von Abbildung 2.47 mit der Punktmasse  $m$  und der Länge  $l$  sowie einer äußeren Kraft  $\mathbf{f}_e$ , die immer in Richtung der negativen  $\mathbf{e}_x$ -Achse wirke. Die Punktmasse hat drei Freiheitsgrade und über den starren Stab der Länge  $l$  ergibt sich eine holonome Zwangsbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ . Damit hat das sphärische Pendel zwei Freiheitsgrade ( $n = 2$ ) und als generalisierte Koordinaten werden die beiden Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  gewählt.

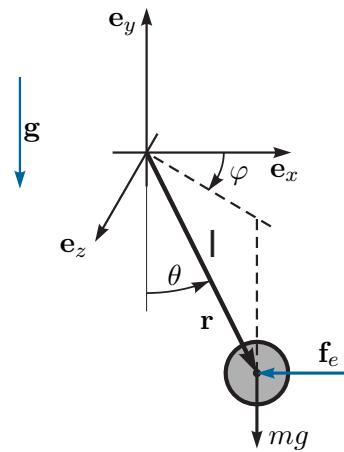


Abbildung 2.47: Sphärisches Pendel mit äußerer Kraft.

Die Berechnung der kinetischen Energie  $T$  kann sehr einfach dadurch erfolgen, dass man den Positionsvektor  $\mathbf{r}$  vom Ursprung 0 des Inertialkoordinatensystems ( $0xyz$ ) zur Punktmasse in der Form

$$\mathbf{r} = [l \sin(\theta) \cos(\varphi), -l \cos(\theta), l \sin(\theta) \sin(\varphi)]^T \quad (2.217)$$

aufstellt. Die kinetische Energie errechnet sich dann nach (2.211) zu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) . \quad (2.218)$$

Nimmt man an, dass für  $\theta = 0$  die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung  $g$  die potentielle Energie zu

$$V = mgl (1 - \cos(\theta)) . \quad (2.219)$$

Die äußere Kraft lautet  $\mathbf{f}_e = [-f_{e,x}, 0, 0]^T$  und demnach folgt für die generalisierten Kräfte nach (2.206)

$$f_\theta = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -f_{e,x} l \cos(\theta) \cos(\varphi) , \quad f_\varphi = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = f_{e,x} l \sin(\theta) \sin(\varphi) . \quad (2.220)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.215) lassen sich nun mit Hilfe der Lagrangefunktion  $L = T - V$  in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L - \frac{\partial}{\partial \theta} L = f_\theta \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L - \frac{\partial}{\partial \varphi} L = f_\varphi \quad (2.221)$$

bzw.

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) &= -f_{e,x} l \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ ml^2 (\ddot{\varphi} \sin^2(\theta) + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta)) &= f_{e,x} l \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2.222)$$

berechnen. Dabei ergeben sich immer gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die im Allgemeinen die zweiten Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten implizit beinhalten. Für eine *Zustandsdarstellung* der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  mit dem Zustand  $\mathbf{x}$  und dem Eingang  $\mathbf{u}$  wählt man typischerweise die generalisierten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  und die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  als Zustandsgrößen. Für das Beispiel des sphärischen Pendels sind die Zustandsgrößen durch  $\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$  und die Eingangsgröße durch  $u = f_{e,x}$  gegeben. Das zu (2.222) äquivalente System expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung lautet dann

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2} (-ul \cos(x_1) \cos(x_3) + ml^2 x_4^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - mgl \sin(x_1)) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{ml^2 \sin^2(x_1)} (ul \sin(x_1) \sin(x_3) - 2ml^2 x_4 x_2 \cos(x_1) \sin(x_1)) .\end{aligned}\quad (2.223)$$

*Beispiel 2.20.* Abbildung 2.48 zeigt eine Kugel mit der Masse  $m_K$  und dem Radius  $r_K$ , die auf einem drehbar gelagerten Balken rollt. Das Massenträgheitsmoment des Balkens bezüglich der Drehachse ( $\mathbf{e}_z$ -Achse) sei  $\theta_{B,zz}$  und die Eingangsgröße ist durch das externe Drehmoment  $\tau_e^{(0)}$  um die Drehachse gegeben. Das System besitzt zwei mechanische Freiheitsgrade und als generalisierte Koordinaten wird der Balkenwinkel  $\varphi_1$  sowie der Abstand  $r$  des Kugelmittelpunktes von der  $\bar{\mathbf{e}}_y$ -Achse des balkenfesten Koordinatensystems  $(0\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  gewählt.

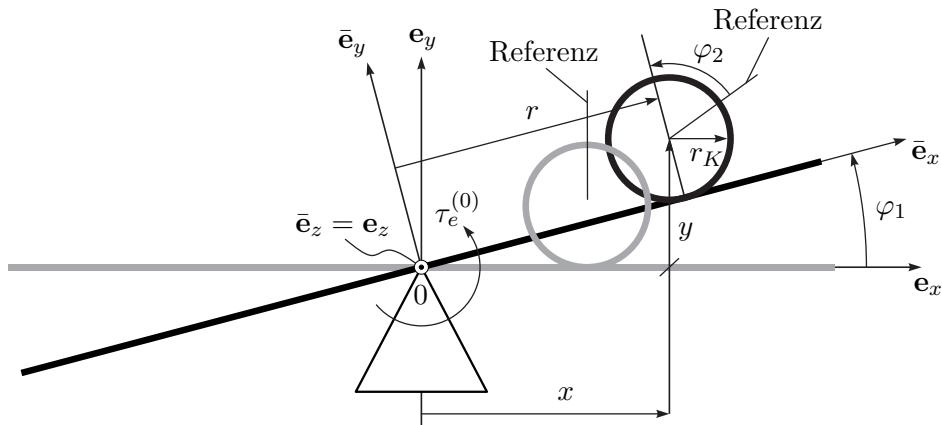


Abbildung 2.48: Kugel auf Balken.

Die kinetische Energie setzt sich aus dem translatorischen Anteil  $T_{t,K}$  und dem rotatorischen Anteil  $T_{r,K}$  der Kugel sowie dem rotatorischen Anteil  $T_{r,B}$  des Balkens zusammen. Zur Berechnung von  $T_{t,K}$  wird zuerst der Vektor vom Ursprung 0 des Inertialkoordinatensystems  $(0xyz)$  zum Kugelmittelpunkt (Schwerpunkt) in der

Form

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi_1) - r_K \sin(\varphi_1) \\ r \sin(\varphi_1) + r_K \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

aufgestellt. Der translatorische Anteil der kinetischen Energie der Kugel  $T_{t,K}$  errechnet sich dann gemäß (2.211) zu

$$T_{t,K} = \frac{1}{2} m_K \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m_K \left( r^2 \dot{\varphi}_1^2 + (\dot{r} - r_K \dot{\varphi}_1)^2 \right). \quad (2.225)$$

Für den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie der Kugel  $T_{r,K}$  beachte man vorerst, dass das Massenträgheitsmoment der Kugel  $\theta_{K,zz}$  bezüglich der Drehachse (parallel zur  $\mathbf{e}_z$ -Achse durch den Kugelmittelpunkt) gemäß (2.170) wie folgt lautet

$$\theta_{K,zz} = \frac{2}{5} m_K r_K^2. \quad (2.226)$$

Um nun (2.168) anwenden zu können, muss man die Drehwinkelgeschwindigkeit der Kugel bezüglich der Drehachse ( $\mathbf{e}_z$ -Achse) berechnen. Zufolge der Rollbewegung der Kugel gilt die Beziehung

$$\dot{r} = -r_K \dot{\varphi}_2, \quad (2.227)$$

d. h., bezüglich des balkenfesten Koordinatensystems  $(0\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  dreht sich die Kugel mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_2$  um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse. Da sich aber auch der Balken mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_1$  um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse dreht, ergibt sich die effektive Drehwinkelgeschwindigkeit der Kugel aus der Summe beider Drehungen zu  $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$  und der rotatorische Anteil der kinetischen Energie lautet

$$T_{r,K} = \frac{1}{2} \theta_{K,zz} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 = \frac{1}{2} \theta_{K,zz} \left( \dot{\varphi}_1 - \frac{\dot{r}}{r_K} \right)^2. \quad (2.228)$$

Der rotatorische Anteil der kinetischen Energie des Balkens errechnet sich zu

$$T_{r,B} = \frac{1}{2} \theta_{B,zz} \dot{\varphi}_1^2. \quad (2.229)$$

Nimmt man an, dass für  $\varphi_1 = 0$  die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung  $g$  die potentielle Energie zu

$$V = m_K g (r \sin(\varphi_1) + r_K \cos(\varphi_1)) - m_K g r_K. \quad (2.230)$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = T_{t,K} + T_{r,K} + T_{r,B} - V \quad (2.231)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu (siehe (2.215))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial r} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) &= \tau_e^{(0)} \end{aligned} \quad (2.232)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \left( m_K + \frac{\theta_{K,zz}}{r_K^2} \right) \ddot{r} - \left( \frac{\theta_{K,zz}}{r_K} + m_K r_K \right) \ddot{\varphi}_1 - m_K r \dot{\varphi}_1^2 + m_K g \sin(\varphi_1) &= 0 \\ - \left( m_K r_K + \frac{\theta_{K,zz}}{r_K} \right) \ddot{r} + (\theta_{K,zz} + \theta_{B,zz} + m_K (r^2 + r_K^2)) \ddot{\varphi}_1 & \\ + 2m_K r \dot{r} \dot{\varphi}_1 + m_K g (r \cos(\varphi_1) - r_K \sin(\varphi_1)) &= \tau_e^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.233)$$

**Aufgabe 2.19.** Bringen Sie das System (2.233) in Zustandsdarstellung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  mit dem Zustand  $\mathbf{x} = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}]^T$  und dem Eingang  $u = \tau_e^{(0)}$ . Berechnen Sie weiters die stationären Ruhelagen des Systems.

**Lösung von Aufgabe 2.19.** Die Ruhelagen des Systems lauten  $\varphi_{1,R} = 0, \dot{\varphi}_{1,R} = 0, r_R$  ist beliebig,  $\dot{r}_R = 0$  und  $\tau_{e,R}^{(0)} = g m_K r_R$ .

**Aufgabe 2.20.** Gegeben ist das mechanische System von Abbildung 2.49. Der Wagen hat die Masse  $m_W$ , wird über eine Antriebskraft  $f_e$  angetrieben und ist mit einer linearen Feder mit der Federkonstanten  $c_W > 0$  sowie der entspannten Länge  $s_{W0}$  gegenüber dem Inertialsystem befestigt.

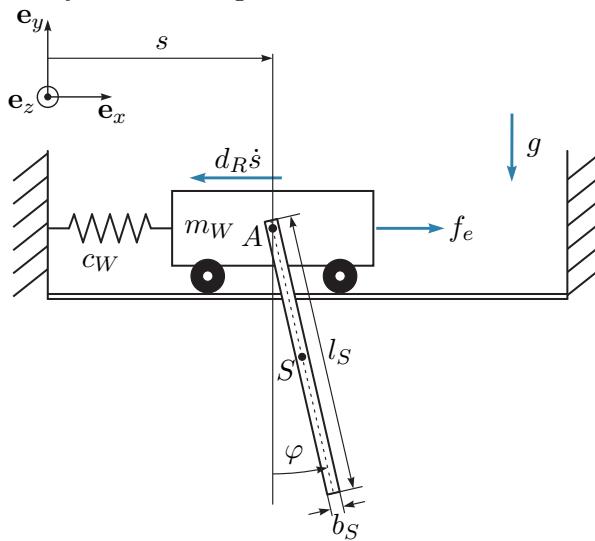


Abbildung 2.49: Wagen mit Pendel.

Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibung näherungsweise durch eine geschwindigkeitsproportionale Kraft  $f_R = -d_R \dot{s}$ ,  $d_R > 0$  ausgedrückt werden kann. Der reibungsfrei gelagerte Pendelstab sei homogen mit der Dichte  $\rho_S$  und quaderförmig mit der Länge  $l_S$ , der Breite  $b_S$  und der Höhe  $h_S$ . Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen (2.215).

*Lösung von Aufgabe 2.20.* Die Masse des Pendels errechnet sich zu  $m_S = \rho_S l_S b_S h_S$  und das Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt  $S$  (vergleiche Beispiel 2.17) lautet  $\theta_{S,zz}^{(S)} = \frac{1}{12} m_S (l_S^2 + b_S^2)$ . Die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu

$$(m_W + m_S) \ddot{s} + \frac{1}{2} m_S l_S \cos(\varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_S l_S \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + c_W (s - s_{W0}) = f_e - d_R \dot{s} \\ \frac{1}{2} m_S l_S \cos(\varphi) \ddot{s} + \left( \theta_{S,zz}^{(S)} + \frac{1}{4} m_S l_S^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_S g l_S \sin(\varphi) = 0 . \quad (2.234)$$

## 2.4 Literatur

- [2.1] J. Simmonds, *A Brief on Tensor Analysis*, S. Axler, F. Gehring und K. Ribet, Hrsg. New York: Springer, 1994.
- [2.2] O. Bruhns und T. Lehmann, *Elemente der Mechanik I: Einführung, Statik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1993.
- [2.3] ——, *Elemente der Mechanik II: Elastostatik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [2.4] ——, *Elemente der Mechanik III: Kinetik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [2.5] M. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. Singapore: World Scientific, 1996.
- [2.6] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall, *Technische Mechanik 1: Statik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [2.7] ——, *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.8] ——, *Technische Mechanik 3: Kinetik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.9] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und E. A. Werner, *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.10] D. Gross, W. Ehlers und P. Wriggers, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1: Statik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.11] ——, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 2: Elastostatik, Hydrostatik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.12] ——, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3: Kinetik, Hydromechanik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.13] H. Goldstein, *Klassische Mechanik*. Wiesbaden: AULA-Verlag, 1991.
- [2.14] H. Hahn, *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: Part 1: Theoretical Basis*. Berlin: Springer, 2002.
- [2.15] ——, *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: Part 2: Applications*. Berlin: Springer, 2002.
- [2.16] B. Heimann, W. Gerth und K. Popp, *Mechatronik: Komponenten - Methoden - Beispiele*. Leipzig: Fachbuchverlag, 2003.
- [2.17] R. Isermann, *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.18] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [2.19] A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

- [2.20] W. Schiehlen und P. Eberhard, *Technische Dynamik: Modelle für Regelung und Simulation*. Wiesbaden: Teubner, 2004.
- [2.21] M. Spong und M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [2.22] P. Wellstead, *Physical System Modelling*. London: Academic Press, 1979.
- [2.23] F. Ziegler, *Mechanics of Solids and Fluids*. New York: Springer, 1995.

# 3 Pneumatische und hydraulische Systeme

Die bisherigen Kapitel beschäftigten sich mit der Beschreibung der Kinematik und Dynamik von Starrkörpern. Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass seine Gestalt konstant ist, unabhängig von den auf ihn einwirkenden externen Kräften und Momenten. Insbesondere bedeutet dies, dass alle infinitesimal kleinen Partikel einen konstanten Abstand zueinander einnehmen.

Erfahrungsgemäß ist diese Annahme bei Flüssigkeiten und Gasen nicht gerechtfertigt. Betrachtet man z. B. einen Fluss, so sind Flüssigkeitspartikel, welche bei der Quelle direkt benachbart waren an der Mündung mit Sicherheit nicht mehr benachbart. Weiterhin können Flüssigkeiten und Gase durch Aufbringen von Kräften komprimiert werden, was wiederum eine relative Änderung der Lage der einzelnen Partikel impliziert. Dieses Kapitel beschäftigt sich nun mit der mathematischen Beschreibung des Verhaltens von Flüssigkeiten und Gasen, und gibt eine Erweiterung der in den letzten Kapiteln beschriebenen Erhaltungssätze (Impulserhaltung etc.) an.

## 3.1 Thermodynamische Grundlagen

Der Ausgangspunkt für die Beschreibung thermodynamischer Systeme ist die Charakterisierung des Zustands eines Systems anhand von Zustandsgrößen. Die Erfahrung zeigt, dass der thermodynamische Zustand eines thermodynamischen Systems durch zwei Zustandsgrößen beschrieben werden kann.

In der Thermodynamik unterscheidet man zwischen zwei Klassen von Größen, sogenannte *extensive* und *intensive* Größen. Extensive Größen sind zur Stoffmenge der Phase, zu der sie zugeordnet sind, proportional. Unter einer Phase versteht man dabei einen homogenen Bereich eines thermodynamischen Systems. Beispiel für extensive Größen sind die Masse  $m$ , das Volumen  $\mathcal{V}$ , die innere Energie  $E_i$ , die Enthalpie  $H$  und die Entropie  $S$ . Extensive Größen besitzen die wichtige Eigenschaft, dass man für sie Bilanzgleichungen aufstellen kann. D. h., extensive Größen bleiben in einem isolierten System erhalten, können von einem System auf ein anderes übertragen werden und verschiedene Formen einer extensiven Größe lassen sich ineinander umwandeln. Intensive Größen hingegen sind unabhängig von der Stoffmenge der Phase der sie zugeordnet sind. Zu den intensiven Größen gehören u. a. die Temperatur  $T$ , der Druck  $p$  sowie jeder Quotient zweier extensiver Größen, wie z. B. die Massendichte  $\rho$ .

Ein thermodynamisches System kann mit seiner Umgebung Stoff und Energie austauschen, siehe Abb. 3.1. Der Energieaustausch kann in Form von Wärme oder Arbeit erfolgen. Ein System, für welches jede Form des Austausches mit der Umgebung stattfindet bezeichnet man als *offen*. Oft werden einzelne Wechselwirkungen allerdings unterbunden. Ist kein Stoffaustausch möglich, so heißt das System *geschlossen*. Wird der Wärmeaustausch verhindert, so spricht man von einem *adiabatisch isolierten* System und

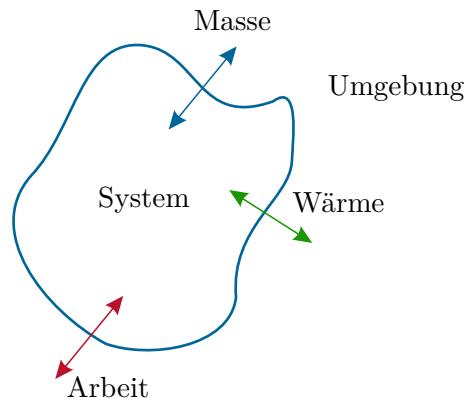


Abbildung 3.1: Wechselwirkungen eines Systems mit der Umgebung.

findet überhaupt keine Wechselwirkung mit der Umgebung statt, so bezeichnet man das System auch als *abgeschlossen*.

Tabelle 3.1: Charakterisierung der Wechselwirkungen eines Systems mit der Umgebung.

Systemgrenzen	Beschreibung
Offen	Masse und Energie kann mit der Umgebung ausgetauscht werden.
Geschlossen	Keine Masse kann mit der Umgebung ausgetauscht werden.
Adiabatisch isoliert	Keine Wärme kann mit der Umgebung ausgetauscht werden.
Abgeschlossen	Weder Masse noch Energie kann mit der Umgebung ausgetauscht werden.

## 3.2 Hauptsätze der Thermodynamik und Gibbssche Fundamentalgleichung

Im Folgenden werden in aller Kürze die Hauptsätze der Thermodynamik zusammengefasst, siehe z. B. [3.1], [3.2] für eine umfangreiche Beschreibung:

**Satz 3.1 (Nullter Hauptsatz).** Für jedes thermodynamische System existiert eine skalare Größe, die Temperatur  $T$  genannt wird. Ihre Gleichheit ist notwendige Voraussetzung für das thermische Gleichgewicht zweier Systeme oder zweier Teile des gleichen Systems.

**Satz 3.2 (Erster Hauptsatz).** Jedes thermodynamische System besitzt eine extensive Größe  $E_i$ , die innere Energie. Die Änderung der inneren Energie entspricht der Summe der Änderung der zugeführten Wärme  $Q^1$  und der Änderung der zugeführten Arbeit  $W^1$ , d. h. es gilt<sup>a</sup>

$$dE_i = Q^1 + W^1 . \quad (3.1)$$

Für abgeschlossene Systeme gilt  $Q^1 = 0$  und  $W^1 = 0$ . Der erste Hauptsatz lautet damit

$$dE_i = 0 . \quad (3.2)$$

<sup>a</sup>Die Bezeichnungen  $Q^1$  und  $W^1$  kennzeichnen, dass diese Größen keine vollständigen Differentiale beschreiben, sondern sogenannte 1-Formen sind. Für eine detaillierte Beschreibung der zugrundeliegenden differentialgeometrischen Konzepte sei beispielsweise auf [3.3] verwiesen.

**Satz 3.3 (Zweiter Hauptsatz).** Jedes thermodynamisches System besitzt eine extensive Größe  $S$ , die Entropie. Ihre Änderung bei einer reversiblen Zustandsänderung ergibt sich zu

$$dS = \frac{Q^1}{T} . \quad (3.3)$$

Bei allen irreversiblen Zustandsänderungen wird im Inneren des Systems Entropie produziert, d.h. es gilt

$$dS \geq \frac{Q^1}{T} . \quad (3.4)$$

Der erste und zweite Hauptsatz können speziell für Gase bzw. Flüssigkeiten unter der Annahme eines reversiblen Prozesses auch zu einer Gleichung zusammengefasst werden. Dazu ersetzt man  $Q^1$  in (3.1) mit Hilfe von (3.3) und nimmt an, dass  $W^1 = -pdV$  gilt. Dann erhält man die sogenannte *Gibbssche Fundamentalgleichung*

$$dS = \frac{1}{T} dE_i + \frac{p}{T} dV . \quad (3.5)$$

Da (3.5) ein vollständiges Differential darstellt, ist die Entropie eine Funktion der inneren Energie  $E_i$  und des Volumens  $V$ , d. h. es gilt

$$S = S(E_i, V) . \quad (3.6)$$

Bildet man das vollständige Differential von (3.6), so ergibt sich

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (3.7)$$

bzw. wegen der linearen Unabhängigkeit von  $dE_i$  und  $dV$  folgt durch Vergleich mit (3.5)

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E_i} \quad (3.8a)$$

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}. \quad (3.8b)$$

Damit können die Temperatur  $T$  und der Druck  $p$  in einer Phase bei Kenntnis der Entropie  $S$  als Funktion der inneren Energie  $E_i$  und des Volumens  $V$  bestimmt werden.

In der Realität ist die messtechnische Bestimmung der Entropie nicht möglich. Daher führt man die sogenannte *kalorische* Zustandsgleichung

$$E_i = E_i(T, V) \quad (3.9)$$

bzw. die *thermische* Zustandsgleichung

$$p = p(T, V) \quad (3.10)$$

ein, welche die innere Energie  $E_i$  und den Druck  $p$  als Funktion der Temperatur  $T$  und des Volumens  $V$  beschreiben. Löst man (3.9) formal nach  $T$  auf, d. h.  $T = T(E_i, V)$  und verwendet dieses Ergebnis in (3.10), so erhält man  $p = p(E_i, V)$ . Mit Hilfe von (3.7) und (3.8) kann damit die Entropie  $S$  durch Integration bestimmt werden.

Man kann also festhalten, dass sich kalorische und thermische Zustandsgleichungen bei Kenntnis der Entropie  $S(E_i, V)$  gewinnen lassen. In Analogie zur Mechanik, wo die Potentialkraft als Ableitung eines Potentials nach den Ortsvariablen formuliert werden kann, vgl. (2.87), wird die Entropie auch als *thermodynamisches Potential* bezeichnet.

### 3.3 Beziehungen zwischen thermischer und kalorischer Zustandsgleichung

Wenn  $dS$  ein vollständiges Differential ist, müssen die Koeffizienten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E_i \partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial E_i} = \frac{\partial}{\partial E_i} \left( \frac{p}{T} \right) \quad (3.11)$$

erfüllen. Diese Gleichungen geben den Zusammenhang zwischen der kalorischen und der thermischen Zustandsgleichung bei Verwendung der unabhängigen Größen  $E_i$  und  $V$  an.

Um eine analoge Beziehung für die unabhängigen Zustandsgrößen  $T$  und  $V$  herzuleiten, formuliert man die Gibbsche Fundamentalgleichung (3.5) in den spezifischen Größen

$$s = \frac{S}{m}, \quad e_i = \frac{E_i}{m}, \quad \nu = \frac{V}{m}, \quad (3.12)$$

mit der Masse  $m$  in der Form

$$m = \int_V \rho dV \quad (3.13)$$

und der Dichte  $\rho$ . Damit lautet die Gibbssche Fundamentalgleichung

$$ds = \frac{1}{T} de_i + \frac{p}{T} d\nu . \quad (3.14)$$

Fasst man die spezifische innere Energie  $e_i$  als Funktion der Temperatur  $T$  und des spezifischen Volumens  $\nu$  auf, so kann man das vollständige Differential der spezifischen inneren Energie  $e_i$  in der Form

$$de_i = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_{\nu} dT + \left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T d\nu \quad (3.15)$$

angeben. Mit (3.14) erhält man damit

$$T ds = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_{\nu} dT + \left( \left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T + p \right) d\nu \quad (3.16)$$

und analog zu (3.7) folgt

$$T ds = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\nu} dT + T \left. \frac{\partial s}{\partial \nu} \right|_T d\nu . \quad (3.17)$$

Ein Vergleich von (3.16) mit (3.17) liefert schließlich

$$\left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\nu} = \frac{1}{T} \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_{\nu} \quad (3.18a)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \nu} \right|_T = \frac{1}{T} \left( \left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T + p \right) . \quad (3.18b)$$

Aus der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \nu \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \nu} \quad (3.19)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \nu \partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 e_i}{\partial \nu \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \nu} = -\frac{1}{T^2} \left( \left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T + p \right) + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 e_i}{\partial T \partial \nu} + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\nu} \right) \quad (3.20)$$

bzw.

$$\left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\nu} - p , \quad (3.21)$$

womit ein Zusammenhang zwischen der kalorischen und thermischen Zustandsgleichung gefunden ist. Überdies kann das vollständige Differential der innere Energie damit auch in der Form

$$de_i = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_{\nu} dT + \left( T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\nu} - p \right) d\nu \quad (3.22)$$

angegeben werden.

### 3.4 Prozessführung

Thermische Prozesse werden oft so geführt, dass eine oder mehrere Zustandsgrößen konstant gehalten werden. Bleibt z.B. der Druck  $p$  konstant, so spricht man von einem *isobaren Prozess* und es gilt

$$p = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad dp = 0 . \quad (3.23)$$

Bleibt das Volumen  $\mathcal{V}$  konstant, so spricht man von einem *isochoren Prozess* und es gilt

$$\mathcal{V} = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad d\mathcal{V} = 0 , \quad (3.24)$$

und bleibt die Temperatur  $T$  konstant, so spricht man von einem *isothermen Prozess* und es gilt

$$T = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad dT = 0 . \quad (3.25)$$

Unterbindet man jeden Wärmeaustausch zwischen dem System und der Umgebung, dann nennt man das System adiabatisch isoliert. Die noch möglichen Prozesse heißen *adiabatische Prozesse* und es gilt für den spezifischen Wärmestrom  $q^1 = Q^1/m$

$$q^1 = 0 . \quad (3.26)$$

Handelt es zusätzlich um einen *reversiblen Prozess*, dann bleibt aufgrund des zweiten Hauptsatzes die Entropie  $s$  konstant und es gilt

$$s = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad ds = 0 . \quad (3.27)$$

Man spricht dann von einem *isentropischen Prozess*. Zusätzlich unterscheidet man noch *polytropen Prozesse*, für welche die sogenannte spezifische Wärmekapazität  $c$  konstant bleibt

$$c = \text{konst.} \quad (3.28)$$

Die Gleichungen (3.23)-(3.28) und damit die Festlegung eines bestimmten Prozesses stellen Nebenbedingungen zu den Zustandsgleichungen dar. Ein System besitzt durch die Festlegung der Prozessführung damit nur noch einen Freiheitsgrad.

### 3.5 Spezifische Wärmekapazität

Um die Temperatur einer Substanz zu erhöhen, kann man ihr Wärme zuführen. Der Zusammenhang zwischen der Temperaturerhöhung und der zugeführten Wärmemenge wird mit Hilfe von

$$cdT = q^1 , \quad (3.29)$$

mit der spezifischen Wärmekapazität  $c$  und der spezifischen Wärme  $q^1 = Q^1/m$ , beschrieben. Die spezifische Wärmekapazität stellt kein vollständiges Differential dar, weswegen

sie wesentlich von der Prozessführung abhängt. Betrachtet man den ersten Hauptsatz und das vollständige Differential der inneren Energie (3.15), so folgt für die spezifische Wärmekapazität

$$c = \frac{\partial e_i}{\partial T} \Big|_{\nu} + \left( \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \Big|_T + p \right) \frac{d\nu}{dT}, \quad (3.30)$$

wobei  $d\nu/dT$  je nach Prozessführung verschiedene Werte annehmen wird. Für einen isochoren Prozess nach (3.24) vereinfacht sich (3.30) zu

$$c_{\nu} = \frac{\partial e_i}{\partial T} \Big|_{\nu} \quad (3.31)$$

und für isobare Prozesse nach (3.23) findet man

$$c_p = \frac{\partial e_i}{\partial T} \Big|_{\nu} + \left( \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \Big|_T + p \right) \frac{\partial \nu}{\partial T} \Big|_p. \quad (3.32)$$

Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$  benötigt man neben der kalorischen Zustandsgleichung auch die thermische Zustandsgleichung anhand derer  $d\nu/dT|_p$  bestimmt werden kann. Es erweist sich als günstiger, anstelle der spezifischen inneren Energie  $e_i$  eine neue Zustandsgröße einzuführen, die von der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  abhängt. Mit der Legendre Transformation

$$h = e_i + p\nu \quad (3.33)$$

wird damit die *spezifische Enthalpie*  $h$  definiert. Bildet man das vollständige Differential der Enthalpie  $h$ , so erhält man mithilfe des ersten Hauptsatzes

$$dh = de_i + d(p\nu) = q^1 - pd\nu + pd\nu + \nu dp = q^1 + \nu dp. \quad (3.34)$$

Die spezifische Wärmekapazität  $c$  ergibt sich nunmehr aus dem vollständigen Differential der spezifischen Enthalpie

$$dh = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_p dT + \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_T dp \quad (3.35)$$

zu

$$c = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_p + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_T - \nu \right) \frac{dp}{dT}. \quad (3.36)$$

Für einen isobaren Prozess nach (3.23) vereinfacht sich (3.36) zu

$$c_p = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_p \quad (3.37)$$

und für einen isochoren Prozess nach (3.24) findet man

$$c_\nu = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_p + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_T - \nu \right) \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_\nu . \quad (3.38)$$

Anhand der spezifischen Enthalpie  $h$  kann damit unmittelbar die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  bestimmt werden.

## 3.6 Materialgesetze von Gasen und Flüssigkeiten

Die thermischen Zustandsgleichungen, die den Zusammenhang zwischen dem Druck  $p$ , der Temperatur  $T$  und dem spezifischen Volumen  $\nu = 1/\rho$  (Dichte  $\rho$ ) beschreiben, können auch als Materialgesetz der Form

$$\rho = \rho(p, T) \quad (3.39)$$

interpretiert werden. Anhand dieses Materialgesetzes können leicht experimentell bestimmbar Kenngrößen berechnet werden. Dazu definiert man den *isobaren Wärmeausdehnungskoeffizienten*  $\alpha$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p , \quad (3.40)$$

den *isothermen Kompressionsmodul*  $\beta$

$$\beta = \rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \right)^{-1} \quad (3.41)$$

und den *isochoren Druckkoeffizienten*  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_\nu . \quad (3.42)$$

Diese Größen müssen dabei die Zwangsbedingungen

$$p\gamma = \alpha\beta \quad (3.43a)$$

$$c_p - c_\nu = T p \nu \alpha \gamma \quad (3.43b)$$

erfüllen.

**Aufgabe 3.1.** Zeigen Sie die Gültigkeit von (3.43a) und (3.43b).

**Hinweis:** Um die Gültigkeit von (3.43b) zu zeigen, ersetzen Sie in (3.32) den Ausdruck

$$\frac{\partial e_i}{\partial T} \Big|_\nu \quad (3.44)$$

durch  $c_\nu$  und verwenden Sie (3.21).

Mit dem Druckkoeffizienten (3.42) und der spezifischen Wärmekapazität (3.31) kann das vollständige Differential der spezifischen inneren Energie (3.22) auch in der Form

$$de_i = c_\nu dT + p(T\gamma - 1) d\nu \quad (3.45)$$

angegeben werden. Setzt man  $de_i = dh - pd\nu - \nu dp$  nach (3.33) in (3.14) ein, so erhält man

$$Tds = dh - \nu dp . \quad (3.46)$$

Mit

$$dh = \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T dp + \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p dT \quad (3.47)$$

folgt (3.46) zu

$$ds = \frac{1}{T} \left( \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T - \nu \right) dp + \frac{1}{T} \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p dT \quad (3.48)$$

und daher müssen wegen der linearen Unabhängigkeit von  $dp$  und  $dT$  die Beziehungen

$$\left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T = \frac{1}{T} \left( \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T - \nu \right) \quad (3.49a)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p = \frac{1}{T} \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \quad (3.49b)$$

gelten. Wegen der Integrabilitätsbedingungen folgt aus (3.49)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial p} = -\frac{1}{T^2} \left( \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T - \nu \right) + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial T \partial p} - \left. \frac{\partial \nu}{\partial T} \right|_p \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial T} \quad (3.50)$$

und damit

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T = \nu - T \left. \frac{\partial \nu}{\partial T} \right|_p = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p . \quad (3.51)$$

Mit (3.37) und (3.51) sowie (3.40) gilt für die spezifische Enthalpie

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - T\alpha) dp . \quad (3.52)$$

### 3.6.1 Materialgesetz idealer Gase

Die thermische Zustandsgleichung realer Gase lautet

$$\rho = \frac{p}{R_s T} \quad (3.53)$$

mit der spezifischen Gaskonstanten  $R_s$ . Der Wärmeausdehnungskoeffizient und der Druckkoeffizient ergeben sich für ein ideales Gas zu

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{T}, \quad (3.54)$$

kombiniere (3.40) und (3.42) mit (3.53). Die spezifische Gaskonstante ist von der Art des Gases abhängig. Für Luft im technischen Normzustand ( $T_0 = 293.15\text{ K}$ ,  $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$  und  $\rho_0 = 1.292\text{ kg/m}^3$ ) ergibt sich die spezifische Gaskonstante zu  $R_s = c_p - c_v = 287\text{ J/(kg K)}$ , kombiniere (3.43b) mit (3.54). Die spezifische innere Energie (3.45) eines idealen Gases vereinfacht sich damit zu

$$de_i = c_v dT \quad (3.55)$$

und für die spezifischen Enthalpie (3.52) eines idealen Gases findet man

$$dh = c_p dT. \quad (3.56)$$

Die innere Energie und die Enthalpie eines idealen Gases hängt damit lediglich von der Temperatur ab. Diese Aussage konnte durch den *Gay-Lussac-Versuch* experimentell bestätigt werden. Die spezifischen Wärmekapazitäten sind für ideale Gase ebenso nur von der Temperatur abhängig. Für kleine Temperaturbereiche genügt es meist von konstanten spezifischen Wärmekapazitäten auszugehen. In Tabelle 3.2 sind die Kenndaten von Luft bei Normbedingungen zusammengefasst.

Tabelle 3.2: Parameter von Luft bei Normzustand.

Parameter	Variable	Wert	
spez. Wärmekapazität	$c_v$	0.718	kJ/(kg K)
spez. Wärmekapazität	$c_p$	1.005	kJ/(kg K)
spezifische Gaskonstante	$R_s = c_p - c_v$	287	J/(kg K)
Adiabatenexponent	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	1.4	
Dichte	$\rho_0$	1.292	kg/m <sup>3</sup>
Druck	$p_0$	101 325	Pa
Temperatur	$T_0$	293.15	K

### 3.6.1.1 Prozessführungen idealer Gase

Wie bereits erwähnt, wird die Anzahl der Freiheitsgrade durch die Wahl einer speziellen Prozessführung verringert, vgl. Abschnitt 3.4. Betrachtet man das Materialmodell eines idealen Gases nach (3.53), dann folgt für eine isotherme Prozessführung  $p/\rho = \text{konst.}$ , für eine isobare Prozessführung  $\rho T = \text{konst.}$  sowie für eine isochore Prozessführung  $p/T = \text{konst.}$ .

Eine weitere wichtige Form der Prozessführung ist ein sogenannter polytroper Prozess, der dadurch gekennzeichnet ist, dass die spezifische Wärmekapazität  $c$  konstant ist. Man beachte, dass ein adiabatischer Prozess auch als besonderer polytroper Prozess angesehen werden kann, bei dem die spezifische Wärmekapazität  $c = 0$  ist, siehe (3.29). Für einen polytropen Prozess kann man eine sogenannte Polytropengleichung herleiten, welche wiederum die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert. Den Ausgangspunkt stellt die Definition (3.29) bzw. (3.30) unter der Polytropenbedingung  $c = \text{konst.}$  dar, d. h.

$$q^1 = cdT = \frac{\partial e_i}{\partial T} \Big|_{\nu} dT + \left( \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \Big|_T + p \right) d\nu \quad (3.57)$$

und unter Berücksichtigung von (3.31) und (3.32)

$$c_p - c_\nu = \left( \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \Big|_T + p \right) \frac{\partial \nu}{\partial T} \Big|_p \quad (3.58)$$

findet man die differentielle Polytropengleichung

$$dT + \frac{c_p - c_\nu}{c_\nu - c} \frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_p d\nu = 0 \quad (3.59)$$

bzw. mit der thermischen Zustandsgleichung  $T = T(\nu, p)$  ergibt sich auch

$$\frac{\partial T}{\partial p} \Big|_\nu dp + \frac{c_p - c}{c_\nu - c} \frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_p d\nu = 0 . \quad (3.60)$$

Für ein ideales Gas (3.53) kann (3.60) weiter vereinfacht werden und es folgt mit dem Polytropenexponenten

$$n = \frac{c_p - c}{c_\nu - c} \quad (3.61)$$

die *Polytropengleichung*

$$\frac{dp}{p} + n \frac{d\nu}{\nu} = 0 . \quad (3.62)$$

Für den Spezialfall eines adiabatischen Prozesses ( $c = 0$ ) erhält man

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{d\nu}{\nu} = 0 , \quad (3.63)$$

mit dem Adiabatenexponenten<sup>1</sup>

$$\kappa = \frac{c_p}{c_\nu} . \quad (3.64)$$

---

<sup>1</sup>Für einatomige Gase ist  $\kappa = 5/3$ , für zweiatomige Gase (wie z. B. Luft und Stickstoff) gilt  $\kappa = 7/5$  und für dreiatomige Gase ist  $\kappa = 9/7$ .

Durch Integration der Polytropengleichung (3.62) erhält man schließlich

$$p = p_0 \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^n \quad (3.65)$$

oder

$$p\nu^n = \text{konst.} \quad (3.66)$$

Ersetzt man entweder  $p$  oder  $\nu$  durch die Zustandsgleichung  $p\nu = R_s T$ , so folgen die äquivalenten Beziehungen

$$T\nu^{n-1} = \text{konst.} \quad (3.67a)$$

$$Tp^{\frac{1-n}{n}} = \text{konst.} \quad (3.67b)$$

In der Tabelle 3.3 sind die obigen Ergebnisse für die unterschiedlichen Formen der Prozessführung zusammengefasst.

Tabelle 3.3: Isotherme, isobare, isochore, adiabatische und polytrope Zustandsänderungen eines idealen Gases.

Zustandsänderung	Zwangsbedingung
Isotherm	$\frac{p}{\rho} = \text{konst.}$
Isobar	$\rho T = \text{konst.}$
Isochor	$\frac{p}{T} = \text{konst.}$
Adiabat	$p\nu^\kappa = \text{konst.}, T\nu^{\kappa-1} = \text{konst.}, Tp^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \text{konst.}$
Polytrop	$p\nu^n = \text{konst.}, T\nu^{n-1} = \text{konst.}, Tp^{\frac{1-n}{n}} = \text{konst.}$

Zusätzlich zeigt Abbildung 3.2 das  $p\nu$ -Diagramm der entsprechenden Prozessführungen.

**Aufgabe 3.2.** Wie ändert sich die Temperatur von Druckluft der Masse  $m = 1 \text{ kg}$  mit der Anfangstemperatur  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  bei adiabatischer ( $\kappa = 1.4$ ) und polytroper ( $n = 1.2$ ) Entspannung von  $p_1 = 10 \text{ bar}$  auf  $p_2 = 7 \text{ bar}$ ? Wie groß ist die Änderung der inneren Energie in beiden Fällen ( $c_v = 718 \text{ J/kg K}$ ) und wie viel Wärme wird im polytropen Fall an die Umgebung abgegeben?

**Lösung von Aufgabe 3.2.** Für die adiabatische Zustandsänderung erhält man

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 276.75 \text{ K} = -8.40^\circ\text{C} \quad (3.68)$$

$$E_{i_{12}}^a = mc_v(T_2 - T_1) = -20.39 \text{ kJ} \quad (3.69)$$

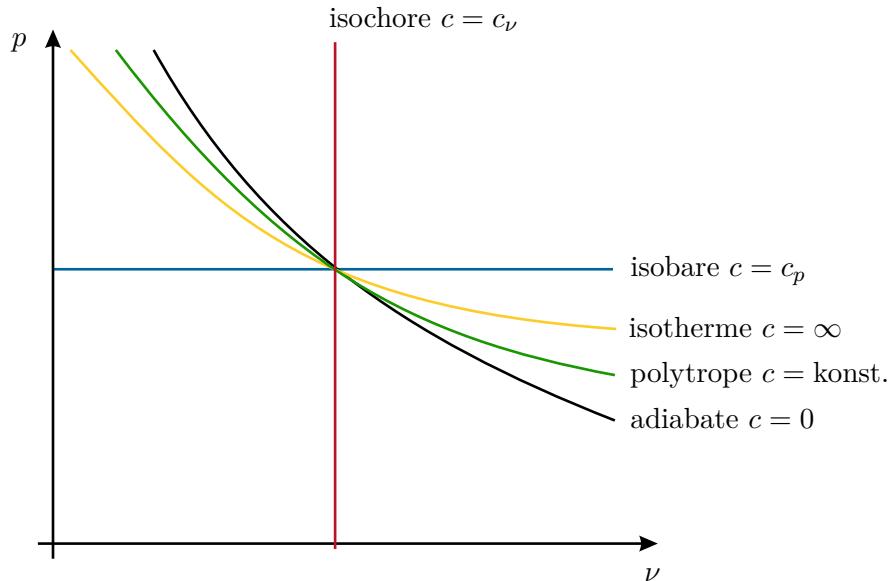


Abbildung 3.2: Isochore, isobare, isotherme, adiabate und polytrope Prozessführung eines idealen Gases.

und für die polytrope Zustandsänderung ergibt sich

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-n}{n}} = 276.23 \text{ K} = 3.08 \text{ °C} \quad (3.70)$$

$$E_{i_{12}}^p = mc_\nu(T_2 - T_1) = -12.15 \text{ kJ} . \quad (3.71)$$

Anhand der Gibbsschen Fundamentalgleichung (3.5) und (3.55) findet man

$$dq^1 = c_\nu dT + pd\nu . \quad (3.72)$$

Um die Wärmedifferenz  $q_{12}^1$  zu berechnen, integriert man (3.72) entlang eines geeigneten Integrationspfades. Dazu wählt man einen aus zwei Teilen bestehenden Integrationspfad, der den Bezugspunkt  $(T_1, \nu_1)$  zum Zeitpunkt  $t_1$  isochor mit dem Zwischenzustand  $(T_2, \nu_1)$  verbindet und von dem aus man isotherm zum Zustand  $(T_2, \nu_2)$  zum Zeitpunkt  $t_2$  gelangt. Die Integration ergibt folglich

$$q_{12}^1 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}^1 dt = c_\nu \int_{T_1}^{T_2} dT + \int_{\nu_1}^{\nu_2} pd\nu . \quad (3.73)$$

Mit  $p_1\nu_1^n = p_2\nu_2^n = \text{konst.}$  findet man für den zweiten Term (neg. Volumenarbeit)

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} p d\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} p \nu^n \frac{1}{\nu^n} d\nu = p_1 \nu_1^n \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu^n} d\nu = \frac{1}{1-n} \left( \underbrace{p_1 \left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^n}_{p_2} \nu_2 - p_1 \nu_1 \right) \quad (3.74)$$

und mit dem idealen Gasgesetz  $p\nu = R_s T$  mit  $R_s = c_\nu(\kappa - 1)$  folgt schließlich die abgegebene Wärme

$$Q_{12}^1 = mq_{12}^1 = mc_\nu \left( 1 + \frac{1-\kappa}{n-1} \right) (T_2 - T_1) = mc_\nu \frac{n-\kappa}{n-1} (T_2 - T_1) = 12.15 \text{ kJ} . \quad (3.75)$$

### 3.6.2 Materialgesetz für Flüssigkeiten

Für viele Flüssigkeiten kann in einem gewissen Druck- und Temperaturbereich angenommen werden, dass sowohl der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  (siehe (3.40)) als auch der Kompressionsmodul  $\beta$  (siehe (3.41)) konstant sind. Legt man die Dichte bei Normtemperatur  $T_0$  und Normdruck  $p_0$  mit  $\rho_0$  fest, d. h.  $\rho(p_0, T_0) = \rho_0$ , so kann das Verhalten von Flüssigkeiten anhand des Materialgesetzes

$$\rho(p) = \rho_0 e^{-\alpha(T-T_0)} e^{\frac{p-p_0}{\beta}} \quad (3.76)$$

beschrieben werden.

**Hinweis:** Man beachte, dass dieses Materialmodell nur in einem eingeschränkten Druck- und Temperaturbereich gültig ist. Steigt die Temperatur soweit an, dass die Flüssigkeit zu verdampfen beginnt oder sinkt der Druck unter den Dampfdruck, dann sind die Annahmen eines konstanten Kompressionsmoduls bzw. eines konstanten Wärmeausdehnungskoeffizienten natürlich nicht mehr erfüllt. Hier müssen erweiterte Materialmodelle verwendet werden wie sie z. B. in [3.4] zu finden sind.

Aufgrund der Wegunabhängigkeit der Integration kann die gesuchte innere Energie  $e_i$  durch Integration von (3.45) in der Form

$$e_i(\nu, T) - e_{i,0} = \int_{T_0}^T c_\nu dT + \int_{\nu_0}^\nu \left( T \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_\nu - p \right) d\nu \quad (3.77)$$

bestimmt werden. Zur Berechnung des zweiten Integrals verwendet man das Materialgesetz (3.76) in der Form

$$p(\nu, T) = p_0 + \beta \left( \ln \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right) + \alpha (T - T_0) \right) \quad (3.78)$$

und erhält schließlich

$$e_i(p, T) = c_\nu (T - T_0) + \frac{1}{\rho_0} \left( p_0 + \beta - T_0 \alpha \beta + (T \alpha \beta - p - \beta) e^{\alpha(T-T_0)} e^{-\frac{p-p_0}{\beta}} \right), \quad (3.79)$$

wobei  $e_i(p_0, T_0) = 0$  gewählt wurde und eine konstante Wärmekapazität  $c_\nu$  postuliert wurde.

Für gewisse Anwendungen sind weitere Vereinfachungen dieser Konstitutivgleichung (3.76) sinnvoll. So kann für viele hydraulische Anwendungen die Annahme einer konstanten Temperatur getroffen werden, d. h.  $T = T_0$ . In diesem Fall vereinfachen sich (3.76) und (3.79) zu

$$\rho(p) = \rho_0 e^{\frac{p-p_0}{\beta}} \quad (3.80a)$$

$$e_i(p) = \frac{1}{\rho_0} \left( p_0 + \beta - (p + \beta) e^{-\frac{p-p_0}{\beta}} \right). \quad (3.80b)$$

*Beispiel 3.1 (Konstitutivgesetz für Dieselöl).* Als Beispiel einer typischen hydraulischen Flüssigkeit soll das Verhalten von Dieselöl untersucht werden. In der Literatur können für Dieselöl die in Tabelle 3.4 zusammengefassten Parameter für die Konstitutivgleichungen nach (3.76) und (3.79) gefunden werden.

Tabelle 3.4: Parameter der Konstitutivgleichungen von Dieselöl.

Parameter	Variable	Wert
Kompressionsmodul	$\beta$	$1.52 \cdot 10^9$ Pa
spez. Wärmekapazität	$c_\nu$	$1.93$ kJ/(kg K)
Referenzdruck	$p_0$	$1 \cdot 10^5$ Pa
Referenztemperatur	$T_0$	273 K

In Abbildung 3.3 ist der Verlauf der Dichte  $\rho$  und der spezifischen inneren Energie  $e_i$  als Funktion der Temperatur  $T$  für einen konstanten Druck  $p = p_0$  dargestellt. Wie erwartet sinkt die Dichte mit steigender Temperatur während die innere Energie ansteigt. In Abbildung 3.4 ist die Dichte  $\rho$  und die innere Energie  $e_i$  für den Fall einer adiabaten Kompression dargestellt. Man beachte, dass die Temperatur  $T$  in diesem Fall nicht konstant ist, sondern sich aus dem ersten Hauptsatz (3.1) für  $q^1 = 0$  aus

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial T} dT + \frac{\partial e_i}{\partial p} dp = -pd\nu = -p \left( \frac{\partial \nu}{\partial T} dT + \frac{\partial \nu}{\partial p} dp \right) \quad (3.81)$$

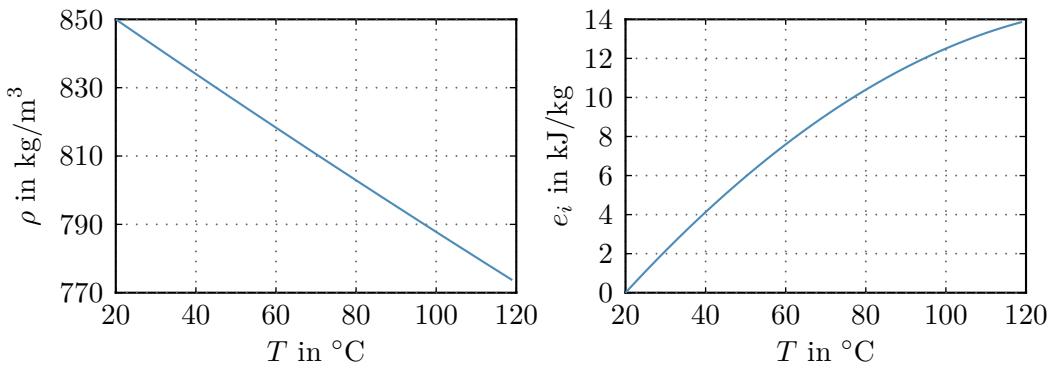


Abbildung 3.3: Dichte  $\rho$  und innere Energie als Funktion der Temperatur  $T$  für konstanten Druck  $p_0 = 1 \cdot 10^5$  Pa.

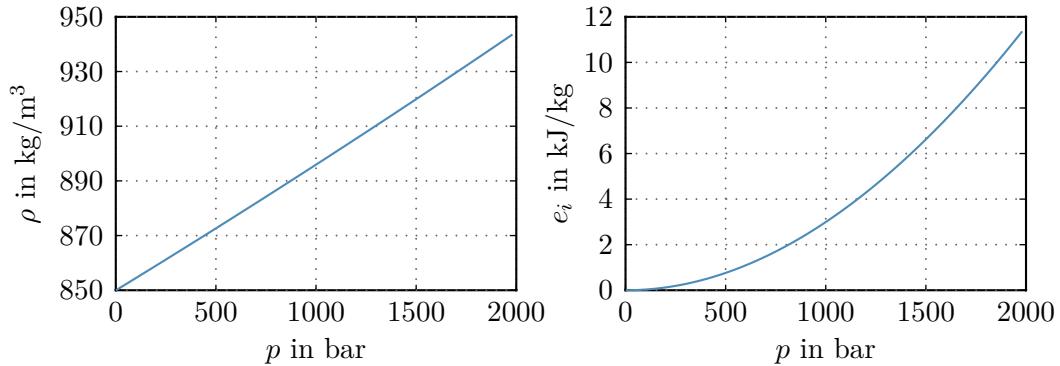


Abbildung 3.4: Dichte  $\rho$  und innere Energie als Funktion des Drucks für adiabate Kompression.

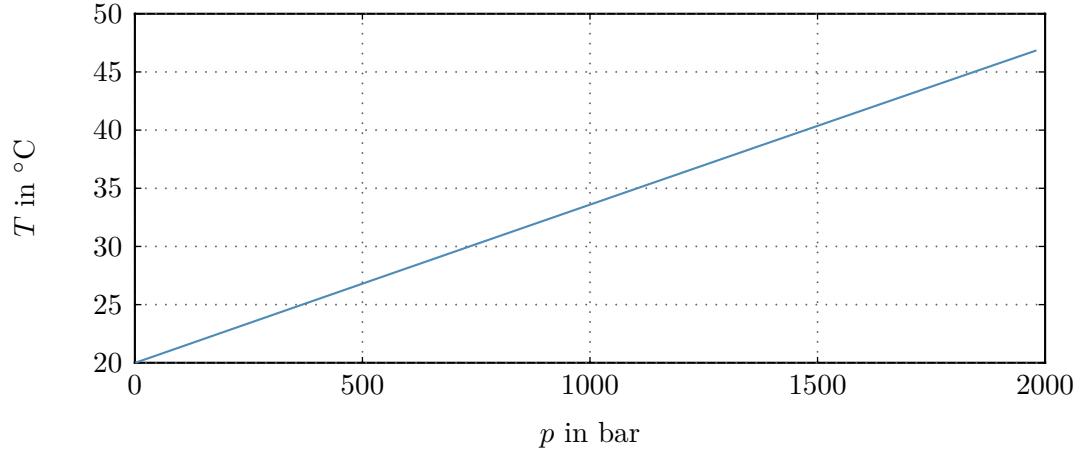


Abbildung 3.5: Temperatur  $T$  als Funktion des Drucks für adiabate Kompression.

und damit

$$\frac{dT}{dp} = -\frac{\frac{\partial e_i}{\partial p} + p \frac{\partial \nu}{\partial p}}{\frac{\partial e_i}{\partial T} + p \frac{\partial \nu}{\partial T}} \quad (3.82)$$

errechnet. Der Verlauf der Temperatur ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Wie erwartet steigt die Temperatur bei adiabater Kompression an.

### 3.7 Massenerhaltung

Eine der wesentlichen Annahmen der Kontinuumsmechanik ist, dass Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Diese Grundprinzip kann mathematisch mit Hilfe der Massenerhaltung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0 \quad (3.83)$$

formuliert werden. Dabei bezeichnet  $\mathcal{V}(t)$  ein örtlich und zeitlich veränderliches Kontrollvolumen,  $\partial\mathcal{V}(t)$  dessen Berandung,  $\mathbf{v}$  den Geschwindigkeitsvektor,  $\mathbf{n}$  den Oberflächennormalenvektor und  $d\mathcal{V}$  bzw.  $d\mathcal{A}$  sind die infinitesimalen Volumens- bzw. Flächenelemente, vgl. Abbildung 3.6.

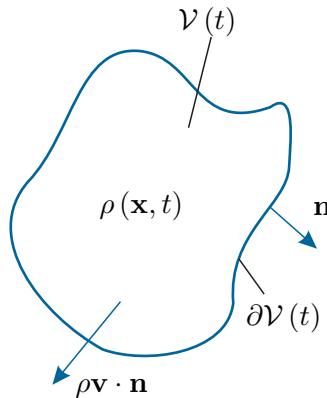


Abbildung 3.6: Darstellung eines Kontrollvolumens  $\mathcal{V}(t)$  zur Massenerhaltung.

Der erste Term in (3.83) beschreibt die Änderung der Masse  $m$  im Volumen  $\mathcal{V}(t)$  zufolge einer zeitlichen Änderung des Volumens und der Dichte, während der zweite Term die über die Berandung  $\partial\mathcal{V}(t)$  zu- und abfließenden Massen bilanziert.

*Beispiel 3.2 (Wasserbehälter).* In Abbildung 3.7 ist ein Wasserbehälter der Grundfläche  $A_b$  mit einem Zufluss und einem Abfluss dargestellt. Im Folgenden soll mit Hilfe der Massenerhaltung nach (3.67) eine Differentialgleichung für die Höhe  $h$  der Wassersäule im Behälter hergeleitet werden. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

1. Das Wasser wird als inkompressibel betrachtet, d. h.  $\rho(p, T) = \rho = \text{konst.}$
2. Die Dichte  $\rho$  ist ortsunabhängig.

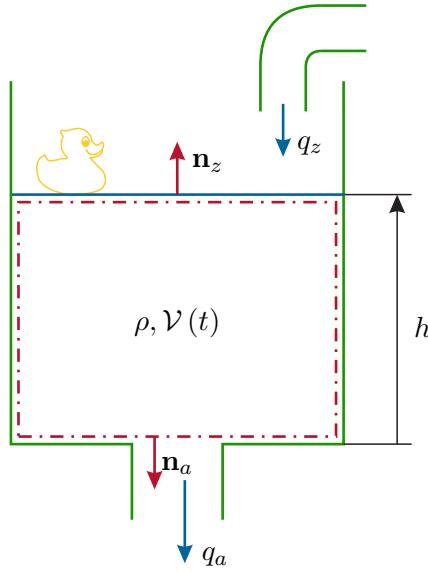


Abbildung 3.7: Skizze zum Wasserbehälter.

Dann folgt die Massenerhaltung (3.83) direkt zu

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} d\mathcal{V} + \rho \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0, \quad (3.84)$$

wobei das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}(t)$  durch

$$\mathcal{V}(t) = A_b h \quad (3.85)$$

definiert ist. In das Kontrollvolumen fließen über zwei Teile der Berandung  $\partial \mathcal{V}(t)$  Massenströme zu bzw. ab. Im oberen Teil der Berandung (Normalenvektor  $\mathbf{n}_z$ ) fließt der Volumenstrom  $q_z$  zu und im unteren Teil mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}_a$  fließt der Volumenstrom  $q_a$  ab, d. h.

$$\int_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{\partial \mathcal{V}_z(t)} \mathbf{v}_z \cdot \mathbf{n}_z d\mathcal{A} + \int_{\partial \mathcal{V}_a(t)} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_a d\mathcal{A} = -q_z + q_a . \quad (3.86)$$

Damit ergibt sich (3.84) zu

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = A_b \frac{dh}{dt} = q_z - q_a . \quad (3.87)$$

Das Ergebnis von Beispiel 3.2 kann wie folgt verallgemeinert werden: Die Änderung eines mit inkompressibler Flüssigkeit gefüllten Kontrollvolumens  $\mathcal{V}(t)$  entspricht der Summe der zu- und abgeführten Volumenströme

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \sum_{i=1}^N q_i . \quad (3.88)$$

*Beispiel 3.3 (Druckluftspeicher).* Abbildung 3.8 zeigt einen Druckluftspeicher mit konstantem Volumen  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}$ . Über einen Druckluftanschluss kann Luft zu- bzw. abgeführt werden. Solche Druckluftspeicher werden z. B. in Industrieanlagen oder in Lastkraftwagen zum Zwischenspeichern von komprimierter Luft verwendet.

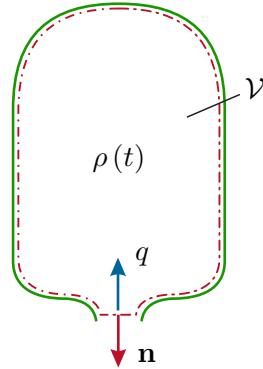


Abbildung 3.8: Skizze zum Druckluftspeicher.

Es kann wiederum angenommen werden, dass die Dichte  $\rho$  im gesamten Volumen  $\mathcal{V}(t)$  gleich ist. Damit folgt aus der Massenerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} + \rho(t) \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0 \quad (3.89)$$

unmittelbar

$$\mathcal{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \rho q = \dot{m}, \quad (3.90)$$

mit dem zu- bzw. abgeführten Volumenstrom  $q$  und dem zugehörigen Massenstrom  $\dot{m}$ .

Auch für dieses Ergebnis kann eine Verallgemeinerung wie folgt gefunden werden: Die Änderung der Dichte  $\rho$  eines konstanten mit einer komprimierbaren Flüssigkeit (bzw. Gas) gefüllten Volumens  $\mathcal{V}$  entspricht der Summe der auf das Volumen bezogenen Massenströme  $\dot{m}_i$ , d. h.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N \dot{m}_i. \quad (3.91)$$

*Aufgabe 3.3.* Nehmen Sie an, dass der Speicher aus Abbildung 3.8 mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, deren Konstitutivgleichung durch (3.80a) definiert ist. Berechnen Sie auf Basis von (3.91) eine Differentialgleichung zur Beschreibung des Drucks  $p$  im Speicher.

*Lösung von Aufgabe 3.3.* Die Differentialgleichung ergibt sich zu

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\beta}{\mathcal{V}} q . \quad (3.92)$$

*Aufgabe 3.4.* Nehmen Sie an, dass der Speicher aus Abbildung 3.8 mit einem idealen Gas gefüllt ist. Berechnen Sie auf Basis der Adiabatengleichung (3.63) und Tabelle 3.3 eine Differentialgleichung zur Beschreibung des Drucks  $p$  im Speicher.

*Lösung von Aufgabe 3.4.* Die Differentialgleichung ergibt sich zu

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\kappa R_s T}{\mathcal{V}} \dot{m} . \quad (3.93)$$

*Beispiel 3.4 (Doppelt-wirkender Zylinder).* Um hydraulische bzw. pneumatische Energie in eine Bewegung eines mechanischen Systems umzusetzen, werden häufig Zylinder eingesetzt. Abbildung 3.9 zeigt die Prinzipskizze eines doppelt-wirkenden Zylinders mit den beiden Kammern  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$ , welche durch einen beweglichen Kolben (Position  $s$ , Geschwindigkeit  $v = \dot{s}$ ) voneinander getrennt sind. Die Kamervolumina (Kontrollvolumina) errechnen sich zu

$$\mathcal{V}_1 = A_1 s \quad \text{und} \quad \mathcal{V}_2 = A_2 (l - d - s) . \quad (3.94)$$

Darin beschreiben  $A_1$  und  $A_2$  die effektiven Flächen der Kolben- bzw. Stangenseite. In die jeweiligen Kammern fließen die Massenströme  $\dot{m}_1$  bzw.  $\dot{m}_2$  zu und zwischen den beiden Kammern wird der Leckage-Massenstrom  $\dot{m}_{12}$  ausgetauscht.

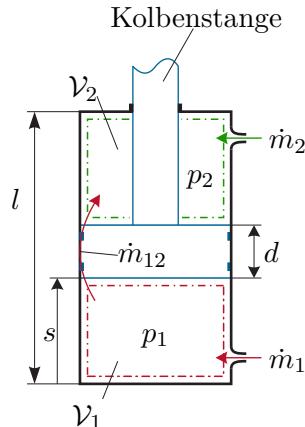


Abbildung 3.9: Skizze eines doppelt-wirkenden Zylinders.

Nimmt man nun an, dass die Dichte  $\rho$  in den jeweiligen Volumina  $\mathcal{V}_1$  bzw.  $\mathcal{V}_2$  unabhängig vom Ort ist, dann kann die Massenerhaltung für die Kammer 1 wie folgt

formuliert werden (siehe (3.83))

$$\frac{d}{dt} (\rho_1(t) \mathcal{V}_1(t)) = \underbrace{-\rho_1 \int_{\partial \mathcal{V}_{1,1}(t)} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 d\mathcal{A}}_{-\dot{m}_1} - \underbrace{\rho_1 \int_{\partial \mathcal{V}_{1,12}(t)} \mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12} d\mathcal{A}}_{\dot{m}_{12}} . \quad (3.95)$$

Wertet man diesen Ausdruck unter Verwendung des Volumens nach (3.94) aus, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{A_1 s} (-\rho_1 A_1 v + \dot{m}_1 - \dot{m}_{12}) . \quad (3.96)$$

Auf analoge Art erhält man die folgende Differentialgleichung zur Beschreibung der Dichte  $\rho_2$  in der Kammer 2

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{A_1 (l - d - s)} (\rho_2 A_2 v + \dot{m}_2 + \dot{m}_{12}) . \quad (3.97)$$

Zusammenfassend besagt die Massenerhaltung für ein zeitlich veränderliches, mit kompressibler Flüssigkeit (oder Gas) gefülltes Volumen  $\mathcal{V}(t)$ , dass die zeitliche Änderung der Masse in diesem Volumen äquivalent zu den über die Berandungen des Volumens zugeführten Massenströmen ist, d. h.

$$\frac{d}{dt} (\rho(t) \mathcal{V}(t)) = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i . \quad (3.98)$$

## 3.8 Impulserhaltung

In vollkommener Analogie zur Impulserhaltung von Starrkörpersystemen, siehe Kapitel 2.2.3 (vgl. Gleichung (2.60)), kann die Impulserhaltung in der Kontinuumsmechanik formuliert werden. Betrachtet man ein allgemeines, zeitlich veränderliches, nicht beschleunigtes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}(t)$ , so besagt die Impulserhaltung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} = \sum f, \quad (3.99)$$

dass die Änderung des Impulses der Summe der auf das Kontrollvolumen wirkenden Kräfte entspricht.

Diese Kräfte können formal in zwei Klassen eingeteilt werden:

1. Volumenkräfte, die auf jedes Partikel des Volumens  $\mathcal{V}$  wirken (z. B. Gravitation oder elektromagnetische Kräfte) und
2. Oberflächenkräfte, welche auf die Berandung  $\partial \mathcal{V}$  des Volumens wirken, wie z. B. Druck- und Scherkräfte.

Die wichtigste Volumenskraft ist die Erdbeschleunigung, welche in der Form

$$f_g = - \int_{\mathcal{V}(t)} \rho g \mathbf{e}_z dV \quad (3.100)$$

gegeben ist, wobei angenommen wurde, dass die Gravitation in negative  $\mathbf{e}_z$ -Richtung wirkt. Weiterhin wird mit  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet.

Bei nicht-viskosen (reibungsfreien) Flüssigkeiten und Gasen wirken auf die Berandung nur Druckkräfte, welche orthogonal auf die Berandung gerichtet sind. Mit dem Druck  $p$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  können die Oberflächenkräfte in der Form

$$f_p = - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} p \mathbf{n} dA \quad (3.101)$$

beschrieben werden.

**Beispiel 3.5 (Fallrohr eines Speicherkraftwerkes).** In diesem Beispiel wird ein Zusammenhang zwischen der Fallhöhe und der Geschwindigkeit bzw. dem Druck für ein in Abbildung 3.9 dargestelltes Fallrohr eines Speicherkraftwerkes mit Hilfe der Impulserhaltung berechnet. Das Fallrohr ist in einem konstanten Winkel  $\varphi$  relativ zur  $\mathbf{e}_x$ -Achse ausgerichtet und besitzt einen Einlass (Normalenvektor  $\mathbf{n}_1$ , Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$ , Berandung  $\partial\mathcal{V}_1$ , Druck  $p_1$ ) und einen Auslass (Normalenvektor  $\mathbf{n}_2$ , Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2$ , Berandung  $\partial\mathcal{V}_2$ , Druck  $p_2$ ). Wie in Abbildung 3.10 ersichtlich, besitzt das Fallrohr einen konstanten Querschnitt mit der Querschnittsfläche  $A$ . Für die weitere Berechnung werden folgende Vereinfachungen angenommen:

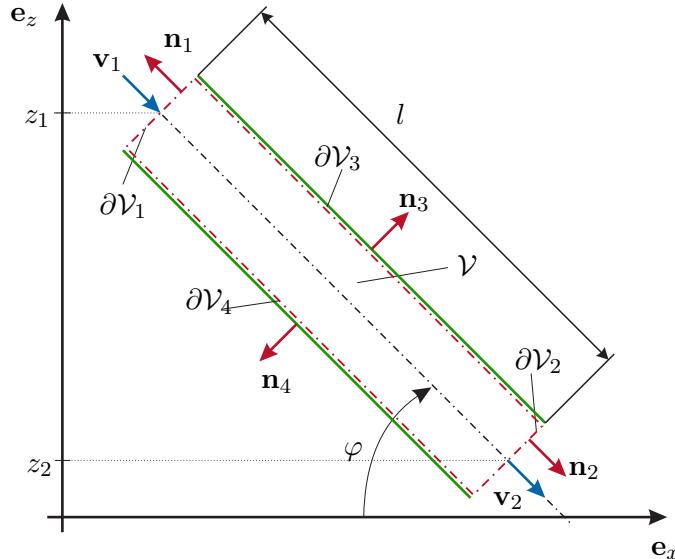


Abbildung 3.10: Prinzipskizze zum Fallrohr eines Speicherkraftwerkes.

1. Es wird eine stationäre Strömung angenommen, d. h. die Dichte  $\rho$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  sind nicht von der Zeit abhängig.
2. Das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  ist zeitlich konstant.

3. Die Flüssigkeit wird als inkompressibel  $\rho = \text{konst.}$  und nicht viskos angenommen.

Unter diesen Annahmen folgt die Impulserhaltung in der Form

$$\begin{aligned} \rho \int_{\partial V_1} \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA + \rho \int_{\partial V_2} \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA = \\ - \int_{\partial V_1} p \mathbf{n}_1 dA - \int_{\partial V_2} p \mathbf{n}_2 dA - \int_{\partial V_3} p \mathbf{n}_3 dA - \int_{\partial V_4} p \mathbf{n}_4 dA - \rho \int_V g \mathbf{e}_z dV. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Die darin verwendeten Geschwindigkeiten und Normalenvektoren berechnen sich zu

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = v_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

bzw.

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_4 = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (3.104)$$

wobei  $v_1 = \|\mathbf{v}_1\|_2$  und  $v_2 = \|\mathbf{v}_2\|_2$  die Beträge der jeweiligen Geschwindigkeit beschreiben. Setzt man (3.103) und (3.104) in (3.102) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \rho \int_{\partial V_1} \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA = \\ \rho \int_{\partial V_1} v_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix} v_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} dA = -\rho v_1^2 A \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.105)$$

und auf analoge Art und Weise

$$\rho \int_{\partial V_2} \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA = \rho v_2^2 A \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Nimmt man in weiterer Folge an, dass die Drücke  $p_1$  und  $p_2$  an den jeweiligen Teilflächen  $\partial\mathcal{V}_1$  bzw.  $\partial\mathcal{V}_2$  konstant sind, dann erhält man

$$-\int_{\partial\mathcal{V}_1} p \mathbf{n}_1 dA = p_1 A \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.107a)$$

$$-\int_{\partial\mathcal{V}_2} p \mathbf{n}_2 dA = -p_2 A \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.107b)$$

Die Annahme konstanter Drücke ist entlang der Berandungen  $\partial\mathcal{V}_3$  und  $\partial\mathcal{V}_4$  natürlich nicht mehr zielführend, weswegen folgende Schreibweise gewählt wird

$$-\int_{\partial\mathcal{V}_3} p \mathbf{n}_3 dA = \int_{\partial\mathcal{V}_3} p dA \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix} = f_3 \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.108a)$$

$$-\int_{\partial\mathcal{V}_4} p \mathbf{n}_4 dA = \int_{\partial\mathcal{V}_4} p dA \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} = f_4 \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (3.108b)$$

wobei  $f_3$  und  $f_4$  die Normalkräfte auf die jeweiligen Berandungen repräsentieren. Schließlich gilt für den Gravitationsterm

$$-\rho \int_{\mathcal{V}} g \mathbf{e}_z dV = -\rho g \mathcal{V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.109)$$

Wertet man (3.102) mit Hilfe dieser Zwischenergebnisse für die  $\mathbf{e}_x$ - bzw.  $\mathbf{e}_z$ -Richtung aus, so erhält man

$$\mathbf{e}_x : (\rho v_1^2 A - \rho v_2^2 A + p_1 A - p_2 A) \cos(\varphi) - (f_3 - f_4) \sin(\varphi) = 0 \quad (3.110a)$$

$$\mathbf{e}_z : (\rho v_1^2 A - \rho v_2^2 A + p_1 A - p_2 A) \sin(\varphi) + (f_3 - f_4) \cos(\varphi) = -\rho g \mathcal{V}. \quad (3.110b)$$

Multipliziert man nun (3.110a) mit  $\cos(\varphi)$ , (3.110b) mit  $\sin(\varphi)$  und addiert diese beiden resultierenden Gleichungen, so erhält man

$$\rho v_1^2 A - \rho v_2^2 A + p_1 A - p_2 A = -\rho g \mathcal{V} \sin(\varphi). \quad (3.111)$$

Weiterhin ergibt die Multiplikation von (3.110a) mit  $-\sin(\varphi)$ , (3.110b) mit  $\cos(\varphi)$  und Addition

$$f_3 - f_4 = -\rho g \mathcal{V} \cos(\varphi). \quad (3.112)$$

Aus der Massenerhaltung (3.88) für eine inkompressible Flüssigkeit und konstantes Volumen folgt sofort

$$v_1 = v_2, \quad (3.113)$$

womit sich (3.111) weiter zu

$$p_1 - p_2 = -\rho g \frac{\mathcal{V}}{A} \sin(\varphi) = -\rho g l \sin(\varphi), \quad (3.114)$$

mit der Länge  $l$  des Fallrohres, vereinfacht.

Die Ergebnisse (3.112) und (3.114) können wie folgt interpretiert werden:

- Die Gleichung (3.112) besagt, dass die effektive Kraft  $f_3 - f_4$  auf die Berandung des Druckrohres ( $\partial\mathcal{V}_3$  und  $\partial\mathcal{V}_4$ ) der projizierten Gravitationskraft  $-\rho g \mathcal{V} \cos(\varphi)$  entspricht. Damit wirkt natürlich für  $\varphi = \pi/2$  keine effektive Kraft auf die Berandung des Rohres, während für  $\varphi = 0$  die volle Gravitationskraft wirkt<sup>a</sup>.
- Gleichung (3.114) beschreibt wiederum die Tatsache, dass die Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  proportional zur Differenz der geodätischen Höhen  $l \sin(\varphi) = z_1 - z_2$  ist.

<sup>a</sup>Man beachte, dass nur die Differenz der beiden Kräfte  $f_3 - f_4$  für  $\varphi = \pi/2$  verschwindet. Natürlich sind auch in diesem Fall weder  $f_3$  noch  $f_4$  gleich 0.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Impulserhaltung nach (3.88) nicht nur für Gase und Flüssigkeiten angewandt werden kann, sondern auch zur Beschreibung von Starrkörpern geeignet ist.

**Beispiel 3.6 (Impulserhaltung für den Kolben eines Hydraulikzylinders).** In Abbildung 3.11 ist der Kolben eines Hydraulikzylinders dargestellt. Da dieser Kolben (Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$ ) als starr angenommen wird, ist die Dichte  $\rho$  konstant und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in jedem Teil des Volumens gleich. Weiterhin wird angenommen, dass der Umgebungsdruck  $p_0$  vernachlässigt werden kann  $p_0 = 0$  und dass der Einfluss der Gravitation unerheblich ist.

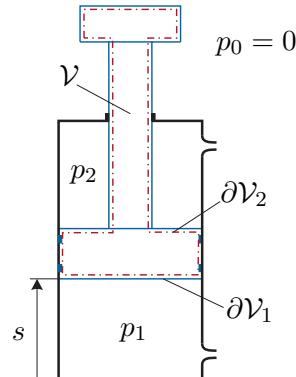


Abbildung 3.11: Prinzipskizze zum Hydraulikzylinder.

Die Impulserhaltung für das Kontrollvolumen  $\partial\mathcal{V}$  kann damit in der Form

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} + \rho \mathbf{v} \left( \mathbf{v} \cdot \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} d\mathcal{A} \right) = - \int_{\partial\mathcal{V}} p \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (3.115)$$

angegeben werden. Für ein beliebiges Kontrollvolumen gilt

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} d\mathcal{A} = \mathbf{0} . \quad (3.116)$$

Weiterhin wirkt an der Berandung  $\partial\mathcal{V}_1$  der Druck  $p_1$  und an der Berandung  $\partial\mathcal{V}_2$  der Druck  $p_2$ . Damit kann folgende, aus den vorangegangenen Kapiteln bekannte Form der Impulserhaltung

$$\rho \mathcal{V} \frac{d}{dt} v = m \frac{d}{dt} v = p_1 A_1 - p_2 A_2, \quad (3.117)$$

mit der Masse  $m$  des Kolbens, gefunden werden.

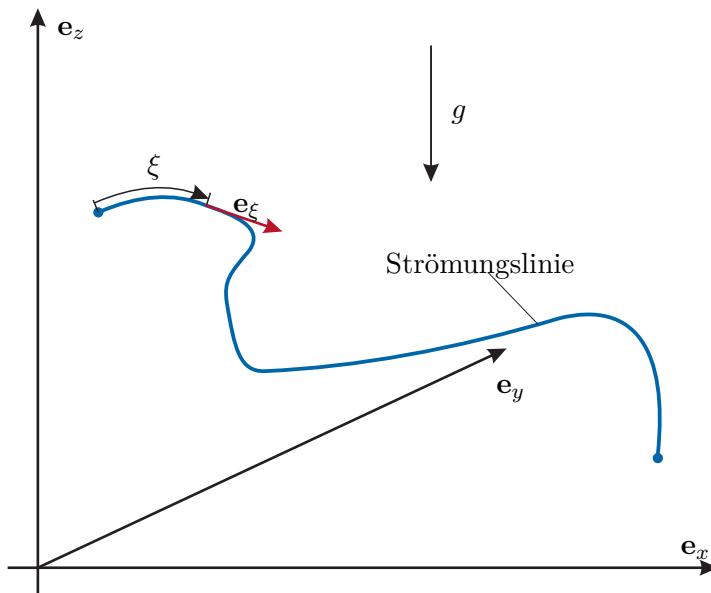


Abbildung 3.12: Strömungslinie der Bewegung eines Partikels.

Im Folgenden wird die Bewegung eines infinitesimalen Massenpunkts (eines Partikels) im Raum betrachtet. Der Pfad eines solchen Partikels wird häufig auch als Strömungslinie bezeichnet (siehe dazu Abbildung 3.12). Es wird nun angenommen, dass keine externen Kräfte außer der Gravitation in negativer  $\mathbf{e}_z$ -Richtung und Druckkräften wirken. Dann kann man aus der Impulserhaltung die *Euler-Gleichung* für nicht-viskose Flüssigkeiten in

der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (3.118)$$

herleiten, siehe z. B. [3.5]. Schreibt man die totale Zeitableitung in (3.118) um, so erhält man

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \mathbf{e}_z = \mathbf{0}, \quad (3.119)$$

wobei  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bezeichnen.

Definiert man den Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\xi$  in Geschwindigkeitsrichtung

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}, \quad (3.120)$$

so erhält man folgende Zusammenhänge

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v(\xi, t) \quad (3.121a)$$

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3.121b)$$

Die Identität (3.121b) kann einfach gezeigt werden, indem man die partielle Ableitung einer skalaren Größe  $a$  in der Form

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} = \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi}}_{\frac{v_x}{\|\mathbf{v}\|_2}} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}}_{\frac{v_y}{\|\mathbf{v}\|_2}} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}}_{\frac{v_z}{\|\mathbf{v}\|_2}} = \begin{bmatrix} \frac{v_x}{\|\mathbf{v}\|_2} \\ \frac{v_y}{\|\mathbf{v}\|_2} \\ \frac{v_z}{\|\mathbf{v}\|_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{e}_\xi \cdot \nabla a \quad (3.122)$$

berechnet.

Durch die Projektion auf die Strömungslinie (Bilden des inneren Produkts mit dem Vektor  $\mathbf{e}_\xi$ ) folgt der erste Term von (3.119) zu

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial t} (v \mathbf{e}_\xi) = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3.123)$$

*Aufgabe 3.5.* Zeigen Sie die Gültigkeit von (3.123). Beachten Sie dazu, dass  $\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = 1$  und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi) = 0 \quad (3.124)$$

gilt.

*Lösung von Aufgabe 3.5.* Die Kettenregel auf (3.123) angewandt ergibt zwei Terme

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.125a)$$

$$v \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial t} = 0, \quad (3.125b)$$

wobei die letzte Eigenschaft direkt aus

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi) = 2 \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial t} = 0 \quad (3.126)$$

folgt.

Der zweite Term von (3.119) kann nach der Projektion in der Form

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \right) = v \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (v^2) \quad (3.127)$$

angegeben werden und es gilt

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (3.128)$$

sowie

$$\mathbf{e}_\xi \cdot g \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\xi \cdot g \nabla z = g \frac{\partial z}{\partial \xi}. \quad (3.129)$$

*Aufgabe 3.6.* Zeigen Sie die Gültigkeit von (3.127) bis (3.129).

*Lösung von Aufgabe 3.6.*

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial \xi} &= v \mathbf{e}_\xi \cdot \nabla v = \mathbf{v} \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} v_x + \frac{\partial v}{\partial y} v_y + \frac{\partial v}{\partial z} v_z = \\ &\quad \mathbf{e}_\xi \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \right) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Damit gilt entlang einer Strömungslinie folgende Differentialgleichung (Bernoulli-Gleichung)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0. \quad (3.131)$$

Im Weiteren sind zwei Sonderfälle der Bernoulli-Gleichung von besonderem Interesse:

1. Wird die stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachtet, dann gilt

$$\rho = \text{konst.} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (3.132)$$

und die Bernoulli-Gleichung folgt aus (3.131)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (3.133)$$

zu

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}, \quad (3.134)$$

wobei die Größen  $v$ ,  $p$  und  $z$  natürlich entlang einer Strömungslinie ausgewertet werden müssen.

2. Für eine stationäre adiabate Strömung eines Gases, welches durch

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konst.}, \quad (3.135)$$

mit dem Adiabatenkoeffizienten  $\kappa$  des Gases, beschrieben wird, ergibt sich die Bernoulli-Gleichung zu

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}. \quad (3.136)$$

**Aufgabe 3.7.** Leiten Sie die stationäre Bernoulli-Gleichung (3.136) für die adiabate Strömung eines idealen Gases nach (3.135) aus der allgemeinen Formulierung (3.131) her.

*Lösung von Aufgabe 3.7.* Aus dem Materialmodell (3.135) folgt

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (3.137)$$

Verwendet man diesen Ausdruck im dritten Term von (3.131), so erhält man

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} p = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} \frac{\partial}{\partial \xi} p = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\rho^{-\frac{1}{\kappa}}} p^{1-\frac{1}{\kappa}} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \right). \quad (3.138)$$

Setzt man diese Ergebnis in (3.131) ein, so erhält man direkt

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left( \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + gz \right)}_{\text{konst.}} = 0 \quad (3.139)$$

und damit die gesuchte Gleichung (3.136).

**Beispiel 3.7 (Ausflussgleichung).** In diesem Beispiel soll das Ausströmen einer nichtviskosen inkompressiblen Flüssigkeit (Wasser) aus einem Becken mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung beschrieben werden, vgl. dazu Abbildung 3.13. Schreibt man die Bernoulli-Gleichung nach (3.134) für die in Abbildung 3.13 dargestellte Strömungslinie an, so

erhält man

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 . \quad (3.140)$$

Da am oberen und unteren Teil der Strömungslinie der gleiche Druck  $p_1 = p_2 = p_0$  (Umgebungsdruck  $p_0$ ) herrscht und unter der Annahme, dass die Fläche  $A_1 \gg A_2$  ist, folgt  $v_1 \ll v_2$  und (3.140) vereinfacht sich unter Vernachlässigung von  $v_1^2$  zu

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh . \quad (3.141)$$

Damit gilt für den ausfließenden Volumenstrom  $q_2 = A_2 v_2$

$$q_2 = A_2 \sqrt{2gh} . \quad (3.142)$$

Wendet man zusätzlich die Massenerhaltung nach (3.77) an, so erhält man eine Differentialgleichung zur Beschreibung der Höhe  $h$  als Funktion der Zeit

$$A_1 \frac{d}{dt} h(t) = -q_2 = -A_2 \sqrt{2gh(t)} . \quad (3.143)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung für eine Anfangshöhe  $h(0) = h_0$  errechnet sich direkt zu

$$h(t) = h_0 + \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{A_1^2} g t^2 - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh_0} t , \quad (3.144)$$

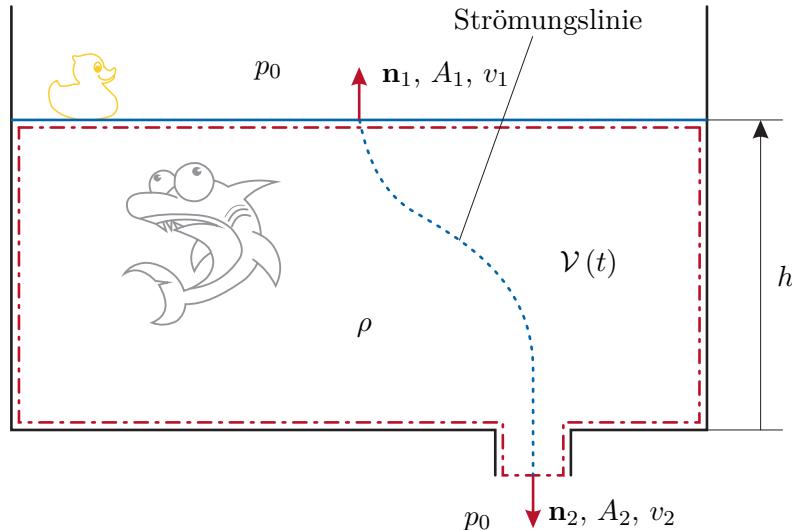


Abbildung 3.13: Skizze zum Ausströmen einer nicht-viskosen inkompressiblen Flüssigkeit aus einem Becken.

womit der Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem das Becken vollständig entleert ist ( $h(t_1) = 0$ ), durch

$$t_1 = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad (3.145)$$

gegeben ist.

Für die Parameter  $A_1 = 10 \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  und  $h_0 = 5 \text{ m}$  errechnet sich die Zeit  $t_1 = 1000 \text{ s}$ . Der zugehörige Verlauf der Höhe  $h(t)$  ist in Abbildung 3.14 dargestellt.

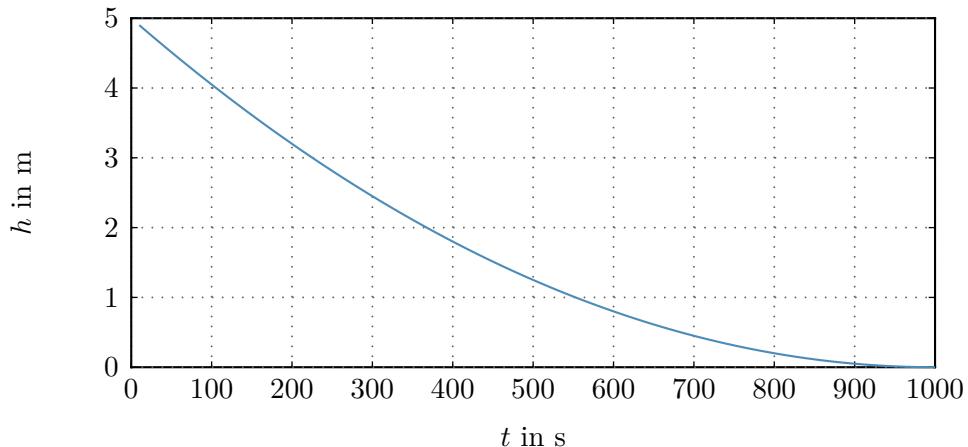


Abbildung 3.14: Wasserhöhe  $h$  als Funktion der Zeit  $t$ .

*Beispiel 3.8 (Hydraulische Drossel).* Ein plötzliche Verengung des Strömungsquerschnitts wird in der Hydraulik und Pneumatik auch als Drossel bezeichnet. In Abbildung 3.15 ist als Beispiel eine scharfkantige kreisförmige Querschnittsverengung in einem Rohr dargestellt. Wie unmittelbar einsichtig, verengt sich die Strömung vom Eingangsquerschnitt  $A_1$  (zugehöriger Druck  $p_1$ ) auf den Drosselquerschnitt  $A_d$ . Versuche zeigen, dass sich die Strömung nach der Drossel noch weiter einschnürt, bis sie an der sogenannten vena contracta die engste Stelle erreicht hat. Den Querschnitt an dieser Stelle bezeichnet man mit  $A_v$  und der zugehörige Druck lautet  $p_v$ , vgl. Abbildung 3.15.

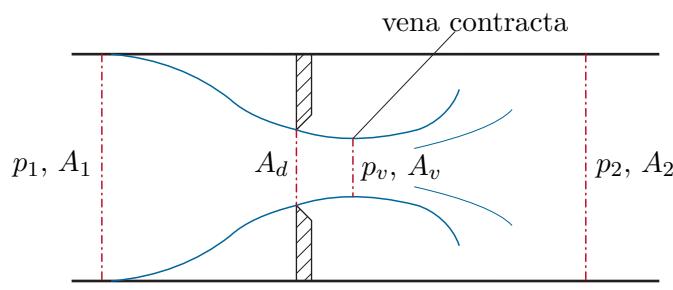


Abbildung 3.15: Skizze zur Beschreibung der Strömung durch eine scharfkantige Drossel.

Vernachlässigt man die Gravitation und nimmt eine inkompressible, nicht-viskose Flüssigkeit an, so kann aus der stationären Bernoulli-Gleichung folgender Zusammenhang gefunden werden

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_v^2}{2} + \frac{p_v}{\rho} . \quad (3.146)$$

Weiterhin gilt die Massenerhaltung, woraus sofort

$$v_1 = \frac{A_v}{A_1} v_v \quad (3.147)$$

folgt. Setzt man (3.147) in (3.146) ein und löst nach der Geschwindigkeit  $v_v$  auf, so erhält man

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_v}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_1 - p_v} . \quad (3.148)$$

Für die praktische Anwendung ist es nun sinnvoll,  $A_d$  als Bezugsfläche zu verwenden. Führt man den sogenannten Kontraktionskoeffizienten  $\alpha$  in der Form

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_v}{A_1}\right)^2}} \frac{A_v}{A_d} \quad (3.149)$$

ein und nimmt an, dass  $p_v = p_2$  gilt, dann errechnet sich der Volumenstrom  $q$  durch die Drossel zu

$$q = \alpha A_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_1 - p_2} . \quad (3.150)$$

*Beispiel 3.9 (Pneumatische Drossel).* Ähnliche Überlegungen wie für eine hydraulische Drossel lassen sich auch für eine pneumatische Drossel anstellen. Dazu betrachtet man die Bernoulli-Gleichung (3.136) für eine adiabate Strömung eines reibungs-

freien Gases in der Form

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{p_v}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (3.151)$$

wobei der Einfluss der Gravitation vernachlässigt wurde. Mit der Kontinuitätsgleichung  $v_1 A_1 \rho_1 = v_v A_v \rho_v$  erhält man nunmehr die Ausflussgeschwindigkeit zu

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\rho_v A_v}{\rho_1 A_1} \right)^2}} \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_v}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}. \quad (3.152)$$

Anhand der Ausflussgeschwindigkeit  $v_v$  kann der Massenstrom

$$\dot{m} = v_v A_v \rho_v \quad (3.153)$$

prinzipiell bestimmt werden. Da der Druck  $p_v$ , die Dichte  $\rho_v$  bzw. die Temperatur  $T_v$  im Allgemeinen nicht bekannt bzw. messbar sind, wird für die praktische Anwendung die Vereinfachungen getroffen, dass  $p_v = p_2$  gilt. Weiterhin wird vereinfachend der Kontraktionskoeffizient

$$\alpha_d = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\rho_v A_v}{\rho_1 A_1} \right)^2}} \frac{A_v}{A_d} \quad (3.154)$$

als konstant angenommen. Mit diesen Annahmen, der adiabatischen Zustandsänderung

$$\frac{\rho_v}{\rho_1} = \left( \frac{p_v}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (3.155)$$

und dem idealen Gasgesetz ( $R_s T_1 = p_1 / \rho_1$ ) folgt dann

$$\dot{m} = \alpha_d A_d p_1 \sqrt{\frac{2}{T_1 R_s}} \Psi(\Pi), \quad (3.156)$$

mit der sogenannten Ausflussfunktion

$$\Psi(\Pi) = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[ \Pi^{\frac{2}{\kappa}} - \Pi^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right] \quad (3.157)$$

und dem Druckverhältnis  $\Pi = p_2/p_1$ . Die Ausflussfunktion (3.145) weist ein Maximum (für Luft  $\kappa = 1.4$ ) bei

$$\Psi_{\max} = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx 0.484 \quad (3.158)$$

für das kritische Druckverhältnis

$$\Pi_{\text{krit}} = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx 0.528 \quad (3.159)$$

auf. Ab diesem Druckverhältnis  $\Pi_{\text{krit}}$  fließt das Medium mit der Schallgeschwindigkeit. Da die Schallgeschwindigkeit in einer Drossel nicht überschritten werden kann, ist dies auch die maximale Strömungsgeschwindigkeit, d. h. für technische Anwendungen ergibt sich die Ausflussfunktion in der Form, siehe Abbildung 3.16,

$$\Psi(\Pi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[ |\Pi|^{\frac{2}{\kappa}} - |\Pi|^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right] & \text{für } \Pi > \Pi_{\text{krit}} \\ \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} & \text{für } \Pi \leq \Pi_{\text{krit}} . \end{cases} \quad (3.160)$$

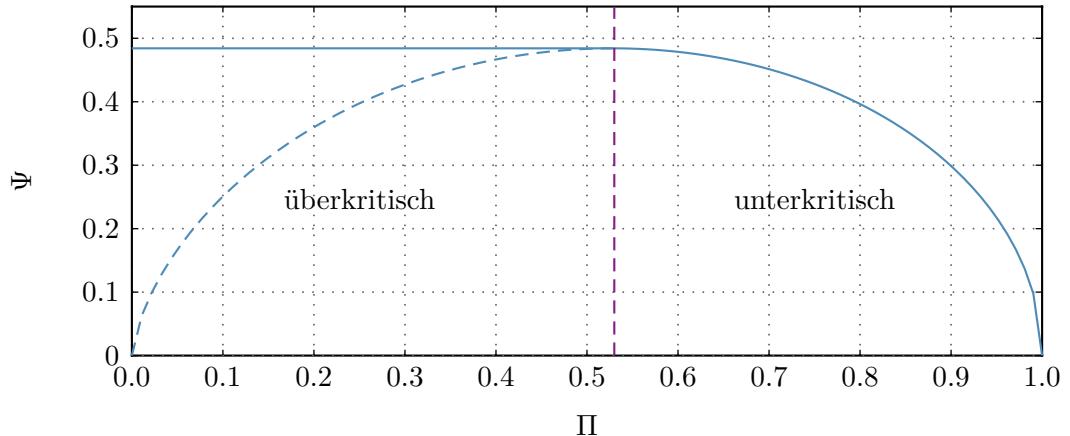


Abbildung 3.16: Ausflussfunktion als Funktion des Druckverhältnisses  $\Pi = p_2/p_1$ .

## 3.9 Energieerhaltung

Eines der wesentlichen Prinzipien der Physik ist, dass Energie weder vernichtet noch erzeugt werden kann. Mathematisch wird dieses Prinzip durch die Energieerhaltung für

ein zeitlich veränderliches Kontrollvolumen  $\mathcal{V}(t)$  in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho e_t d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho e_t (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (3.161)$$

formuliert, wobei  $\mathbf{v}$  wiederum die Geschwindigkeit beschreibt,  $\mathbf{n}$  ist der Normalenvektor auf die Berandung  $\partial\mathcal{V}$ ,  $\dot{Q}$  bezeichnet den zugeführten Wärmestrom und  $\dot{W}$  ist die zugeführte Leistung. Weiterhin beschreibt  $e_t$  die totale spezifische Energie der Flüssigkeit oder des Gases, welche sich aus der inneren Energie  $e_i$ , der kinetischen Energie  $e_k$  sowie der potentiellen Energie  $e_p$  in der Form

$$e_t = e_i + e_k + e_p = e_i + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + gz \quad (3.162)$$

zusammensetzt.

Formal kann man die Leistung  $\dot{W}$  in zwei Terme aufspalten, einen Anteil zufolge der Leistung der Strömung (flow work)  $\dot{W}_f$

$$\dot{W}_f = - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} \quad (3.163)$$

und einen Anteil der restlichen Leistung (shaft work)  $\dot{W}_s$ . Weiterhin kann man den zugeführten Wärmestrom  $\dot{Q}$  in der Form

$$\dot{Q} = - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} (\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A}, \quad (3.164)$$

mit dem Vektor  $\dot{\mathbf{q}}$  der Wärmestromdichte, formulieren. Verwendet man diese Aufteilung in (3.161) so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left( e_i + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + gz \right) d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho \left( e_i + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + gz \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} = \\ - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} (\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} + \dot{W}_s \end{aligned} \quad (3.165)$$

Die Energieerhaltung (3.165) besagt also, dass die Änderung der Energie in einem Kontrollvolumen  $\mathcal{V}(t)$  der Summe aus zugeührter Wärmeleistung und mechanischer Leistung entspricht. Der in (3.165) auftretende Term  $e_i + p/\rho$  wird auch als Enthalpie  $h$  bezeichnet, siehe (3.33).

**Beispiel 3.10 (Pumpspeicherkraftwerk).** Der Satz der Energieerhaltung soll in diesem Beispiel zur Berechnung der Leistung eines Pumpspeicherkraftwerkes verwendet werden. Das Kraftwerk besteht im Wesentlichen aus einem Oberbecken (geodätische Höhe  $z_1$ ), welches über eine Druckrohrleitung mit der Turbine verbunden ist, vgl. Abb. 3.17. Von der Turbine wird das Wasser über eine weitere Rohrleitung in das Unterbecken gefördert.

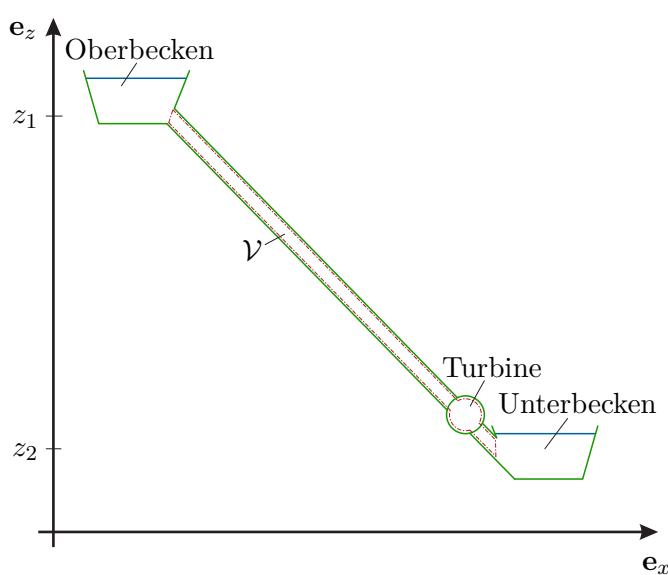


Abbildung 3.17: Skizze zur Berechnung der Leistung eines Pumpspeicherkraftwerkes.

Für die weitere Rechnung wird angenommen, dass

1. das Wasser inkompressibel und nicht-viskos ist,
2. die Strömung stationär ist und
3. das Rohr einen konstanten Querschnitt  $A$  aufweist.

Unter diesen Annahmen gilt für das in Abbildung 3.17 dargestellte Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$ , dass die innere Energie  $e_1$  am Einlauf gleich der inneren Energie  $e_2$  am Auslauf ist, sowie dass die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  gleich sind. Nimmt man weiterhin an, dass sowohl am Einlauf als auch am Auslauf der gleiche Druck  $p_0$  herrscht, dann reduziert sich die Energieerhaltung nach (3.154) zu

$$q\rho g(z_1 - z_2) = \dot{W}_s, \quad (3.166)$$

wobei alle Wärmeströme im System vernachlässigt wurden, d. h.  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . Die an der Welle der Turbine verfügbare Leistung entspricht also dem Produkt des Volumenstroms  $q$  mit der hydrostatischen Druckdifferenz  $\rho g(z_1 - z_2)$ .

**Beispiel 3.11 (Hydraulikzylinder).** In diesem Beispiel wird wiederum der Hydraulikzylinder nach Abb. 3.18 betrachtet, vgl. Beispiele 3.4 und 3.6. Für diesen Hydraulikzylinder soll die Änderung der Gesamtenergie ermittelt werden. Dazu werden drei Kontrollvolumina  $\mathcal{V}_1(t)$ ,  $\mathcal{V}_2(t)$  und  $\mathcal{V}_3(t)$  betrachtet. Wie bereits in den vorigen Beispielen gezeigt, wird der Hydraulikzylinder bei vernachlässigter Leckage durch die

## Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} s_k = v_k \quad (3.167a)$$

$$\frac{d}{dt} v_k = \frac{1}{m_k} (p_1 A_1 - p_2 A_2 - f_l) \quad (3.167b)$$

$$\frac{d}{dt} p_1 = \frac{\beta}{A_1 s_k} (-A_1 v_k + q_1) \quad (3.167c)$$

$$\frac{d}{dt} p_2 = \frac{\beta}{A_2 (l - d - s_k)} (A_2 v_k + q_2) \quad (3.167d)$$

mit der Position  $s_k$  des Kolbens, der zugehörigen Geschwindigkeit  $v_k = \dot{s}_k$  und den Kammerdrücken  $p_1$  und  $p_2$  beschrieben.

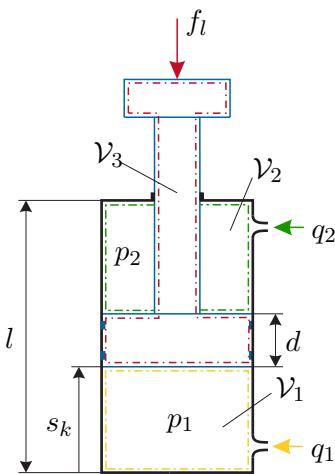


Abbildung 3.18: Skizze zur Berechnung der Energieänderung eines Hydraulikzylinders.

Die Änderung der Energie in einem mit Flüssigkeit gefüllten Ölvolume ergibt sich aus (3.165) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left( e_i + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + gz \right) d\mathcal{V} = \\ - \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \rho \left( e_i + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + gz \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} + \dot{Q} + \dot{W}_s . \end{aligned} \quad (3.168)$$

Im Weiteren wird angenommen, dass

1. Die Geschwindigkeit in den Zylinderkammern vernachlässigbar ist, d. h.  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,
2. der Einfluss der Gravitation vernachlässigt werden kann,
3. keine Wärme zugeführt wird ( $\dot{Q} = 0$ ) und

4. die kinetische Energie der Flüssigkeit vernachlässigbar ist.

Damit vereinfacht sich (3.157) für das Kontrollvolumen 1 zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1(t)} \rho e_i dV = - \int_{\partial V_1(t)} \rho \left( e_i + \frac{p}{\rho} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \dot{W}_{s1} \\ &= \underbrace{\left( e_{i1} + \frac{p_1}{\rho_1} \right)}_{h_1} \underbrace{\rho_1 q_1}_{\dot{m}_1} - p_1 A_1 v_k .\end{aligned}\quad (3.169)$$

Auf analoge Art und Weise kann für die Kammer 2 des Hydraulikzylinders

$$\frac{d}{dt}E_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2(t)} \rho e_i dV = \underbrace{\left( e_{i2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right)}_{h_2} \underbrace{\rho_2 q_2}_{\dot{m}_2} + p_2 A_2 v_k \quad (3.170)$$

gefunden werden. Schließlich errechnet sich die Änderung der kinetischen Energie des Kolbens zu

$$\frac{d}{dt}E_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = v_k (p_1 A_1 - p_2 A_2 - f_l) .\quad (3.171)$$

Summiert man schließlich die Änderungen der Energien  $E_g = E_1 + E_2 + E_k$  auf, so erhält man die Änderung der gesamten im Zylinder gespeicherten Energie zu

$$\frac{d}{dt}E_g = h_1 \dot{m}_1 + h_2 \dot{m}_2 - v_k f_l ,\quad (3.172)$$

d. h. die Erhöhung der Gesamtenergie entspricht der zugeführten hydraulischen Leistung  $h_1 \dot{m}_1 + h_2 \dot{m}_2$  plus der mechanischen Leistung  $v_k f_l$ .

**Aufgabe 3.8.** Nehmen Sie an, dass der Speicher aus Abbildung 3.8 adiabatisch isoliert ist, mit einem idealen Gas gefüllt ist und ideales Gas mit der Temperatur  $T_{in}$  zufließt. Berechnen Sie auf Basis der Energieerhaltung (3.165) unter Vernachlässigung der potentiellen und kinetischen Energien eine Differentialgleichung zur Beschreibung der Temperatur  $T$  im Speicher.

**Lösung von Aufgabe 3.8.** Anhand der Energieerhaltung findet man

$$\frac{d}{dt} (m e_i) = \dot{m} h_{in} \quad (3.173)$$

und mithilfe des idealen Gasgesetzes  $pV = mR_sT$ , den Zustandsgleichungen  $e_i = c_v T$ ,  $h_{in} = c_p T_{in}$  und der Definition des Adiabatenexponenten  $\kappa = c_p/c_v$  ergibt sich

$$\frac{d}{dt}T = \frac{R_s T}{pV} (\kappa T_{in} - T) \dot{m} .\quad (3.174)$$

## 3.10 Literatur

- [3.1] Elsner und Dittmann, *Grundlagen der Technischen Thermodynamik: Energielehre und Stoffverhalten*. Akademie Verlag, 1993.
- [3.2] Kluge und Neugebauer, *Grundlagen der Thermodynamik*: Spektrum, 1994.
- [3.3] Frankel, *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, 1997.
- [3.4] Franc, Avellan, Belahadji, Billard, Briancon, Frechou, Fruman, Karimi, Kueny und Michel, *La Cavitation: Mecanismes Physiques et Aspects Industriels*. Presses Universitaires de Grenoble, 1995.
- [3.5] Hoffmann, Chiang, Siddiqui und Papadakis, *Fundamental equations of fluid mechanics*. Engineering Education System, 1996.
- [3.6] McCloy und Martin, *Control of fluid power: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 1980.
- [3.7] Murrenhoff, *Grundlagen der Fluidtechnik: Teil 1, Hydraulik*. Shaker, 2001.
- [3.8] ——, *Grundlagen der Fluidtechnik: Teil 2, Pneumatik*. Shaker, 2006.

# 4 Wärmeübertragung

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung von Wärmeübertragungsprozessen diskutiert. Unter Wärmeübertragung soll hier der Energietransport in und zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen zufolge von Temperaturunterschieden verstanden werden. Die intensive Zustandsgröße Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie zufolge der ungeordneten mikroskopischen Bewegung der Atome und Moleküle eines Stoffes. Sie hängt also nicht direkt von makroskopischen Bewegungen ab, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln untersucht wurden.

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (vgl. Satz 3.3) [4.1], [4.2] wird bei Wärmeübertragung Energie vom Ort höherer Temperatur zum Ort geringerer Temperatur transferiert, d. h. es findet ein Temperaturausgleich statt. Besitzen zwei Körper die gleiche Temperatur, so befinden sie sich im thermischen Gleichgewicht und es findet kein weiterer Temperaturausgleich statt.

Wärme kann auf drei verschiedene Arten übertragen werden [4.3]–[4.6]:

## 1. Wärmeleitung

Der Energietransport durch *Wärmeleitung* stellt eine Interaktion zwischen benachbarten Atomen oder Molekülen eines Stoffes dar. Die von der Temperatur abhängige innere Energie fließt dabei von Atomen oder Molekülen mit höherem Energieniveau zu solchen mit kleinerem Energieniveau, wobei es durch zufällige mikroskopische Bewegungen und Vibratoren fortwährend zu Diffusions- und Kollisionsvorgängen kommt. Wärmeleitung tritt in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen auf. In festen elektrischen Nichtleitern erfolgt die Interaktion ausschließlich durch Gitterschwingungen; in elektrischen Leitern trägt auch die translatorische Bewegung von Elektronen zur Wärmeleitung bei. Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom.

## 2. Konvektion

In Fluiden erfolgt der Transport von innerer Energie zusätzlich zu den zufälligen molekularen Diffusionsbewegungen durch makroskopische Materialströme, d. h. durch Massentransport. Wird eine solche Strömung durch eine äußere Einwirkung verursacht (z. B. durch ein Gebläse, eine Pumpe oder die Bewegung eines Fahrzeugs), so spricht man von *erzwungener Konvektion*. Bei *freier Konvektion* hingegen wird die Strömung durch den von temperaturbedingten lokalen Dichteunterschieden hervorgerufenen Auftrieb verursacht. Eine spezielle Form von Konvektion tritt bei Siede- oder Kondensationsvorgängen auf. Hierbei führen Temperaturunterschiede nicht nur zu veränderter Dichte sondern auch zu Übergängen zwischen flüssigem und gasförmigem Aggregatzustand des Fluids.

### 3. Wärmestrahlung

Unter Wärmestrahlung versteht man den Energietransport mittels elektromagnetischer Wellen die durch die innere Energie von Materie, die sich im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ausgelöst wurden. Diese Merkmale unterscheiden Wärmestrahlung von anderen elektromagnetischen Wellen. Wärmestrahlen haben eine Wellenlänge im Bereich von  $0.1 \mu\text{m}$  bis  $1 \text{ mm}$  und transportieren Energie mit Lichtgeschwindigkeit. Wärmestrahlung kann in Festkörpern, Flüssigkeiten, Gasen und im Vakuum auftreten.

Abbildung 4.1 zeigt die drei Arten von Wärmeübertragung am Beispiel einer Gebäudewand mit Radiatorheizung. Der Radiator arbeitet als Wärmequelle und gibt durch thermische Strahlung und freie Konvektion Wärme an die Raumluft und die Gebäudewand ab. In der Wand selbst fließt die Energie hauptsächlich durch Wärmeleitung zur äußeren Gebäudeoberfläche, wo die von einer Windströmung erzwungene Konvektion und gegebenenfalls auch Wärmestrahlung die Energie an die Umgebung abführt. Natürlich können die beteiligten Materialien und Medien auch thermische Energie speichern oder abgeben, was zu einer zeitlichen Änderung ihrer lokalen Temperatur führt (transiente Wärmeübertragung). In diesem Beispiel treten, wie auch in vielen anderen praktischen Anwendungen, mehrere Wärmeübertragungsmechanismen in Kombination auf.

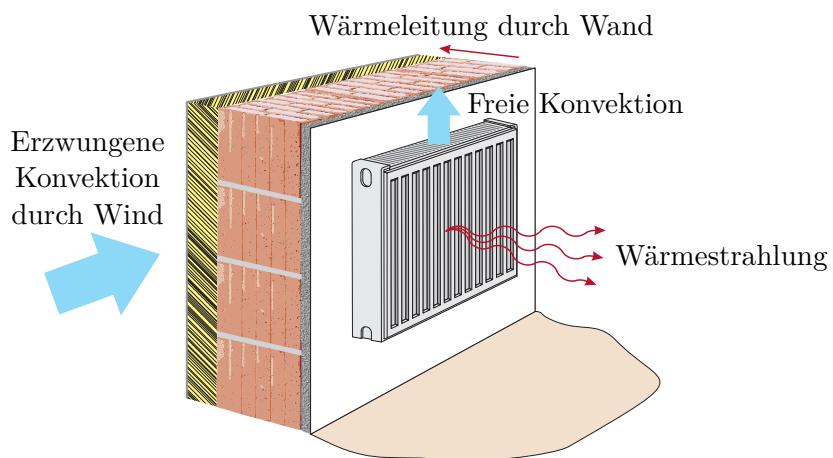


Abbildung 4.1: Arten der Wärmeübertragung.

Abschließend sei erwähnt, dass der Peltier-Effekt, ein thermo-elektrischer Effekt, einen Wärmestrom verursachen kann selbst wenn kein Temperaturunterschied vorhanden ist. Beim Peltier-Effekt wird der Wärmestrom ausschließlich durch die von einer elektrischen Potentialdifferenz ausgelösten Elektronenbewegungen, d. h. durch den Stromfluss, erzeugt.

In der vorliegenden Vorlesung werden Wärmeleitung in Festkörpern und einfache Formulierungen für die Wärmeübertragung an deren Rändern diskutiert. Es werden sowohl transiente als auch stationäre Wärmeübertragungsprobleme untersucht. Wo dies leicht möglich ist, werden analytische Lösungen angegeben.

## 4.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom, kann in allen drei Aggregatzuständen eines Stoffes auftreten und wird auch als Wärmendiffusion bezeichnet. Wie Jean Baptiste Joseph Fourier 1822 herausfand, ist bei Wärmeleitung die Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}(x, y, z, t)$  im Punkt  $(x, y, z)$  proportional zum lokalen Temperaturgradienten [4.3]–[4.5], d. h.

$$\dot{\mathbf{q}}(x, y, z, t) = -\boldsymbol{\Lambda}(x, y, z, T) \cdot \nabla T(x, y, z, t) . \quad (4.1)$$

Hierbei ist  $T$  die Temperatur zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $(x, y, z)$  und die symmetrische Matrix  $\boldsymbol{\Lambda}$  die im Allgemeinen orts- und temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit in W/(m K). In *isotropen* Materialien ist die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Raumrichtung der Wärmestromdichte, d. h. es gilt  $\boldsymbol{\Lambda}(x, y, z, T) = \lambda(x, y, z, T)\mathbf{E}$  und die Wärmeleitfähigkeit kann durch die skalare positive Größe  $\lambda(x, y, z, T)$  beschrieben werden. In *homogenen* Materialien ist  $\boldsymbol{\Lambda}$  unabhängig vom Ort.

Für ein festes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  und ohne Materialbewegung (Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) gilt gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (vgl. Satz 3.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho e_i d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \rho c_p(x, y, z, T) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} d\mathcal{V} \\ &= \underbrace{- \int_{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n} dA}_{=\dot{Q}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} g(x, y, z, T, t) d\mathcal{V}}_{=\dot{W}} . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass für inkompressible Medien unter den getroffenen Annahmen für die innere Energie  $de_i = c_p(x, y, z, T)dT$  und für die spezifische Wärmekapazität  $c_p \approx c_v$  gilt. Dies folgt aus (3.31) und (3.32) unter Berücksichtigung der näherungsweise gültigen Beziehung  $\partial v / \partial T \approx 0$ , d. h. die Volumenarbeit durch Wärmedehnung im Festkörper ist sehr gering und kann vernachlässigt werden.

Da das Material sich nicht bewegt, spielen kinetische und potentielle Energie in (4.2) keine Rolle.  $\dot{Q}$  beschreibt den Wärmestrom der in das Kontrollvolumen hineinfließt, wobei  $\mathbf{n}$  den Flächennormalvektor der Berandung  $\partial \mathcal{V}$  darstellt.  $\dot{W}$  beschreibt die in das System eingebrachte Arbeit, welche mangels Materialverschiebungen direkt in Wärme umgewandelt wird und hier durch die volumetrische Wärmequelle  $g(x, y, z, T, t)$  ausgedrückt wird. Ein Beispiel für  $g$  ist die Wärmeentwicklung in einem Ohmschen Widerstand (siehe auch Abschnitt 4.3).

Anwendung des Integralsatzes von Gauss auf (4.2) liefert

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(x, y, z, T) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}(x, y, z, t) + g(x, y, z, T, t) d\mathcal{V} . \quad (4.3)$$

Aus der Überlegung, dass diese Beziehung für beliebig gewählte Kontrollvolumina  $\mathcal{V}$  erfüllt sein muss, und durch Einsetzen von (4.1) erhält man die Wärmeleitgleichung

$$\rho c_p(x, y, z, T) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda}(x, y, z, T) \nabla T(x, y, z, t)) + g(x, y, z, T, t) . \quad (4.4)$$

Diese parabolische Differentialgleichung wird gelegentlich auch als Wärmediffusionsgleichung bezeichnet und stellt ein Anfangs-Randwert-Problem dar. Sie ist also noch mit Anfangs- und Randbedingungen zu versehen. Randbedingungen werden in Abschnitt 4.2 diskutiert. Anfangsbedingungen sind häufig in der Form  $T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$  gegeben. Schwieriger aber praktisch gelegentlich bedeutend ist der Fall, dass  $T_0(x, y, z)$  unbekannt ist und aus dem Zeitverlauf von Messwerten (z. B. Oberflächentemperaturen) rekonstruiert werden soll. Es handelt sich dabei um eine Beobachtungsaufgabe.

Bei stationären Problemstellungen gilt  $\partial T / \partial t = 0$  (vgl. Abschnitt 4.4), die Angabe von Anfangsbedingungen entfällt natürlich und (4.4) reduziert sich zu einem Randwertproblem in Form einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im Fall  $g = 0$  ist für solche Differentialgleichungen bekannt, dass sowohl das Maximum als auch das Minimum der Lösung am Rand des Rechengebietes auftreten muss. Ähnliche weiterführende Aussagen auch für Fälle  $g \neq 0$  finden sich z. B. in [4.7]. Weiters folgt aus (4.4), dass  $\rho$  und  $c_P$  auf die Lösung stationärer Wärmeleitungsprobleme keinen Einfluss haben. Dies gilt allgemein für stationäre Wärmeübertragungsprobleme ohne Massenströme.

Für die nachfolgenden Spezialisierungen von (4.4) wird angenommen, dass es sich um isotropes, homogenes Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit handelt. In kartesischen Koordinaten gilt dann

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z, T, t) \quad (4.5a)$$

für die Temperatur  $T = T(x, y, z, t)$  am Punkt  $(x, y, z)$ . In Zylinderkoordinaten (siehe

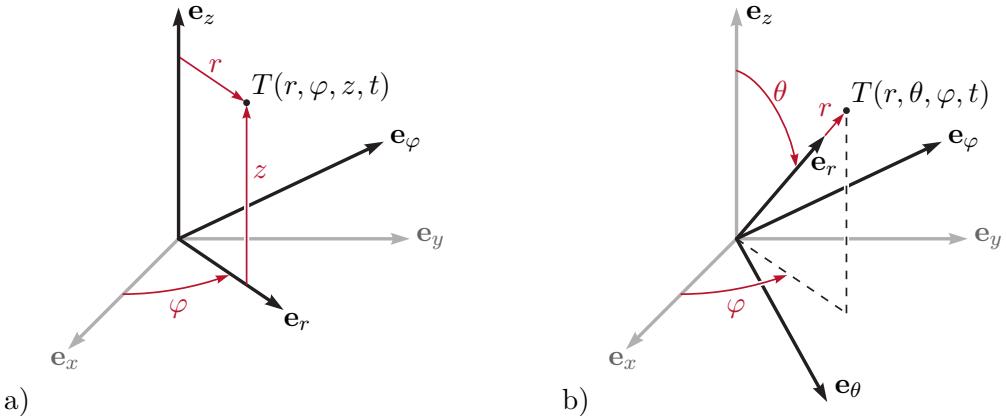


Abbildung 4.2: Koordinatensysteme, a) Zylinderkoordinaten, b) Kugelkoordinaten.

Abbildung 4.2a) gilt für die Temperatur  $T = T(r, \varphi, z, t)$  am Punkt  $(r, \varphi, z)$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(r, \varphi, z, T, t) \quad (4.5b)$$

und in Kugelkoordinaten (siehe Abbildung 4.2b) gilt für die Temperatur  $T = T(r, \theta, \varphi, t)$  am Punkt  $(r, \theta, \varphi)$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + g(r, \theta, \varphi, T, t) . \quad (4.5c)$$

Aus (4.5) lassen sich sofort weitere Spezialisierungen für den 1-dimensionalen Fall oder radialsymmetrische Fälle ableiten. Häufig wird in (4.5) statt der Parameter  $\rho$ ,  $c_p$  und  $\lambda$  die als Temperaturleitfähigkeit bezeichnete Abkürzung

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (4.6)$$

mit der Einheit  $\text{m}^2/\text{s}$  verwendet.

**Aufgabe 4.1 (Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten).** Beweisen Sie die Gültigkeit von (4.5b) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.7)$$

und  $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi = \mathbf{e}_\varphi$ .

**Aufgabe 4.2 (Wärmeleitungsgleichung in Kugelkoordinaten).** Beweisen Sie die Gültigkeit von (4.5c) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (4.8)$$

## 4.2 Randbedingungen

Zur vollständigen Definition und damit auch zur Lösbarkeit eines Wärmeleitungproblems werden Randbedingungen im Randgebiet  $\partial\mathcal{V}$  benötigt [4.3], [4.4]. Diese können eine Ortsabhängigkeit aufweisen, z. B. können sie abschnittsweise definiert sein.

Bei einer *Randbedingung erster Art* (Dirichletsche Randbedingung) ist die Temperatur am jeweiligen Randabschnitt  $\partial\mathcal{V}_r \subseteq \partial\mathcal{V}$  in der Form

$$T(x, y, z, t) = T_r(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in \partial\mathcal{V}_r \quad (4.9a)$$

fest vorgegeben. Um eine solche Randbedingung herzustellen, kann z. B. eine Temperaturregelung verwendet werden. Ein weiteres Beispiel für diese Randbedingung ist die Temperatur eines Fluids bei Phasenumwandlungsvorgängen. Die das Fluid einschließende Oberfläche wird dann konstant auf Phasenumwandlungstemperatur gehalten.

Bei einer *Randbedingung zweiter Art* (Neumannsche Randbedingung) ist die Wärimestromdichte  $\dot{q}_n(x, y, z, t) = \dot{\mathbf{q}}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}$  in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  am jeweiligen Randabschnitt  $\partial\mathcal{V}_r \subseteq \partial\mathcal{V}$  in der Form

$$\dot{q}_n(x, y, z, t) = \dot{q}_r(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in \partial \mathcal{V}_r \quad (4.9b)$$

fest vorgegeben. Dem Wärmeleitgesetz (4.1) folgend ist daher der Temperaturgradient entlang von  $\mathbf{n}$  festgelegt. Von einer *adiabaten* Randbedingung spricht man im Fall  $\dot{q}_n = 0$ .

Bei einer *Randbedingung dritter Art* (Newtonsche, Robinsche oder gemischte Randbedingung) gilt

$$\dot{q}_n(x, y, z, t) = \alpha(x, y, z) (T(x, y, z, t) - T_r(x, y, z, t)) \quad \forall (x, y, z) \in \partial \mathcal{V}_r \quad (4.9c)$$

mit einem Proportionalitätsfaktor  $\alpha \in \mathbb{R}$ , der auch Wärmeübergangskoeffizient genannt wird. Diese Art von Randbedingung wird in den Abschnitten 4.2.1 bis 4.2.3 zur Beschreibung von Konvektion und Wärmeleitung verwendet. Man beachte noch, dass (4.9c) für  $\alpha \rightarrow \infty$  wieder auf (4.9a) führt.

Eine allgemeinere Randbedingung ist durch die nichtlineare Beziehung

$$\dot{q}_n(x, y, z, t) = \dot{q}_r(x, y, z, t, T(x, y, z, t)) \quad \forall (x, y, z) \in \partial \mathcal{V}_r \quad (4.9d)$$

gegeben. Diese Struktur tritt z. B. in Abschnitt 4.2.4 bei der Beschreibung von Wärmestrahlung auf.

Die Randbedingungen (4.9) stellen oft idealisierte oder makroskopische Näherungen für in Realität komplexere Wärmeübertragungsvorgänge dar. Um bei Verwendung der obigen Ansätze dennoch möglichst exakt zu rechnen, ist daher eine sorgfältige Bestimmung der in den Gleichungen verwendeten Parameter notwendig. Dies soll im Folgenden beispielhaft für praktisch bedeutende Randbedingungen erläutert werden.

### 4.2.1 Erzwungene Konvektion

Erzwungene Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch eine äußere Einwirkung, z. B. einen Druckunterschied, verursacht wird [4.3], [4.4], [4.6], [4.8]. Abbildung 4.3 zeigt ein Beispiel für erzwungene Konvektion; Luft streicht mit einer Geschwindigkeit  $u_\infty$  und einer Temperatur  $T_\infty$  parallel über eine stehende ebene Platte mit der Länge  $L$ . Für die Wärmeübertragung durch Konvektion sind die als homogen vorausgesetzte Oberflächentemperatur  $T_p$  der Platte sowie die Temperaturverteilung  $T(x, y)$  und die Geschwindigkeitsverteilung  $u(x, y)$  in der Luft nahe über der Plattenoberfläche ( $y = 0$ ) ausschlaggebend. Direkt an der Plattenoberfläche gilt die Haftbedingung, d. h. die Luft hat eine verschwindende Geschwindigkeit ( $u(x, 0) = 0$ ) und die gleiche Temperatur wie die Plattenoberfläche ( $T(x, 0) = T_p$ ). Oberhalb der Plattenoberfläche bilden sich in der Luft Grenzschichten mit einem charakteristischen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil aus. Das Wärmeübertragungsverhalten hängt unter anderem von der Dicke dieser Grenzschichten ab und davon ob die Strömung in diesen Schichten laminar oder turbulent ist. Im Folgenden werden Berechnungsmethoden für den laminaren und den turbulenten Bereich separat vorgestellt und schließlich zur Bestimmung eines gemittelten Wärmeübertragungsverhaltens herangezogen. Transiente Effekte werden dabei nicht berücksichtigt, d. h. die Strömung wird als voll ausgebildet und stationär betrachtet.

### Laminarer Bereich

In vielen Fällen ist die Strömung am Einlauf (nahe der Vorderkante) laminar und etwas weiter von der Kante entfernt turbulent. Die Strömungsgrenzschicht habe eine lokale Dicke  $\delta_u(x)$ . Im laminaren Bereich, der sich von  $x = 0$  bis  $x = x_c$  erstreckt, ist die Strömung gleichmäßig und geordnet, so dass eindeutige Stromlinien identifiziert werden können. Die Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 4.3a angedeutet. Direkt an der Plattenoberfläche gilt  $u(x, 0) = 0$  (Haftbedingung) und am oberen Rand der Grenzschicht gilt  $u(x, \delta_u(x)) = u_\infty$ . Da  $\delta_u(x)$  mit steigendem  $x$  zunimmt, nimmt  $\partial u / \partial y|_{y=0}$  ab. Dieser Gradient ist proportional zur viskosen Scherspannung im Fluid.

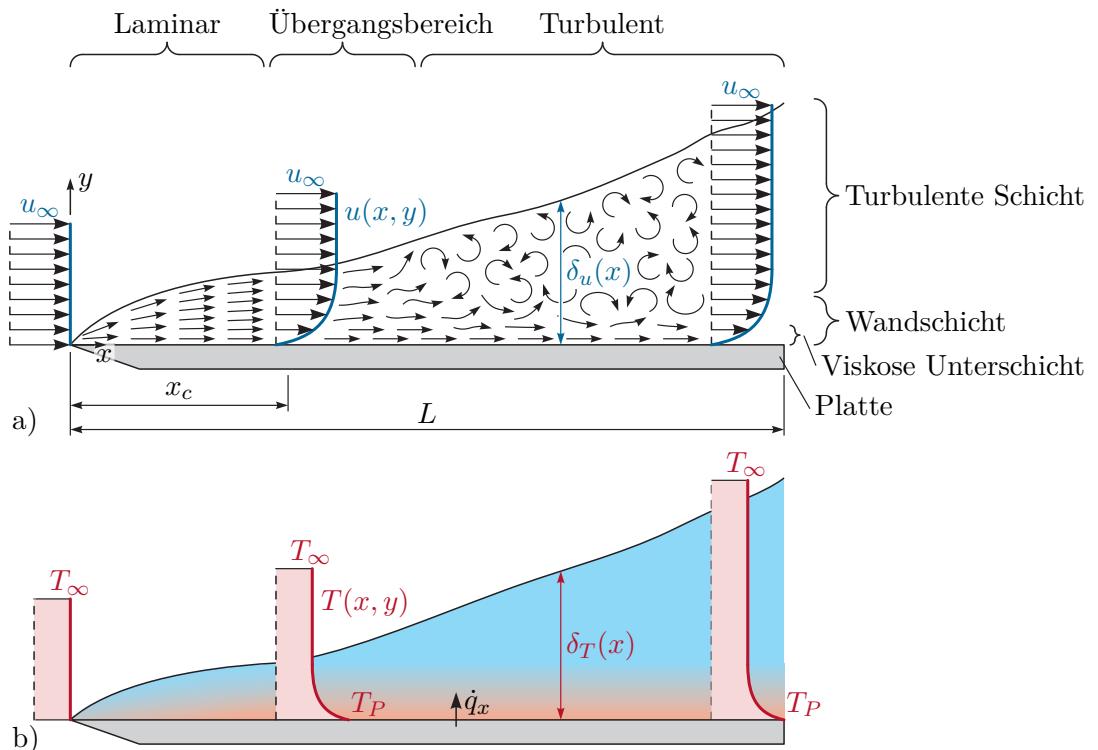


Abbildung 4.3: Grenzschichten bei erzwungener Konvektion an einer Platte, a) Strömungsgrenzschicht, b) thermische Grenzschicht.

Ferner bildet sich eine thermische Grenzschicht mit der Dicke  $\delta_T(x)$  aus. Direkt an der Plattenoberfläche gilt  $T(x, 0) = T_P$  und am oberen Rand der Grenzschicht gilt  $T(x, \delta_T(x)) = T_\infty$ . Das in Abbildung 4.3b angedeutete Temperaturprofil beschreibt einen Abkühlvorgang der Platte, da  $T_P > T_\infty$ . Die hier angestellten Überlegungen gelten aber auch für  $T_P < T_\infty$ . Für den Gradienten  $\partial T / \partial y|_{y=0}$  gilt analog zu  $\partial u / \partial y|_{y=0}$ , dass sein Absolutwert mit steigendem  $x$  abnimmt. Da bei  $y = 0$  keine Luftbewegung vorhanden ist, ergibt sich der lokale Wärmestrom an der Stelle  $x$  in Richtung  $y$  allein aus der Wär-

meleitung, d. h.

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (4.10)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  der Luft. Offensichtlich besitzt  $\dot{q}_x$  eine Singularität bei  $x = 0$ .

Eine vollständige analytische Berechnung von  $\delta_u(x)$ ,  $\delta_T(x)$ ,  $u(x, y)$ ,  $T(x, y)$  und  $q_x$  ist anspruchsvoll und erfordert die Verwendung der Kontinuitätsgleichung, der Impulsbilanz, der Energiebilanz und einer Konstitutivgleichung für die Reibung im Fluid. Derartige Berechnungen werden z. B. in [4.3], [4.4], [4.8], [4.9] durchgeführt. Hier soll aber lediglich die in der Strömungsmechanik und Wärmelehre gebräuchliche Beschreibung mittels dimensionslosen Kennzahlen und teilweise empirisch gefundenen Zusammenhängen erläutert werden.

Als erste wichtige dimensionslose Kennzahl gilt die Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \quad (4.11)$$

wobei  $x$  eine charakteristische Länge (im vorliegenden Fall die Längskoordinate  $x$  der Platte) und  $\nu$  die kinematische Viskosität des Fluids in  $\text{m}^2/\text{s}$  ist.  $\text{Re}_x$  beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften in einer Strömung. Anhand von  $\text{Re}_x$  kann daher auch entschieden werden, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Sie ist laminar für  $\text{Re}_x < \text{Re}_c$  und turbulent für  $\text{Re}_x > \text{Re}_c$ . Die kritische Reynolds-Zahl  $\text{Re}_c$  ist eine situationsabhängige Größe und hat für den Fall der parallel angestromten ebenen Platte (vgl. Abbildung 4.3) den Wert  $\text{Re}_c = 5 \cdot 10^5$ . Daraus folgt

$$x_c = \text{Re}_c \frac{\nu}{u_\infty}. \quad (4.12)$$

Als gute Näherung für die Dicke der Strömungsgrenzschicht im laminaren Bereich hat sich die Formel

$$\delta_u(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (4.13)$$

erwiesen [4.4]. Sie zeigt, dass  $\delta_u(x)$  mit steigenden Werten  $\nu$  und  $x$  zunimmt und mit steigenden Werten  $u_\infty$  abnimmt.

Als weitere wichtige dimensionslose Kennzahl wird die Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad (4.14)$$

verwendet. Sie ist eine rein stoffabhängige Größe und setzt den Impulstransport durch das Geschwindigkeitsfeld ins Verhältnis zur Wärmeleitung durch das Temperaturfeld. Sie hat daher auch einen direkten Einfluss auf die Grenzschichtdicken im laminaren Bereich. Dieser Einfluss kann durch

$$\delta_u(x) = \delta_T(x) \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (4.15)$$

beschrieben werden [4.4]. Für  $\text{Pr} = 1$  (häufig bei Gasen und Dämpfen) gilt folglich  $\delta_u(x) = \delta_T(x)$ .  $\text{Pr} \ll 1$  ( $\delta_u(x) < \delta_T(x)$ ) tritt bei flüssigen Metallen auf und  $\text{Pr} \gg 1$  ( $\delta_u(x) > \delta_T(x)$ ) bei vielen anderen Flüssigkeiten.

Die Gleichungen (4.13) und (4.15) zeigen, dass die Dicke  $\delta_T(x)$  der thermischen Grenzschicht nicht von den Randwerten  $T_P$  und  $T_\infty$  abhängt. Es kann gezeigt werden, dass Gleicher für die Form des Temperaturprofils  $T(x, y)$  gilt, so dass die Grenzschichtgleichungen üblicherweise für die normierte Temperatur

$$\bar{T}(x, y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_P - T_\infty} \quad (4.16)$$

gelöst werden, so dass  $\bar{T}(x, y)$  für beliebige Werte  $T_P$  und  $T_\infty$  gültig ist. Einsetzen von (4.16) in (4.10) liefert daher

$$\dot{q}_x = -\lambda \underbrace{\frac{\partial \bar{T}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}}_{=\alpha_x} (T_P - T_\infty) \quad (4.17)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_x$ , d. h. die Wärmestromdichte ist proportional zur Temperaturdifferenz  $T_P - T_\infty$ . Diese Proportionalität ist charakteristisch für Wärmeübertragung durch Konvektion und wird daher praktisch sehr häufig zur Modellierung verwendet.

*Bemerkung 4.1.* Der menschliche Körper nutzt die in (4.17) dargestellte Proportionalität zur Temperaturregelung. Soll der Körper gekühlt werden, so werden die oberflächennahen Blutgefäße erweitert, es fließt mehr Blut durch und die Oberflächentemperatur ist so wie der kühlende Wärmestrom nach außen höher. Soll der Wärmeverlust nach außen gemindert werden, wird die oberflächennahe Durchblutung durch Verengung der Blutgefäße reduziert.

Offensichtlich ist die Bestimmung von  $\alpha_x$ , das von der Wärmeleitfähigkeit des Fluids und der Form der Temperaturverteilung im Fluid abhängt, eine zentrale Fragestellung. Um sie zu untersuchen, sind die Grenzschichtgleichungen zu lösen, wobei hier häufig die Nußelt-Zahl

$$\text{Nu}_x = \dot{q}_x \frac{x}{(T_P - T_\infty) \lambda} = \frac{\alpha_x x}{\lambda} \quad (4.18)$$

als weitere dimensionslose Kennzahl verwendet wird. Sie setzt die Wärmestromdichte an der Plattenoberfläche (vgl. (4.10) und (4.17)) in Beziehung zur Wärmestromdichte durch reine Wärmeleitung über die charakteristische Distanz  $x$  bei gleicher Temperaturdifferenz  $T_P - T_\infty$ . Im Bereich der laminaren Plattengrenzschicht kann gemäß [4.3] in guter Näherung die semiempirische Formulierung

$$\text{Nu}_{lam,x} = \sqrt{\text{Re}_x} \varphi(\text{Pr}) \quad (4.19a)$$

mit

$$\varphi(\text{Pr}) = \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\pi} (1 + 1.973 \text{Pr}^{0.272} + 21.29 \text{Pr})^{1/6}} \quad (4.19b)$$

verwendet werden.

### Turbulenter Bereich

Die Strömung wird im Bereich von  $x = x_c$  (Übergangsbereich) instabil und schlägt in eine turbulente Strömung um. In der als turbulente Schicht bezeichneten Region in Abbildung 4.3a (auch Defektschicht genannt) ist die Bewegung der Fluidteilchen daher 3-dimensional, instationär und scheinbar zufällig (chaotisch). Es bilden sich ungeordnete Wellen und Wirbel, die sich auch wieder auflösen. Der Rand der Grenzschicht ist üblicherweise ausgefranst, so dass die Grenzschichtdicke

$$\delta_u(x) = 0.37x\text{Re}_x^{-1/5} \quad (4.20)$$

[4.4] eher einem zeitlichen Mittelwert als einem festen Maß entspricht. Ein Vergleich von (4.13) und (4.20) zeigt, dass die Grenzschicht im turbulenten Bereich schneller wächst als im laminaren Bereich. Dies lässt sich mit der durch Turbulenz verstärkten Durchmischung erklären. Gleichung (4.20) und die nachfolgenden Beziehungen gelten für  $\text{Re}_c < \text{Re}_x < 10^8$ .

In der Nähe der Plattenoberfläche wird die Bewegung der Fluidteilchen durch die Wand behindert. In der sogenannten viskosen Unterschicht (vgl. Abbildung 4.3a) liegt daher etwa eine Parallelströmung vor und der Wärmetransport wird von herkömmlicher Wärmeleitung dominiert. In der Wandschicht oberhalb der viskosen Unterschicht erfolgt ein Übergang zum turbulenten Strömungsverhalten. Im Vergleich zur laminaren Strömung kommt es bei turbulenten Strömungsverhältnissen zu verstärktem Wärmetransport durch Stofftransport, d. h. die turbulenten Durchmischungsvorgänge begünstigen und dominieren letztlich das Wärmeübertragungsverhalten. Im turbulenten Bereich gilt daher

$$\delta_u(x) = \delta_T(x) . \quad (4.21)$$

Für die Nußelt-Zahl kann im Bereich  $0.6 < \text{Pr} < 60$  die empirische Formulierung

$$\text{Nu}_{tur,x} = 0.0296\text{Re}_x^{4/5} \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (4.22)$$

[4.3], [4.4] verwendet werden.

### Gemittelte Größen

Aus den bisher angegebenen Formeln für die Nußelt-Zahl lässt sich mit Hilfe von (4.18) die lokale Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  berechnen. Praktisch interessant sind auch noch die über die Plattenlänge  $L$  gemittelte Wärmestromdichte

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_x dx = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x dx (T_P - T_\infty) = \alpha(T_P - T_\infty) \quad (4.23)$$

sowie die unter Verwendung von (4.19) und (4.22) berechnete mittlere Nußelt-Zahl

$$\begin{aligned}
 \text{Nu} &= \dot{q} \frac{L}{(T_P - T_\infty) \lambda} = \frac{\alpha L}{\lambda} \\
 &= \begin{cases} 2\sqrt{\text{Re}_L} \varphi(\text{Pr}) & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\sqrt{\text{Re}_c} \varphi(\text{Pr}) + 0.0370 (\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5}) \sqrt[3]{\text{Pr}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.24) \\
 &= \begin{cases} 2\text{Nu}_{lam,L} & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\text{Nu}_{lam,x_c} + \frac{5}{4} (\text{Nu}_{tur,L} - \text{Nu}_{tur,x_c}) & \text{sonst} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Die hier gezeigte Vorgangsweise zur Berechnung der Wärmeübertragung durch erzwungene Konvektion an einer horizontalen Platte kann in ähnlicher Weise für andere Geometrien durchgeführt werden, z. B. für Rohrströmungen, querangeströmte Kreiszylinder, Gruppen von Rohren und Objekte mit Rippen. Es sind dann andere charakteristische Längen  $L$ , andere kritische Reynolds-Zahlen  $\text{Re}_c$  und andere Formeln für die Nußelt-Zahl (vgl. (4.19) und (4.22)) zu verwenden. Diese Werte und Formeln können z. B. den Fachbüchern [4.3]–[4.5], [4.8]–[4.15] entnommen werden.

*Bemerkung 4.2.* Abschließend sei noch erwähnt, dass erzwungene Konvektion nicht immer an der Oberfläche von Festkörpern auftreten muss; sie ist auch an Oberflächen von Flüssigkeiten möglich. In vielen Fällen ist es aufgrund von Dichte- und Viskositätsunterschieden zweier Fluide gerechtfertigt, das eine Fluid als stehend zu betrachten. Ein Beispiel einer solchen Situation ist ein leichter Wind, der über die stehende Oberfläche eines Wasserbeckens streicht.

### 4.2.2 Freie Konvektion

Freie Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch temperaturbedingte lokale Dichteunterschiede (Auftrieb) und ohne eine äußere Einwirkung hervorgerufen wird. Die Berechnung freier Konvektion erfolgt methodisch ähnlich wie bei der erzwungenen Konvektion, d. h. mit Hilfe von dimensionslosen Kennzahlen (siehe Abschnitt 4.2.1), allerdings übernimmt die Grashof-Zahl  $\text{Gr}_x$  die Rolle einer quadratischen Reynolds-Zahl  $\text{Re}_x^2$  (vgl. (4.11)). Die Nußelt-Zahl  $\text{Nu}_x$  ist daher eine Funktion der Grashof-Zahl  $\text{Gr}_x$  und der Prandtl-Zahl  $\text{Pr}$ . Die auftretende Strömung ist laminar, wenn für die Rayleigh-Zahl  $\text{Ra}_x = \text{Gr}_x \text{Pr} < \text{Ra}_c$  gilt und turbulent, wenn  $\text{Ra}_x > \text{Ra}_c$ . Für den Fall einer ebenen vertikalen Platte hat die kritische Rayleigh-Zahl den Wert  $\text{Ra}_c = 10^9$ . Auf eine eingehende Diskussion und Berechnung der Größen  $\text{Gr}_x$ ,  $\text{Ra}_x$  und  $\text{Nu}_x$  wird hier verzichtet. Diese Inhalte können z. B. in [4.3], [4.4], [4.6], [4.8], [4.14], [4.16] nachgelesen werden.

### 4.2.3 Wärmeleitung

Wärmeleitung tritt auch an den Kontaktflächen zwischen Festkörpern auf (vgl. Abbildung 4.4). Dort hängt das Wärmeleitvermögen von folgenden Faktoren ab [4.4]:

- Beschaffenheit (Rauigkeit) der sich berührenden Oberflächen
- Flächenpressung zwischen den sich berührenden Oberflächen

- allfällige (punktweise) Verschweißungen zwischen den sich berührenden Oberflächen
- Fluid, das kleine Hohlräume zwischen den sich berührenden Oberflächen füllt

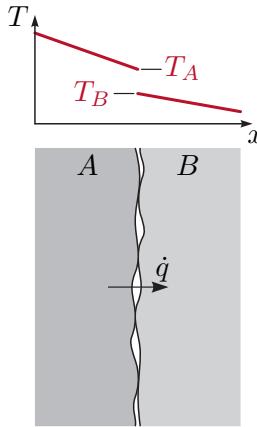


Abbildung 4.4: Wärmeleitung an der Kontaktfläche zweier Festkörper.

Das Wärmeleitverhalten an solchen Kontaktstellen entspricht im einfachsten Fall dem Fourierschen Wärmeleitgesetz (vgl. (4.1)), d. h. die Wärmestromdichte ist linear proportional der Differenz der beiden Oberflächentemperaturen. Dies kann für zwei Kontaktflächen  $A$  und  $B$  mit den Temperaturen  $T_A$  und  $T_B$  mit Hilfe eines Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  in der Form

$$\dot{q} = (T_A - T_B)\alpha \quad (4.25)$$

modelliert werden. Für ideale Kontaktbedingungen gilt  $\alpha \rightarrow \infty$  und  $T_A = T_B$ .

#### 4.2.4 Wärmestrahlung

Im Folgenden wird eine kurze Einführung in die Wärmestrahlung zwischen Festkörpern im Vakuum gegeben. Damit ist auch der Fall von Fluiden die Wärmestrahlung weder absorbieren noch emittieren (transparente Fluide) abgedeckt. Um die Berechnungen einfach zu halten, sollen ausschließlich graue, diffuse Strahler berücksichtigt werden. Was darunter zu verstehen ist, wird im Folgenden diskutiert. Für die hier nicht dargestellten Wärmestrahlungsfälle (absorbierende und emittierende Fluide, nicht-graue Strahler, nicht-diffuse Strahler) wird auf Fachbücher wie z. B. [4.3], [4.4], [4.14], [4.17], [4.18] verwiesen.

Damit gasförmige Fluide Wärmestrahlung absorbieren und emittieren können, müssen sie Festkörperpartikel enthalten (z. B. Staub) oder Moleküle, die in asymmetrischen Moden schwingen können [4.5], wie etwa  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{CH}_4$  und  $\text{NO}_2$ . Gase mit ausschließlich einatomigen oder symmetrischen zweiatomigen Molekülen (z. B.  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  und  $\text{H}_2$ ) besitzen nur symmetrische Schwingungsmoden und sind praktisch transparent. Auch

auf Luft trifft dies bei moderaten Temperaturen und Strahlungslängen im Bereich weniger Meter näherungsweise zu.

Thermische Strahlung hängt wesentlich von den Temperaturen und Eigenschaften der beteiligten Oberflächen, den auftretenden Wellenlängen und der Raumrichtung ab. Ein diffuser Strahler liegt vor, wenn er in alle Raumrichtungen gleichmäßig abstrahlt, wie dies eine ideal matte Oberfläche tut [4.3], [4.4], [4.17], [4.18]. Mit der Beschränkung auf diffuse Strahler kann nachfolgend eine Berücksichtigung der Raumrichtung entfallen.

### **Spektrale Ein- und Ausstrahlung**

Für ein thermisch ausstrahlendes infinitesimales Oberflächenstück  $dA$  mit der Absoluttemperatur  $T$  sei zunächst die spektrale spezifische Ausstrahlung  $E_\lambda(\lambda, T)$  in  $\text{W/m}^3$  bei der Wellenlänge  $\lambda$  definiert. Damit emittiert das Oberflächenstück im Wellenlängenbereich  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  die Gesamtenergie  $E_\lambda(\lambda, T)dAd\lambda$  in den darüberliegenden Halbraum (Hemispäre). Max Planck fand 1900 heraus, dass die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung von schwarzen Körpern durch

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1)}, \quad (4.26)$$

mit der Planckschen Konstante  $h = (6.626\,068\,96 \pm 0.000\,000\,33)10^{-34}\,\text{J s}$ , der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 299\,792\,458\,\text{m/s}$  und der Boltzmann Konstante  $k = (1.380\,650\,4 \pm 0.000\,002\,4)10^{-23}\,\text{J/K}$  beschrieben werden kann [4.3], [4.17], [4.18]. Ein schwarzer Körper emittiert Strahlung mit einem ausschließlich von der Temperatur abhängigen Spektrum und absorbiert auftreffende elektromagnetische Strahlung vollständig (keine Spiegelung, Streuung oder Transmission). Insbesondere ist das Spektrum der emittierten Strahlung unabhängig von den Materialeigenschaften. Ein schwarzer Körper hat bei allen Wellenlängen das größtmögliche Emissions- und Absorptionsvermögen, d. h. keine andere Oberfläche kann mehr Wärmestrahlung absorbieren oder bei gleicher Temperatur emittieren.

Abbildung 4.5 zeigt die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung gemäß dem Planckschen Strahlungsgesetz (4.26). Das Maximum der Ausstrahlung tritt jeweils bei der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{0.002\,897\,768\,\text{m K}}{T} \quad (4.27)$$

auf. Gleichung (4.27) ist als Wiensches Verschiebungsgesetz bekannt und die dadurch beschriebene Linie ist in Abbildung 4.5 strichliert dargestellt.

**Aufgabe 4.3 (Wiensches Verschiebungsgesetz).** Beweisen Sie das Wiensche Verschiebungsgesetz (4.27) basierend auf (4.26).

Um das Emissions- und Absorptionsvermögen von nicht-schwarzen Körpern zu beschreiben, werden dimensionslose Proportionalitätsfaktoren verwendet. Die spektrale Emis-

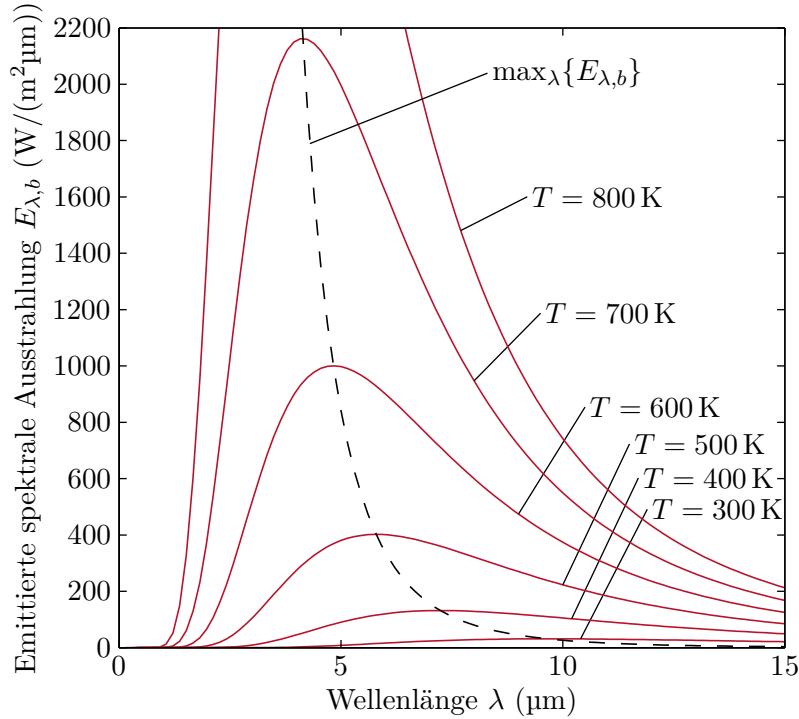


Abbildung 4.5: Emittierte spektrale Ausstrahlung von schwarzen Körpern.

sivität

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} \in [0, 1] \quad (4.28)$$

vergleicht die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung einer Oberfläche mit jener eines schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur  $T$ . Folglich gilt

$$E_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T) \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1)} \quad (4.29)$$

und für einen schwarzen Strahler  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = 1$ .

Es sei  $G_\lambda(\lambda)$  die auf ein infinitesimales Flächenstück  $dA$  auftreffende spektrale spezifische Einstrahlung in W/m<sup>3</sup> im Wellenlängenbereich  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ . D. h. für diesen Wellenlängenbereich ist  $G_\lambda(\lambda)dA$  die auftreffende Gesamtenergie. Natürlich hängt das Spektrum der auftreffenden Wärmestrahlung von den Temperaturen der sie verursachenden Strahlungsquellen ab. Von der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden spektralen Einstrahlung  $G_\lambda(\lambda)$  werde der Anteil  $G_{\lambda,a}(\lambda)$  absorbiert, der Anteil  $G_{\lambda,r}(\lambda)$  werde reflektiert und der Anteil  $G_{\lambda,t}(\lambda)$  strahle ungehindert durch den Körper durch (vgl. Abbildung 4.6). Damit lassen sich der spektrale Absorptionsgrad

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1], \quad (4.30a)$$

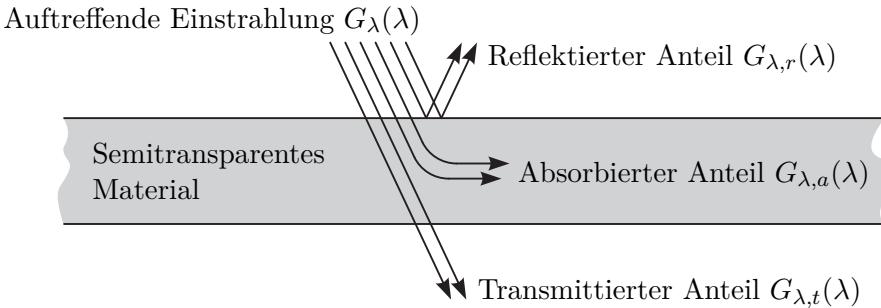


Abbildung 4.6: Absorption, Reflexion und Transmission der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden Einstrahlung.

der spektrale Reflexionsgrad

$$\rho_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,r}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1] \quad (4.30b)$$

und der spektrale Transmissionsgrad

$$\tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1] \quad (4.30c)$$

definieren [4.4]. Aufgrund der Energieerhaltung gilt natürlich

$$G_\lambda(\lambda) = G_{\lambda,a}(\lambda) + G_{\lambda,r}(\lambda) + G_{\lambda,t}(\lambda) \quad (4.31a)$$

$$1 = \alpha_\lambda(\lambda) + \rho_\lambda(\lambda) + \tau_\lambda(\lambda) . \quad (4.31b)$$

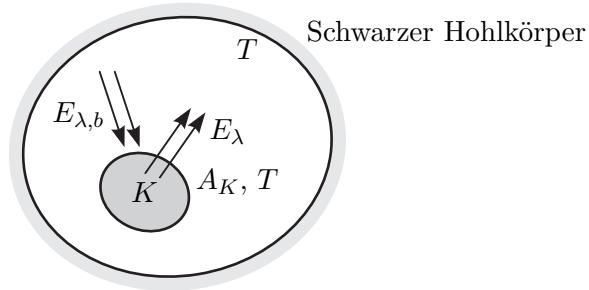


Abbildung 4.7: Körper in einem schwarzen Hohlkörper.

Wie Gustav Robert Kirchhoff 1859 feststellte, müssen an für Wärmestrahlung undurchsichtigen Oberflächen, die sich mit ihrer Umgebung im vollständigen thermischen Gleichgewicht befinden (d. h. die gleiche Temperatur  $T$  aufweisen), die emittierte und absorbierte Strahlung übereinstimmen. Dies gilt auch für einzelne Bereiche des Spektrums, d. h.  $E_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)E_{\lambda,b}(\lambda, T) = G_{\lambda,a}(\lambda) = \alpha_\lambda(\lambda)G_\lambda(\lambda)$ , woraus die gelegentlich als Kirchhoffsches Gesetz bezeichnete Beziehung

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \alpha_\lambda(\lambda) \quad (4.32)$$

folgt [4.4], [4.17], [4.18]. Um dies zu zeigen, betrachte man die in Abbildung 4.7 skizzierte Situation. Ein undurchsichtiger Körper  $K$  mit der Oberfläche  $A_K$ , der Temperatur  $T$  und dem spektralen Absorptionsgrad  $\alpha_\lambda(\lambda)$  befindet sich im Inneren eines Hohlkörpers mit der Temperatur  $T$  und den Strahlungseigenschaften eines schwarzen Körpers, d. h. aus Sicht des Körpers  $K$  gilt  $G_\lambda(\lambda) = E_{\lambda,b}(\lambda, T)$ . Damit der Körper  $K$  in diesem Gleichgewichtszustand verbleibt, d. h. das Temperaturniveau  $T$  beibehält, muss die totale absorbierte mit der totalen emittierten thermischen Strahlungsenergie übereinstimmen. Diese Gleichheit lässt sich nach Integration über das gesamte Spektrum in der Form

$$A_K \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda = A_K \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = A_K \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (4.33)$$

ausdrücken. Diese Beziehung muss für beliebige Werte  $\alpha_\lambda(\lambda)$  gültig sein, woraus (4.32) folgt.

Obwohl (4.32) streng nur gilt, wenn alle beteiligten Oberflächen die gleiche Temperatur haben, wird diese Beziehung auch für moderate Abweichungen von diesem Gleichgewichtszustand verwendet. Nicht mehr gültig ist sie für Strahlungssituationen bei denen die Temperaturen der beteiligten Oberflächen sich um mehrere 100 K unterscheiden. Im Folgenden wird die Gültigkeit von (4.32) vorausgesetzt.

### **Total Ein- und Ausstrahlung**

Integration obiger spektraler Größen über das gesamte Spektrum liefert die emittierte totale Ausstrahlung

$$E(T) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (4.34)$$

und für den Spezialfall eines schwarzen Strahlers das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (4.35)$$

mit der Stefan-Boltzmann Konstanten  $\sigma = (5.670\,400 \pm 0.000\,040)10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ . Damit lässt sich die totale Emissivität

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (4.36)$$

berechnen. Sie hängt ausschließlich von der Temperatur  $T$  und den Eigenschaften der ausstrahlenden Oberfläche ab.

In ähnlicher Weise erhält man die totale Einstrahlung

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda = G_a + G_r + G_t \quad (4.37)$$

mit ihren Komponenten

$$G_i = \int_0^\infty G_{\lambda,i}(\lambda) d\lambda \quad \forall i \in \{a, r, t\} \quad (4.38)$$

für den absorbierten, reflektierten und transmittierten Anteil. Für den totalen Absorptions-, Reflexions- und Transmissionsgrad folgt

$$\alpha = \frac{G_a}{G}, \quad \rho = \frac{G_r}{G}, \quad \tau = \frac{G_t}{G}. \quad (4.39)$$

Natürlich gilt auch hier wieder

$$1 = \alpha + \rho + \tau. \quad (4.40)$$

Im Gegensatz zu  $\varepsilon(T)$  hängen  $\alpha$ ,  $\rho$  und  $\tau$  damit nicht nur von der Oberfläche selbst sondern auch vom Spektrum der auftreffenden Strahlung und damit der Temperatur und den Oberflächeneigenschaften der jeweiligen Strahlungsquelle ab.

Man beachte noch, dass aus dem Kirchhoffschen Gesetz (4.32) im Allgemeinen nicht die häufig verwendete Näherung

$$\varepsilon(T) = \alpha \quad (4.41)$$

abgeleitet werden kann. Aus (4.34) bis (4.39) folgt, dass (4.41) gilt, wenn die Faktoren  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$  und  $\alpha_\lambda(\lambda)$  nicht von  $\lambda$  abhängen. Graue Strahler haben diese besondere Eigenschaft, d. h. die Faktoren  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon(T)$ ,  $\alpha_\lambda(\lambda) = \alpha$ ,  $\rho_\lambda(\lambda) = \rho$  und  $\tau_\lambda(\lambda) = \tau$  sind unabhängig von  $\lambda$  [4.4]. Damit ist das von einem grauen Strahler emittierte Spektrum proportional zu dem eines schwarzen Strahlers mit der gleichen Temperatur  $T$ . Im Folgenden werden nur noch graue Strahler betrachtet. Ein spezieller grauer Strahler ist der schwarze Strahler, für den aufgrund von  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = 1$ ,  $\alpha_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $\rho_\lambda(\lambda) = 0$  und  $\tau_\lambda(\lambda) = 0$  gilt. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass (4.41) streng nur dann gilt, wenn die Quelle der auftreffenden Einstrahlung ebenfalls die Oberflächentemperatur  $T$  hat.

### Netto-Strahlungsmethode

Bislang wurden einige Grundlagen zur Wärmestrahlung an einer Oberfläche diskutiert. Für Wärmeübertragungsprobleme interessant ist der Wärmeaustausch durch thermische Strahlung zwischen zwei oder mehreren Körpern mit bekannten Oberflächentemperaturen. Für die Bestimmung dieses Wärmeaustausches stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, z. B. die Netto-Strahlungsmethode [4.3], [4.4], [4.14], [4.15], die Zonen-Methode [4.17]–[4.19], die Monte-Carlo Methode [4.17], [4.18] und die Methode der diskreten Ordinaten [4.17]. Im Folgenden wird die Netto-Strahlungsmethode kurz für graue, diffuse Strahler skizziert. Der Einfachheit halber werden ausschließlich intransparente Körper betrachtet, d. h. es gilt  $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$ ; die Theorie lässt sich aber einfach auf semitransparente Körper erweitern.

Abbildung 4.8 zeigt zwei strahlende Oberflächen  $A_i$  und  $A_j$  mit jeweils homogen verteilten Oberflächentemperaturen  $T_i$  und  $T_j$ . Es sei nun  $G_i$  die auf  $A_i$  auftreffende totale Einstrahlung in  $\text{W/m}^2$  und  $J_i$  die von  $A_i$  (gleichmäßig) abgehende totale Ausstrahlung

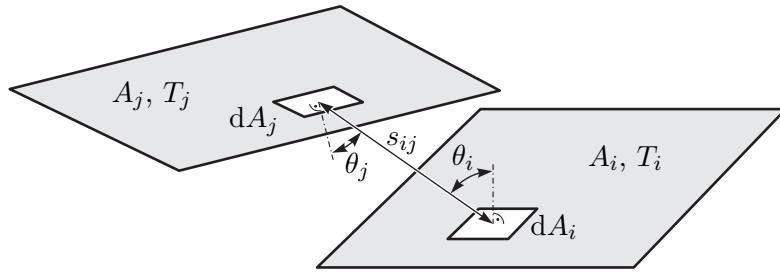


Abbildung 4.8: Zwei Flächen mit Strahlungsaustausch.

in  $\text{W/m}^2$ . Da  $J_i$  also neben der von  $A_i$  emittierten Ausstrahlung den reflektierten Anteil von  $G_i$  beinhaltet, gilt

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i G_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i . \quad (4.42)$$

Es sei nun  $F_{ij} J_i$  jener Anteil von  $J_i$ , der auf  $A_j$  auftrifft. Die noch zu bestimmende dimensionslose Zahl  $F_{ij} \in [0, 1]$  wird *Sichtfaktor* genannt und hängt ausschließlich von der Form und relativen Position der Flächen  $A_i$  und  $A_j$  ab. Die von einem infinitesimalen Flächenelement  $dA_i$  insgesamt abgehende Strahlungsenergie beträgt  $dA_i J_i$ . Davon trifft die Strahlungsenergie

$$J_i dA_i \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j) dA_j}{\pi s_{ij}^2} \quad (4.43)$$

auf das  $s_{ij}$  entfernte infinitesimale Flächenelement  $dA_j$  auf. Hierbei ist  $\cos(\theta_i) \cos(\theta_j) dA_j$  die projizierte Fläche von  $dA_j$  wie sie von  $dA_i$  aus gesehen wird. Ferner ist  $\pi s_{ij}^2$  die Fläche einer über  $dA_i$  errichteten Halbkugel mit Radius  $s_{ij}$  wie sie von  $dA_i$  aus gesehen wird. Integration von (4.43) über die beiden Flächenstücke  $A_i$  und  $A_j$  liefert die gesamte von  $A_i$  abgehende und auf  $A_j$  auftreffende Strahlungsenergie. Setzt man diese noch in Beziehung zur gesamten von  $A_i$  abgehenden Strahlungsenergie  $A_i J_i$ , so ergibt sich die Definitionsgleichung

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\pi s_{ij}^2} dA_j dA_i , \quad (4.44)$$

aus der sogleich die als Reziprozitätsgesetz bekannte Beziehung

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (4.45)$$

folgt. Sie kann bei der Berechnung von Sichtfaktoren nützlich sein. Da für viele geometrische Fälle exakte Lösungsformeln für  $F_{ij}$  existieren (siehe z. B. [4.17], [4.18], [4.20]), entfällt häufig die Berechnung des Mehrfachintegrals in (4.44).

Wie in Abbildung 4.9 angedeutet bestehe ein geschlossener Strahlungsraum aus  $N$  Teilstücken mit den Oberflächen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) und den zugehörigen homogenen Oberflächentemperaturen  $T_i$ . Eine Bilanz der von der Fläche  $A_i$  abgehenden totalen Ausstrahlung

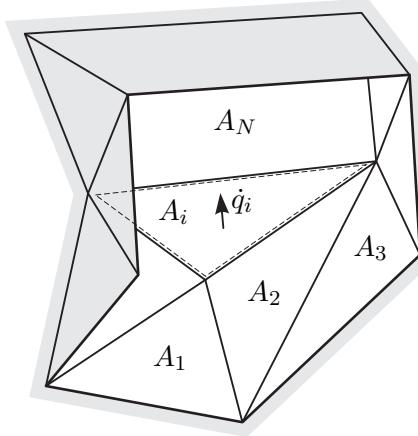


Abbildung 4.9: Schnitt durch einen geschlossenen Strahlungsraum.

liefert

$$J_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (4.46)$$

und daher die als Summationsregel bekannte Beziehung

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} . \quad (4.47)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (4.45) und der Summationsregel (4.47) wurden bereits zwei Formeln gefunden, die zur effizienten Berechnung von Sichtfaktoren ausgenutzt werden können. Weitere Vereinfachungen ergeben sich häufig, da für ebene Flächen und konvexe Körper  $F_{ii} = 0$  gilt. Außerdem lassen sich Sichtfaktoren addieren und subtrahieren. Werden zwei Flächen  $A_{i_1}$  und  $A_{i_2}$  zu einer Fläche  $A_i = A_{i_1} + A_{i_2}$  zusammengefasst, so gilt basierend auf (4.44)  $A_i F_{ij} = A_{i_1} F_{i_1 j} + A_{i_2} F_{i_2 j}$  für  $j \neq i_1, j \neq i_2$  und  $j \neq i$  sowie  $A_i F_i = A_{i_1} (F_{i_1 i_1} + F_{i_1 i_2}) + A_{i_2} (F_{i_2 i_1} + F_{i_2 i_2})$ . Daraus lassen sich einfach Regeln für die Subtraktion von Flächen ableiten.

Eine Bilanz der auf die Fläche  $A_j$  auftreffenden Strahlungsenergie liefert gemeinsam mit dem Reziprozitätsgesetz (4.45)

$$A_j G_j = \sum_{i=1}^N A_i J_i F_{ij} = \sum_{i=1}^N A_j J_i F_{ji} \quad (4.48)$$

und daher vereinfacht unter Verwendung von (4.42)

$$G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji} J_i = \sum_{i=1}^N F_{ji} (\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i) . \quad (4.49)$$

Nun sei

$$\dot{q}_i = J_i - G_i = \varepsilon_i(\sigma T_i^4 - G_i) \quad (4.50)$$

die Nettowärmestromdichte die die Oberfläche  $A_i$  verlässt (vgl. Abbildung 4.9). An dieser Stelle ist es günstig auf Matrixschreibweise mit  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]_{i=1,\dots,N}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]_{i=1,\dots,N}$ ,  $\mathbf{T}^4 = [T_i^4]_{i=1,\dots,N}$ ,  $\mathbf{G} = [G_i]_{i=1,\dots,N}$  und  $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=1,\dots,N, j=1,\dots,N}$  zu wechseln. Aus (4.49) und (4.50) folgen damit direkt die von den Oberflächen austretenden Nettowärmestromdichten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \sigma \mathbf{T}^4 \\ &= \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \mathbf{T}^4 \end{aligned} \quad (4.51)$$

zufolge von thermischer Strahlung.

**Aufgabe 4.4 (Wärmestromdichten zufolge von thermischer Strahlung).** Berechnen Sie ausgehend von (4.49) und (4.50) beide in (4.51) dargestellten Ergebnisse.

**Aufgabe 4.5 (Wärmestrahlung zwischen parallelen unendlich ausgedehnten Platten).** Die beiden in Abbildung 4.10 skizzierten, durch Vakuum getrennten, unendlich ausgedehnten, ebenen, parallelen Platten haben die festen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ . Die Oberflächen sind graue, diffuse Strahler, haben die Emissivitäten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  und tauschen mittels thermischer Strahlung Energie aus.

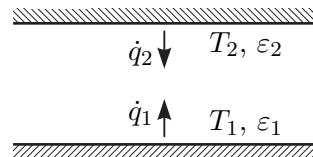


Abbildung 4.10: Unendlich ausgedehnte parallele Platten.

a) Begründen Sie formal warum hier für die Sichtfaktoren

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

gilt.

b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$ .

*Lösung von Aufgabe 4.5.*

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

**Aufgabe 4.6 (Rohrreaktor mit Wärmeeverlust durch Mantel).** Abbildung 4.11 zeigt den Querschnitt eines Rohrreaktors der durch eine Vakuumsschicht isoliert ist. Auf-

grund der im Innenrohr ablaufenden exothermen chemischen Reaktion wird stationär der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$  in W/m von der Reaktionskammer gleichmäßig an den Rohrmantel abgegeben. Alle Oberflächen sind graue, diffuse Strahler. Das Innenrohr mit dem Durchmesser  $d$  hat die Emissivität  $\varepsilon_1$ . Das Außenrohr mit dem Durchmesser  $D$  hat beidseitig die Emissivität  $\varepsilon_2$ . Es gibt durch Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ ) Wärme an die umgebende Luft mit der festen Temperatur  $T_\infty$  ab. Zusätzlich geht Wärme über thermische Strahlung an die umgebenden Oberflächen, welche im Mittel ebenfalls die feste Temperatur  $T_\infty$  besitzen, verloren. Die Rohrwände seien vernachlässigbar dünn. Für die Berechnung der thermischen Strahlung sei der Reaktor im Vergleich zu den ihn umgebenden Oberflächen vernachlässigbar klein.

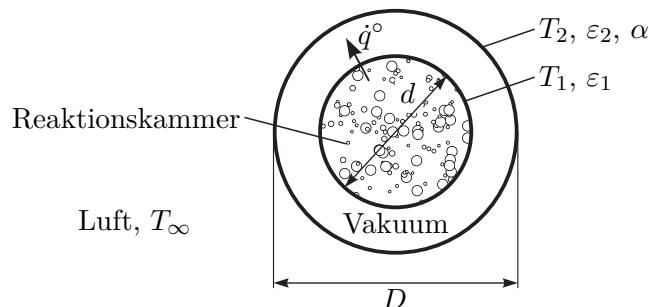


Abbildung 4.11: Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel.

- Wie groß darf  $\dot{q}^\circ$  maximal sein, damit das Außenrohr die bei Berührung durch Menschen ungefährliche Temperatur  $T_{2,max}$  nicht überschreitet?
- Welche Temperatur  $T_1$  stellt sich am Innenrohr ein, wenn der Reaktor bei der in Punkt a) berechneten Volllast betrieben wird?

#### Lösung von Aufgabe 4.6.

a)

$$\dot{q}^\circ \leq D\pi \left( \alpha(T_{2,max} - T_\infty) + \sigma\varepsilon_2(T_{2,max}^4 - T_\infty^4) \right) \quad (4.54)$$

b)

$$T_1 = \left( T_{2,max}^4 + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{D}{\varepsilon_1 d} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \left( \alpha(T_{2,max} - T_\infty) + \sigma\varepsilon_2(T_{2,max}^4 - T_\infty^4) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.55)$$

Die bisherigen Ergebnisse können direkt auch für 2-dimensionale Geometrien verwendet werden, allerdings vereinfacht sich in diesem Fall die in (4.44) definierte Berechnung von Sichtfaktoren erheblich. Die Annahme einer 2-dimensionalen Geometrie ist dann exakt erfüllt, wenn es sich um einen prismatischen Strahlungsraum (vgl. Abbildung 4.12a) mit unendlicher Längenausdehnung handelt. Die Flächen  $A_i$  sind dann vollständig durch

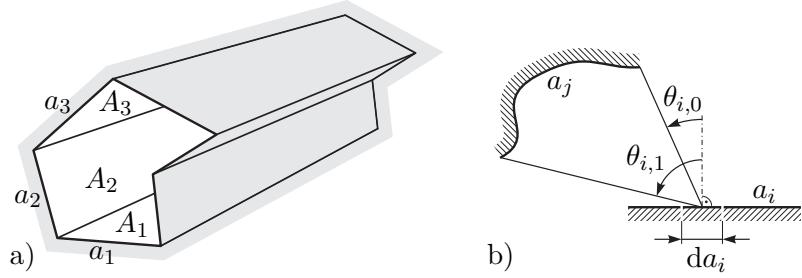


Abbildung 4.12: Vereinfachung bei 2-dimensionaler Geometrie, a) prismatischer Strahlungsraum, b) Integration entlang einer Kontur.

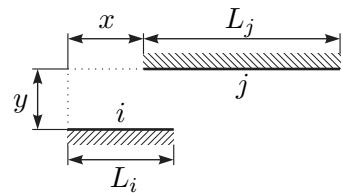
die zugehörigen (nicht notwendigerweise geraden) Konturen mit den abgewickelten Längen  $a_i$  definiert. Man kann zeigen, dass in solchen 2-dimensionalen Geometrien für den Sichtfaktor

$$F_{ij} = \frac{1}{a_i} \int_{a_i} \int_{a_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{2s_{ij}} da_j da_i = \frac{1}{2a_i} \int_{a_i} \sin(\theta_{i,1}) - \sin(\theta_{i,0}) da_i \quad (4.56)$$

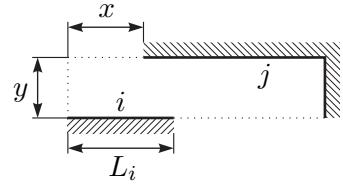
gilt. Die Winkel  $\theta_{i,0}$  und  $\theta_{i,1}$  sind in Abbildung 4.12b definiert. In (4.56) kann das Integral entlang der Kontur  $a_i$  sehr häufig direkt analytisch berechnet werden. Ergebnisse für einige Fälle, wo eine analytische Berechnung leicht möglich ist, sind in Tabelle 4.1 angegeben.

Tabelle 4.1: Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien.

$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( L_i + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



---

$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( L_j + \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} \right)$$

---

$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( L_i + L_j - \sqrt{L_i^2 + L_j^2 - 2L_i L_j \cos(\theta)} \right)$$

---

$$F_{ii} = 1 - \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y + x}$$

---

**Aufgabe 4.7 (Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien).** Rechnen Sie die in Tabelle 4.1 angegebenen Ergebnisse nach.

## 4.3 Wärmequellen

Wärme kann nicht originär erzeugt werden, sondern entsteht aus anderen Energieformen durch Umwandlung. Derartige Umwandlungsvorgänge und die Rückumwandlung von Wärme in andere Energieformen (soweit diese möglich ist) werden z. B. in der Thermodynamik studiert. Typische andere Energieformen sind mechanische Energie, elektrische Energie, chemische Energie, Strahlungsenergie und Kernenergie. Obwohl Wärme nur durch Umwandlung entstehen kann, ist es für Wärmebilanzen oft günstig von Wärmequellen zu sprechen. Im Folgenden werden einige Beispiele einfacher Umwandlungsvorgänge diskutiert.

### Mechanische Reibung

In Abschnitt 2.2.5 wurde vorgestellt wie mechanische Arbeit durch Dissipation in Wärme umgewandelt werden kann. Reibung tritt typischerweise an der Berührfläche zweier Körper auf oder in sich deformierenden Körpern. Der Einfachheit halber wird hier nur der erste Fall behandelt.

Zufolge einer Reibkraft  $\mathbf{f}_r$  (resultierende Reibkraft) zwischen zwei Oberflächen, die sich berühren, wird nur dann mechanische Energie in Wärme umgewandelt, wenn sich die zwei Flächen relativ zueinander verschieben. Tun sie dies mit der Relativgeschwindigkeit

$\mathbf{v}$ , so wird dem System mechanische Arbeit mit der Leistung

$$\dot{W}_r = -\mathbf{f}_r \cdot \mathbf{v} \quad (4.57)$$

entzogen. Da die Reibkraft stets der Bewegung entgegenwirkt, gilt  $\dot{W}_r \geq 0$ .  $\dot{W}_r$  kann in mechanische Verformungsenergie (plastische Deformation der Reibflächen, Bildung von Kratzern und Abrieb) oder Wärmeenergie umgewandelt werden. Welcher Anteil tatsächlich in Wärme umgewandelt wird, hängt von der jeweiligen Anwendung ab. In Bremsystemen beispielsweise soll ein möglichst großer Anteil in Wärme und nur ein geringer Anteil in Abriebenergie umgewandelt werden. Handelt es sich, anders als bei der für (4.57) postulierten translatorischen Relativbewegung, um einen rotatorischen Reibvorgang, so entspricht die Reibleistung alternativ zu (4.57) dem negativen inneren Produkt aus Reibmoment und Drehgeschwindigkeit.

Die durch Reibung entstehende Wärme wird direkt an der Reibfläche (oder im deformierten Volumen) frei. Es ist daher oft zweckmäßig, statt  $\dot{W}_r$  eine auf die Fläche (das Volumen) bezogene Wärmequelle, d. h. eine Quellendichte, in  $\text{W/m}^2$  ( $\text{W/m}^3$ ) zu verwenden.

### Ohmsche Last

Fließt durch ein infinitesimales Volumenelement  $dV$  eines elektrischen Leiters Strom mit der Stromdichte  $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ , so muss das Element gemäß dem Ohmschen Gesetz einem elektrischen Feld

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \rho_e(x, y, z, T)\mathbf{J}(x, y, z, t) \quad (4.58)$$

ausgesetzt sein [4.21]. Hier bezeichnet  $\rho_e$  den spezifischen Ohmschen Widerstand des Materials, der im Allgemeinen vom Ort  $(x, y, z)$  und der lokalen Temperatur  $T$  abhängt. Häufig wird die Formulierung

$$\rho_e(x, y, z, T) = \rho_{e,0}(x, y, z)(1 + \gamma(x, y, z)(T - T_0)) \quad (4.59)$$

mit dem Temperaturkoeffizienten  $\gamma$  und der Referenztemperatur  $T_0$  zur Beschreibung dieses Effekts verwendet [4.21].

Der Stromfluss verursacht Interaktionen zwischen den sich bewegenden Elektronen und dem Atomgitter des Leiters, was zu einer Erhöhung der im Material gespeicherten thermischen Energie führt. In einem Ohmschen Widerstand wird daher am Punkt  $(x, y, z)$  die Leistungsdichte

$$g(x, y, z, T, t) = \mathbf{E}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{J}(x, y, z, t) = \rho_e(x, y, z, T) \|\mathbf{J}(x, y, z, t)\|_2^2 = \frac{\|\mathbf{E}(x, y, z, t)\|_2^2}{\rho_e(x, y, z, T)} \quad (4.60)$$

[4.21] dissipiert, d. h. in Wärme umgesetzt. Diese Beziehung lässt sich aus dem Verlust an potentieller Energie, den Ladungsteilchen erfahren, wenn sie sich im elektrischen Feld bewegen, herleiten (vgl. [4.22]). Grundsätzlich stellt elektrisch leitendes Material mit einem spezifischen Widerstand  $\rho_e > 0$  also eine volumetrische Wärmequelle dar. Integriert

man  $g(x, y, z, T, t)$  über das Volumen  $\mathcal{V}$  des Ohmschen Widerstandes  $R$ , so ergibt sich die gesamte in Wärme umgesetzte Leistung (*Joulsche Wärme*)

$$\dot{W}(t) = \int_{\mathcal{V}} g(x, y, z, T, t) d\mathcal{V} = U(t)I(t) = RI^2(t) = \frac{U^2(t)}{R}, \quad (4.61)$$

[4.21] wobei  $U(t)$  die anliegende Spannung und  $I(t)$  der durchfließende Strom ist. Bei dieser Integration kann das Gebiet  $\mathcal{V}$  gedanklich in infinitesimale Stromröhren zerlegt werden, über deren Berandung kein Strom fließt.

Wird ein Leiter von Wechselstrom üblicher Netzfrequenz durchflossen, so reicht es zur Temperaturanalyse meist aus, mit den zeitlichen Mittelwerten von  $g(x, y, z, T, t)$  und  $\dot{W}(t)$  zu rechnen, d. h. mit Effektivwerten. Der Grund dafür ist, dass die Zeitkonstanten des thermischen Verhaltens meist signifikant höher sind als jene des elektrischen Verhaltens.

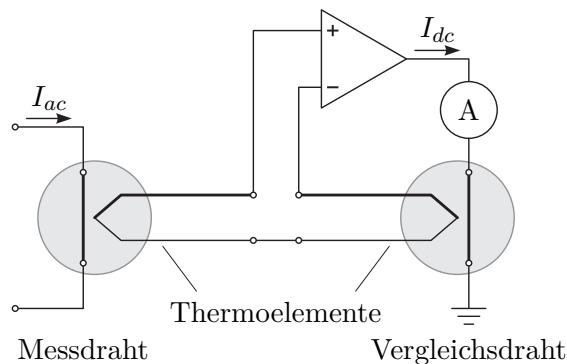


Abbildung 4.13: Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator zur Effektivwert-Messung des Stromes.

**Bemerkung 4.3.** Dieses Prinzip wird von sogenannten *Thermoumformern* zur Bestimmung von effektiven Stromwerten bei Frequenzen bis in den GHz-Bereich ausgenutzt. Dabei wird die Erwärmung eines stromdurchflossenen Widerstandsdrähtes gemessen. Dies erfolgt entweder direkt mit einem Thermoelement oder indirekt durch Erwärmung eines zweiten mit Gleichstrom betriebenen Vergleichsdrahtes. Der letztere, auch als Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator bekannte Fall ist in Abbildung 4.13 skizziert. Der mit dem Amperemeter gemessene Gleichstrom  $I_{dc}$  im Vergleichsdraht entspricht gerade dem Effektivwert des Stromes  $I_{ac}$  [4.23].

**Aufgabe 4.8 (Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator).** Für den in Abbildung 4.13 skizzierten Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator ist bekannt, dass der Messdraht und der Vergleichsdraht kreisrunde Querschnitte besitzen und aus dem gleichen Material gefertigt sind. Der Durchmesser des Messdrähtes sei  $D_{ac}$ ; jener des Vergleichsdrahtes  $D_{dc}$ . Die Drähte besitzen eine homogene Temperaturverteilung und werden ausschließlich durch Konvektion an der Mantelfläche gekühlt, wobei der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  und die Umgebungstemperatur  $T_\infty$  bei beiden Drähten ident

sind. Es wird hochfrequenter Wechselstrom  $I_{ac}$  gemessen, weshalb der Skin-Effekt die effektive Leiterquerschnittsfläche des Messdrahtes auf 10% reduziert. Mit welchem Durchmesserverhältnis  $D_{ac}/D_{dc}$  muss das Messgerät gebaut werden, damit der Gleichstrom  $I_{dc}$  dem zu messenden Effektivwert von  $I_{ac}$  entspricht?

*Lösung von Aufgabe 4.8.*

$$\frac{D_{ac}}{D_{dc}} = \sqrt[3]{10} \quad (4.62)$$

## 4.4 Stationäre Wärmeübertragung

In diesem Abschnitt werden einige einfache Beispiele zur stationären Wärmeübertragung diskutiert.

### 4.4.1 Ebene Wand

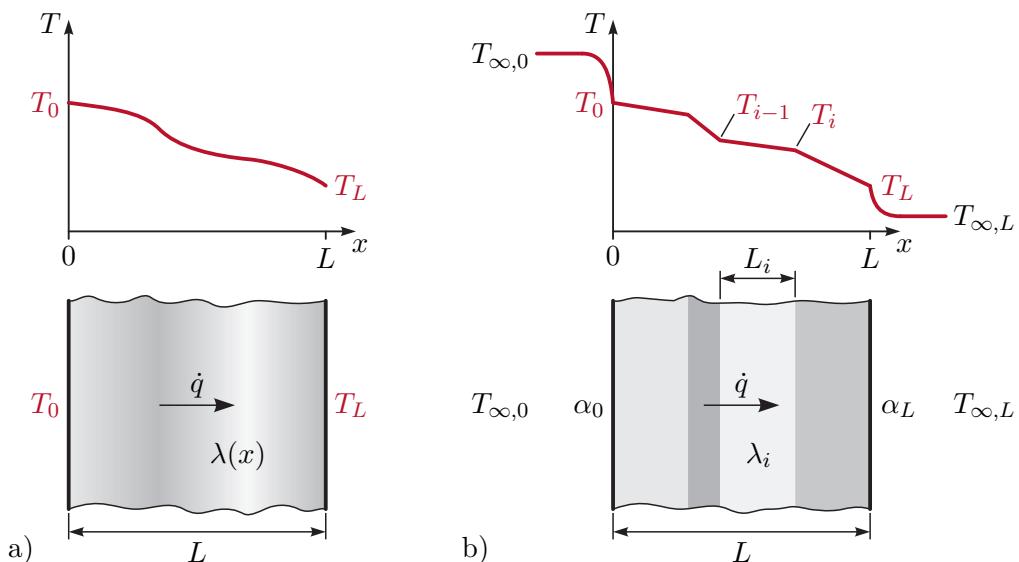


Abbildung 4.14: Stationäre Wärmeübertragung in ebener Wand, a) allgemeiner Wandaufbau mit Randbedingungen erster Art, b) schichtweise konstanter Wandaufbau mit Randbedingungen zweiter Art.

Die Bestimmung des Wärmestroms und des Temperaturprofils in einer ebenen Wand ohne Wärmequellen und mit Randbedingungen erster Art an beiden Oberflächen kann als 1-dimensionales Wärmeleitproblem in kartesischen Koordinaten aufgefasst werden. Im Folgenden soll von stationären Verhältnissen und isotropem Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(x)$  ausgegangen werden. Wie in Abbildung 4.14a dargestellt, habe die Wand die Dicke  $L$  und die beiden Oberflächentemperaturen  $T(0) = T_0$

und  $T(L) = T_L$ . Folglich gilt für das Temperaturprofil

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{\int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (4.63)$$

und für die Wärmestromdichte

$$\dot{q}(x) = -\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} = \text{const.} = \frac{T_0 - T_L}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(x)} dx}. \quad (4.64)$$

Wegen  $\lambda(x) > 0$  ist  $T(x)$  entsprechend (4.63) monoton. Wie gemäß Abschnitt 4.1 zu erwarten war, haben die Massendichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  keinen Einfluss auf den Wärmestrom und das stationäre Temperaturprofil in der Wand.

**Aufgabe 4.9 (Stationäre Wärmeübertragung durch ebene Wand).** Überprüfen Sie mit Hilfe von (4.1) und (4.4) die Gültigkeit von (4.63) und (4.64). Welchen Stetigkeitsanforderungen muss  $\lambda(x)$  genügen?

Ist eine Wand aus mehreren Schichten mit abschnittsweise konstanten Materialparametern aufgebaut, wie dies in Abbildung 4.14b gezeigt ist, dann vereinfacht sich die Berechnung der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  gemäß (4.64) erheblich. Man nehme an, die Wand bestehe aus den Schichten  $i = 1, \dots, N$  mit den jeweiligen Dicken  $L_i$  und Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_i$ . Außerdem soll nun von Randbedingungen zweiter Art mit den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_0$  und  $\alpha_L$  und den festen Temperaturen  $T_{\infty,0}$  und  $T_{\infty,L}$  der umgebenden Fluide ausgegangen werden. Für die Wärmestromdichte gilt dann

$$\dot{q} = (T_{\infty,0} - T_{\infty,L}) \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_L}}}_k. \quad (4.65)$$

Der Faktor  $k$  in  $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$  wird *Wärmedurchgangskoeffizient* (gelegentlich auch  $k$ -Wert) genannt. Je kleiner er ist, desto besser isoliert die Wand.

**Aufgabe 4.10 (Wärmedurchgangskoeffizient bei schichtweisem ebenem Wandaufbau).** Leiten Sie (4.65) ausgehend von (4.64) her.

#### 4.4.2 Zylinderförmige Wand

Für die in Abbildung 4.15 dargestellte aus  $N$  kreisförmigen Schichten bestehende Rohrwand soll für den stationären Fall ohne Wärmequellen der Temperaturverlauf und der Wärmestrom berechnet werden. Eine Schicht  $i \in \{1, \dots, N\}$  habe den Innenradius  $r_{i-1}$ , den Außenradius  $r_i$  und die homogene, temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_i$ . Im Rohr fließt ein Medium mit der festen Temperatur  $T_F$  und das Rohr wird von einem Medium mit der festen Temperatur  $T_\infty$  umströmt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Rohrinnenseite (Radius  $r_0$ ) sei  $\alpha_0$ ; an der Rohraußenseite (Radius  $r_N$ ) sei er  $\alpha_N$ . Alle

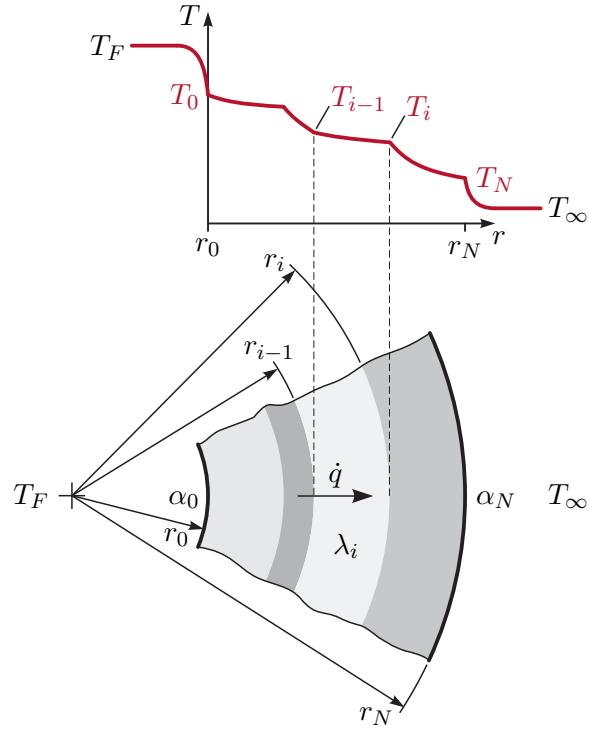


Abbildung 4.15: Stationäre Wärmeübertragung in zylinderförmiger Wand.

Größen seien unabhängig von der Winkelkoordinate  $\varphi$  und der Längscoordinate  $z$  (vgl. Abbildung 4.2a), so dass die Annahme 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung der radialen Koordinate  $r$  gerechtfertigt ist. Aus (4.5b) folgt damit für eine beliebige Schicht  $i \in \{1, \dots, N\}$

$$0 = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i). \quad (4.66)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$T(r) = T_{i-1} + (T_i - T_{i-1}) \frac{\ln \left( \frac{r}{r_{i-1}} \right)}{\ln \left( \frac{r_i}{r_{i-1}} \right)} \quad \forall r \in [r_{i-1}, r_i] \quad (4.67)$$

mit  $T_i = T(r_i)$  und  $T_{i-1} = T(r_{i-1})$ . Wie es sein muss, hängt die lokale Wärmestromdichte

$$\dot{q}(r) = -\lambda_i \frac{dT}{dr} = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln \left( \frac{r_i}{r_{i-1}} \right)} \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i) \quad (4.68)$$

vom Radius  $r$  ab. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen zweiter Art ergibt sich daher für die mehrschichtige Wand

$$\dot{q}(r) = (T_F - T_\infty) \underbrace{\frac{1}{r \frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln \left( \frac{r_i}{r_{i-1}} \right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}}_{=k(r)} \quad (4.69)$$

mit dem vom Radius abhängigen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(r)$  in  $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Praktisch interessant ist auch noch der vom Radius unabhängige auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom

$$\dot{q}^\circ = (T_F - T_\infty) \underbrace{\frac{2\pi}{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln \left( \frac{r_i}{r_{i-1}} \right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}}_{=k^\circ} \quad (4.70)$$

mit dem bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k^\circ$  in  $\text{W}/(\text{mK})$ .

*Aufgabe 4.11 (Bezogener Wärmedurchgangskoeffizient bei schichtweisem zylinderförmigem Wandaufbau).* Leiten Sie (4.70) ausgehend von (4.66) her.

#### 4.4.3 Vorspringende Teile und Rippen



Abbildung 4.16: Kühlkörper für Elektronikbauteile.

Um den Wärmeübergang zwischen Festkörpern und Fluiden zu verbessern, wird häufig die wirksame Wärmeaustauschfläche konstruktiv vergrößert, z. B. durch Rippen. Abbildung 4.16 zeigt ein Beispiel eines mit Rippen versehenen Kühlkörpers für Elektronikbauteile.

*Bemerkung 4.4.* Auch in der Natur sind solche konstruktiv vergrößerten Wärmeaustauschflächen zu beobachten: Delphine nützen ihre Flossen auch zur Temperaturregelung. Bei afrikanischen Elefanten entfällt rund ein Sechstel der Körperoberfläche auf die kühlenden Ohren.

Da eine exakte Berechnung des Temperaturfeldes und Wärmeübertragungsverhaltens solcher Bauteile meist mit erheblichem Aufwand verbunden ist, beschränken sich die

folgenden Ausführungen auf Näherungen mit zahlreichen vereinfachenden Annahmen. Es wird von 1-dimensionaler stationärer Wärmeleitung ausgegangen.

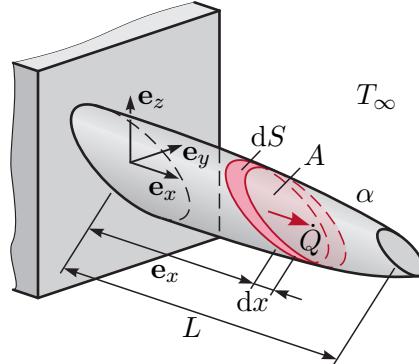


Abbildung 4.17: Wärmeleitung in vorspringendem Bauteil.

Der in Abbildung 4.17 skizzierte vorspringende Bauteil mit der Länge  $L$  habe am Ort  $x$  die lokale Querschnittsfläche  $A(x)$  und die isotrope Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(x, T)$ . Außerdem sei dessen Mantelfläche im Bereich  $[0, x]$  durch die Funktion  $S(x)$  gegeben. An der Mantelfläche wird ausschließlich durch Konvektion Wärme mit der Umgebung ausgetauscht, wobei sowohl der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha(x)$  als auch die feste Temperatur  $T_\infty(x)$  des Fluids von  $x$  abhängen können. Insbesondere bei eng angeordneten Rippen trifft dies zu. Der Bauteil besitzt keine Wärmequellen. Die Temperatur sei in jedem Querschnitt  $x = \text{const.}$  homogen, d. h. es wird von 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung  $x$  ausgegangen und für den Gesamtwärmestrom  $\dot{Q}(x)$  gilt entsprechend dem Fourierschen Wärmeleitgesetz (4.1)

$$\dot{Q}(x) = A(x)\dot{q}(x) = -\lambda(x, T)A(x)\frac{dT(x)}{dx} . \quad (4.71)$$

Die Energiebilanz für den infinitesimalen Bereich  $[x, x + dx]$  lautet

$$\dot{Q}(x) - \dot{Q}(x+dx) = \frac{d}{dx} \left( \lambda(x, T)A(x)\frac{dT(x)}{dx} \right) dx = \alpha(x)\frac{dS(x)}{dx}dx(T(x) - T_\infty(x)) , \quad (4.72)$$

wobei der Term auf der rechten Seite den konvektiven Wärmeaustausch mit der Umgebung beschreibt. Der Grenzübergang  $dx \rightarrow 0$  liefert die Bestimmungsgleichung

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda(x, T)A(x)\frac{dT(x)}{dx} \right) - \alpha(x)\frac{dS(x)}{dx}(T(x) - T_\infty(x)) = 0 \quad (4.73)$$

für das Temperaturfeld im Bauteil. Es handelt sich um ein lineares Randwertproblem, d. h. zur tatsächlichen Berechnung des Temperaturfeldes und der Wärmestromdichte werden natürlich noch Randbedingungen an den Stellen  $x = 0$  (Befestigungsstelle) und  $x = L$  (freie Stirnfläche) benötigt.

Im Folgenden werden einige Spezialisierungen des obigen Problems diskutiert, für die einfache analytische Lösungen existieren. Es handelt sich um einen umströmten Stab, wobei an der Stelle  $x = 0$  die Temperatur  $T(0) = T_0$  stets fest vorgegeben sei. Die Größen  $A$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  und  $T_\infty$  hängen nicht von  $x$  ab. Ferner sei  $\lambda$  unabhängig von der Temperatur und für die Mantelfläche gelte

$$S(x) = Px , \quad (4.74)$$

d. h. der lokale Umfang  $P = dS(x)/dx$  hängt nicht von  $x$  ab. An der Stirnfläche  $x = L$  ist zunächst mit konvektivem Wärmeübergang (Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_L$ , feste Fluidtemperatur  $T_\infty$ ) zu rechnen. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich (4.73) zu

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \underbrace{\frac{\alpha P}{\lambda A}}_{=m^2}(T(x) - T_\infty) = 0 \quad (4.75a)$$

mit den Randbedingungen

$$T(0) = T_0 , \quad \alpha_L(T(L) - T_\infty) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} . \quad (4.75b)$$

Die Lösung dieses Randwertproblems lautet

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\lambda m \cosh(m(L-x)) + \alpha_L \sinh(m(L-x))}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha_L \sinh(mL)} , \quad (4.76a)$$

so dass für den interessierenden Wärmestrom an der Stelle  $x = 0$

$$\dot{Q}(0) = \lambda Am(T_0 - T_\infty) \frac{\lambda m \sinh(mL) + \alpha_L \cosh(mL)}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha_L \sinh(mL)} \quad (4.76b)$$

folgt. Diese Lösung gilt für einen umströmten Stab mit einer Randbedingung erster Art an der Stelle  $x = 0$  und einer Randbedingung dritter Art an der Stelle  $x = L$ . Der Spezialfall einer adiabaten Randbedingung an der Stelle  $x = L$  (ideal isolierte Stirnfläche, Randbedingung zweiter Art) folgt direkt aus dem Ergebnis (4.76) durch Verwendung von  $\alpha_L = 0$ .

Wird an der Stelle  $x = L$  die Temperatur  $T_L$  fest vorgegeben (Randbedingung erster Art auf beiden Seiten), so sind die Randbedingungen (4.75b) durch

$$T(0) = T_0 , \quad T(L) = T_L \quad (4.77)$$

zu ersetzen und man erhält die Lösung

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty) \sinh(m(L-x)) + (T_L - T_\infty) \sinh(mx)}{\sinh(mL)} \quad (4.78a)$$

$$\dot{Q}(0) = \lambda Am \frac{(T_0 - T_\infty) \cosh(mL) - (T_L - T_\infty)}{\sinh(mL)} . \quad (4.78b)$$

Unabhängig von der Randbedingung an der Stelle  $x = L$  erhält man für den Spezialfall eines unendlich langen Stabes durch Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  aus den obigen Ergebnissen

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-mx} \quad (4.79a)$$

$$\dot{Q}(0) = \lambda Am(T_0 - T_\infty) . \quad (4.79b)$$

**Aufgabe 4.12 (Wärmeübertragung in einem umströmten Stab).** Rechnen Sie die Ergebnisse (4.76), (4.78) und (4.79) nach.

Mit den obigen Ergebnissen lässt sich der Effekt von Rippen (oder anderen konstruktiven Elementen) auf den Wärmeaustausch an einer Oberfläche bestimmen. Ausschlaggebend ist die Form und das Material der Rippen sowie deren Einfluss auf die Wärmeübertragung an der Oberfläche (z. B. verringelter Wärmeübergangskoeffizient durch behinderte Strömung und verringerte Wärmestrahlung durch Schattenwurf). Zur Beurteilung, ob der Einsatz bestimmter Rippen zweckmäßig ist, ist der Gesamtwärmestrom durch den Basisquerschnitt (Befestigungsstelle  $x = 0$ ) der Rippen sowie durch die zwischen den Rippen liegenden Flächen mit jenem Gesamtwärmestrom zu vergleichen, der ohne Rippen auftreten würde. In diesem Zusammenhang wird häufig der Rippenwirkungsgrad

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}(0)}{\dot{Q}_{max}} \in [0, 1] \quad (4.80)$$

als Maßzahl verwendet. Er setzt den tatsächlich an der Befestigungsstelle  $x = 0$  auftretenden Wärmestrom  $\dot{Q}(0)$  ins Verhältnis zum Wärmestrom  $\dot{Q}_{max}$ , der auftreten würde, wenn die gesamte Rippenoberfläche die Temperatur  $T_0$  hätte.

#### 4.4.4 Wärmetauscher

Abbildung 4.18 zeigt einen Gleich- und einen Gegenstromwärmetauscher mit den zugehörigen Temperaturverläufen in den Fluiden. Es wird angenommen, dass es sich um einen stationären Prozess handelt und dass die Fluide im Wärmetauscher eine isobare Zustandsänderung erfahren. Die Wärmeübertragung erfolgt in erster Linie durch *erzwungene Konvektion* in den Fluiden und *Wärmeleitung* in der Trennwand [4.3], [4.4], [4.16].

Es gibt stets ein wärmeres Fluid (Index  $h$ ) und ein kälteres Fluid (Index  $c$ ). Das Fluid  $i$  ( $i \in \{h, c\}$ ) mit dem Massenstrom  $\dot{m}_i$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_{p,i}$  habe an der Stelle  $x = 0$  (Punkt 1) die Temperatur  $T_{i,1}$  und an der Stelle  $x = L$  (Punkt 2) die Temperatur  $T_{i,2}$ . Je nach Art des Wärmetauschers strömt das Fluid entweder am Punkt 1 oder am Punkt 2 ein. Die Massenströme  $\dot{m}_i$  sind dementsprechend vorzeichenrichtig einzusetzen. Strömt das Fluid  $i$  am Punkt 1 (2) ein und am Punkt 2 (1) aus, so ist  $\dot{m}_i > 0$  ( $\dot{m}_i < 0$ ) zu verwenden. Beim Gegenstromwärmetauscher gilt daher  $\dot{m}_h \dot{m}_c < 0$ , beim Gleichstromwärmetauscher  $\dot{m}_h \dot{m}_c > 0$ . Mit dieser Vorzeichenkonvention für  $\dot{m}_i$  gelten die folgenden Ergebnisse sowohl für Gleich- als auch für Gegenstromwärmetauscher. Für die in Abbildung 4.18a eingezeichneten Strömungsrichtungen gilt beim Gleichstromwärmetauscher natürlich  $T_{h,2} \geq T_{c,2}$  und  $T_{h,1} - T_{c,1} \geq T_{h,2} - T_{c,2}$ . Für den Gegenstromwärmetauscher in Abbildung 4.18b muss dies nicht der Fall sein.

Die Trennwand zwischen den beiden Fluiden habe an der Stelle  $x$  den Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(x)$  und die lokale Breite  $b(x)$ . Die gesamte Wärmeübertragungsfläche ist daher  $A = \int_0^L b(x) dx$ . Alle übrigen Wände des Wärmetauschers seien adiabat. Eine zentrale Annahme bei der Berechnung der Wärmeströme und der Temperatur-

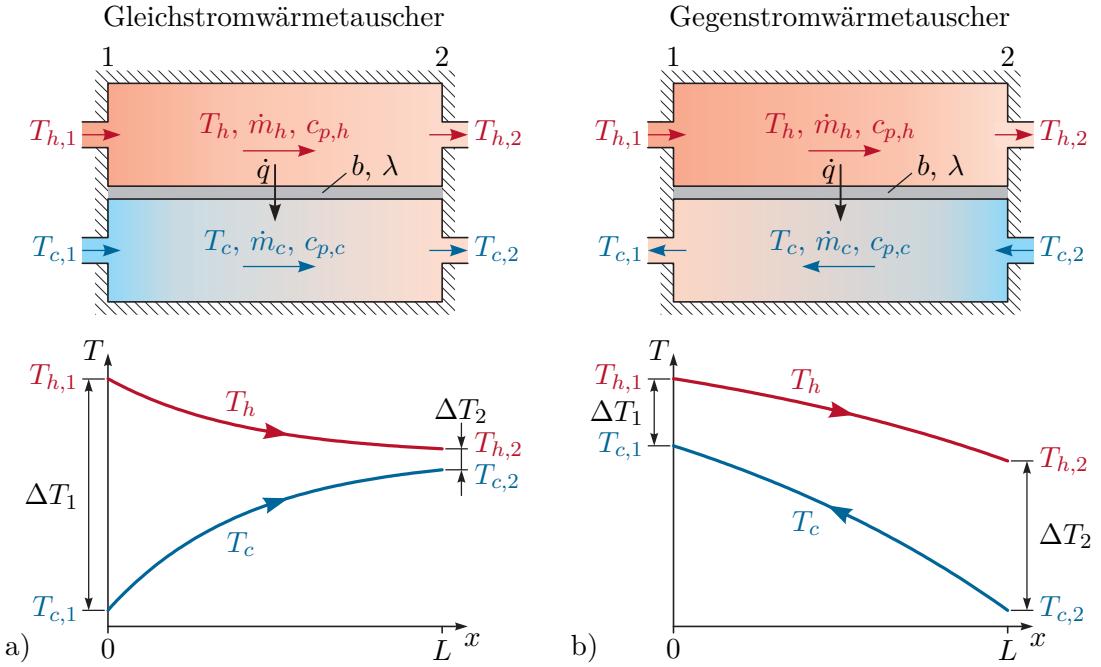


Abbildung 4.18: Wärmetauscher, a) Gleichstromwärmetauscher, b) Gegenstromwärmetauscher.

verläufe im Wärmetauscher ist, dass die Temperatur in jeder Kammer innerhalb einer Schicht  $x = \text{const.}$  homogen ist (zumindest außerhalb der Konvektionsgrenzschicht nahe der Trennwand). Aus der Enthalpiebilanz (1. Hauptsatz) für den infinitesimalen Bereich  $[x, x + dx]$  folgt

$$-c_{p,h}\dot{m}_h dT_h = c_{p,c}\dot{m}_c dT_c = (T_h - T_c)k(\tilde{x})b(\tilde{x})d\tilde{x} \quad (4.81)$$

und daher

$$-\frac{dT_h - dT_c}{T_h - T_c} = \left( \frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c} \right) k(x)b(x)dx. \quad (4.82)$$

Integration dieser Ausdrücke im Bereich  $[0, x]$  liefert

$$c_{p,h}\dot{m}_h(T_{h,1} - T_h(x)) = c_{p,c}\dot{m}_c(T_c(x) - T_{c,1}) \quad (4.83a)$$

$$\ln \left( \frac{T_{h,1} - T_{c,1}}{T_h(x) - T_c(x)} \right) = \underbrace{\left( \frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c} \right) \int_0^x k(x)b(x)dx}_{=K(x)} \quad (4.83b)$$

und nach kurzer Umformung die gesuchten Temperaturverläufe

$$T_h(x) = T_{h,1} + \frac{c_{p,c}\dot{m}_c(T_{c,1} - T_{h,1})}{c_{p,h}\dot{m}_h + c_{p,c}\dot{m}_c} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c} \right) K(x) \right) \right) \quad (4.84a)$$

$$T_c(x) = T_{c,1} + \frac{c_{p,h}\dot{m}_h(T_{h,1} - T_{c,1})}{c_{p,h}\dot{m}_h + c_{p,c}\dot{m}_c} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c} \right) K(x) \right) \right) \quad (4.84b)$$

sowie die lokale Wärmestromdichte

$$\dot{q}(x) = k(x)(T_{h,1} - T_{c,1}) \exp \left( - \left( \frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c} \right) K(x) \right). \quad (4.85)$$

Wertet man (4.83) noch an der Stelle  $x = L$  aus, so folgt unter Berücksichtigung des 1. Hauptsatzes der Gesamtwärmestrom  $\dot{Q}$  durch den Wärmetauscher in der Form

$$\dot{Q} = c_{p,h}\dot{m}_h(T_{h,1} - T_{h,2}) = c_{p,c}\dot{m}_c(T_{c,2} - T_{c,1}) = K(L) \underbrace{\frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}}_{= \Delta T_{log}} \quad (4.86a)$$

mit

$$\Delta T_1 = T_{h,1} - T_{c,1}, \quad \Delta T_2 = T_{h,2} - T_{c,2}. \quad (4.86b)$$

Die Funktion  $K(x)$  entspricht dem über die Fläche integrierten Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(x)$ . Für homogenes  $k$  gilt also  $K(L) = kA$ .

Der Wert  $\Delta T_{log}$  wird als auch als *logarithmische mittlere Temperaturdifferenz* bezeichnet [4.3], [4.4], [4.16]. Für gleiche Eingangstemperaturen ist  $\Delta T_{log}$  beim Gegenstromwärmetauscher größer als beim Gleichstromwärmetauscher. Um daher einen gewissen gegebenen Wärmestrom  $\dot{Q}$  zu übertragen, kann der Wert  $K(L)$  beim Gegenstromwärmetauscher kleiner sein als beim Gleichstromwärmetauscher. Da  $K(L)$  direkt mit der Baugröße und daher mit den Kosten des Wärmetauschers zusammenhängt, ist es im Allgemeinen günstiger Gegenstromwärmetauscher statt Gleichstromwärmetauscher einzusetzen.

**Bemerkung 4.5.** Das Gegenstromprinzip kommt auch im Blutkreislauf in den Extremitäten vieler Lebewesen zum Einsatz. Der Wärmeverlust nach außen soll minimiert werden und das venöse in den Körper zurückfließende Blut soll möglichst gut durch das arterielle in die Extremitäten einströmende Blut erwärmt werden. Spezialisierte Tiere kommen so mit sehr tiefen Temperaturen zurecht, z. B. Eisbären, Schlittenhunde und Pinguine, bei denen das arterielle Blut beim Erreichen der Fußsohlen schon beinahe die Temperatur des Untergrundes (z. B. Eis) hat.

Um die Übertragungsfähigkeit eines Wärmetauschers zu beurteilen, wird häufig auch der Wirkungsgrad

$$\eta_e = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} \in [0, 1] \quad (4.87)$$

als Maßzahl verwendet [4.4], [4.16]. Er setzt den tatsächlichen Gesamtwärmestrom  $\dot{Q}$  ins Verhältnis zum maximalen Wärmestrom  $\dot{Q}_{max}$  eines idealen Wärmetauschers (unendlich groß, nach außen hin perfekt isoliert).  $\dot{Q}_{max}$  tritt auf, wenn das Fluid mit dem geringeren Wärmekapazitätstrom am Ausgang die Eingangstemperatur des anderen Fluids erreicht, d. h. es gilt

$$\dot{Q}_{max} = \min\{c_{p,h}\dot{m}_h, c_{p,c}\dot{m}_c\} (\max\{T_{h,1}, T_{h,2}\} - \min\{T_{c,1}, T_{c,2}\}) . \quad (4.88)$$

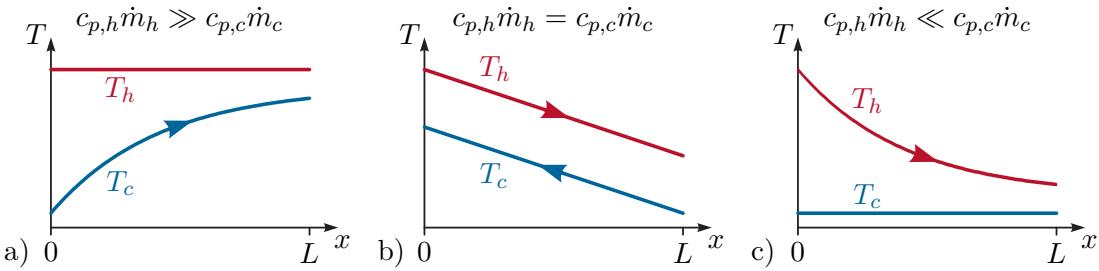


Abbildung 4.19: Spezielle Betriebsfälle eines Wärmetauschers, a)  $c_{p,h}\dot{m}_h \gg c_{p,c}\dot{m}_c$ , b)  $c_{p,h}\dot{m}_h = c_{p,c}\dot{m}_c$ , c)  $c_{p,h}\dot{m}_h \ll c_{p,c}\dot{m}_c$ .

Abbildung 4.19 zeigt abschließend drei spezielle Betriebsfälle von Wärmetauschern [4.4]. Im Fall  $c_{p,h}\dot{m}_h \gg c_{p,c}\dot{m}_c$  (Abbildung 4.19a) ist die Temperaturänderung des kälteren Fluids erheblich höher als jene des wärmeren. Im Grenzfall  $c_{p,h}\dot{m}_h \rightarrow \infty$ , welcher z. B. von kondensierendem Dampf gut erfüllt wird, bleibt  $T_h(x)$  konstant. Im Fall  $c_{p,h}\dot{m}_h \ll c_{p,c}\dot{m}_c$  (Abbildung 4.19c) gilt Analoges mit vertauschten Rollen der beiden Fluide. Der Grenzfall  $c_{p,c}\dot{m}_c \rightarrow \infty$  wird z. B. von verdampfenden Flüssigkeiten gut erfüllt. Wenn  $c_{p,h}\dot{m}_h = c_{p,c}\dot{m}_c$  und zusätzlich  $k(x)b(x) = \text{const.}$ , so sind  $T_h(x)$  und  $T_c(x)$  affin in  $x$ . Für einen Gegenstromwärmetauscher (Abbildung 4.19b) gilt dann  $T_h(x) - T_c(x) = \text{const.}$

## 4.5 Transiente Wärmeübertragung

Meist ist das Finden einer exakten analytischen Lösung von transienten Wärmeübertragungsproblemen, die die Wärmeleitgleichung (4.4) beinhalten, eine herausfordernde Aufgabe. Für praktische Anwendungen werden daher oft numerische Näherungsverfahren zur Lösung verwendet (vgl. Abschnitt 4.6). In speziellen Fällen lassen sich jedoch geschlossene analytische Lösungen finden, die z. B. bei der Verifikation von numerischen Lösungsverfahren oder als Näherungslösung für ähnliche Problemstellungen dienlich sein können.

**Aufgabe 4.13 (Einfaches transientes Wärmeleitproblem).** Für ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem mit konstanter, homogener Temperaturleitfähigkeit  $a$  gelte  $g = \lambda 2 \text{ K/m}^2$ , d. h.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2a \quad x \in [0, 1] , t > 0 . \quad (4.89a)$$

Hinzu kommen die Anfangs- und Randbedingungen

$$T(x, 0) = \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad x \in [0, 1] \quad (4.89b)$$

$$T(0, t) = 1, \quad T(1, t) = 0 \quad t > 0. \quad (4.89c)$$

Berechnen Sie die analytische Lösung dieses Problems. Sie können dabei die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit  $t$  verwenden.

*Lösung von Aufgabe 4.13.*

$$T(x, t) = e^{-ax^2t} \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad (4.90)$$

**Aufgabe 4.14 (Tauchsieder).** Der in Abbildung 4.20 skizzierte zylindrische Behälter ist zunächst vollständig mit Wasser (Masse  $m_0$ , spezifische Wärmekapazität  $c_p$  im flüssigen Zustand, Verdampfungsenthalpie  $h_v$ , Siedetemperatur  $T_s$ ) mit einer anfänglichen Temperatur  $T_0 = T_\infty$  gefüllt. Es wird angenommen, dass die Grundfläche und die mit einer Öffnung versehene Deckfläche des Behälters adiabat sind.

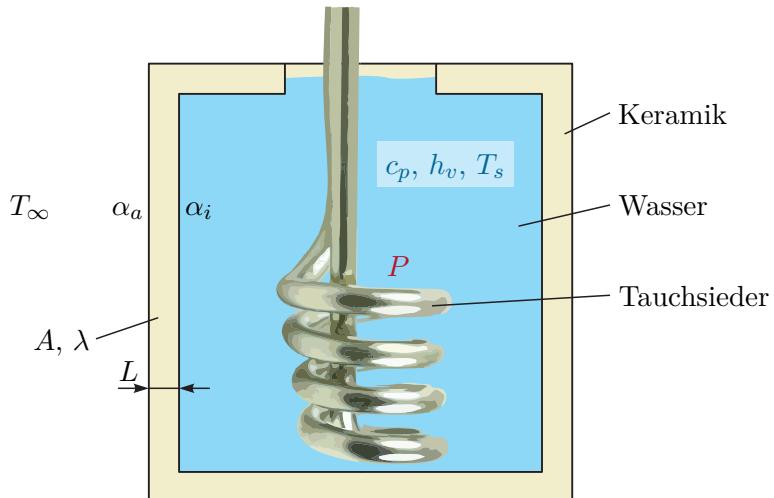


Abbildung 4.20: Wasserbehälter mit Tauchsieder.

Der Mantel des Zylinders hat eine Dicke  $L$  und eine Fläche  $A$  und besteht aus Keramik (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ ). Der Mantel tauscht durch freie Konvektion Wärme sowohl mit dem enthaltenen Wasser als auch mit der umgebenden Luft aus. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt innen  $\alpha_i$  und außen  $\alpha_a$ . Die wirksame Wärmeaustauschfläche ist proportional zum Füllstand des Behälters. Die Luft hat eine feste Temperatur  $T_\infty$ . Es ist von stationärer Wärmeübertragung durch den Behältermantel auszugehen, wobei die Wand aufgrund ihrer geringen Dicke als eben betrachtet werden kann. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird ein im Behälter eingebauter Tauchsieder eingeschaltet.

- a) Dimensionieren Sie die Leistung  $P$  des Tauchsieders so, dass das Wasser zum Zeitpunkt  $t_s > 0$  zu sieden beginnt. Nehmen Sie an, dass die gesamte Leistung in Wärme umgewandelt und vom Wasser aufgenommen wird.
- b) Zu welchem Zeitpunkt ist die Hälfte des Wassers verdunstet?
- c) Skizzieren Sie den Verlauf der Wassertemperatur.

*Lösung von Aufgabe 4.14.*

a)

$$P = Ak \left( \frac{T_s - T_0 e^{-\frac{Ak}{c_p m_0} t_s}}{1 - e^{-\frac{Ak}{c_p m_0} t_s}} - T_\infty \right). \quad (4.91)$$

b)

$$t_{1/2} = t_s + \ln(2) \frac{h_v m_0}{Ak(T_s - T_\infty)} \quad (4.92)$$

## 4.6 Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen

Die Wärmeleitgleichung (4.4) ist ein Anfangs-Randwert-Problem und gehört zur Klasse der parabolischen Differentialgleichungen. Die Randbedingungen ergeben sich in Abhängigkeit der jeweiligen Aufgabenstellung. Für stationäre Problemstellungen vereinfacht sich (4.4) zu einer elliptischen Differentialgleichung. Zur numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen mit Wärmeleitung kommen daher alle Verfahren in Frage, die grundsätzlich für parabolische oder elliptische Differentialgleichungen geeignet sind. Dazu gehören z. B. die Finite Differenzen Methode [4.24], das Kollokationsverfahren, die Galerkin Methode, die Finite Volumen Methode und die Finite Elemente Methode [4.25]. Außer der Finiten Differenzen Methode sind all diese Verfahren Spezialisierungen der Methode der gewichteten Residuen. Der vorliegende Abschnitt gibt eine erste Einführung in die Finite Differenzen Methode und eine daraus ableitbare konzentriert-parametrische Problemformulierung als thermisches RC-Netzwerk.

### 4.6.1 Finite Differenzen Methode

Bei der Finite Differenzen Methode wird das Rechengebiet örtlich und zumeist auch zeitlich in Gitter eingeteilt und die Lösung wird nur an den Gitterpunkten berechnet. Dazu werden die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten ersetzt. Für eine allgemeine, hinreichend oft differenzierbare Funktion  $y(x)$  sind in Tabelle 4.2 Beispiele für Differenzenquotienten gegeben, wenn das Gitter entlang der  $x$ -Achse eine gleichförmige Schrittweite  $\Delta x$  aufweist. Die Tabelle zeigt auch die Ordnung des Abschneidefehlers.

Tabelle 4.2: Differenzenquotienten.

1. Ableitung, Vorwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, Rückwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, zentrale Differenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$
2. Ableitung, zentrale Differenz	$y''(x) = \frac{y(x - \Delta x) - 2y(x) + y(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

**Aufgabe 4.15 (Differenzenquotienten).** Die Herleitung von Differenzenquotienten und die Berechnung der zugehörigen Abschneidefehler kann mittels Taylorreihenentwicklung am Punkt  $x$  erfolgen. Rechnen Sie auf diese Art die in Tabelle 4.2 angegebenen Differenzenquotienten nach.

Anhand des 1-dimensionalen Wärmeleitproblems

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \forall t > 0, x \in (0, L) \quad (4.93a)$$

(homogenes Material, konstante Materialparameter, keine Quellterme) für die Temperatur  $T(x, t)$  im Gebiet  $[0, L]$  mit den Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.93b)$$

$$T(L, t) = T_L(t) \quad (4.93c)$$

und der Anfangsbedingung

$$T(x, 0) = T_A(x) \quad (4.93d)$$

soll die Finite Differenzen Methode veranschaulicht werden. Das Rechengebiet wird örtlich in  $N$  Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) aufgeteilt, wobei

$$x_i = i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{L}{N}. \quad (4.94)$$

Außerdem soll die Zeitachse in Intervalle der festen Länge  $\Delta t$  unterteilt werden, so dass sich die Gitterpunkte

$$t_j = j\Delta t \quad (4.95)$$

ergeben. Für die Werte an den Gitterpunkten werden die Abkürzungen  $T_i(t) = T(x_i, t)$  und  $T_i^j = T(x_i, t_j) = T_i(t_j)$  verwendet. Aus einer Ersetzung der Ortsableitung in (4.93a) gemäß Tabelle 4.2 folgt das Anfangswertproblem

$$\dot{T}_i(t) = \frac{a}{\Delta x^2}(T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.96a)$$

$$\dot{T}_0(t) = \frac{2a}{\Delta x^2}(T_1(t) - T_0(t)) \quad (4.96b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i(0) = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 . \quad (4.96c)$$

In (4.96a) gilt natürlich  $T_N(t) = T_L(t)$ . Um (4.96b) zu erhalten, wurde ein virtueller Gitterpunkt an der Stelle  $x_{-1}$  eingeführt und die Randbedingung (4.93b) mit dem zentralen Differenzenquotienten ausgewertet. Dies führt auf

$$\frac{T_1(t) - T_{-1}(t)}{2\Delta x} = 0 \quad (4.97)$$

und damit die in (4.96b) verwendete Beziehung  $T_{-1}(t) = T_1(t)$ . Das Anfangswertproblem (4.96) ist linear und liegt bereits in Zustandsraumdarstellung vor. Es kann also direkt die Lösungsformel für lineare zeitinvariante Systeme zur Berechnung der Temperaturtrajektorien verwendet werden. Alternativ kann das Anfangswertproblem auch mit üblichen numerischen Methoden integriert werden. Das Euler-Vorwärtsverfahren, das aus der Anwendung des Vorwärtsdifferenzenquotienten (vgl. Tabelle 4.2) auf die linken Seiten von (4.96a) und (4.96b) folgt, ist eine solche Methode. Es führt auf die explizite Differenzengleichung

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t a}{\Delta x^2} (T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.98a)$$

$$T_0^{j+1} = T_0^j + \frac{2\Delta t a}{\Delta x^2} (T_1^j - T_0^j) \quad j \geq 0 \quad (4.98b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i^0 = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 . \quad (4.98c)$$

Es ist unmittelbar einsichtig, dass dieses zeitdiskrete lineare System nicht für beliebige Werte  $\Delta t a / \Delta x^2$  stabil ist. D. h. die Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  ist auf die Wahl der Ortsschrittweite  $\Delta x$  abzustimmen. Das Einhalten der Bedingung

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.99)$$

garantiert die Stabilität von (4.98). Auf den Beweis dieser Bedingung wird hier verzichtet – er kann z. B. in [4.26] nachgeschlagen werden.

Mit der hier beschriebenen Finite Differenzen Formulierung können bereits 1-dimensionale transiente Wärmeleitungsprobleme gelöst werden. Andere Arten der Diskretisierung, insbesondere der Zeitableitung in (4.93a) finden sich z. B. in [4.3], [4.4], [4.10]. Darunter sind auch Formulierungen die auf implizite Differenzengleichungen führen, deren Stabilität bedingungslos oder mit weniger stringenten Anforderungen an  $\Delta t$  und  $\Delta x$  gesichert ist. Die Anwendung des Verfahrens auf mehrdimensionale Wärmeleitprobleme wird z. B. in [4.4], [4.10], [4.11] beschrieben. Theoretische Grundlagen zur Finite Differenzen Methode finden sich z. B. in [4.24].

**Aufgabe 4.16 (Differenzenquotienten für unregelmäßige Gitter).** Auch die Anwendung der Finite Differenzen Methode mit unregelmäßigen Gittern und auf unregelmäßige Rechengebiete ist möglich. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Rechnungen. Es ist wie in Tabelle 4.2 von einer Funktion  $y(x)$  auszugehen, wobei die  $x$ -Achse mit der nicht notwendigerweise regelmäßigen Schrittweite  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  zu diskretisieren ist.

- a) Zeigen Sie, dass die zunächst naheliegende Formulierung

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (4.100)$$

für den zentralen Differenzenquotient 1. Ordnung einen Abschneidefehler von nur linearer Ordnung aufweist.

- b) Finden Sie unter Verwendung von  $y(x_{i-1})$ ,  $y(x_i)$  und  $y(x_{i+1})$  eine bessere Formulierung für  $y'(x_i)$ , deren Abschneidefehler stets quadratische Ordnung besitzt.
- c) Finden Sie unter Verwendung von  $y(x_{i-1})$ ,  $y(x_i)$  und  $y(x_{i+1})$  einen Differenzenquotienten, der eine Näherung für  $y''(x_i)$  repräsentiert, und zeigen Sie, dass deren Abschneidefehler lineare Ordnung besitzt.

### Lösung von Aufgabe 4.16.

b)

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} + y(x_i) \left( \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \right) - y(x_{i-1}) \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (4.101)$$

c)

$$y''(x_i) = 2 \frac{y(x_{i+1}) \frac{1}{\Delta x_i} - y(x_i) \left( \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + y(x_{i-1}) \frac{1}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (4.102)$$

**Aufgabe 4.17 (Stationäre Wärmeübertragung in einem umströmten Stab).** Rechnen Sie mit Hilfe der Finiten Differenzen Methode die Ergebnisse (4.76) und (4.78) für die Parameterwerte  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $T_0 = 353 \text{ K}$ ,  $T_L = T_\infty = 293 \text{ K}$ ,  $\alpha = \alpha_L = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $P = 0.5 \text{ m}$ ,  $A = 0.01 \text{ m}^2$  und  $\lambda = 60 \text{ W}/(\text{m K})$  nach. Implementieren Sie dazu die Gleichung (4.75a) samt den jeweils zugehörigen Randbedingungen in einem Computernumerikprogramm. Ersetzen Sie dabei die Ortsableitungen durch zentrale Differenzenquotienten gemäß Tabelle 4.2 für ein regelmäßiges Gitter mit der Schrittweite  $\Delta x$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse für unterschiedliche Schrittweiten mit den analytischen Resultaten (4.76) und (4.78).

*Aufgabe 4.18 (Transiente Wärmeübertragung in einem umströmten Stab).* Erweitern Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 4.17 zu einer transienten Analyse. Verwenden Sie die Anfangsbedingung  $T(x, 0) = T_\infty$  und die Parameter  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  und  $c_p = 450 \text{ J/(kg K)}$  und wählen Sie unter Berücksichtigung von (4.99) geeignete Schrittweiten  $\Delta t$  und  $\Delta x$ . Wie lange dauert es bis die maximale Differenz zwischen stationärem und transientem Temperaturprofil den Wert  $0.05(T_0 - T_\infty)$  unterschreitet?

### 4.6.2 Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk

Ein meist zentraler Schritt bei der numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen ist der Übergang von einer verteilt-parametrischen zu einer konzentriert-parametrischen Formulierung, d. h. die räumliche Diskretisierung. Im vergangenen Abschnitt beruhte dieser Übergang rein auf mathematischen Überlegungen zur Berechnung von Ableitungen. Aufbauend auf diesen Resultaten zeigt der vorliegende Abschnitt eine physikalisch motivierte Möglichkeit zur räumlich diskreten Formulierung von Wärmeübertragungsproblemen. Diese Formulierung führt auf eine anschauliche Analogie zwischen elektrischen RC-Netzwerken und thermischen Netzwerken (thermische RC-Netzwerke). Die nachfolgend näher diskutierten korrespondierenden Größen sind in Tabelle 4.3 aufgelistet.

Tabelle 4.3: Analogie zwischen elektrischen und thermischen Netzwerken.

Elektrische Größe	Einheit	Thermische Größe	Variable	Einheit
Potentialdifferenz	V	Temperaturdifferenz	$T$	K
Elektrischer Strom	A	Wärmestrom	$\dot{Q}$	W
Elektrische Ladung	C	Enthalpie	$H$	J
Elektrischer Widerstand	$\Omega$	Thermischer Widerstand	$R$	K/W
Elektrische Kapazität	F	Thermische Kapazität	$C$	J/K

Die Temperatur  $T$  stellt eine Zweipunktgröße dar, der Wärmestrom  $\dot{Q}$  eine Einpunktgröße. Ähnlich dem Ohmschen Gesetz in der Elektrotechnik gilt für die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  an den beiden Enden eines thermischen Widerstandes  $R$

$$\Delta T = R \dot{Q}. \quad (4.103a)$$

Ferner kann das dynamische Verhalten der Temperatur  $T$  (Zustandsgröße) einer thermischen Kapazität  $C$  durch

$$\dot{T} = \frac{\dot{Q}}{C} \quad (4.103b)$$

charakterisiert werden. Auch hier ist die Ähnlichkeit zur Strom-Spannungsbeziehung an elektrischen Kapazitäten unmittelbar ersichtlich. Bemerkenswerterweise findet sich im

Bereich der Wärmeübertragung aber kein Analogon zur elektrischen Induktivität. Dies erklärt aus physikalischer Sicht, warum es in thermischen Netzwerken (ohne periodische Anregung) kein oszillierendes Verhalten geben kann. D. h. das linearisierte dynamische System besitzt ausschließlich rein reelle Eigenwerte.

Die Darstellung eines Wärmeübertragungsproblems als thermisches RC-Netzwerk kann hilfreich sein, weil die aus der Elektrotechnik bekannten Knoten- und Maschengleichungen zur Netzwerkanalyse genutzt werden können. Ferner können gängige Netzwerksimulationsprogramme zur Berechnung herangezogen werden.

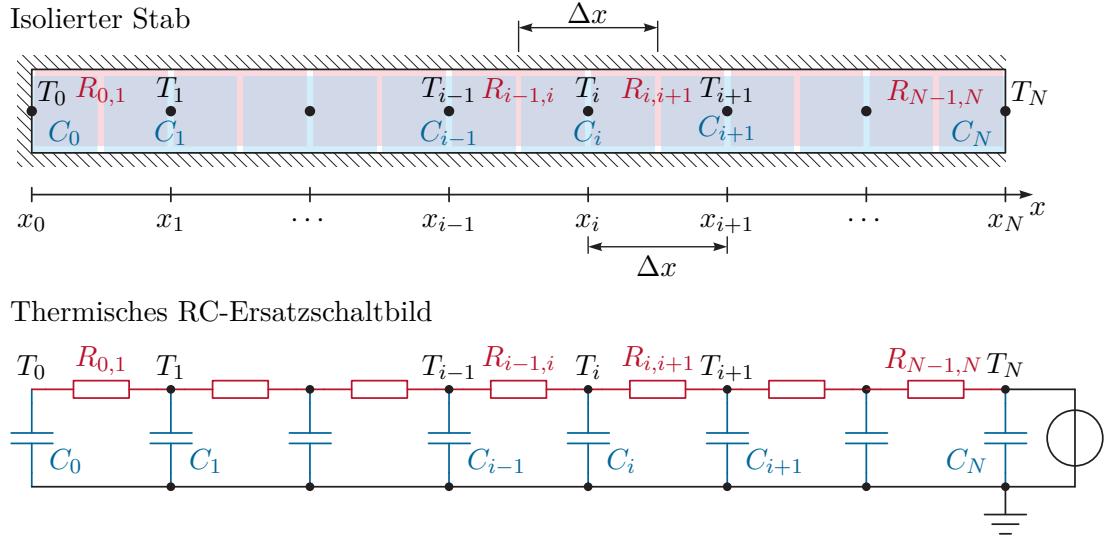


Abbildung 4.21: Finite Differenzen Formulierung als Kette von RC-Gliedern.

Abbildung 4.21 zeigt einen an der Mantelfläche und am Ende  $x = 0$  isolierten Stab, dessen transienter Temperaturverlauf z. B. mit Hilfe von (4.96) berechnet werden kann. Die Diskretisierungspunkte  $x_i$  sind als schwarze Punkte in Abbildung 4.21 dargestellt. Die Querschnittsfläche des Stabes sei konstant  $A$ . Man kann nun in (4.96a) und (4.96b) durch Umschreiben in die Form

$$\underbrace{\frac{\Delta x A \rho c_p}_{=C_i} \dot{T}_i(t)}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} = \underbrace{A \frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} (T_{i-1}(t) - T_i(t)) + \underbrace{A \frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i,i+1}}} (T_{i+1}(t) - T_i(t)) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.104a)$$

$$\underbrace{\frac{\Delta x}{2} A \rho c_p}_{=C_0} \dot{T}_0(t) = \underbrace{A \frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{0,1}}} (T_1(t) - T_0(t)) \quad (4.104b)$$

thermische Kapazitäten  $C_i$  und thermische Widerstände  $R_{i,i+1}$  identifizieren und das in Abbildung 4.21 gezeigte Ersatzschaltbild erstellen. Es hat eine leiterförmige Struktur und wird auch Cauer Modell genannt. Der thermische Widerstand  $R_{i,i+1}$  verbindet den Knoten  $x_i$  mit dem Knoten  $x_{i+1}$ . Die thermische Kapazität  $C_i$  verbindet den Knoten  $x_i$

mit der thermischen Masse. Da der Knoten  $x_0$  am Rand des Rechengebietes liegt, ist seine thermische Kapazität  $C_0$  nur halb so groß, wie die der Knoten im Inneren. Gleichermaßen würde auch für den Randknoten  $x_N$  gelten, dessen thermische Kapazität  $C_N$  aber hier nicht von Bedeutung ist, da  $T_N(t) = T_L(t)$  fest vorgegeben ist (Randbedingung erster Art).

An diesem einfachen Beispiel werden bereits einige der folgenden Prinzipien von thermischen RC-Netzwerken klar:

- Ein thermisches RC-Netzwerk beschreibt ein Anfangswertproblem (gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswerten, vgl. das Zustandsraummodell (4.96)).
- Thermische Widerstände stellen immer eine thermische Verbindungsstrecke zwischen zwei Knoten dar. Außerdem treten sie bei einigen Randbedingungen auf. Mit thermischen Widerständen lassen sich wärmeleitende Volumen und generell Wärmeübertragungsstrecken modellieren. Der in stationären Wärmeübertragungsproblemen häufig verwendete  $k$ -Wert (vgl. (4.65) und (4.69)) steht mit dem thermischen Widerstand über die Beziehung

$$R = \frac{1}{Ak} \quad (4.105)$$

in Verbindung, wobei  $A$  die Querschnittsfläche des Widerstandes ist.

- Volumetrische Wärmequellen können als zusätzliche in die Netzwerknoten mündende Stromquellen modelliert werden (vgl. Abbildung 4.22d).
- Thermische Kapazitäten sind immer direkt mit der thermischen Masse verbunden, d. h. alle Kapazitäten sind sternförmig um die thermische Masse angeordnet. Thermische Kapazitäten haben keinen Einfluss auf die stationäre Temperaturverteilung und das stationäre Wärmeübertragungsverhalten des Systems.
- Die Temperatur (das Potential) der thermischen Masse kann im Falle konstanter spezifischer Wärmekapazitäten auf einen beliebigen Wert gesetzt werden.
- Eine Randbedingung erster Art (fest vorgegebene Temperatur  $T_r$ ) kann als ideale Potentialquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 4.22a).
- Eine Randbedingung zweiter Art (fest vorgegebener Wärmestrom  $\dot{Q}_r$ ) kann als ideale Stromquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 4.22b). (Entfällt im obigen Beispiel, da der Wärmestrom am Rand  $x = 0$  verschwindet.)
- Eine Randbedingung dritter Art (temperaturabhängige Wärmestromdichte  $\alpha(T_\infty - T_r)$ , vgl. die Abschnitte 4.2.1 bis 4.2.3) kann mit Hilfe eines thermischen Widerstandes (Kontakt- oder Übergangswiderstand)

$$R_r = \frac{1}{A\alpha} \quad (4.106)$$

modelliert werden, wobei  $A$  die Fläche der Randbedingung ist. Ist eines der beiden Temperaturniveaus fest vorgegeben (gilt z. B. häufig für die Umgebungstemperatur  $T_\infty$ ), so ist der Widerstand an eine ideale Potentialquelle zu koppeln (vgl. Abbildung 4.22c).

- Soll ein RC-Netzwerkmodell auch zur Abbildung nichtlinearer Effekte (z. B. Wärmestrahlung, vgl. Abschnitt 4.2.4) verwendet werden, so sind die konstitutiven Beziehungen (4.103) durch entsprechende nichtlineare Ausdrücke zu ersetzen. Außerdem ist es natürlich möglich den linearisierten Anteil des thermischen Verhaltens als lineares Netzwerk zu modellieren.

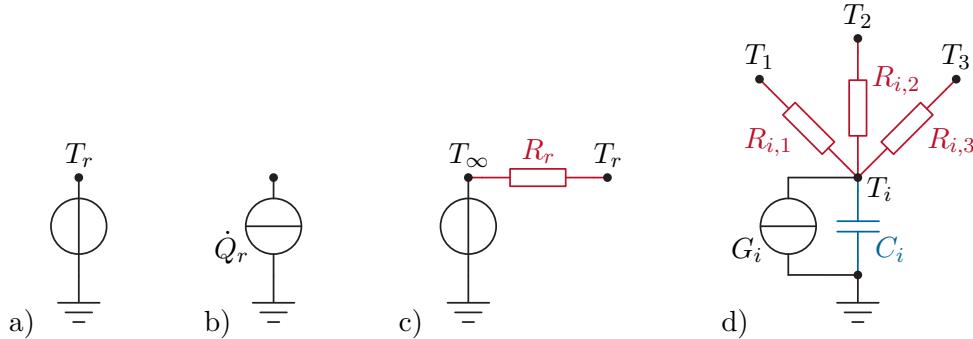


Abbildung 4.22: Basiselemente für thermische RC-Netzwerke, a) Randbedingung erster Art, b) Randbedingung zweiter Art, c) Randbedingung dritter Art, d) Knotenelement mit Wärmequelle.

Als Grundeinheit zur Erstellung thermischer RC-Netzwerke kann das in Abbildung 4.22d gezeigte Knotenelement  $i$  dienen. Es ist über eine Kapazität  $C_i$  mit der thermischen Masse und über Widerstände  $R_{i,j}$  mit den anderen Knoten  $j = 1, 2, \dots$  verbunden und beinhaltet außerdem eine (volumetrische) Wärmequelle  $G_i$ . Eine andere als die in Abbildung 4.21 gezeigte sternförmige Anordnung der Kapazitäten rund um die thermische Masse kann durch Transformationen gefunden werden. Eine eindeutige physikalische Interpretation ist jedoch nur bei der sternförmigen Anordnung der Kapazitäten möglich.

Im obigen Beispiel wurde gezeigt, dass eine Finite Differenzen Formulierung eines Wärmeübertragungsproblems eine einfache Interpretation als thermisches RC-Netzwerk in Form eines Cauer Modells zulässt. Dieses Prinzip ist erweiterbar, denn das Modellierungsergebnis muss nicht zwingend ein Cauer Modell sein und der Ausgangspunkt der Modellierung ist zumeist keine Finite Differenzen Diskretisierung. Vielmehr kann ausgehend von einem physikalischen Modell durch benutzerdefinierte Partitionierung des Rechengebietes direkt manuell ein thermisches RC-Ersatzschaltbild erstellt werden. Daraus kann leicht ein Zustandsraummodell des Systems abgelesen werden.

Im Falle eines prismatischen, an der Mantelfläche isolierten Körpers mit der volumetrischen Wärmequelle  $g$  gilt (vgl. auch (4.96))

$$C_i = \Delta x_i A p c_p \quad (4.107a)$$

$$R_{i,i+1} = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{A \lambda} \quad (4.107b)$$

$$G_i = \Delta x_i A g . \quad (4.107c)$$

In technischen Anwendungen mit komplexeren Geometrien werden diese Werte oft in Messungen oder numerischen Analysen bestimmt. Wie die nachfolgende Aufgabe zeigt,

können auch Serien- und Parallelschaltungen von thermischen Widerständen zumindest näherungsweise berechnet werden. In der darauffolgenden Aufgabe wird die passive Kühlung eines Elektronikbauteils untersucht.

**Aufgabe 4.19 (Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen).** Abbildung 4.23a zeigt einen inhomogenen wärmeleitenden Quader mit der Länge  $L$ , der Breite  $B$  und der Höhe  $H$  (vgl. [4.4]). An der linken und an der rechten Seitenfläche werden homogen verteilte feste Randtemperaturen eingeprägt (Randbedingungen erster Art). Alle übrigen Oberflächen sind adiabat. Der Quader besteht aus den vier Blöcken  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  mit unterschiedlichen Materialien.

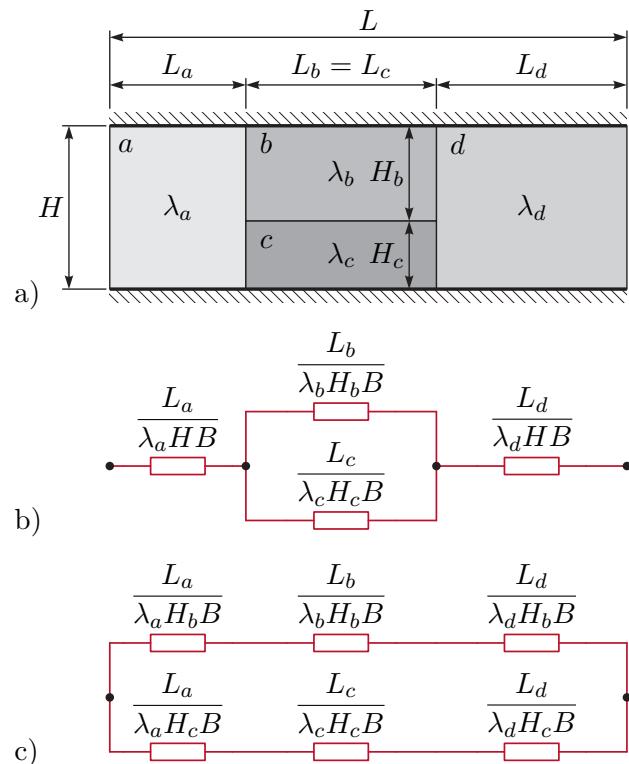


Abbildung 4.23: Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen (in Anlehnung an [4.4]), a) Aufbau, b) thermisches Ersatzschaltbild für obere Schranke des Gesamtwiderstandes, c) thermisches Ersatzschaltbild für untere Schranke des Gesamtwiderstandes.

Um den wahren thermischen Widerstand  $R$  des Quaders zu ermitteln, müsste ein 2-dimensionales stationäres Wärmeleitproblem (numerisch) gelöst werden. Durch einfache Serien- und Parallelschaltungen von Teilwiderständen lassen sich aber untere und obere Schranken für  $R$  finden, die oftmals brauchbare Näherungen für  $R$  sind.

Begründen Sie anhand der Abbildungen 4.23b und c, warum

$$\underline{R} = \frac{L_a}{\lambda_a H B} + \frac{1}{\frac{\lambda_b H_b B}{L_b} + \frac{\lambda_c H_c B}{L_c}} + \frac{L_d}{\lambda_d H B} \quad (4.108a)$$

eine untere Schranke für  $R$  und

$$\overline{R} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_b B} + \frac{L_b}{\lambda_b H_b B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_b B}} + \frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_c B} + \frac{L_c}{\lambda_c H_c B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_c B}}} \quad (4.108b)$$

eine obere Schranke für  $R$  darstellt.

**Aufgabe 4.20 (Dimensionierung eines Kühlkörpers für einen Spannungsregler).** Ein linearer Spannungsregler liefert am Ausgang  $U_a = 5$  V, wobei für die Eingangsspannung  $6 \text{ V} \leq U_e \leq 20 \text{ V}$  gelten muss. Die angeschlossene Last zieht einen Gleichstrom  $I_a = 0.5 \text{ A}$ . Der gleiche Strom fließt auch eingangsseitig, d. h. der Spannungsregler reduziert nur die Eingangsspannung auf den gewünschten Ausgangswert  $U_a$ . Aus dem Datenblatt des Spannungsreglers sind außerdem die thermischen Widerstandswerte  $R_{SB} = 5 \text{ K/W}$  und  $R_{B\infty} = 60 \text{ K/W}$  bekannt.  $R_{SB}$  ist der thermische Widerstand zwischen Sperrsicht und Basisplatte und  $R_{B\infty}$  ist der thermische Widerstand zwischen Basisplatte und Umgebungsluft. Die Basisplatte hat eine Masse  $m_B = 0.002 \text{ kg}$  und eine spezifische Wärmekapazität  $c_B = 385 \text{ J/(kg K)}$  (Kupfer). Die Wärmeübertragung über das Kunststoffgehäuse und die elektrischen Anschlusskontakte sei vernachlässigbar klein.

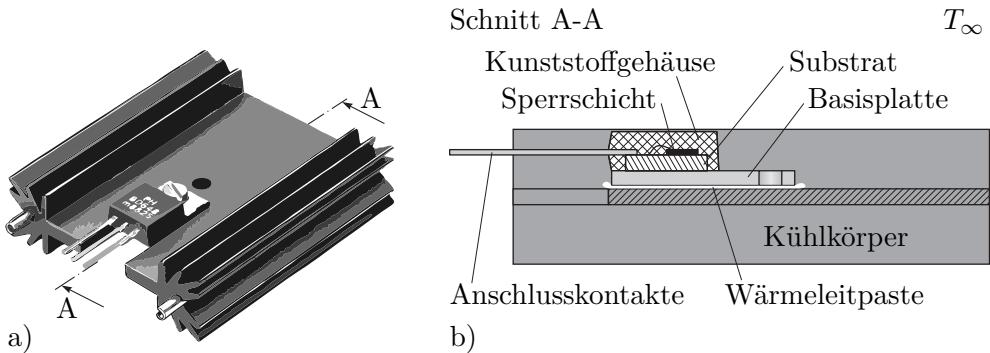


Abbildung 4.24: Spannungsregler mit Kühlkörper, a) Ansicht, b) innerer Aufbau.

Die Sperrsichttemperatur  $T_S$  soll den Wert  $T_{S,max} = 403 \text{ K}$  nicht überschreiten, wobei die Umgebungsluft die feste Temperatur  $T_\infty = 313 \text{ K}$  aufweist. Um die Kühlung zu verbessern, wird ein Kühlkörper (passive Kühlung) mit der Masse  $m_K = 0.02 \text{ kg}$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_K = 903 \text{ J/(kg K)}$  (Aluminium) aufgeschraubt. Der thermische Widerstand zwischen Kühlkörper und Umgebungsluft beträgt laut Datenblatt des Kühlkörpers  $R_{K\infty} = 7 \text{ K/W}$ . Durch die Verwendung von

Wärmeleitpaste konnte der Übergangswiderstand zwischen Basisplatte und Kühlkörper im Vergleich zu einem Luftspalt deutlich reduziert werden. Die Paste besitzt eine Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda = 0.8 \text{ W}/(\text{m K})$  und wurde auf einer Fläche  $A = 150 \text{ mm}^2$  mit einer Dicke  $H = 30 \mu\text{m}$  aufgetragen.

- Zeichnen Sie das thermische Ersatzschaltbild einmal ohne und einmal mit dem Kühlkörper. Berücksichtigen Sie dabei auch die thermische Kapazität der Basisplatte  $C_B$  und des Kühlkörpers  $C_K$ . Alle übrigen thermischen Kapazitäten im Spannungsregler seien vernachlässigbar.
- Wie hoch darf die Eingangsspannung  $U_e$  im stationären Fall maximal sein, damit die zulässige Sperrsichttemperatur  $T_{S,max}$  eingehalten wird? Berechnen Sie das Ergebnis sowohl für den Fall ohne als auch mit dem Kühlkörper.
- Offensichtlich ist es auch mit dem Kühlkörper nicht zulässig, die Eingangsspannung konstant auf 20 V zu halten. Zur Untersuchung des Einflusses von Schwankungen der Eingangsspannung gehen Sie nun davon aus, dass die Eingangsspannung den Verlauf  $U_e(t) = \bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft)$  mit  $\bar{U}_e = 13 \text{ V}$  und  $\hat{U}_e = 7 \text{ V}$  besitzt. Welche Frequenz  $f$  muss das Signal mindestens haben, damit der Spannungsregler in der Konfiguration mit dem Kühlkörper nicht überhitzt?

#### Lösung von Aufgabe 4.20.

- In Abbildung 4.25 steht  $P$  für die Heizleistung des Spannungsreglers und  $R_P$  für den Wärmeübergangswiderstand der Wärmeleitpaste.

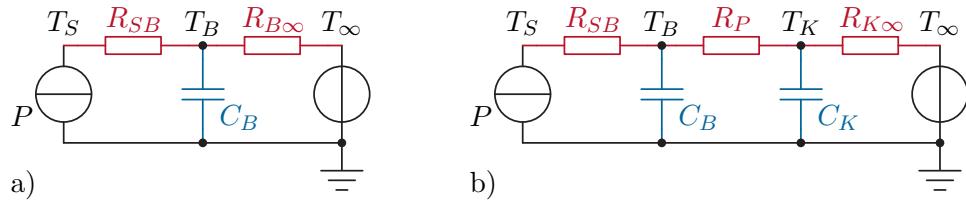


Abbildung 4.25: Thermische Ersatzschaltbilder, a) ohne Kühlkörper, b) mit Kühlkörper.

- Die Eingangsspannung  $U_e$  darf ohne den Kühlkörper maximal 7.462 V und mit dem Kühlkörper maximal 18.061 V betragen.
- Die Frequenz  $f$  muss bei mindestens  $1.429 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} = 5.146 \text{ h}^{-1}$  liegen.

## 4.7 Literatur

- [4.1] M. Moran und H. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 6. Aufl. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [4.2] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan und F. Mayinger, *Thermodynamik, Band 1: Einstoffsysteme*, 18. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [4.3] H.D. Baehr und K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [4.4] F.P. Incropera, D.P. DeWitt, T.L. Bergman und A.S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [4.5] J.H. Lienhard IV und J.H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3. Aufl. Cambridge, Massachusetts: Phlogiston Press, 2002.
- [4.6] J. Welty, C. Wicks, R. Wilson und G. Rorrer, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 5. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [4.7] M. Protter und H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*. New York: Springer, 1984.
- [4.8] W.M. Kays, M.E. Crawford und B. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer*, 4. Aufl. New York: McGraw Hill, 2005.
- [4.9] H. Schlichting und K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, 10. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [4.10] A. Bejan und A. Kraus, Hrsg., *Heat Transfer Textbook*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.
- [4.11] Y. Çengel und G. A.J., *Heat Transfer: A Practical Approach*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2011.
- [4.12] M. Favre-Marinet und S. Tardu, *Convective Heat Transfer: Solved Problems*, Ser. ISTE. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [4.13] J. Holman, *Heat transfer*, 10. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [4.14] Verein Deutscher Ingenieure, *VDI-Wärmeatlas*, 10. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [4.15] W. Wagner, *Wärmeübertragung: Grundlagen*, 7. Aufl., Ser. Kamprath-Reihe. Würzburg: Vogel Buchverlag, 2011.
- [4.16] Y. Çengel, J. Cimbala und R. Turner, *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [4.17] M.F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, 3. Aufl. New York: Academic Press, 2013.
- [4.18] J. Howell, R. Siegel und P. Mengüç, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5. Aufl. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [4.19] H.C. Hottel und A.F. Sarofim, *Radiative Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [4.20] J.R. Howell, *A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factors*, 3. Aufl. <http://www.engr.uky.edu/rtr/Catalog>, 2010.

- [4.21] M. Albach, *Grundlagen der Elektrotechnik 1: Erfahrungssätze Bauelemente Gleichstromschaltungen*, 3. Aufl. München: Pearson Studium, 2011.
- [4.22] P. Tipler und R. Llewellyn, *Moderne Physik*, 2. Aufl. München: Oldenbourg, 2010.
- [4.23] E. Schrüfer, L. Reindl und B. Zagari, *Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen*, 10. Aufl. München: Hanser, 2012.
- [4.24] J. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Ser. Texts in Applied Mathematics 22. New York: Springer, 1995.
- [4.25] J.-M. Bergheau und R. Fortunier, *Finite Element Simulation of Heat Transfer*. Hoboken, NJ: Wiley, 2008.
- [4.26] H.R. Schwarz und N. Köckler, *Numerische Mathematik*, 6. Aufl. Wiesbaden: B.G. Teubner, 2006.