Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 08.05.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	4	9	9	10	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In tropischen Meeren ist die mittlere Oberflächentemperatur des Wassers deutlich höher als die Temperatur in einigen hundert Metern Tiefe. Abbildung 1 zeigt eine vereinfachte Darstellung eines kalorischen Meereskraftwerks in einem solchen Meer, bei welchem die Einlauftemperatur als T_{zu} und die Auslauftemperatur als T_{ab} bezeichnet wird. Die Wärmekapazität des Wassers ist c_p. 4 P.|

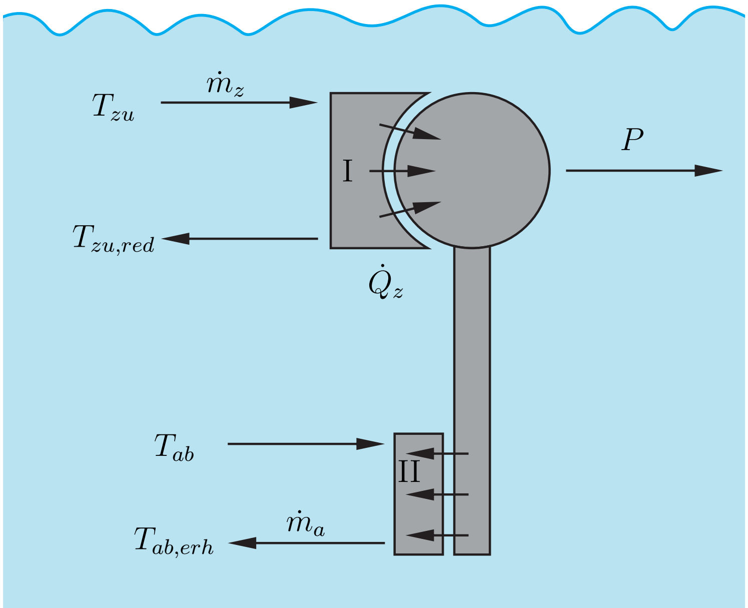


Abbildung 1: Kalorisches Meereskraftwerk.

a) Wie groß ist der maximale thermische Wirkungsgrad eines Kraftwerkes das zwischen den Temperaturniveaus T_{zu} und T_{ab} arbeitet? 1 P.|
Hinweis: Die Temperaturen $T_{zu} > T_{ab}$ des Carnotschen Rechtsprozesses sind in $°C$ gegeben und es gilt $T_0 = 273.15$K.

b) Welchen Wert erhält man, wenn man berücksichtigt, dass zur Übertragung der Wärme vom Meerwasser auf das Arbeitsmedium und umgekehrt Temperaturdifferenzen im Zulauf I und Ablauf II von jeweils T_{hub} notwendig sind? Beschreiben Sie die Auswirkung auf den Wirkungsgrad? 1 P.|

c) Welche Wärme $\dot{Q}_z$ muss mindestens pro Zeiteinheit zugeführt werden, um eine Kraftwerksleistung P zu erzielen? 1 P.|

d) Welcher Massenstrom $\dot{m} = \dot{m}_z = \dot{m}_a$ von Meerwasser wird zur Wärmezufuhr benötigt? 1 P.|

Lösung:

a) Aus der Definition des Wirkungsgrades für einen Carnotschen Rechtsprozesses folgt der höchstmögliche Wirkungsgrad zu

$$\eta_{CR} = 1 - \frac{T_{ab} + T_0}{T_{zu} + T_0}.$$

b) Unter Berücksichtigung des Temperaturhubs von jeweils T_{hub} am Ein- und Auslauf des Kraftwerks reduziert sich der maximal mögliche Wirkungsgrad auf

$$\eta_{CR,hub} = 1 - \frac{T_{ab,erh} + T_0}{T_{zu,red} + T_0} = 1 - \frac{T_{ab} + T_{hub} + T_0}{T_{zu} - T_{hub} + T_0}.$$

c) *Die erforderliche Wärme $\dot{Q}_z$ für eine Leistung P lautet*

$$\dot{Q}_z = \frac{P}{\eta_{CR,hub}}.$$

Der erforderliche Massenstrom $\dot{m}$ berechnet sich zu

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_z}{\Delta t c_p} = \frac{\dot{Q}_z}{\left(T_{zu,red} - T_{ab,erh}\right) c_p}.$$

2. In Abbildung 2 ist eine italienische Espressomaschine schematisch dargestellt. Dabei wird Wasser im Kannenunterteil bis zum Siedepunkt erhitzt. Der entstehende Wasserdampf drückt das Wasser in das Steigrohr durch den mit Kaffee gefüllten Trichtereinsatz in das Kannenoberteil. 9 P.|

Durch den Boden der Kaffeemaschine wird der Wärmestrom $\dot{Q}_{zu}$ zugeführt. Über die zylindrische Seitenwand (Innenradius r_i, Außenradius r_a, effektive Länge z_w) mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \text{const.}$ und den Wärmeübergangskoeffizienten α_i und α_a erfolgt ein konvektiver Wärmeaustausch mit der Umgebung der Temperatur T_∞.

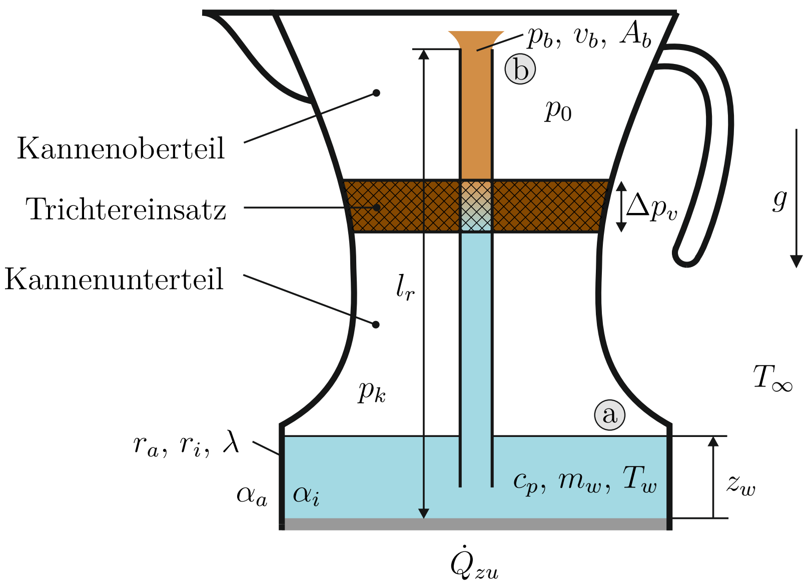


Abbildung 2: Espressomaschine in Kannenbauform.

a) Berechnen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur T_w des Wassers mit der Masse m_w und der Wärmekapazität c_p. Sie können dabei eine homogene Wassertemperatur im Kannenunterteil voraussetzen und annehmen, dass die Masse m_w konstant ist. 2.5 P.|

Nehmen Sie für die folgenden Punkte eine nicht viskose, inkompressible und stationäre Strömung an. Der Druck p_k im Kannenunterteil ist bekannt.

b) Mit welcher Geschwindigkeit v_b tritt das Wasser mit der Dichte ρ aus dem Steigrohr aus, wenn sich der durch den Kaffee verursachte Strömungswiderstand durch 2.5 P.|

$$\Delta p_v = k_v \rho \frac{v_b^2}{2}$$

darstellen lässt. Stellen Sie dazu die Bernoulli-Gleichung für die Strömungslinie von a nach b unter Vernachlässigung der Änderung der Wasserspiegelhöhe z_w auf.

Betrachten Sie die Detailansicht der Espressomaschine aus Abbildung 3. Hierbei ist der Druck p_k so groß, dass der Deckel der Kaffeemaschine vom ausfließenden Kaffee angeströmt wird. Im Folgenden soll die auf den Deckel wirkende Kraft F in Richtung der Koordinate z bestimmt werden. Nehmen Sie dazu eine ideale Umlenkung des Strahles an, d.h. es treten keine Energieverluste durch Reibung auf.

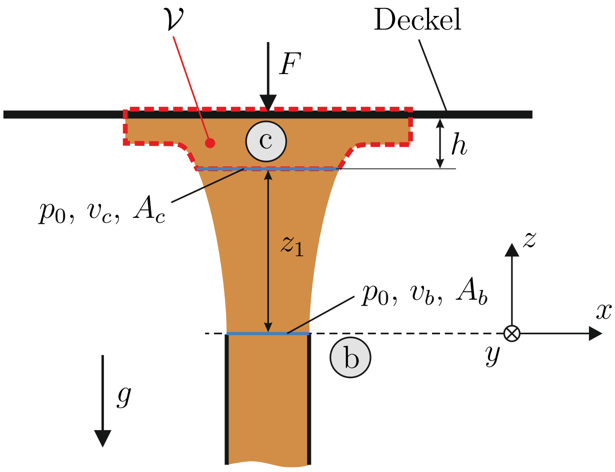


Abbildung 3: Detailansicht der Espressomaschine.

c) Geben Sie die Bernoulli-Gleichung für die Strömungslinie zwischen den Punkten ⓑ und ⓒ an. Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $v_c(z)$. 1 P.|

d) Schreiben Sie die Massenerhaltung zwischen den Punkten ⓑ und ⓒ an. Lösen Sie die Gleichung nach $A_c(z)$ auf. 1 P.|

e) Stellen Sie die Impulserhaltung für das Kontrollvolumen $\mathcal{V}$ in z-Richtung auf und berechnen Sie daraus die Kraft F. **Hinweis**: Sie können aufgrund von $h \ll z_1$ annehmen, dass die potentielle Energie am Eintritt und Austritt des Wasserstrahls gleich ist. 2 P.|

Lösung:

a) *Differentialgleichung der Wassertemperatur T_w:*

$$\dot{T}_w = \frac{1}{m_w c_p}\left(\dot{Q}_{zu} - \frac{2\pi z_w (T_w - T_\infty)}{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + \frac{1}{r_a \alpha_a}}\right)$$

b) *Austrittsgeschwindigkeit v_b aus Bernoulli-Gleichung:*

$$p_k + \rho g z_w = p_0 + \rho\frac{v_b^2}{2} + \rho g l_r + k_v \rho \frac{v_b^2}{2}$$

$$v_b = \frac{1}{\sqrt{1+k_v}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_k - p_0\right) - 2g\left(l_r - z_w\right)}$$

c) *Geschwindigkeit $v_c(z)$ aus Bernoulli-Gleichung:*

$$p_0 + \rho\frac{v_b^2}{2} = p_0 + \rho\frac{v_c^2(z)}{2} + \rho g z$$
$$v_c(z) = \sqrt{v_b^2 - 2gz}$$

d) Fläche $A_c(z)$ aus Massenerhaltung:

$$\rho v_b A_b = \rho v_c(z) A_c(z)$$
$$A_c(z) = \frac{v_b}{v_c(z)} A_b$$

e) Kraft F aus Impulserhaltung in z-Richtung:

$$\rho \int_{A_c(z_1)} \mathbf{v}_n \left(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{n}_n\right) \mathrm{d}A = F$$
$$F = -\rho v_b A_b \sqrt{v_b^2 - 2 g z_1}$$

3. Ein Skifahrer fährt wie in Abbildung 4 dargestellt mit der Geschwindigkeit v_0 über eine Kuppe mit dem Radius R. Aufgrund gut präparierter Ski kann Reibungsfreiheit zwischen Ski und Schnee angenommen werden. Weiters soll die Masse m des Skifahrers konzentriert im Schwerpunkt in einer Höhe h über der Schneeoberfläche vorausgesetzt werden. 9 P.|

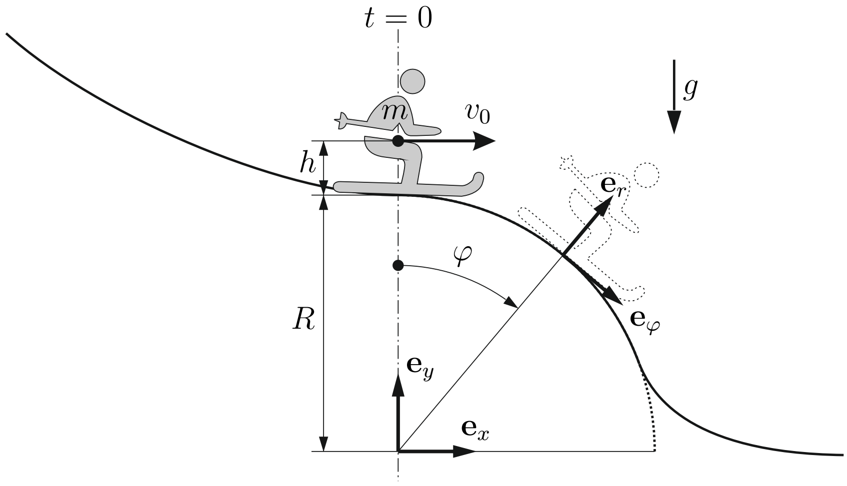


Abbildung 4: Ein Skifahrer fährt über eine Kuppe.

Für die folgenden Unterpunkte wird nur der Bereich vor dem Absprung betrachtet, womit $h = \text{const.}$ gilt.

a) Schneiden Sie den Skifahrer vom Untergrund für $\varphi > 0$ frei (Schnittprinzip) und fertigen Sie eine Skizze an, in der alle am Massenpunkt m angreifenden Kräfte dargestellt sind. **Hinweis:** Die Fliehkraft berechnet sich zu $F_F = mr\dot{\varphi}^2$. 2 P.|

b) Schreiben Sie unter Zuhilfenahme des Impulserhaltungssatzes in tangentialer Richtung $\mathbf{e}_\varphi$ die nichtlineare Bewegungsgleichung des Skifahrers in Form der Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi & \omega \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ an. Wie lauten die zugehörigen Anfangsbedingungen, wenn sich der Skifahrer zum Zeitpunkt $t = 0$ am Scheitelpunkt der Kuppe ($\varphi = 0$) befindet? 3 P.|

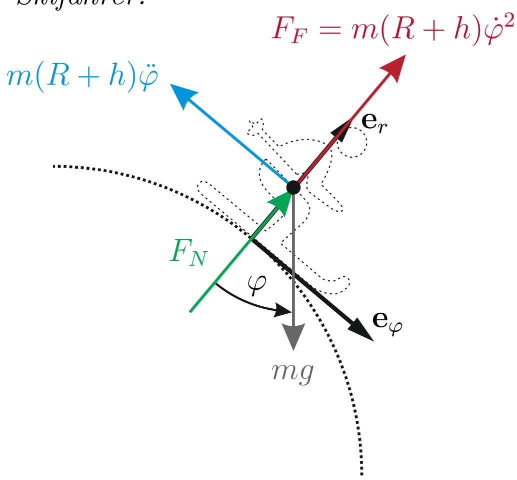
c) Bestimmen Sie die auftretende Normalkraft F_N zwischen Skifahrer und Schnee in Abhängigkeit des Zustandsvektors $\mathbf{x}$ aus dem Kräftegleichgewicht in radialer Richtung. 2 P.|

Durch Lösen der Bewegungsgleichung aus 3b) erhält man für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{R+h}(1-\cos(\varphi)) + \frac{v_0^2}{(R+h)^2}}$.

d) Welche Bedingung gilt für die Normalkraft F_N an der Absprungstelle φ^*? Bestimmen Sie den Absprungwinkel φ^* des Skifahrers, wenn dieser mit der Geschwindigkeit v_0 über den Scheitelpunkt der Kuppe fährt. 2 P.|

Lösung:

a) *Freigeschnittener Skifahrer:*



b) *Bewegungsgleichung aus Impulserhaltung in tangentialer Richtung:*

$$mg\sin(\varphi) - m(R+h)\ddot{\varphi} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega\\ \frac{g}{R+h}\sin(\varphi)\end{bmatrix}$$

Anfangsbedingung:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}0\\ \frac{v_0}{R+h}\end{bmatrix}$$

c) *Normalkraft F_N aus Kräftegleichgewicht in radialer Richtung:*

$$F_N + m(R+h)\omega^2 - mg\cos(\varphi) = 0$$

$$F_N = mg\cos(\varphi) - m(R+h)\omega^2$$

d) *Bedingung für Absprungstelle φ^*:*

$$F_N(\varphi^*) = 0$$

$$\varphi^* = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3g(R+h)}\right)$$

4. Betrachten Sie das einfache Modell eines Cubli Würfels aus Abbildung 5. Dieser besteht im Wesentlichen aus einem drehbar gelagerten Gehäuse mit der Gesamtmasse m_b und dem Massenträgheitsmoment θ_b um den Schwerpunkt des Gehäuses. Sie können davon ausgehen, dass sich der Schwerpunkt des Gehäuses im Mittelpunkt des Würfels befindet. Im Mittelpunkt des Würfels ist ein Schwungrad der Masse m_w mit dem Massenträgheitsmoment θ_w montiert. Das Schwungrad wird durch einen Gleichstrommotor angetrieben. Das Motormoment berechnet sich zu $T_m = K_m i$ mit der Motorkonstanten K_m und dem Eingangsstrom i. An den Drehpunkten treten Reibungsverluste auf: Das Reibmoment am unteren Drehpunkt berechnet sich zu $M_{R,b} = -C_b\omega_b$ und das am Drehpunkt im Mittelpunkt des Würfels zu $M_{R,w} = -C_w\omega_w$. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des vorliegenden Cubli Würfels mit den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [\phi_b, \phi_w]^{\mathrm{T}}$ her. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: 10 P.|
Gegeben: $m_b, m_w, \theta_b, \theta_w, C_b, C_w, l, K_m, g, \rho, l_s, b_s, d_I, d_A, d$

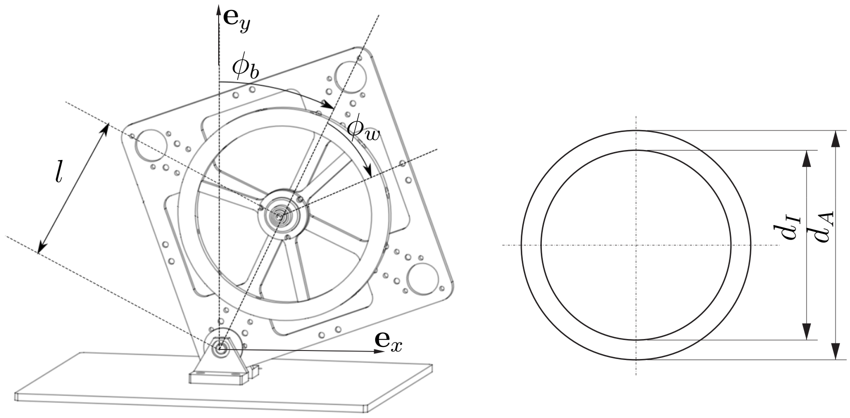


Abbildung 5: Cubli Würfel (Entnommen aus IEEE Paper, links) und Schwungrad im Detail (rechts).

a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment θ_w unter der Annahme, dass nur der Massenträgheitsmomentanteil des Außenrings relevant ist. Die Durchmesser des Rings im rechten Bild der Abbildung 5 sind bekannt. Das Material hat die Dichte ρ und die Dicke d. 1 P.|
Hinweis: Sie können ab dem nächsten Punkt θ_w als bekannt annehmen. Es ist daher nicht zwingend notwendig diesen Punkt zu lösen.

b) Bestimmen Sie die den Vektor zum Schwerpunkt des Würfels $\mathbf{r}_{SP}$ im Intertialkoordinatensystem. 1 P.|

c) Berechnen Sie den Vektor der Schwerpunktgeschwindigkeit des Würfels $\mathbf{v}_{SP}$ im Inertialkoordinatensystem. 1 P.|

d) Ermitteln Sie die kinetische Energie T des Systems. 3 P.|

e) Wie lautet die potentielle Energie V infolge der Erdbeschleunigung g? 1 P.|

f) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion an und geben Sie allgemein den Lagrange Formalismus zur Bestimmung der Bewegungsgleichung an. Die Herleitung der Bewegungsgleichung ist nicht erforderlich! 1 P.|

g) Geben Sie die generalisierte Kraft f_q an. 2 P.|

Lösung:

a) *Das Massenträgheitsmoment für den Kreisring berechnet sich zu*

$$\theta_w = \theta_r = \int_{-d/2}^{d/2} \int_0^{2\pi} \int_{d_I/2}^{d_A/2} r^2 \rho r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = \frac{d\rho\pi}{32}\left(d_A^4 - d_I^4\right).$$

b) *Der Vektor der Schwerpunktkoordinaten lautet*

$$\mathbf{r}_{SP} = \begin{bmatrix} x_{SP} \\ y_{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\sin(\phi_b) \\ l\cos(\phi_b) \end{bmatrix}.$$

c) *Daraus folgt der Vektor der Schwerpunktgeschwindigkeiten zu*

$$\mathbf{v}_{SP} = \begin{bmatrix} v_{SP} \\ v_{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\cos(\phi_b)\dot{\phi}_b \\ -l\sin(\phi_b)\dot{\phi}_b \end{bmatrix}.$$

d) *Die kinetische Energie T im System lautet*

$$T_{trans} = \frac{(m_b + m_w)\left(\dot{x}_{SP}^2 + \dot{y}_{SP}^2\right)}{2} = \frac{(m_b + m_w)\, l^2 \dot{\phi}_b^2}{2},$$

$$T_{rot} = \frac{\theta_b \dot{\phi}_b^2}{2} + \frac{\theta_w \left(\dot{\phi}_b + \dot{\phi}_w\right)^2}{2}$$

$$T = T_{kin} + T_{rot}$$

e) *Für die potentielle Energie V infolge der Schwerkraft gilt*

$$V = (m_b + m_w)\, g y_{SP} = (m_b + m_w)\, g l \cos(\phi_b)$$

f) *Die Lagrangefunktion lautet*

$$L = T - V.$$

Der angeschriebene Lagrange-Formalismus hat die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = f_{np,j}, \qquad j = 1, ..., n$$

mit $n = 2$.

g) *Die generalisierte Kraft $\mathbf{f}_q$ berechnet sich mit*

$$\delta W_{b,Reib} = \underbrace{-C_b \dot{\phi}_b}_{M_{b,Reib}} \phi_b$$

$$\delta W_{w,Reib} = \underbrace{-C_w \dot{\phi}_w}_{M_{w,Reib}} \phi_w$$

$$\delta W_{T_m} = T_m \phi_w$$

zu

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -C_b \dot{\phi}_b \\ -C_w \dot{\phi}_w + T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_b \dot{\phi}_b \\ -C_w \dot{\phi}_w + K_m i \end{bmatrix}.$$