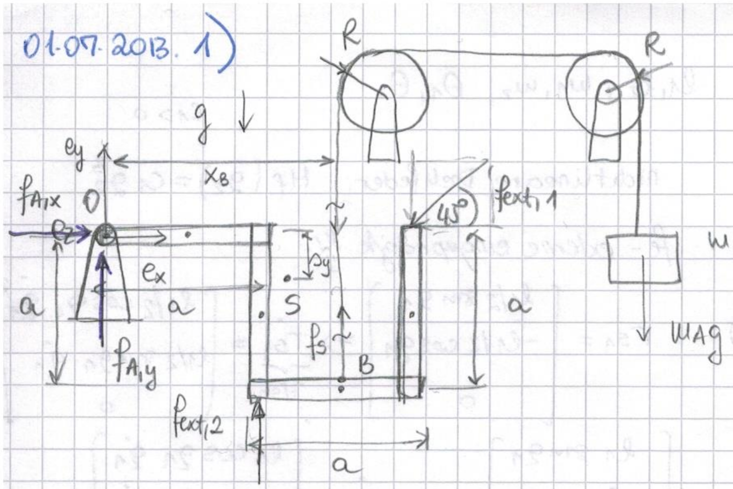
01.07.2013. 1)



a) S - Schwerpunkt $[s_x, s_y] = ?$

$$r_S = \frac{\sum_{j=1}^{N} r_{Sj} m_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j} \quad , \underline{N=4}, m_j = m = konst$$

xy-Ebene:

$$\Rightarrow r_S = \frac{\cancel{m}\left(\begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -a/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a/2 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ -a/2 \end{pmatrix}\right)}{4\cancel{m}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5a \\ -2a \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5/4\, a \\ -1/2\, a \end{pmatrix}}}$$

$$\Rightarrow s_x = \frac{5}{4}a \; ; \; s_y = -\frac{1}{2}a$$

- Schwerpunkt jedes Balken befindet sich in der Mitte des Balkens.

b) $x_B = \frac{3a}{2}$, $m_A = ?$ → Mechanismus im statischen Gleichgewicht

$f_{A,x}, f_{A,y} = ?$ Kräfte im Auflager

als positiv angenommen (d.h. beide Kräfte in e_x- und e_y-Richtung!)

$$f_R = 0 \quad bzw. \quad f_{R,x} = f_{R,y} = f_{R,z} = 0 \quad , \quad \underline{|\tau_R^{(O)} = 0|}$$

$$e_x: \quad f_{A,x} - f_{ext,1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow f_{A,x} = f_{ext,1}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = f_{ext,1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e_y: \quad f_{A,y} - 4mg + f_{ext,2} + f_S - f_{ext,1}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1)$$

- Beide Umlenkrollen im Gleichgewicht: $\boxed{f_S = m_A g}$

01-07-2013. 1) $t_R^{(0)} = 0$

b) $$t_R^{(0)} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -a/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a/2 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ -a/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ f_{e,2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a f_{e,2} \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3a/2 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ m_A g \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a/2\, m_A g \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 5a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5amg \end{pmatrix} \qquad + \underbrace{\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -f_{e,1}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2a f_{e,1} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow e_z: \; -5\cancel{a}mg + \cancel{a} f_{e,2} + 3\underbrace{\frac{\cancel{a}}{2}}_{x_B} m_A g - \cancel{a} f_{e,1}\sqrt{2} = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3 m_A g = 10 mg - 2 f_{e,2} + 2 f_{e,1}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m_A = \frac{1}{3g}\left(10mg - 2f_{e,2} + 2 f_{e,1}\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3g}\left(5mg - f_{e,2} + f_{e,1}\sqrt{2}\right)$$

Aus (1): $f_{A,1y} = 4mg + f_{ext,1}\frac{1}{\sqrt{2}} - f_{ext,2} - m_A g$

c) μ_H – Haftreibungskoeff.

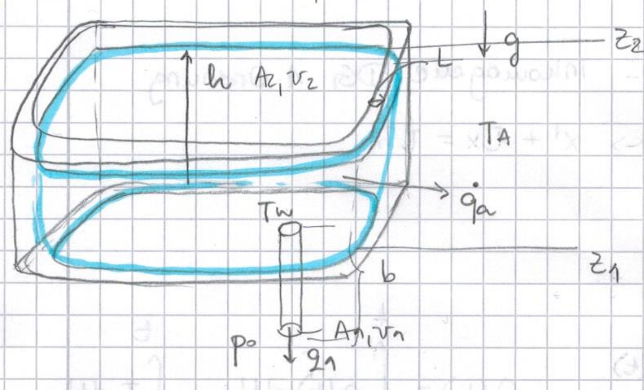
$x_{B\,\substack{min\\max}} = ?$ $\quad x_{B,min} \le x_B \le x_{B,max}$ – sodass, Seil nicht rutscht

α – Umschlingungswinkel

Seil rutscht nicht, wenn $f_{S1}\, e^{-\mu_H \alpha} \le f_{S2} \le f_{S1}\, e^{\mu_H \alpha}$

01.07.2013.

2)



$h = z_2 - z_1$

a) Bernoulli-Gl:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} v^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + g\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0}$$

Stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\rho = \text{konst}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}$$

b) Abfließender Volumenstrom: $q_1 = ?$ $\quad \frac{d}{dt}h(t) = ?$

$p_0 = \text{konst}$. Länge des Rohrs vernachl.

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \cancel{\frac{p_1}{\rho}} + gz_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \cancel{\frac{p_2}{\rho}} + gz_2 \quad / 2$$

($p_1 = p_0$, $p_2 = p_0$)

$q_1 = A_1 \cdot v_1$, A_1-bekannt $\Rightarrow v_1 = ?$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g(z_2 - z_1) = 2gh$$

Massenerhaltung für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\boxed{\frac{d}{dt}V = \sum_i q_i}$$

Betragsmäßig: $A_2 v_2 = A_1 v_1$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$V = A_2 h(t) \Rightarrow A_2 \underbrace{\frac{d}{dt}h(t)}_{v_2} = -q_1 = -A_1 v_1$$

$$v_1^2 \underbrace{\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)}_{\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2}} = 2gh$$

$$\boxed{\Rightarrow q_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_2^2 - A_1^2}}}$$

$$\boxed{v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_2^2 - A_1^2}}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{A_1}{A_2} A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_2^2 - A_1^2}}}$$

01.04.2013. 2)

durch die Wand

c)

stationäre Wärmestromdichte $\dot{q}_a = ?$ — 1-dim. Wärmeleitproblem

Wand: $L, \lambda(x,T) = \lambda$

$T_W(t),\ T_A = \text{konst.}$ — ideale Kontaktbedingungen *

- Wärmeübertragung: Wasser-Wand, Wand-Luft ideal $\Rightarrow \alpha_W \to \infty,\ \alpha_L \to \infty$

$\Downarrow$

Randbed. erster Art (Dirichlet)

- Wärmeleitgleichung:

$$\rho c_p \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{=0} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \underbrace{g(t,x,T)}_{\approx 0}$$

$T(x,y,z,t) = T_r(x,y,z,t)$

$\Downarrow$

$T(x=0) = T_W,\ T(x=L) = T_L$

$/\int$

ohne Wärmequelle: $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,\ T(0) = T_W,\ T(L) = T_L$

Wärmestromdichte:

$$\boxed{\dot{q}(x,T) = -\lambda(x,T)\nabla T(x,T)} \Rightarrow \dot{q}_a = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -C$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = C = \text{konst.} \quad /\int$$

$$T(x) - T(0) = Cx \Rightarrow T(x) = \overbrace{T(0)}^{T_W} + x \cdot C$$

$$x = L \Rightarrow T(L) = T_L \quad \Bigg\} \quad C = \frac{T_L - T_W}{L}$$

Mantel der Badewanne abgewickelt

$\Rightarrow$ ebene Wand!

$$\Rightarrow \dot{q}_a = \frac{\lambda}{L}(T_W - \underbrace{T_L}_{T_A}) = \frac{\lambda}{L}(T_W - T_A)$$

d) Abkühlvorgang des Wassers beschreiben

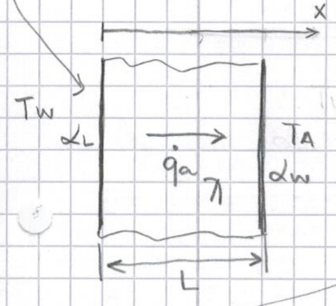
A_W – für die Wärmeleitung relevante Oberfl. der Wand

$\rho(x,T) = \rho,\ c_p(x,T) = c_p$ (ρ, c_p – temp- und ortsunabhängig!)

$t_1 = ?$ – T_1 erreicht, $T_W(0) = T_0$ ($T_0 > T_1 > T_A$)

$q_1 = 0$, Wärmeübertragung an der Wasseroberfl. mit der Luft vernachl.

$$\rho c_p \frac{\partial T_W}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\lambda \frac{\partial T_W}{\partial x}}_{-\dot{q}_a}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{L}(T_W - T_A)\right)$$



$$\frac{dT_W}{dt} = -\underbrace{\frac{1}{\rho c_p A_z \cdot h} A_W \frac{\lambda}{L}}_{\tau} \overbrace{(T_W - T_A)}^{Q_a}$$

$V = A_z h$

01.07.2013. 2)

d) $\frac{dT_W}{dt} = -\tau (T_W - T_A)$, $T_W(0) = T_0$

$\frac{dT_W}{dt} + \underbrace{\tau}_{g(t)} T_W = \underbrace{\tau T_A}_{f(t)}$ - inhomogene DG 1. Ordnung

$\rightsquigarrow x' + \tau x = \tau T_A$

$x(t) = T_W(t)$

$X(t) = X_h(t) + x_p(t)$

1° $X_h(t)$:

$x' + \tau x = 0$

$\Rightarrow x_h(t) = c \cdot e^{-Q(t)}$, $Q(t) = \int_0^t g(t')dt' = \int_0^t \tau dt' = \tau t$

$\Rightarrow x_h(t) = c \cdot e^{-\tau t}$

2° $x_p(t)$: Variation der Konstanten

$x_p(t) = c(t) \cdot e^{-Q(t)}$

$c'(t) \cdot e^{-Q(t)} = f(t) \Rightarrow c'(t) = e^{Q(t)} \cdot \tau T_A \quad / \int$

$c(t) = \int e^{Q(t')} \tau T_A \, dt' = \cancel{\tau} T_A \cdot \frac{1}{\cancel{\tau}} e^{\tau t}$

$\Rightarrow x_p(t) = T_A$

$\Rightarrow x(t) = T_A + c \cdot e^{-\tau \cdot t}$

$X(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = T_A + c \Rightarrow \underline{c = T_0 - T_A}$

$\Rightarrow \underline{T_W(t) = T_A + (T_0 - T_A) \cdot e^{-\tau t}}$

$t_1 = ?$ $T_W(t_1) = T_1$

$T_1 - T_A = (T_0 - T_A) \cdot e^{-\tau \cdot t_1} \quad / \ln$

$\underline{\tau = \frac{A_W \lambda}{\rho c_p A_2 h L}}$

$-\tau t_1 = \ln \frac{T_1 - T_A}{T_0 - T_A} \Rightarrow \underline{t_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \frac{T_1 - T_A}{T_0 - T_A}}$

Herleitung der DG für T_W:

$\boxed{de_i = c_p dT}$ für d!)

1. Hauptsatz der Thermodynamik: $\underline{dE_i = Q^1 + W^1}$ $\Big\} \Rightarrow dE_i = Q^1$

bei uns gibt es keine zusätzliche Arbeit im System $\Rightarrow W^1 = 0$

Innere Energie = innere Wärme: $\boxed{E_i = m c_p T} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m c_p T) = \sum_i \dot{Q}_i$

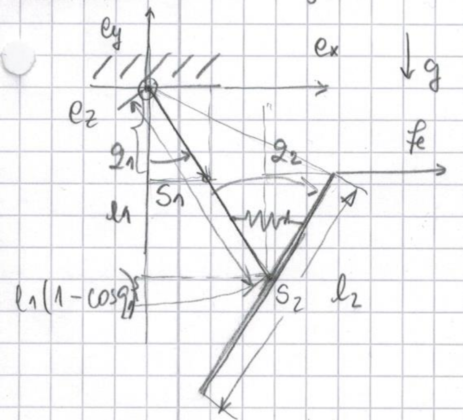
Die Wärme wird über die Wände der Wanne abgegeben: $\sum_i \dot{Q}_i = -A_W q_a$

$\Rightarrow \rho V c_p \frac{\partial T_W}{\partial t} = -A_W \frac{\lambda}{L}(T_W - T_A)$

01.07.2013.

3) Mechanisches System: $l_1, l_2, m_1, m_2, \Theta_1, \Theta_2$

$c_1 > 0$



nichtlineare Drehfeder: $M_f(q_2) = c_1 q_2^3$

f_e - externe eingeprägte Kr.

a) $$r_{S_1} = \begin{bmatrix} l_1/2 \sin q_1 \\ -l_1/2 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\dot{r}_{S_1}}_{v_{S_1}} = \begin{bmatrix} l_1/2 \cos q_1 \, \dot{q}_1 \\ l_1/2 \sin q_1 \cdot \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{S_2} = \begin{bmatrix} l_1 \sin q_1 \\ -l_1 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\dot{r}_{S_2}}_{v_{S_2}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 \cdot \dot{q}_1 \\ l_1 \sin q_1 \cdot \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

S_2 - unabhängig von q_2!

$\dot{r}_{S_1}, \dot{r}_{S_2}$ - Schwerpunktsgeschw.

b) $T_1, T_2 = ?$

Beide kin. und pot. Energie von den beiden Stäben haben nichts mit der Energie der Feder zu tun!

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_{S_1}^T \dot{r}_{S_1} + \frac{1}{2}\Theta_1 \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{4} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_1 \dot{q}_1^2$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \left(m_1 \frac{l_1^2}{4} + \Theta_1\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \underbrace{\dot{r}_{S_2}^T}_{v_{S_2}^T} \underbrace{\dot{r}_{S_2}}_{v_{S_2}} + \frac{1}{2}\underbrace{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)}^2 \Theta_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 \Theta_2$$

q_2 - nicht absolut angegeben, sondern relativ zu Stab 1 (q_1)

c) $V_1, V_2 = ?$

Für die Bestimmung der pot. Energie wird der Schwerpunkt verwendet!

$V_1 = 0$: $q_1 = \frac{\pi}{2}$ $(y=0)$ $\Rightarrow V_1 = -m_1 g \frac{l_1}{2} \cos q_1$

$\Rightarrow V_2 = -m_2 g l_1 \cos q_1$ $\quad$ $P = M \cdot \varphi$

d) $V_f = ?$ pot. Energie der Drehfeder

$$V_f(q_2) = \int_0^{q_2} M_f(\tilde{q}) \cdot d\tilde{q} = c_1 \int_0^{q_2} q_2^3 \, d\tilde{q} = c_1 \frac{q_2^4}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{V_f = c_1 \frac{q_2^4}{4}}$$

01.07.2013. 3)

e) Bewegungsgl. in Form der Euler-Lagrange Gl: $f_e = 0$

$$q = [q_1, q_2]^T \qquad L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 - V_f$$

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = 0 \qquad j = 1,2$$

→ Lagrange-Funktion

$$\ldots = f_{np} = f_{q,j} + \frac{\partial}{\partial q_j} V$$

f) $f_e \neq 0$ $\qquad f_e = [f_e, 0, 0]^T$

$$f_{q_j} = f_e^T \frac{\partial r_e}{\partial q_j}$$

rechte Seite von (1): $\left(\frac{\partial r_e}{\partial q_1}\right)^T \begin{bmatrix} f_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_e \left(l_1 \cos(q_1) - \frac{l_2}{2}\cos(q_2 - q_1)\right)$

$$\left(\frac{\partial r_e}{\partial q_2}\right)^T \begin{bmatrix} f_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_e \frac{l_2}{2} \cos(q_2 - q_1)$$

$$r_e = \left[l_1 \sin q_1 + \frac{l_2}{2}\sin(q_2 - q_1), \; -l_1\cos(q_1) + \frac{l_2}{2}\cos(q_2 - q_1), \; 0 \right]^T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r_e}{\partial q_1} = \left[\underline{l_1 \cos q_1 - \frac{l_2}{2}\cos(q_2 - q_1)}, \; l_1 \sin(q_1) + \frac{l_2}{2}\sin(q_2 - q_1), 0 \right]^T$$

$$\frac{\partial r_e}{\partial q_2} = \left[\underline{\frac{l_2}{2}\cos(q_2 - q_1)}, \; -\frac{l_2}{2}\sin(q_2 - q_1), 0 \right]^T$$

* Wenn Euler-Lagrange Gl. nur mit T geschrieben ist wie:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T = f_{q_j}$$

, dann sind in f_{q_j} alle Kräfte, die auf das System wirken gerecht (potentielle, externe, dissipative ...)

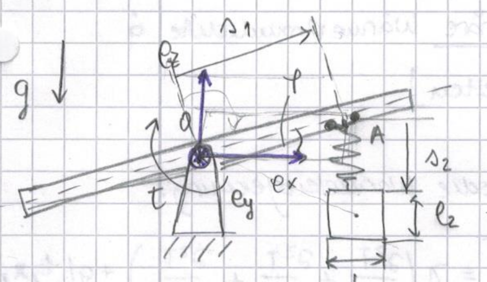
Wenn E-L. Gl. mit Lagrange-Fkt. $(L = T - V)$ geschrieben sind:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = f_{q,j}$$

egal, welche Bezeichnung

dann sind die gen. Kräfte auf der rechten Seite nur externe & dissipative => ohne Potentialkr.

27.09.2013 1)



$\Theta_{yy}^{(0)}$ – Trägheitsm. des Balkens

$m_2,\ l_2,\ b_2$

$c,\ s_{20}$

→ der Starrkörper bewegt sich!

a) $r_A = ?$ $r_{SM} = ?$ l_2 - vernachläßigbar

nicht notwendig, $s_1 \cos\varphi$ kommt zu Mitte schon! ($\frac{b_2}{2}$ schon drinnen im Term)

$$r_1 = r_A = \begin{bmatrix} \cos\varphi\, s_1 \\ 0 \\ \sin\varphi\, s_1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = r_{SM} = \begin{bmatrix} s_1 \cos\varphi \cancel{+ \frac{b_2}{2}} \\ 0 \\ s_1 \sin\varphi - s_2 - \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}$$

b) T, V des gesamten Systems

$$T = T_{R,B} + T_{T,S} \quad ; \quad V = V_F + V_G$$

der Balken hat keine potentielle Energie!

$$\boxed{T_{R,B} = \frac{1}{2} \Theta_{yy}^{(0)} \cdot \dot{\varphi}^2}$$

$$\dot{r}_2 = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \cos\varphi - s_1 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{s}_1 \sin\varphi + s_1 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - \dot{s}_2 \end{bmatrix}$$

$$T_{T,S} = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^T \dot{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 \Big((\dot{s}_1 \cos\varphi)^2 \cancel{- 2 s_1 \dot{s}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi \cos\varphi} + (s_1 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (\dot{s}_1 \sin\varphi)^2 + (s_1 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + \dot{s}_2^2 \cancel{+ 2 s_1 \dot{s}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi \cos\varphi} - 2 \dot{s}_1 \dot{s}_2 \sin\varphi - 2 s_1 \dot{s}_2 \dot{\varphi} \cos\varphi \Big)$$

$$\Rightarrow T_{T,S} = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{s}_1^2 + s_1^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}_2^2 - 2 \dot{s}_1 \dot{s}_2 \sin\varphi - 2 s_1 \dot{s}_2 \dot{\varphi} \cos\varphi \right)$$

$$V_F = \frac{1}{2} c (s_2 - s_{20})^2 \qquad V(r) = \int_{r_I}^{r} f_R(\tilde{r}) \cdot d\tilde{r}, \quad V(r_I) = 0$$

$\boxed{V_G = m_2 g (s_1 \sin\varphi - s_2)}$ – Pot. Energie des Starrkörpers

- Aus der Angabe: Der Balken ist in seinem Schwerpunkt drehbar gelagert ⇒ SP fixiert

Da sich der SP des Balkens nicht bewegt ⇒ potentielle Energie des Balkens ist Null!

Potentielle En. eines Körpers immer durch Bewegung seines SPs bestimmen!!

27.09.2013 1)

c) Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$L = T - V \qquad (T = T_{RB} + T_{T_1 S}\ ;\quad V = V_F + V_G)$$

$q = [\varphi, s_1, s_2]^T$ – alle Größen, für die man DG aufstellen kann, können zu gen. Koordinaten zählen!

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}} = -\tau$$

(φ, τ – haben entgegengesetzte Richtungen!) τ – das einzige externe (rotatorische) Moment!

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s_j} - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0}\ , \quad j = 1,2$$

↳ keine externe (translatorische) eingeprägte Kräfte wirken auf den Balken oder den Starrkörper!

$$L = \frac{1}{2}\,\theta_{yy}^{(0)}\cdot\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot s_1^2 + s_1^2\dot\varphi^2 + \dot s_2^2 - 2\dot s_1 s_2 \sin\varphi - 2 s_1 \dot s_2 \dot\varphi\cos\varphi) - \frac{1}{2}c(s_2 - s_{20})^2 - mg(s_1\sin\varphi - s_2)$$

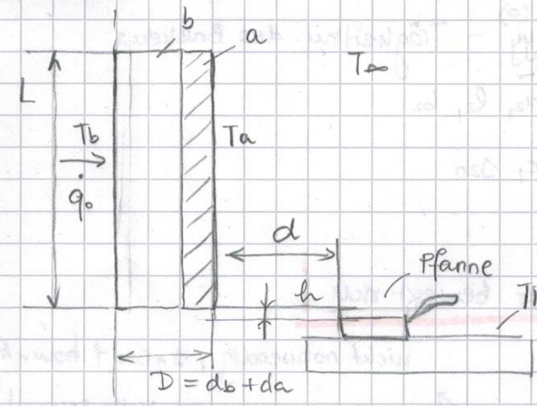
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \theta_{yy}^{(0)}\cdot\dot\varphi + m_2 s_1^2\dot\varphi - m_2 s_1 \dot s_2\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \theta_{yy}^{(0)}\cdot\ddot\varphi + m_2 s_1^2\ddot\varphi + m_2\dot\varphi\, 2 s_1 \dot s_1 - \cancel{m_2 \dot s_1 \dot s_2\cos\varphi} - m_2 s_1\cos\varphi\,\ddot s_2 + \cancel{m_2 s_1 \dot s_2 \sin\varphi\cdot\dot\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\cancel{m_2 \dot s_1 \dot s_2 \cos\varphi} + \cancel{m_2 s_1 \dot s_2\dot\varphi\sin\varphi} - mg s_1\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot\varphi\,(\theta_{yy}^{(0)} + m_2 s_1^2) = m_2 s_1 \cos\varphi\,\ddot s_2 - m_2\dot\varphi\, 2 s_1 \dot s_1 - mg s_1\cos\varphi - \tau$$

27.09.2013 2)



b: d_b, λ_b ; a: d_a, λ_a

a) stationäre Wärmestromdichte $\dot q$ herleiten!

Fouriersche Wärmeleitgleichung:

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\approx 0} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \underbrace{g(t, x, T)}_{\approx 0}$$

ohne Wärmequelle

angenommen: 1-dim. Wärmeleitproblem

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad /\int, \quad T(0) = T_b, \ T(D) = T_a$$

$$\dot q(x, t) = -\lambda(x, T)\, \nabla T(x, t)$$

$$\Rightarrow \dot q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = C = \text{konst} \quad /\int \qquad \Rightarrow \dot q = -C$$

$$\lambda(T(x) - \underbrace{T(0)}_{T_b}) = Cx \qquad \Rightarrow C = \frac{\lambda}{D}(T_a - T_b)$$

Randbed: $x = D$, $T(x) = T_a$

$$\Rightarrow \boxed{\dot q = \frac{\lambda}{D}(T_b - T_a)}$$

↳ im Fall, wenn die Wand einschichtig ist (D - Dicke)

- Randbed. 2 Art: $\dot q_n(x, t) = q_r(x, t)$

$$\Rightarrow \dot q = \frac{\lambda_1}{D_1}(T_0 - T_1) = \frac{\lambda_2}{D_2}(T_1 - T_2)$$

für 2-schichtigen Körper

$$\Rightarrow \underbrace{T_0}_{T_b} - \underbrace{T_2}_{T_a} = \underbrace{(T_0 - T_1)}_{\frac{D_1}{\lambda_1}\dot q} + \underbrace{(T_1 - T_2)}_{\frac{D_2}{\lambda_2}\dot q} \Rightarrow \boxed{\dot q = \frac{T_b - T_a}{\frac{d_b}{\lambda_b} + \frac{d_a}{\lambda_a}}}$$

b) $\dot q_0$ - Strahlung und Konvektion (α)

Umgebungstemp. T_∞

Welche Form der Konvektion?

$\boxed{\text{freie Konvekt.}}$

Bestimmungsgl. für T_a? stationärer Fall

Strahlung: $\dot q_S = \varepsilon\sigma(T_a^4 - T_\infty^4)$

Konvektion: $\dot q_K = \alpha(T_a - T_\infty)$

$$\Rightarrow \dot q_0 - \dot q_S - \dot q_K = 0$$

implizite Bestimmungsgl.

$$\hookrightarrow \dot q_0 - \sigma\varepsilon(T_a^4 - T_\infty^4) - \alpha(T_a - T_\infty) = 0$$

S. 118 (Skriptum)

Für α-Berechnung ist Grashof-Zahl (Gr_x), Prandtl-Z. (Pr), Rayleigh-Z. ($Ra_x = Gr_x\, Pr$) und Nußelt-Z. Nu_x von Bedeutung.

27.09.2013 2)

$$\dot q = \mathrm{diag}\{\varepsilon\}\left(E - F\left(E - \mathrm{diag}\{\varepsilon\}\right)\right)^{-1}(E-F)\,\sigma T^4$$

e) Pfanne: d_p, T_p

F – Sichtsfaktormatrix

Nettowärmestromdichte: $\dot q = ?$ in die Pfanne

$\varepsilon_h = 1$, $\varepsilon_\infty = 1$ => $\begin{bmatrix} \varepsilon_h & 0 \\ 0 & \varepsilon_\infty \end{bmatrix} = E$ $\qquad T = \begin{bmatrix} T_h \\ T_\infty \end{bmatrix}$

Emissivität des Heizkörpers und der Umgebung

- Konvektion - vernachlässigen

$\varepsilon = \alpha$?

$$\Rightarrow \dot q = \begin{bmatrix} \dot q_h \\ \dot q_\infty \end{bmatrix} = \sigma T^4 (E - F)$$

$\dot q$, die die Pfanne emissiert oder absorbiert? – egal, Unterschied im Vorzeichen!

$$F = \begin{bmatrix} F_{hh} & F_{hp} \\ F_{ph} & F_{p\infty} \end{bmatrix} ?$$

F_{ij} – jener Anteil von J_i, der auf A_j auftritt

- Heizkörper - eine Ebene => $F_{hh} = 0$

$A_i = d_p^2 \frac{\pi}{4}$, $A_j = L \cdot b$

- Reziprozitätsgesetz: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$?

$$\Rightarrow d_p F_{ph} = L \cdot F_{hp} \Rightarrow F_{ph} = \frac{L}{d_p} F_{hp}$$

- Summationsregel: $1 = \sum_{j=1}^{N} F_{ij}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\Rightarrow F_{p\infty} = 1 - F_{ph} = 1 - \frac{L}{d_p} F_{hp}$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & F_{hp} \\ \frac{L}{d_p} F_{hp} & 1 - \frac{L}{d_p} F_{hp} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot q = \sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -F_{hp} \\ -\frac{L}{d_p} F_{hp} & \frac{L}{d_p} F_{hp} \end{bmatrix}}_{E - F} \begin{bmatrix} T_h^4 \\ T_\infty^4 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} T_h^4 - F_{hp} T_\infty^4 \\ -T_h^4 F_{ph} + (1 - F_{p\infty}) T_\infty^4 \end{bmatrix}$$

$-\frac{L}{d_p} F_{hp} = -F_{ph}$, $\quad \frac{L}{d_p} F_{hp} = 1 - F_{p\infty}$

$$\Rightarrow \dot q_h = \sigma (T_h^4 - F_{hp} T_\infty^4)$$

$$\dot q_\infty = \sigma \left((1 - F_{p\infty}) T_\infty^4 - T_h^4 F_{ph} \right)$$

$$\dot q_p = \sigma \overset{\alpha_p ?}{\varepsilon_p} (T_p^4 - T_\infty^4) + \varepsilon_p \dot q_\infty$$

$$= \sigma \varepsilon_p \left(T_p^4 - \cancel{T_\infty^4} + (\cancel{1} - F_{p\infty}) \cancel{T_\infty^4} - T_h^4 F_{ph} \right)$$

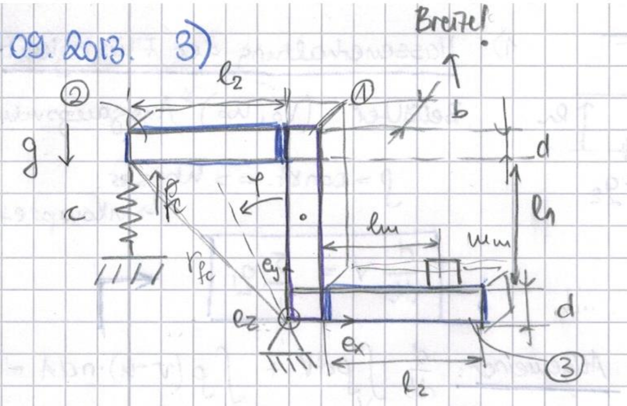
$$\Rightarrow \dot q_p = \sigma \varepsilon_p \left(T_p^4 - F_{p\infty} T_\infty^4 - F_{ph} T_h^4 \right)$$

$\varepsilon_p = \alpha_p$ – Kirchhoffsches Gesetz

· Endergebnis passt, Lösungsweg nicht ganz! II: 3 Teilnehmer am Wärmeaustausch

=> F – (3x3) Matrix, $\dot q = \begin{bmatrix} \dot q_h \\ \dot q_\infty \\ \dot q_p \end{bmatrix}$ ...

27.09.2013 3)



Rahmen: ρ, m_r, d, b

$\varphi = 0$: Feder entspannt

$\Rightarrow F_c = c \cdot \Delta l$

$\Delta l = \varphi \cdot r_{fc} / r_{r_1,y,\varphi}$

↳ Teil von Bogen

a) Gesamtschwerpunkt S: $r_S(\varphi)$ – Fkt. des Winkels

m_m – als Punktmasse betrachten

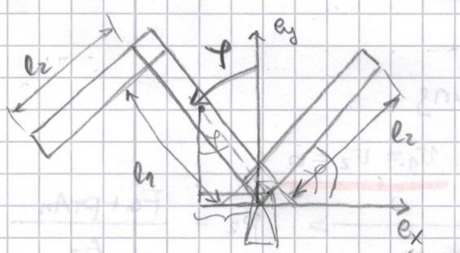
Gesamtschwerpunkt aus den Schwerpunkten der Teilkörper (Rahmen + Masse):

Allgemein:

$$r_S = \frac{\sum_{j=1}^{N} r_{sj} m_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j} \quad ; \quad r_S = \underbrace{r_{S,x}}_{\frac{\int_V x\rho(x,y,z)\,dV}{m}} e_x + \underbrace{r_{S,y}}_{-\shortparallel-} e_y + \underbrace{r_{S,z}}_{-\shortparallel-} e_z$$

kann auch koordinatenweise geschrieben werden!

– Rahmen: $\varphi \neq 0$:



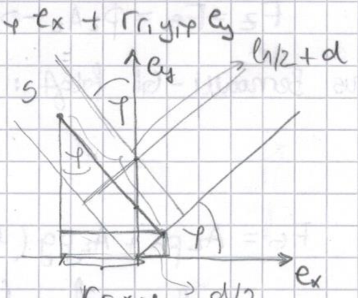
$\varphi = 0$ – Rahmen steht senkrecht

Punktsymmetrie ergibt:

$$r_{r,0} = \underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)}e_x + \underbrace{\left(d + \frac{l_1}{2}\right)}e_y = r_{r_1,x,0}\, e_x + r_{r_1,y,0}\, e_y$$

*

$$\Rightarrow r_{r,\varphi} = r_{r_1,x,\varphi}\, e_x + r_{r_1,y,\varphi}\, e_y$$



$r_{r_1,y,\varphi} = r_{r_1,y,0} \cos\varphi + r_{r_1,x,0} \sin\varphi$

$r_{r_1,x,\varphi} = -r_{r_1,y,0} \sin\varphi + r_{r_1,x,0} \cos\varphi$

$$\Rightarrow r_r(\varphi) = \underbrace{\overbrace{\left(r_{r_1,x,0}\cos(\varphi) - r_{r_1,y,0}\sin(\varphi)\right)}^{r_{r_1,x,\varphi}} e_x} + \underbrace{\overbrace{\left(r_{r_1,x,0}\sin(\varphi) + r_{r_1,y,0}\cos(\varphi)\right)}_{r_{r_1,y,\varphi}} e_y}$$

– Masse: $\varphi = 0$: $r_{m,0} = \underbrace{(d + l_m)}_{r_{m,x,0}} e_x + \underbrace{d}_{r_{m,y,0}} \cdot e_y$

– Analog für $\varphi \neq 0$: $\underbrace{r_{m,\varphi} = \overbrace{\left(r_{m,x,0}\cos(\varphi) - r_{m,y,0}\sin(\varphi)\right)}^{r_{m,x,\varphi}} e_x + \overbrace{\left(r_{m,x,0}\sin(\varphi) + r_{m,y,0}\cos(\varphi)\right)}^{r_{m,y,\varphi}} e_y}$

Gesamtschwerpunkt:

$$\boxed{\Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{r_{r,x}(\varphi)\, m_r + r_{m,x}(\varphi) \cdot m_m}{m_r + m_m} e_x + \frac{r_{r,y}(\varphi)\, m_r + r_{m,y}(\varphi)\, m_m}{m_r + m_m} e_y}$$

27.09.'13 3)

b) $\Theta_{zz}^{(A)} = ?$

Satz von Steiner: $\Theta_{zz}^{(A)} = \Theta_{zz}^{(S)} + md^2$ → Abstand zw. den parallelen Achsen durch A und S

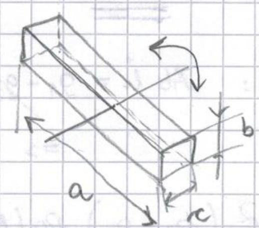
$m_{r,1} = \rho(l_1+2d)db$

$\Rightarrow \Theta_{zz,1} = \frac{m_{r,1}}{12}\left((l_1+2d)^2 + d^2\right)$

$m_{r,2} = m_{r,3} = \rho l_2 d b$

$\Theta_{zz,2} = \Theta_{zz,3} = \frac{m_{r,2/3}}{12}\left(l_2^2 + d^2\right)$

$\boxed{J = \frac{1}{12} m (a^2+b^2)}$



/Kante
Eselsbrücke: Die Seite, die bei der Rotation in einer Ebene nicht sehen kannst ist nicht in der Summe drinnen!

$$\Rightarrow \Theta_{zz}^{(A)} = \Theta_{zz,1} + 2\Theta_{zz,2} + m_m r_{m,A}^2 + m_{r,1}\underbrace{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_1}{2}+d\right)^2\right)}_{r_{1,A}^2} + m_{r,2}\left(\frac{l_2^2}{4} + \left(l_1+\frac{3d}{2}\right)^2\right) + m_{r,3}\left(\left(d+\frac{l_2}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}\right) + m_m\left((l_m+d)^2 + d^2\right)$$

Punktmasse: $J = m_m r_m^2$

* Man muss darauf aufpassen, wo sich der Bezugspunkt A genau befindet.

c) Drallsatz bez. A? = Drehimpulserhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} l^{(0)} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \tau^{(0)}$$

Momentensatz:

$$\tau^{(0)} = \Theta_{zz}^{(0)} \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\Theta_{zz}^{(A)}\ddot{\varphi} = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_2 \\ 2d+l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_c \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2F_c \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_{r,x}(\varphi) \\ r_{r,y}(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -m_r g \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_r g r_{r,x}(\varphi) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_{m,x}(\varphi) \\ r_{m,y}(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -m_m g \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_m g r_{m,x}(\varphi) \end{bmatrix}}$$

e_z-Richtung

$$\Rightarrow \Theta_{zz}^{(A)}\ddot{\varphi} + m_r g r_{r,x}(\varphi) + m_m g r_{m,x}(\varphi) + l_2 F_c = 0$$

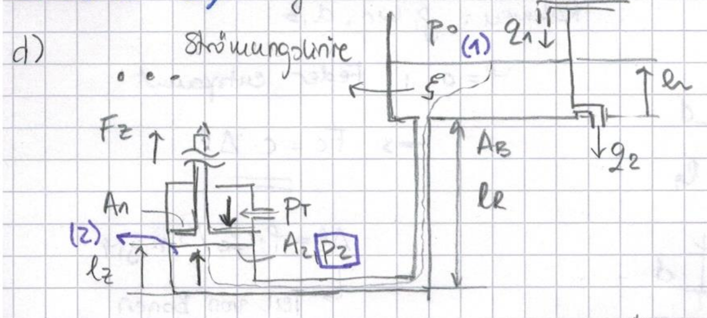
$F_c = c \cdot \Delta l$

* Wenn man den Schwerpunkt eines Körpers (Masse, Rahmen) schon berechnet hat, soll man es auch verwenden! (Impuls-, Drehimpulserhaltungssatz)

wenn es zu kompliziert ist F_c auszudrücken (und wenn auch nicht wichtig), einfach $F_c = c\Delta l$ schreiben!!

29.09.'13 3) Hydraulische Aktorik

d)



1) Massenerhaltung der Flüssigkeit im Behälter (V_0, h_0) Ausgangsvolumen

$\rho = \text{konst.} \Rightarrow$ Wasser (inkompressibel)

$$\boxed{\frac{d}{dt} V = \sum_i q_i}$$

Allgemeiner: $\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV + \int_{\partial V} \rho (v - u) \cdot n \, dA = 0$

2) Bernoulli-Gl.:

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\approx 0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + zg = \text{konst.}$$

-augen: stationäre Strömung

$$q = \dot{V} = (A \cdot l)^{\cdot} = A \dot{l} \qquad \boxed{q = A \dot{l}}$$

$$V = V_0 + A_B \cdot h \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} V = A_B \cdot \dot{h} = q_1 - q_2 - A_z \cdot \dot{l}_z \; *$$

$$* \; (1), (2): \quad \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot (l_R + h) = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\boxed{p_Z}}{\rho} + g \cdot l_Z \quad / \cdot 2$$

$(v_1 = \dot{h})$ $(v_2 = \dot{l}_Z)$

e) $h = ?$ $F_Z = F_G$, $l_Z = l_{Z0}$ - Zylinderauslenkung

↳ sodass Mechanismus im Gleichgewicht ist! $\Rightarrow$ $v_1 = v_2 = 0$

$$F_Z = F_G = p_Z A_2 - p_T A_1 \quad \Rightarrow \quad p_Z = \frac{F_G + p_T A_1}{A_2}$$

Aus Bernoulli-Gl folgt: $\frac{p_0}{\rho} + g(l_R + h) = \frac{p_Z}{\rho} + g \, l_Z \; / \cdot \rho$

$$\Rightarrow p_Z = p_0 + \rho g (l_R + h - l_Z)$$

$$F_G = A_2 p_0 + A_2 \rho g (l_R + h - l_Z) - p_T A_1$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{A_2 \rho g} \left(F_G + p_T A_1 - A_2 p_0 + (l_Z - l_R) A_2 \rho g \right)$$

27.09.'13 3)

f) $\dot{\varphi} = \omega_0$ - durch Aufbringen eines externen Drehmoments

$g_1 = ?$ für kleine Winkel φ, $g_2 = 0$

Analog zu $v = r \cdot \omega$ => $\underline{\underline{\dot{l}_z}} = (l_z + d) \cdot \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega_0} = (l_z + d) \cdot \omega_0$

- Aus der Massenerhaltung: $A_b \cdot \dot{l}_i = g_1 - \cancel{g_2}^{0} - A_z \cdot \dot{l}_z$

$$\Rightarrow \dot{l}_i = \frac{g_1 - A_z \cdot \dot{l}_z}{A_b}$$

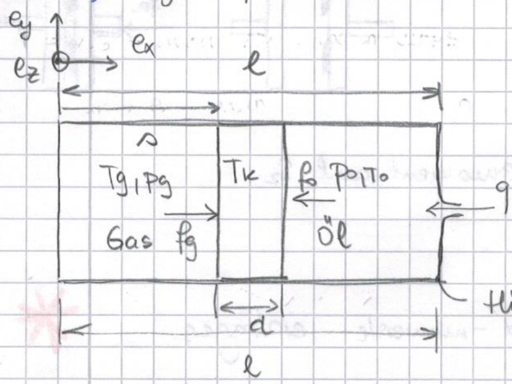
Aus $*$: $\dot{l}_i^2 = \dot{l}_z^2 + \frac{2}{\rho}(p_z - p_0) + 2g(l_z - l_e - l_i)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{l}_i}} = \sqrt{\dot{l}_z^2 + \frac{2}{\rho}\left(\frac{F_G + p_T A_n}{A_z} - p_0\right) + 2g(l_z - l_e - l_i)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g_1}} = A_z \dot{l}_z + A_b \cdot \dot{l}_i$$

$\dot{l}_i, \dot{l}_z$ - 2 Unbekannten für g_1 (am Ende beide bestimmt!)

29.11.'13 1) Hydro-pneumatischer Kolbenspeicher



l, A - Querschnittsfläche

Kolben - d, m_K

$q \to$ Volumenstrom

Hülle - adiabatisch isoliert ($q^1 = 0$, weil $c=0$)

Annahmen: 1) p, T - homogen

2) keine Leckage und keine Reibung beim Kolben

3) $T_0 = $ konst.

4) Gas - ideal - $pv = R_s T$

a) Impulserhaltung für den Kolben: $\to$ Starrkörper

$$\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt}(mv) = f$$

$$m_K = \text{konst} \Rightarrow m_K \frac{d}{dt} \underbrace{v}_{\dot{s}} = f \Rightarrow m_K \ddot{s} = f_g - f_o$$

$$m_K \ddot{s} = p_g A - p_o A \Rightarrow m_K \ddot{s} = A(p_g - p_o)$$

b) Massenerhaltung für die Ölkammer? $\frac{d}{dt} \rho_o = ?$ $(\dot{m}, q)$

$*$ Alles was kommt rein wird **positiv** gezählt, was kommt raus **negativ**!

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\rho(t) V(t)) = \sum_i \dot{m}_i}$$

Materialgesetz: $\dot{\rho}_o = \frac{\rho_o \dot{p}_o}{\beta}$, $\beta = $ konst. ($\beta \to$ Kompressionsmodul)

$$q = \int_{\partial V} v \cdot n \, dA = \dot{V}$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho q$$

$$V(t) = A(l - d - s) \Rightarrow \dot{V} = -A \dot{s}$$

$$\dot{\rho}_o V + \dot{V} \rho_o = + \rho_o \cdot q$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho_o} q = \frac{\rho_o \dot{p}_o}{\beta} V + \rho_o \dot{V} = \frac{\cancel{\rho_o} \dot{p}_o}{\beta} V - \cancel{\rho_o} A \dot{s} \quad / : \rho_o$$

$$\Rightarrow \dot{p}_o = \frac{\beta}{V}(q + A\dot{s})$$

29.11.13 1)

c) Massenerhaltung – Gaskammer?

$\dot{\rho}_g = \frac{\rho_g \dot{p}_g}{\kappa p_g}$, ρ_g, κ – Adiabatenexponent $\left(\kappa = \frac{c_p}{c_v}\right)$

$V_g = A \cdot s$

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)V(t)) = \underbrace{\sum_1 \dot{m}_i}_{=0}$$ – keine Volumenströme g ein- oder auskommen

$\Rightarrow \dot{\rho}_g V_g + \rho_g \cdot \dot{V}_g = 0$

$\Rightarrow \frac{\cancel{\rho_g} \dot{p}_g}{\kappa p_g} V_g + \cancel{\rho_g} A \dot{s} = 0 \Rightarrow \underline{\dot{p}_g = -\kappa p_g A \dot{s} \cdot \frac{1}{V_g}}$

Formel für den Wärmestrom

$$\boxed{\dot{Q} = \alpha A (T_1 - T_2)}$$

d) Energieerhaltung für den Kolben?

– Wärmeströme: $\dot{Q}_{g,K} = \alpha_{g,K} A (T_K - T_g)$; $\dot{Q}_{0,K} = \alpha_{0,K} A (T_K - T_0)$

$\frac{d}{dt} T_K = ?$ kalorische Zustandsgl: $de_{i,K} = c_p \, dT_K$

kin. Energie des Kolbens – vernachl.! $\Rightarrow \underline{\underline{v = 0}}$

zugeführte Wärmeströme

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho \, e_t(t,x) dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e_t dV + \underbrace{\int_{\partial V} \rho e_t (v \cdot n) dA}_{=0} = \dot{Q} + \dot{W}}$$ → zug. Leistung

$\dot{Q} = -\dot{Q}_{g,K} - \dot{Q}_{0,K}$, $\dot{W} = 0$

$e_t = e_i + \underbrace{\frac{1}{2} v^T v}_{=0} + \underbrace{g z}_{\approx 0}$ – totale spez. Energie

$\boxed{\dot{E}_i = \dot{Q}}$

Energieerhaltung

$\int_V \rho \, dV = m_K$

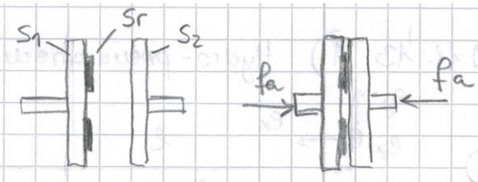
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e_i dV = \dot{Q} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(e_i \cdot m_K)}_{\dot{E}_i} = m_K \frac{\partial e_i}{\partial t} = \dot{Q}$

1. Hauptsatz der Thermodynamik

$\dot{Q}_{g,K}$, $\dot{Q}_{0,K}$ – vom Kolben an Gas und Öl abgegeben $\Rightarrow$ negativ gezählt (nicht zugeführt!)

$m_K c_p \frac{dT_K}{dt} = -\dot{Q}_{g,K} - \dot{Q}_{0,K} \Rightarrow \underline{\frac{dT_K}{dt} = \frac{A}{m_K c_p}\left(-\alpha_{g,K}(T_K - T_g) - \alpha_{0,K}(T_K - T_0)\right)}$

29.11.13 2) Reibkupplung



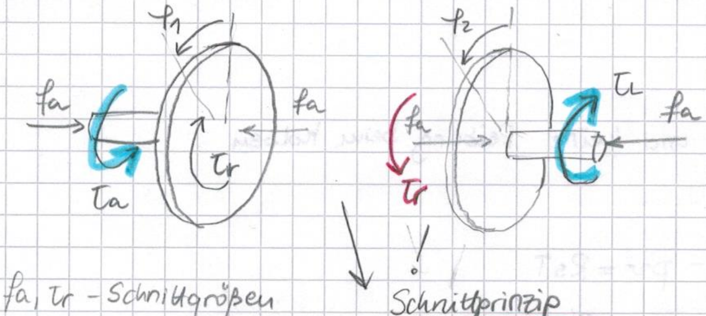
θ_1, θ_2

τ_r - Reibmoment auf S_r

τ_a - Antriebsmoment auf S_1 ; τ_L - Lastmoment auf S_2

a) Reibkupplung - freischneiden

externe Kräfte / Momente + Schnittkräfte und -momente eintragen. *



τ_a immer in Richtung der Bewegung, τ_L in anderer Richtung !! (~)

f_a, τ_r - Schnittgrößen

Schnittprinzip

b) rotatorische Bewegung der einzelnen Scheiben

$$\Rightarrow [\varphi_1, \varphi_2]^T = q$$

- Drehimpulserhaltungssätze angeben: $\boxed{\frac{d}{dt} l^{(0)} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \tau^{(0)}}$

$$\tau_1^{(0)} = \theta_1 \ddot{\varphi}_1 = \tau_a - \tau_r$$
$$\tau_2^{(0)} = \theta_2 \ddot{\varphi}_2 = \tau_r - \tau_L$$

c) $\varphi_1(t), \varphi_2(t) = ?$ Kräfte und Momente - konstant

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\tau_a - \tau_r}{\theta_1} \quad \Big/ \int_0^t$$

$$\dot{\varphi}_1(t) - \underbrace{\dot{\varphi}_1(0)}_{\omega_{1,0}} = \frac{\tau_a - \tau_r}{\theta_1} t \Rightarrow \dot{\varphi}_1(t) = \frac{\tau_a - \tau_r}{\theta_1} t + \omega_{1,0} \quad \Big/ \int_0^t$$

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(0) = \frac{1}{2} \frac{\tau_a - \tau_r}{\theta_1} t^2 + \omega_{1,0} t$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{1}{2} \frac{\tau_a - \tau_r}{\theta_1} t^2 + \omega_{1,0} t + \varphi_{1,0}$$

Analog: $\varphi_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\tau_r - \tau_L}{\theta_2} t^2 + \omega_{2,0} t + \varphi_{2,0}$

29.11.'13 2)

d) $t_k = ?$ Kuppelzeit, für die die Kupplung nicht mehr gleitet

$$\hookrightarrow \omega_1(t_k) = \omega_2(t_k) \Rightarrow \dot{\varphi}_1(t_k) = \dot{\varphi}_2(t_k)$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_a - \tau_r}{\Theta_1} t_k + \omega_{1,0} = \frac{\tau_r - \tau_e}{\Theta_2} t_k + \omega_{2,0}$$

$$\Rightarrow t_k \left(\frac{\tau_r - \tau_e}{\Theta_2} - \frac{\tau_a - \tau_r}{\Theta_1} \right) = \omega_{1,0} - \omega_{2,0}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_k = \frac{\omega_{1,0} - \omega_{2,0}}{\frac{\tau_r - \tau_e}{\Theta_2} \underbrace{- \frac{\tau_a - \tau_r}{\Theta_1}}_{= \frac{\tau_r - \tau_a}{\Theta_1}}}}$$

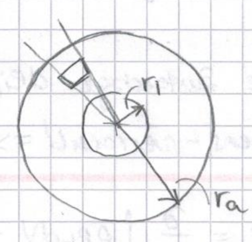
e) $\tau_r = ?$ Reibmoment

μ – Reibungskoeff.

A – Fläche der Reibscheibe

$$d\tau_r = r^2 \mu \frac{f_a}{A} \, dr \, d\varphi$$

$$\tau_r = \int d\tau_r = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r^2 \mu \frac{f_a}{A} \, dr \, d\varphi$$

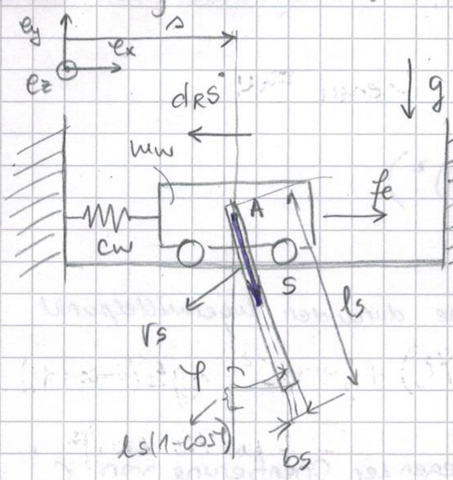


$$\Rightarrow \boxed{A = \pi (r_a^2 - r_i^2)}$$

$$\Rightarrow \tau_r = \frac{\mu f_a}{A} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{r_i}^{r_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_r = \frac{\mu f_a \cdot 2 \cancel{\pi}}{\cancel{\pi} (r_a^2 - r_i^2)} \frac{1}{3} (r_a^3 - r_i^3)}$$

A2.20 Wagen mit Pendel – m_W, f_e - Antriebskraft, $c_W > 0$, s_{W0}



$f_R = -d_R\dot{s}$, $d_R > 0$

Stab: ρ_s, l_s, b_s, h_s

Bewegungsgl. mit Euler-Lagrange Gl?

$m_S = \rho_S l_S b_S h_S$

$$T = T_{r,S} + T_{T,S} + T_{T,W}$$

$$T_{r,S} = \frac{1}{2}\,\Theta^{(S)}_{S,zz}\,\dot{\varphi}^2$$

- Hätte ich für den Bezugspunkt Punkt A gewählt, würde es nur rotatorische Bewegung geben, jetzt ist der Schwerpunkt - Bezugsp. und deshalb gibt es beide transl. & rotat. Bewegung und alles wird auf S bezogen!

$$\Theta^{(S)}_{S,zz} = \int r^2 dm = \int_{-b_s/2}^{b_s/2}\int_{-h_s/2}^{h_s/2}\int_{-l_s/2}^{l_s/2} \underbrace{r^2}_{(x^2+y^2)} \rho_s\,dx\,dy\,dz = \rho_s h_s\left(\int_{-b_s/2}^{b_s/2}\int_{-l_s/2}^{l_s/2} x^2 dx\,dy + \iint y^2 dx\,dy\right)$$

$$= \rho_s h_s\left(b_s\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{l_s/2}^{l_s/2} + l_s\frac{y^3}{3}\Big|_{-b_s/2}^{b_s/2}\right)$$

$$= \rho_s h_s\frac{1}{3}\left(b_s\frac{l_s^3}{4} + l_s\frac{b_s^3}{4}\right) = \frac{\underbrace{\rho_s h_s b_s l_s}_{m}}{12}\left(l_s^2 + b_s^2\right) = \frac{m}{12}\left(l_s^2 + b_s^2\right)$$

$$\Rightarrow T_{r,S} = \frac{1}{2}\,\Theta^{(S)}_{S,zz}\,\dot{\varphi}^2$$

$$T_{T,S} = \frac{1}{2} m_S\,\dot{r}_S^T\,\dot{r}_S$$

$$r_S = \begin{bmatrix} s + \frac{l_s}{2}\cdot\sin\varphi \\ -\frac{l_s}{2}\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{r}_S = \begin{bmatrix} \dot{s} + \frac{l_s}{2}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ +\frac{l_s}{2}\sin\varphi\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{T,S} = \frac{1}{2} m_S\left(\dot{s}^2 + l_s\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l_s^2}{4}\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \frac{l_s^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2} m_S\left(\dot{s}^2 + l_s\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{4}l_s^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$T_{T,W} = \frac{1}{2} m_W\,\dot{s}^2$$

$\varphi = 0 : \quad V = 0 \quad \Rightarrow \quad V_g = m g \frac{l_s}{2}(1-\cos\varphi)$ – Die Schwerkraft wirkt im Schwerpunkt! Deshalb $\frac{l_s}{2}$!!

$V_f = \int_s f_f \, ds \quad$ mit $\quad f_f = c_w (s - s_{w0})$ – linearer Fall

$$\Rightarrow V_f = \frac{1}{2} c_w (s - s_{w0})^2$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $\quad L = T - V_g - V_f$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\Theta^{(S)}_{S,zz}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m_s\left(\dot s^2 + l_s \dot s \dot\varphi \cos\varphi + \frac{1}{4} l_s^2 \dot\varphi^2\right) + \frac{1}{2} m_w \dot s^2 - m g \frac{l_s}{2}(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2} c_w (s - s_{w0})^2$$

– $q = [s, \varphi]^T$

* – Die generalisierten Kräfte werden getrennt für System Stab & für S. wagen betrachtet.

$$f_s = \underbrace{[f_e - d_e \dot s, 0, 0]}_{f_e^T}{}^T \cdot \frac{d}{ds}\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_e - d_e \dot s$$

$f_\varphi = [0, 0, 0] \frac{\partial r_s}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow$ keine (externe) Kraft wirkt auf den Stab

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot s} L - \frac{\partial}{\partial s} L = f_s = f_e - d_e \dot s$$

$$\frac{\partial}{\partial s} L = -c_w (s - s_{w0}) \; ; \; \frac{\partial}{\partial \dot s} L = m_s \dot s + \frac{1}{2} m_s l_s \dot\varphi \cos\varphi + m_w \dot s$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot s} L = m_s \ddot s + \frac{1}{2} m_s l_s \left(\ddot\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \, \dot\varphi^2\right) + m_w \ddot s$$

$$\Rightarrow (m_s + m_w)\ddot s + \frac{1}{2} m_s l_s \left(\ddot\varphi \cos\varphi - \sin\varphi\, \dot\varphi^2\right) + c_w (s - s_{w0}) = f_e - d_e \dot s$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot\varphi} L - \frac{\partial}{\partial \varphi} L = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} L = \cancel{-\frac{1}{2} m_s l_s \dot s \dot\varphi \sin\varphi} - m g \frac{l_s}{2} \sin\varphi$$

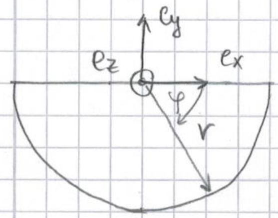
$$\frac{\partial}{\partial \dot\varphi} L = \Theta^{(S)}_{S,zz}\dot\varphi + \frac{1}{2} m_s l_s \dot s \cos\varphi + \frac{1}{4} l_s^2 \dot\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot\varphi} L = \Theta^{(S)}_{S,zz}\ddot\varphi + \frac{1}{4} l_s^2 \ddot\varphi + \frac{1}{2} m_s l_s \cos\varphi \, \ddot s \cancel{- \frac{1}{2} m_s l_s \dot s \sin\varphi \, \dot\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot\varphi\left(\Theta^{(S)}_{S,zz} + \frac{1}{4} l_s^2\right) + \frac{1}{2} m_s l_s \cos\varphi \, \ddot s + m g \frac{l_s}{2} \sin\varphi = 0$$

29.11.'13. 4)

a) Halbkreis: r_s im xy-KS ?



$$r_s = \frac{1}{A}\int_{(A)} \tilde{r}\, dA$$

$x = r\cos\varphi$, $y = -r\sin\varphi$

$$A = \frac{r^2\pi}{2} \Rightarrow \boxed{dA = r\,dr\,d\varphi}$$

!

$$\Rightarrow r_s = \frac{2}{r^2\pi}\int_0^r\int_0^\pi \begin{bmatrix}\tilde r\cos\varphi\\ -\tilde r\sin\varphi\end{bmatrix}\tilde r\, d\tilde r\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{r^2\pi}\begin{pmatrix} \frac{\tilde r^3}{3}\Big|_0^r \cdot \cancel{(+\sin\varphi)\Big|_0^\pi} \\ -\frac{\tilde r^3}{3}\Big|_0^r\cdot \underbrace{(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi}_{+2}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -\frac{4}{3}\frac{r^{\cancel{3}}}{\cancel{r^2}\pi}\end{bmatrix} \Rightarrow r_{s,x}=0$$

$$r_{s,y} = -\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$$

b) $\Theta_K = ?$ eines Kugels (ρ, R)

Kugelkoordinaten: $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\psi\sin\varphi$, $z = r\cos\psi$

$\boxed{dV = r^2\sin\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi}$, $dm = \rho\, dV$

$$\Theta_K = \frac{2}{3}\int_V r^2\, dm \qquad \boxed{\Theta_{xx} = \int_V r_x^2\, dm}$$

$$\Theta = \Theta_{xx}^{(0)} = \Theta_{yy}^{(0)} = \Theta_{zz}^{(0)}$$

$$\Theta = \frac13\left(\Theta_{xx}^{(0)}+\Theta_{yy}^{(0)}+\Theta_{zz}^{(0)}\right) = \frac13\left(\int_V \overbrace{(x^2+y^2)}^{r_x^2}dm + \int_V\overbrace{(y^2+z^2)}^{r_y^2}dm + \int_V \overbrace{(z^2+x^2)}^{r_z^2}dm\right)$$

$$2\int_V \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{r^2}\, dm$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac23\int_V r^2\, dm$$

... $\boxed{\Theta = \frac{8}{15}R^5\rho\pi} = \underbrace{\rho\frac43 R^3\pi}_{m}\,\frac25 R^2$

$m = \rho\frac43 R^3\pi$

$$\boxed{\Theta = \frac25 mR^2}$$

31.01.2014. 1) Senkrechter Freistrahl

Reservoir : p_a, $v_a = 0$

geg: h, p_a, A, p_0, ρ, α, m, g

Annahmen: nicht viskose, inkompressible, stationäre Strömung

$\Rightarrow \rho = \text{konst}, \; v = \text{konst}$

$z_G = ?$ Kugelkalotte im Gleichgewicht

a) B-Gl. für a-b: $\quad \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\approx 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}v^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + g\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$

$v_b = ?$

↳ am Austritt der Düse $\quad \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}$

$$\cancel{\frac{1}{2}v_a^2} + \frac{p_a}{\rho} + g\cdot h = \frac{1}{2}v_b^2 + \frac{p_0}{\rho} + \cancel{g\,h_b} \quad /\cdot 2$$

$$\Rightarrow v_b^2 = 2gh + 2\frac{1}{\rho}(p_a - p_0) \Rightarrow \boxed{v_b = \sqrt{2gh + \frac{2}{\rho}(p_a - p_0)}}$$

b) B-Gl. für b-c:

$v_c(z)$ - Strömungsgeschw. des Strahls in der Höhe z

$$\frac{1}{2}v_b^2 + \cancel{\frac{p_0}{\rho}} = \frac{1}{2}v_c^2(z) + \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + g\cdot z \quad /\cdot 2$$

$$\Rightarrow v_c^2(z) = v_b^2 - 2g\cdot z \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c(z) = \sqrt{v_b^2 - 2g\cdot z}}$$

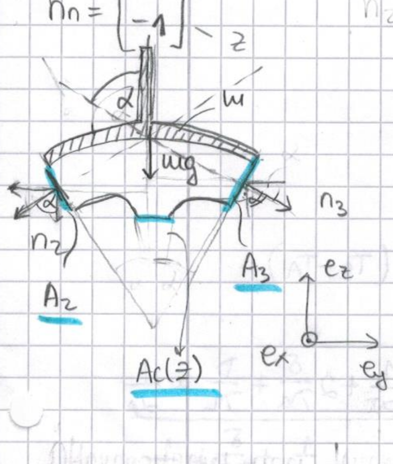
→ auf 1 normiert!

c) $n_n, n_2, n_3 = ?$ Normalvektoren ; $v_n, v_2, v_3 = ?$ in yz-Ebene

ideale Umlenkung an der Kalotte => kein Energieverlust durch Reibung

↳ die Geschw. des Strahls bleibt unverändert!

$$n_n = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$$



$$n_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} ; \; n_3 = \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ v_c(z) \end{bmatrix} ; \; v_2 = \begin{bmatrix} -v_c(z)\sin\alpha \\ -v_c(z)\cos\alpha \end{bmatrix} ; \; v_3 = \begin{bmatrix} v_c(z)\sin\alpha \\ -v_c(z)\cos\alpha \end{bmatrix}$$

31.01.14 1)

d) Massenerhaltung für b-c? nach $A_c(z)$ auflösen

$$\underbrace{\frac{d}{dt}V}_{=0} = \sum_i q_i \quad \Rightarrow \sum_i q_i = 0 = A_b \cdot v_b - A_c(z) \cdot v_c(z)$$

$$q = \dot{V} = A \cdot v$$

$$\Downarrow$$

$$A_c(z) = \frac{A_b \cdot v_b}{v_c(z)}$$

e) Impulserhaltung in z-Richtung für Kontrollvolumen V

$$A_2 = A_3 = \frac{A_c(z)}{2}$$

$$\int_{\partial V} \rho v (v \cdot n) \, dA = \sum f$$

$$\Rightarrow \rho \int_{A_2} v_2 \underbrace{(v_2 \cdot n_2)}_{v_c(z)} dA + \rho \int_{A_3} v_3 \underbrace{(v_3 \cdot n_3)}_{v_c(z)} dA + \rho \int_{A_c(z)} v_n \underbrace{(v_n \cdot n_n)}_{-v_c(z)} dA = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

nur z-Komponente:

$$\Rightarrow -\rho v_c^2(z) \cos\alpha \, A_2 - \rho v_c^2(z) \cos\alpha \, A_3 - v_c^2(z) \rho A_c(z) = -mg \quad / \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \rho v_c^2(z) \cos\alpha \cdot A_c(z) + v_c^2(z) \rho A_c(z) = mg$$

$$\rho v_c^2(z) A_c(z) (1 + \cos\alpha) = mg$$

f) $z_G = ?$ - vertikale Kräfte im Gleichgewicht

$$\rho v_c^{\cancel{2}}(z) \frac{A_b \cdot v_b}{\cancel{v_c(z)}} = \frac{-mg}{1 + \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow v_c(z) = \frac{-mg}{\rho A_b v_b (1 + \cos\alpha)} = \sqrt{v_b^2 - 2g \cdot z} \quad ^2$$

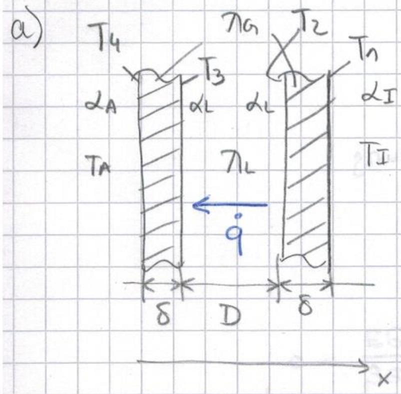
$$2gz = v_b^2 - \left(\frac{-mg}{\rho A_b v_b (1 + \cos\alpha)} \right)^2$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{1}{2g} \left(v_b^2 - \left(\frac{-mg}{\rho A_b v_b (1 + \cos\alpha)} \right)^2 \right)$$

31.01.2014. 2) Doppelverglasung

$\boxed{\alpha \rightarrow \frac{W}{m^2 K}}$ $\boxed{\lambda \rightarrow \frac{W}{m K}}$

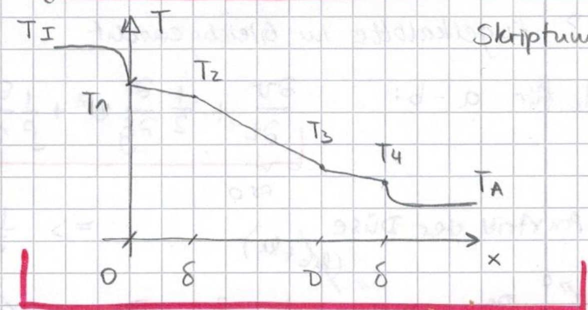
a)



$\alpha_L \rightarrow \infty$

- Randtemperaturen: $T_1, \ldots, T_4$
- typischer Temperaturverlauf für $T_I > T_A$

Skriptum, S. 134.



$\dot{q}$ – T – Zusammenhänge?

$$\dot{q}_{01} = \alpha_I (T_I - T_1)$$
$$\dot{q}_{12} = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_1 - T_2)$$
$$\dot{q}_{23} = \frac{\lambda_L}{D}(T_2 - T_3)$$
$$\dot{q}_{34} = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_3 - T_4)$$
$$\dot{q}_{45} = \alpha_A (T_4 - T_A)$$

$$\dot{q}_{01} = \dot{q}_{12} = \dot{q}_{23} = \dot{q}_{34} = \dot{q}_{45} = \dot{q}_D$$

(Wärmestromdichte bleibt erhalten!)

↳ Randbedingung 2. Art = vorgegebener Wärmestrom

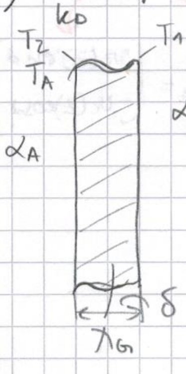
b) k_D = ? Wärmeübergangskoeff.

$$\boxed{\dot{q}_D = \underline{\underline{k_D}} (T_I - T_A)}$$

$$T_I - T_A = \underbrace{(T_I - T_1)}_{\dot{q}_D \frac{1}{\alpha_I}} + \underbrace{(T_1 - T_2)}_{\dot{q}_D \frac{\delta}{\lambda_G}} + \ldots + \underbrace{(T_4 - T_A)}_{\dot{q}_D \frac{1}{\alpha_A}}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_D = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_I} + 2\frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A}}}_{k_D} \cdot (T_I - T_A)$$

c) $\frac{k_E}{k_D}$ = ? k_E – für Einzelverglasung



$$\dot{q} = \alpha_L (T_I - T_1) = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_1 - T_2) = \alpha_A (T_2 - T_A)$$

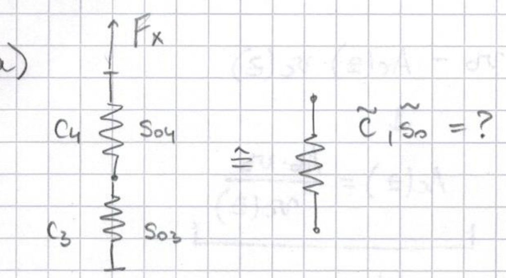
$$T_I - T_A = \dot{q} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_L} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}\right)}_{1/k_E}$$

$$\Rightarrow \frac{k_E}{k_D} = \frac{\frac{1}{\alpha_I} + 2\frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A}}{\frac{1}{\alpha_L} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}}$$

31.01.2014. 3) Feder - Masse - Dämpfer - System

m_1, m_2 , $d_1,\dots,d_4 > 0$, $c_1,\dots,c_4 > 0$ $(s_{01},\dots,s_{04})$

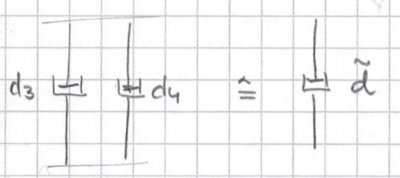
a)



$\tilde{s}_0 = s_{03} + s_{04}$

$\frac{1}{\tilde{c}} = \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{c_3+c_4}{c_3 c_4}$

$\Rightarrow \tilde{c} = \frac{c_3 c_4}{c_3 + c_4}$,



$\tilde{d} = d_3 + d_4$

- Ansatz: $F = -c \cdot s$

Die gleiche Kraft wirkt auf die beiden Feder: $s = s_1 + s_2$

$-\frac{F}{\tilde{c}} = -\frac{F}{c_1} - \frac{F}{c_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\tilde{c}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

b) Impulserhaltungssatz für m_1, m_2?

$$\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt}(mv) = f$$

nicht vergessen!!

$$m_2 \ddot{s}_2 = -f_L - \tilde{c}(s_2 - \tilde{s}_0) - \tilde{d}\dot{s}_2 - d_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - c_2(s_2 - s_1 - s_{02}) \boxed{-m_2 g}$$

$$m_1 \ddot{s}_1 = -m_1 g - d_1 \dot{s}_1 - c_1(s_1 - s_{01}) - \underbrace{d_2(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)}_{+d_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)} - c_2(s_1 - s_2 - s_{02})$$

$$\left(+c_2(s_2 - s_1 - s_{02})\right)$$

$$-c_2(s_1 - (s_2 - s_{02}))$$

$$= +c_2(s_2 - s_{02} - s_1)$$

c) Matrixschreibweise:

$$\boxed{M\ddot{q} + D\dot{q} + Cq = k + b f_L}$$

$q = [s_1, s_2]^T \Rightarrow M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\{m_1, m_2\}$

$\dot{q} = [\dot{s}_1, \dot{s}_2]^T$

↳ Massenmatrix

$D = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ d_2 & \tilde{d} + d_2 \end{bmatrix}$

↳ Dämpfungsm.

$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & \tilde{c} + c_2 \end{bmatrix}$ - Steifigkeitsm.

$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $k = \begin{bmatrix} -m_1 g + c_1 s_{01} - c_2 s_{02} \\ -m_2 g + \tilde{c}\tilde{s} + c_2 s_{02} \end{bmatrix}$

31.01.2014. 3)

$\Gamma \Rightarrow \ddot{s}_2 = \dot{s}_2 = 0$

d) $f_L = ?$ => stationäre Position für m_2 h ($s_2 = h$)

$$\Rightarrow f_L = -\tilde{c}(h - \tilde{s}_0) - c_2(h - s_1 - s_{02}) - m_2 g$$

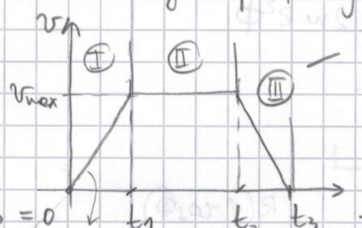
$s_1 = ?$ – stationär => $\ddot{s}_1 = \dot{s}_1 = 0$

$$m_1 g = -c_1(s_1 - s_{01}) + c_2(h - s_{02} - s_1)$$

$$\Rightarrow s_1(c_1 + c_2) = c_2(h - s_{02}) + c_1 s_{01} - m_1 g$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{c_2(h - s_{02}) + c_1 s_{01} - m_1 g}{c_1 + c_2}$$ ✓

e) Geschwindigkeitsprofil gegeben:



Teilabschnitte

$v(t), l(t) = ?$

↳ hat eigentlich nichts mit dem F-M-D-System zu tun!

Linienlast: $q(\xi) = 1 + \cos(\xi)$ – N/m

$df_L = q(\xi)\, d\xi$

↳ $f_L = \int_0^l q(\xi)\, d\xi$

$y = kx$

$v_{max} = k \cdot t_1$

$\Rightarrow$ I: $v(t) = \frac{v_{max}}{t_1} \cdot t$, $0 \le t \le t_1$

II: $v(t) = v_{max}$, $t_1 \le t \le t_2$

III: $y = kx + d$

$v_{max} = k t_2 + d$

$0 = k t_3 + d \Rightarrow d = -k t_3 = t_3 \frac{v_{max}}{t_3 - t_2}$

$k = \frac{v_{max}}{t_2 - t_3} = -\frac{v_{max}}{t_3 - t_2}$

$t_3 > t_2$

$\Rightarrow$ III: $v(t) = -\frac{v_{max}}{t_3 - t_2} \cdot t + \underbrace{\frac{v_{max} t_3}{t_3 - t_2}}_{n}$, $t_2 \le t \le t_3$

$v(t) = \dot{l}(t)$

$$\Rightarrow l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max}}{2 t_1} \cdot t^2, & 0 \le t \le t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max}}{2} t_1}_{l(t_1)} + v_{max}(t - t_1), & t_1 \le t \le t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max}}{2} t_1 + v_{max}(t_2 - t_1)}_{l(t_2)} - \frac{v_{max}}{2(t_3 - t_2)}(t^2 - t_2^2) + n(t - t_2), & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

f) $f_L(t) = ?$

$$f_L = \int_0^l (1 + \cos(\xi))\, d\xi = (\xi + \sin(\xi))\Big|_0^{l(t)} = l(t) + \sin(l(t))$$

$$l(t)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt \Rightarrow l(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt + l(t_0) \; !$$

31.01.2014. 4) Bewegte Scheibe – $\rho, h, 2R$

$\phi = 0$ – Feder entspannt (c)

a) $m = ?$ $\quad m = \rho V$

$V = A \cdot h = \left(4R^2\pi - \cancel{2} \cdot \frac{R^2}{\cancel{4}_2}\pi\right) h = \frac{7R^2}{2}\pi h \quad \Big\} \Rightarrow m = \rho \frac{7R^2}{2}\pi h$

b) $\dot{\phi} - v_A$ – kinematische Beziehung?

$\boxed{v_A = 2R \cdot \dot{\phi}}$

c) $T(\dot{\phi}) = ?$ $\quad , \Theta_{zz} = \frac{17 mR^2}{8}$

$T(\dot{\phi}) = T_{S,R} + T_{S,T}$

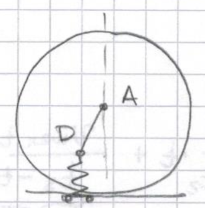
$T_{S,R} = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\dot{\phi}^2 ; \quad T_{S,T} = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{4}R^2\dot{\phi}^2 = 2mR^2\dot{\phi}^2$

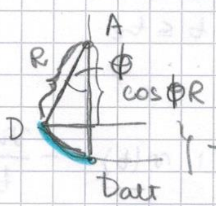
$\Rightarrow T(\dot{\phi}) = \frac{17}{16} mR^2\dot{\phi}^2 + 2mR^2\dot{\phi}^2 = \boxed{\frac{49}{16} mR^2\dot{\phi}^2}$

d) $V(\phi) = ?$ potentielle Energie des Systems $\qquad F_c = c \underbrace{\Delta l}_{R(1-\cos\phi)}$

↳ kommt nur von der Feder!

$$\boxed{V = \frac{1}{2} c R^2 (1-\cos\phi)^2}$$





$\Big\} \rightarrow R(1-\cos\phi)$

e) $L = T - V = \frac{49}{16} mR^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} cR^2(1-\cos\phi)^2$

↳ Lagrange-Fkt.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}L - \frac{\partial}{\partial\phi}L = f_q$$

$q = \phi$ – gen. Koordinate

$\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}L = \frac{49}{8} mR^2\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}L = \frac{49}{8} mR^2\ddot{\phi}$

$\frac{\partial}{\partial\phi}L = -cR^2(1-\cos\phi)\sin\phi = cR^2(\cos\phi - 1)\sin\phi$

$\Big\} \Rightarrow \frac{49}{8} mR^2\ddot{\phi} - cR^2(\cos\phi - 1)\sin\phi = f_q$

f) $f_q = f_E^T \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)$ → Ortsvektor r geht vom K-Ursprung zum Angriffspunkt!

$f_E^T = [f(t) - \underbrace{d \cdot v_A}_{f_d}, 0, 0] = [f(t) - \overbrace{d \cdot 2R\dot{\phi}}^{f_d}, 0, 0]$

(Wenn) Reibmomente und Reibkräfte * wirken direkt auf gen. Koordinaten und können gleich dann so in die Bewegungsgleichungen aufgenommen werden!

07.03.2014 1) Kugelgriller

Grillgut - d_1, ε_1, w_1

Griller: d_2, ε_2

a) Sichtfaktoren für Schale und Grillgut?

Grillgut - ein Kugel => ein konvexer Körper => $F_{11} = 0$
(besitzt eine konvexe Oberfläche)

Summationsregel: $\underbrace{F_{11} + F_{12} = 1}$ => $F_{12} = 1$

Reziprozitätsregel: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$

$$A_1 = \frac{d_1^2}{4}\pi \quad , \quad A_2 = \frac{d_2^2}{4}\pi \qquad \Rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \overset{=1}{F_{12}} = \frac{\frac{d_1^2}{\cancel{4}\cancel{\pi}}}{\frac{d_2^2}{\cancel{4}\cancel{\pi}}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

aus dem Grillgut

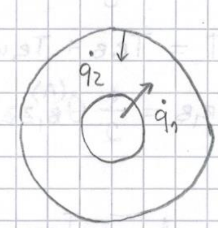
Sichtsfaktormatrix

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 & 1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

b) austretende Nettowärmestromdichte: $\dot{q} = ?$

Innenwand des Grillers: $\varepsilon_2 = 1$ - Strahlung

Konvektion - vernachl!



$$\dot{q} = \operatorname{diag}\{\varepsilon\}\left(E - F \cdot \underbrace{(E - \operatorname{diag}\{\varepsilon\})}_{\begin{bmatrix} 1-\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}}\right)^{-1}(E-F)\,\sigma T^4$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \operatorname{diag}\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \operatorname{diag}\{\varepsilon\}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-\varepsilon_1)\frac{d_1^2}{d_2^2} & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 & \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \end{pmatrix} \sigma T^4$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (\varepsilon_1 - 1)\frac{d_1^2}{d_2^2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-\varepsilon_1)\frac{d_1^2}{d_2^2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ (1-\varepsilon_1)\frac{d_1^2}{d_2^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 & \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} & \varepsilon_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \\ -\varepsilon_1 \frac{d_1^2}{d_2^4} (T_1^4 - T_2^4) \end{bmatrix}$$

07.03.2014. 1) DG für T können über den ersten Hauptsatz der Thermodynamik bestimmt werden!

c) Energieerhaltung für das Grillgut

$\frac{dT_1}{dt} = ?$ kalorische Zustandsgl.: $de_i = c_p dT_1 \quad / \cdot m_1 \quad / \frac{d}{dt}$

c_p → spez. Wärmekap.

Erster Hauptsatz der Thermodynamik:

$$\boxed{dE_i = Q^{\uparrow} + W^{\uparrow}}$$

$W^{\uparrow}$ → zug. Arbeit

$Q^{\uparrow}$ → zugeführte Wärme

$$\frac{d}{dt}(e_i \cdot m_1) = c_p m_1 \frac{dT_1}{dt}$$

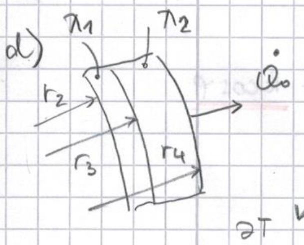
$$\Rightarrow \dot{E}_i = c_p m_1 \frac{dT_1}{dt} = -\dot{q}_1 \cdot A_1$$

$W^{\uparrow} = 0$

$Q^{\uparrow} = -\dot{q}_1 \cdot A_1$ → Wärme wird abgeführt!

Aus b) folgt: $\dot{q}_1 = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_1}{dt} = -\frac{d_1^2 \pi}{4 c_p m_1} \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$

d)



Stationärer Temperaturverlauf: $T(r) = ?$

$\dot{Q}_0$ = konst. Wärmestrom, $T(r_2) = T_2$ – Randbedingung

Wärmeleitgl. in Kugelkoordinaten:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad \boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad / \int$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} \quad \text{– Trennung der Variablen}$$

$$\partial T = \frac{\partial r}{r^2} C_1 \quad / \int \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

* Mit jeder neuen unbestimmten Integration kommt eine neue Konstante in die Gleichung

$$\boxed{\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}_0}{A} = \frac{\dot{Q}_0}{4\pi r^2}}$$ → Fläche einer Kugel

$$\dot{q}_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda \frac{C_1}{\cancel{r^2}} = \frac{\dot{Q}_0}{4\pi \cancel{r^2}} \Rightarrow C_1 = -\frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda}$$

Randbed.: $T(r_2) = T_2$

$$T_2 = \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda r_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_2 - \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda r_2}$$

Für $r_2 \le r \le r_3$: $T(r) = T_2 + \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right)$

Für $r_3 \le r \le r_4$: "Randbed."

$$T(r_3) = \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_2 r_3} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = T(r_3) - \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_2 r_3}$$

$$\Rightarrow T(r) = T(r_3) + \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right)$$

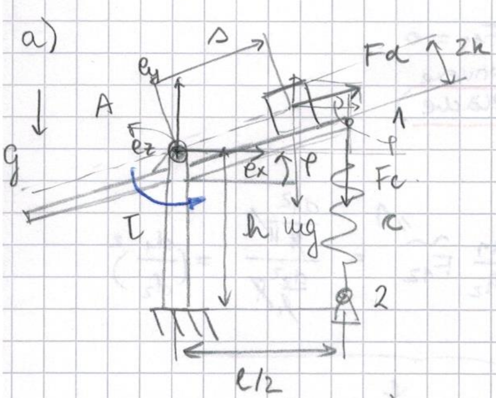
07.03.2014 2)

Balken: $\Theta_{B,zz}^{(A)}$, l, $m \approx 0$, τ

Würfel: $2k$, $\Theta_{W,zz}^{(s)}$, m, Fd

Feder: c, x_0

a)



$$F_c = -c\left(\frac{l}{2}\varphi - x_0\right)$$

$v_W = ?$ $\omega_W = ?$

$q = [\varphi \; s]^T$ - gen. Koordinaten

Ortsvektor vom Koordinatenursprung zum Würfelsschwerpunkt:

$$r_{W,s} = \begin{bmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_W = \dot{r}_{W,s}$$

$$\Rightarrow v_W = \begin{bmatrix} \dot{s}\cos\varphi - s\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{s}\sin\varphi + s\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega_W = \dot{\varphi}}$$

b) kin. Energie des Systems = T = ?

$$T = T_{R,B} + T_{R,W} + T_{T,W}$$

$$T_{R,B} = \frac{1}{2}\Theta_{B,zz}^{(A)}\cdot\dot{\varphi}^2 \quad ; \quad T_{R,W} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\Theta_{W,zz}^{(s)} + \cancel{ms^2}}_{\Theta_{W,zz}^{(A)}}\Big)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\Theta_{W,zz}^{(s)}\dot{\varphi}^2$$

$$T_{T,W} = \frac{1}{2}m\, v_W^T v_W = \frac{1}{2}m\Big((\dot{s}\cos\varphi)^2 - \cancel{2s\dot{s}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}} + (s\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (\dot{s}\sin\varphi)^2 + \cancel{2s\dot{s}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}} + (s\cos\varphi\cdot\dot{\varphi})^2\Big)$$

$$\Rightarrow T_{T,W} = \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + \underline{\underline{(s\dot{\varphi})^2}}\right)$$

- hier wird schon berücksichtigt, dass die Rotation um die Achse durch Punkt A erfolgt

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\Theta_{B,zz}^{(A)} + \Theta_{W,zz}^{(s)}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + (s\dot{\varphi})^2\right)$$

c) $V = ?$ $\varphi = 0: V = 0$ $\qquad x_F = x_{F1} - x_{F2}$

$$V = V_F + V_G$$

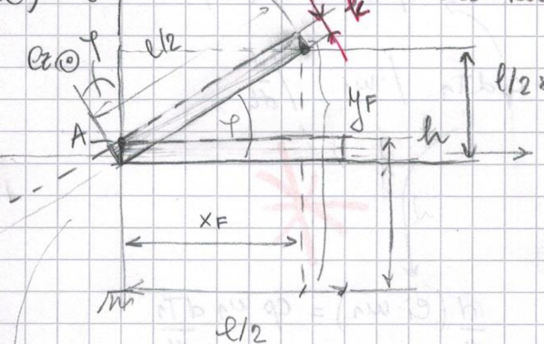
$$V_F = \frac{1}{2}c\left(|x_F| - x_0\right)^2$$

$|x_F|$ - Länge der Feder

x_F - Ortsvektor vom unteren zum oberen Aufhängungspunkt

07.03.2014 2)

c) → nicht die Dicke des Balkens



$$x_{F2} = \begin{bmatrix} l/2 \\ -h \end{bmatrix} \qquad x_{F1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_F \\ \bar{y}_F \end{bmatrix}$$

* Immer die Skizze gut anschauen!!

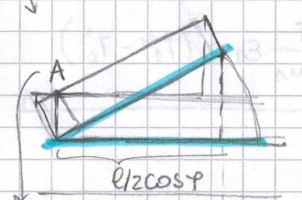
Punkt A in dem sich der Koordinatenursprung befindet, liegt im Abstand k von dem Balken!

(dass wird hier berücksichtigt!)

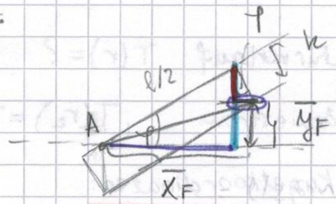
$$x_F = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$x_F = \begin{bmatrix} k\sin\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi - \frac{l}{2} \\ h - k\cos\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi \end{bmatrix}$$

x_{F1}, x_{F2} – beide Ortsvektoren (zu Punkten 1 und 2) auf Punkt A zu beziehen



bewegt sich nicht!



$$\bar{y}_F = \frac{l}{2}\sin\varphi - k\cos\varphi$$

$$\bar{x}_F = l/2\cos\varphi + \boxed{k\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad x_F = \begin{bmatrix} l/2\cos\varphi + k\sin\varphi - \frac{l}{2} \\ l/2\sin\varphi - k\cos\varphi + h \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |x_F| = \sqrt{x_F^T x_F}$$

$$\Rightarrow V_F = \frac{1}{2}c\left(|x_F| - x_0\right)^2$$

$$V_G = mg\,s\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad V = V_F + V_G - V_F(\varphi = 0)$$

$$V_F(\varphi=0) = \frac{1}{2}c\big(\underbrace{h - k - x_0}_{\text{Auslenkung der Feder}}\big)^2$$

* beachten was angegeben ist!

$V(\varphi=0)=0$ mit $V_F(\varphi=0)=\ldots$ gilt das für beide F und M!

$$|x_F| = \sqrt{\frac{l^2}{4} + k^2 + h^2 + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}\cos\varphi - lk\sin\varphi + l\sin\varphi h - 2kh\cos\varphi}$$

d) $L = T - V = \frac{1}{2}\left(\Theta_{B,zz}^{(4)} + \Theta_{W,zz}^{(5)}\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot s^2 + (s\dot\varphi)^2\right) - mgs\sin\varphi - \frac{1}{2}c(|x_F| - x_0)^2 + \frac{1}{2}c(h-k-x_0)^2$

e) Bewegungsgleichungen? $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$ – gen. Kräfte

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \begin{bmatrix} \left(\Theta_{B,zz}^{(A)} + \Theta_{W,zz}^{(5)}\right)\dot\varphi + ms^2\dot\varphi \\ m\dot s \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \begin{bmatrix} \left(\Theta_{B,zz}^{(4)} + \Theta_{W,zz}^{(5)} + ms\right)\ddot\varphi + 2ms\dot s\dot\varphi \\ m\ddot s \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} -mgs\cos\varphi - c(|x_F| - x_0)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{|x_F|}\cdot\left(+\frac{l^2}{2}\sin\varphi - lk\cos\varphi + lh\cos\varphi + 2kh\sin\varphi\right) \\ m\dot\varphi^2 s - mg\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$Q = f_E^T\frac{\partial r}{\partial q}$$

$q = s$: $f_E^T = [Fd\cos\varphi, Fd\sin\varphi, 0]$; $\frac{\partial r}{\partial s} = [\cos\varphi\ \sin\varphi,\ 0]^T$

$$\Rightarrow f_{qs} = Fd\big(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}\big)$$

$f_\varphi = T$?

07.03.2014. 3)

Ölkammer: Ausgangsvolumen V_0 ($s_1 = s_2 = 0$)

2 Kolben: m_1, m_2, $A_1 > A_2$, s_1, s_2

externe Kräfte: F_1, F_2

Annahmen: · p, T - homogen, $T = \text{konst.}$

· wegen der Reibung tritt Dämpfung auf - d_1, d_2

· $m_2 g$, $m_1 g$ - vernachl. $p_0 \approx 0$

a) konstitutivgl. des Öls:

$$\rho(p) = \rho_0 e^{\frac{p-p_0}{\beta}}, \quad \beta = \text{konst.}$$

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow \dot{m}$$

$$\dot{V} = A \cdot \dot{l} = A \cdot v$$

Massenerhaltung? $\Rightarrow \frac{dp}{dt} = ?$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\rho(t)V(t)) = \sum_i \dot{m}_i} \quad \underbrace{\sum_i \dot{m}_i}_{=0}$$

$$\dot{\rho}(p) = \rho_0 \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{\beta} e^{\frac{p-p_0}{\beta}} = \rho \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} V(t) + \rho \dot{V}(t) = 0$$

$$V(t) = V_0 + A_1 s_1 - A_2 s_2 \Rightarrow \dot{V} = A_1 \dot{s}_1 - A_2 \dot{s}_2$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\rho}}{\beta}\frac{dp}{dt} V + \cancel{\rho}\dot{V} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\dot{V}\frac{\beta}{V} = +\beta \cdot \frac{A_2 \dot{s}_2 - A_1 \dot{s}_1}{V_0 + A_1 s_1 - A_2 s_2}$$

b) $F_1 = F_R = c s_1$, $c > 0$

Impulserhaltungssatz für Kolben 1 & 2: $\boxed{\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt}(mv) = f}$

$$m_1 \ddot{s}_1 = p \cdot A_1 - F_1 - d_1 \dot{s}_1 = pA_1 - cs_1 - d_1 \dot{s}_1$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -pA_2 + F_2 - d_2 \cdot \dot{s}_2$$

c) Zustandsraumdarstellung: $\dot{x} = f(x, u) = g(x) + bu$

$x = [s_1, v_1, s_2, v_2, p]^T$, $u = F_2$

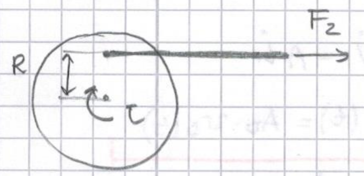
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \frac{1}{m_1}(pA_1 - F_1 - d_1 v_1) \\ v_2 \\ \frac{1}{m_2}(-pA_2 - d_2 v_2) \\ \beta \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{V_0 + A_1 s_1 - A_2 s_2} \end{bmatrix}}_{g(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} u$$

07.03.2014. 3)

d) $\ddot{u} = \frac{F_1}{F_2} = ?$ - Kraftübersetzungsverhältnis

stationärer - Fall $\Rightarrow \dot{s}_1, \ddot{s}_1, \dot{s}_2, \ddot{s}_2 = 0$

T_{max} - vom Motor



$s_{1,max} = ?$ max. mögliche stat. Dickenänderung

$$c s_1 = F_1 = p A_1 \Rightarrow p = \frac{F_1}{A_1} = p_{stat}$$

$T_{max} = R \cdot F_2$

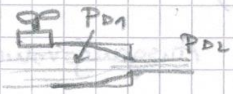
↳ $F_2 = \frac{T_{max}}{R}$

$$F_2 = p A_2 = \frac{F_1}{A_1} A_2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} = \ddot{u}$$

↳ $F_1 = F_2 \cdot \ddot{u}$

$$\Rightarrow F_1 = c s_1 = \frac{T_{max}}{R} \cdot \ddot{u} \Rightarrow s_{1,max} = \frac{T_{max}}{R \cdot c} \cdot \ddot{u}$$

07.03.2014. 4) Wassertank – A_T - Querschnittsfl.



Rohr – A_R

Auslauf – scharfkantige Drossel (A_D)

q_{in}, p_U

Volumenstrom durch eine Drossel: $q_D = \alpha A_D \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_{D1} - p_{D2}}$

Annahmen: Strömungen – stationär, inkompressibel, reibungsfrei (= nicht-viskos)

$$\Rightarrow \rho, v = \text{konst}$$

a, b) Absperrhähne geschlossen, $q_{in} = 0$, h - geg.

$p(z) = ?$ $\quad 0 < z < H + h$

Bernoulli - Gl.

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} v^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + g\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0}$$

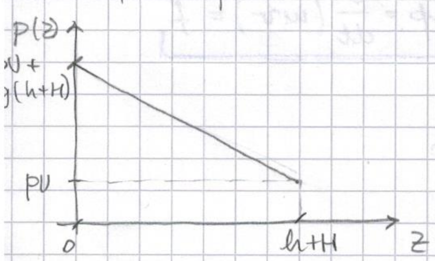
$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}$$

Das Wasser ruht $\Rightarrow$ alle Fließgeschw. sind 0!

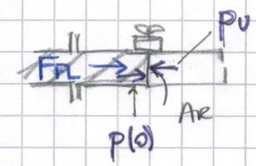
$$\Rightarrow \frac{p_U}{\rho} + g(h+H) = \frac{p(z)}{\rho} + g \cdot z \quad / \cdot \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{p(z) = p_U + \rho g (h + H - z)}$$

Verlauf von $p(z)$:



c) $F_{FL} = ?$ Haltekraft von der Flanschverbindung des untersten Auslaufs



!! Gleichgewicht:

$$F_{FL} + \underbrace{p(0)A_R}_{\cancel{p_U A_R} + \rho g (h+H)} - \cancel{p_U A_R} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{FL} = -\rho g (h+H)}$$

Es gibt immer Druck von beiden Seiten!!

07.03.2014. 4)

der unterste Absperrhahn offen , $q_{in} \neq 0$

c) $q_{out}(t)$, $v_D(t) = ?$ $v_R(t) = ?$ $\frac{d}{dt}h(t) = ?$

Volumenstrom

Massenerhaltung: $\underbrace{\frac{d}{dt}V = \sum_i q_i}$

$q = \dot{V} = A \cdot \dot{h}$

$\underbrace{q_{out}(t) = A_D \cdot v_D(t)}$

$V = A_T \cdot h + A_e \cdot H$

$\Rightarrow \dot{V} = A_T \dot{h} = q_{in} - q_{out}$

$v_D(t) = \frac{q_{out}(t)}{A_D}$

an der Drossel

$\Rightarrow \underbrace{\dot{h} = \frac{q_{in} - q_{out}(t)}{A_T}}$

$\underbrace{q_{out}(t) = A_e \cdot v_e(t)}$

$\Rightarrow \underbrace{v_R(t) = \frac{q_{out}(t)}{A_e}}$

im Rohr

Zulaufvolumenstrom

d) $h_s(q_{in})$ - stationäre Füllstandshöhe → $q_{in} = q_{out}$

$p_R = ?$ Druck vor der Drossel

$A_T \gg A_R > A_D$ → $v_T \approx 0$

Bernoulli-Gl: (stationäre) $\frac{1}{2}\cancel{v_T^2}^{\to 0} + \frac{p_u}{\rho} + g(h_s + H) = \frac{1}{2}v_R^2 + \frac{p_R}{\rho} + \cancel{g \cdot 0}^{\to 0}$ $\Big/ \cdot \rho \cdot 2$

Durchflussgleichung:

$p_{D1} = p_R$; $p_{D2} = p_u$

$q_D = \alpha A_D \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_{D1} - p_{D2}}$ $\Big/ ()^2$

$q_D = q_{out} = q_{in}$

$\underbrace{p_R = p_u + \frac{\rho}{2}\left(\frac{q_{in}}{\alpha A_D}\right)^2}$

$\cancel{2p_u} + 2\cancel{\rho} g(h_s + H) = v_R^2 \cancel{\rho} + \underbrace{2p_R}_{\cancel{2p_u} + \cancel{\rho}\left(\frac{q_{in}}{\alpha A_D}\right)^2}$

$\Rightarrow \underbrace{h_s = \frac{1}{2g}\left(\underbrace{v_R^2}_{= \frac{q_{in}^2}{A_R^2}} + \left(\frac{q_{in}}{\alpha A_D}\right)^2\right) - H}$

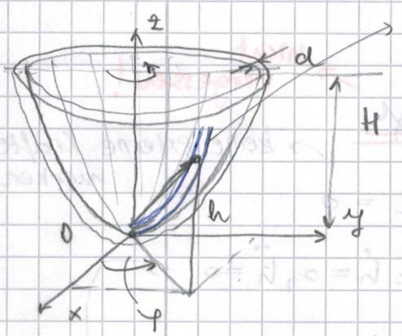
$\Rightarrow \underbrace{h_s = \frac{q_{in}^2}{2g}\left(\frac{1}{A_R^2} + \frac{1}{(\alpha A_D)^2}\right) - H}$

27.06.2014. 1) Parabolische Schale mit Punktmasse

$m_K \rightarrow d, H, m_S$

Schale: $z = p(x^2+y^2)$, $0 \leq z \leq H$ - an der Innenwand

$z = p(x^2+y^2-d)$, $-d \leq z \leq H$ - an der Außenwand



Führungsschiene - Kugel fixiert $-\varepsilon < z < H$, $\varepsilon > 0$

$q = [h, \varphi]^T$ - gen. Koordinaten

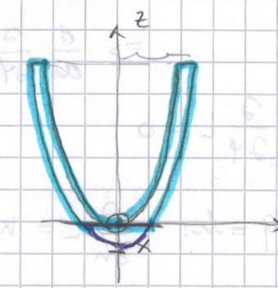
a) $\Theta_{zz} = ?$

Zylinderkoordinaten: $y = r\sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $z = z$

$\Theta_{zz} = \int_V r^2 \underbrace{dm}_{\rho dV}$ $\quad dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$z = p(x^2+y^2) = p\cdot r^2 \Rightarrow$ Innenradius: $r_i = \sqrt{\frac{z}{p}}$

$z = p(r^2-d) \Rightarrow$ Außenradius: $r_a = \sqrt{\frac{z}{p}+d}$



Masse der Schale:

$$m = \rho V = \rho\int dV = \rho\int_V r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \rho\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_a}\int_0^H r\,dr\,d\varphi\,dz + \int_0^{2\pi}\int_0^{r_a}\int_{-d}^{0} r\,dr\,d\varphi\,dz\right)$$

$$\Rightarrow m = \rho\left(\cancel{2}\pi\left(\int_0^H \frac{r_a^2-r_i^2}{\cancel{2}}dz\right) + \cancel{2}\pi\left(\int_{-d}^0 \frac{r_a^2}{\cancel{2}}dz\right)\right)$$

$$= \rho\pi\left(\underbrace{\int_0^H \left(\cancel{\frac{z}{p}}+d-\cancel{\frac{z}{p}}\right)dz}_{Hd} + \int_{-d}^0\left(\frac{z}{p}+d\right)dz\right)$$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{p}\frac{z^2}{2}\Big|_{-d}^0}_{-\frac{d^2}{2p}} + \underbrace{dz\Big|_{-d}^0}_{+d^2}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{m = \rho\pi d\left(H - \frac{d}{2p} + d\right)}$$

Reihe der partiellen Integralen beachten!

$$\Theta_{zz} = \rho\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_a}\int_0^H r^3\,dr\,d\varphi\,dz + \int_0^{2\pi}\int_0^{r_a}\int_{-d}^0 r^3\,dr\,d\varphi\,dz\right) = \rho\cdot 2\pi\left(\int_0^H \frac{r_a^4-r_i^4}{4}dz + \int_{-d}^0 \frac{r_a^4}{4}dz\right)$$

27.06.14. 1)

a) $I_2 = \int_{-d}^{0} \frac{r_a^4}{4}\, dz = \frac{1}{4}\int_{-d}^{0} \left(\frac{z}{p}+d\right)^2 dz = \frac{1}{4}\int_{-\frac{d}{p}+d}^{d} \tilde{z}^2 p\, d\tilde{z}$

$\tilde{z} = \frac{z}{p}+d \Rightarrow d\tilde{z} = \frac{dz}{p}$ $\qquad a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= \frac{p}{4}\cdot\frac{\tilde{z}^3}{3}\Big|_{d(1-\frac{1}{p})}^{d} = \frac{p}{12}\left(d^3 - d^3\left(1-\frac{1}{p}\right)^3\right)$

$= \frac{d^3\cancel{p}}{12}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{\cancel{p}}\right)\left(1+1-\frac{1}{p}+\underbrace{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}_{1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}}\right)$

$= \frac{d^3}{12}\left(3-\frac{3}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$

$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^H \underbrace{\left(\frac{z}{p}+d\right)^2 - \left(\frac{z}{p}\right)^2 dz}_{\left(\cancel{\frac{z}{p}}+d-\cancel{\frac{z}{p}}\right)\left(\frac{2z}{p}+d\right)dz} = \frac{d}{4}\int_0^H \left(\frac{2z}{p}+d\right) dz$

$\bar{z} = \frac{2z}{p}+d \Rightarrow d\bar{z} = \frac{2}{p}dz$

$dz = \frac{p}{2}d\bar{z}$

$\Rightarrow I_1 = \frac{d}{4}\int_d^{\frac{2H}{p}+d} \frac{p}{2}\,\bar{z}\, d\bar{z}$

$= \frac{\cancel{dp}}{\cancel{8}}\frac{1}{\cancel{2}}\left(\underbrace{\left(\frac{2H}{p}+d\right)^2 - d^2}_{\frac{\cancel{4}H^2}{p^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{4}H}{\cancel{p}}d + \cancel{d^2} - \cancel{d^2}}\right) = \frac{dH}{4}\left(\frac{H}{p}+d\right)$

$\Rightarrow \Theta_{zz} = \rho\cdot 2\pi\left(\frac{dH}{\cancel{4}2}\left(\frac{H}{p}+d\right) + \frac{d^3}{\cancel{12}6}\left(3-\frac{3}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\right)$

$= \boxed{\frac{\rho\pi d}{2}\left(H^2/p + Hd + d^2 - \frac{d^2}{p} + \frac{d^2}{p^2}\right)}$

b) $r_K = ?$ $\quad r_K(h,\varphi)$ – Ortsvektor der Kugel $\quad v_K = ?$

$$r_K = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{h}{p}}\cos\varphi \\ \sqrt{\frac{h}{p}}\sin\varphi \\ h \end{bmatrix} \Rightarrow v_K = \dot{r}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p}{h}}\cdot\dot{h}\cos\varphi - \sqrt{\frac{h}{p}}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p}{h}}\,\dot{h}\sin\varphi + \sqrt{\frac{h}{p}}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{h} \end{bmatrix}$$

$h = z = p\underbrace{(x^2+y^2)}_{l^2} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{z}{p}} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{h}{p}}$

$x = l\cos\varphi,\ y = l\sin\varphi$

$$v_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{ph}}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{ph}}\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix}\dot{h} + \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{h}{p}}\sin\varphi \\ \sqrt{\frac{h}{p}}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\varphi}$$

27.06.'14. 1)

c) T, V - Kugel + Schale ? $\Rightarrow L = T - V = ?$

$T = T_{R,S} + T_{T,K} + \cancel{T_{R,K}}^{\,0}$ - die Kugel bewegt sich nur translatorisch!

$T_{R,S} = \frac{1}{2}\,\Theta_{zz}\cdot\dot{\varphi}^2$, $T_{T,K} = \frac{1}{2} m_K\, v_K^T v_K = \frac{1}{2} m_K \left(\frac{1}{4}\frac{1}{ph}\dot{h}^2 + \frac{h}{p}\dot{\varphi}^2 + \dot{h}^2\right)$

$V = m_K g h$ $\Rightarrow \underline{L = T_{R,S} + T_{T,K} - V}$

$L = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left(\left(\frac{1}{4}\frac{1}{ph} + 1\right)\dot{h}^2 + \frac{h}{p}\dot{\varphi}^2\right) - \underline{m_K g h}$ → nicht vergessen!

d) Euler-Lagrange Gleichungen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L - \frac{\partial}{\partial q} L = 0$ → keine externe Kräfte wirken

$\dot{\varphi} = konst.$ - stationäre Winkelgeschw. $h = konst.$ $\Rightarrow \dot{h} = 0, \ddot{h} = 0$

$q = [h, \varphi]^T$ → $\ddot{\varphi} = 0$

$q = \varphi$: $\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = \Theta_{zz}\dot{\varphi} + m_K \frac{h}{p}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\left(\Theta_{zz} + m_K \frac{h}{p}\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = \ddot{\varphi}\left(\Theta_{zz} + m_K \frac{h}{p}\right) + \dot{\varphi}\, m_K \frac{\dot{h}}{p}$

$\frac{\partial}{\partial \varphi} L = 0$ $\Rightarrow \underline{\Theta_{zz}\ddot{\varphi} + m_K \frac{h}{p}\ddot{\varphi} + m_K \frac{\dot{h}}{p}\dot{\varphi} = 0}$ → 0

$q = h$: $\frac{\partial}{\partial \dot{h}} L = m_K \dot{h}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{ph} + 1\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{h}} L = \cancel{m_K}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{ph} + 1\right)\ddot{h} + \cancel{m_K}\dot{h}\left(\frac{1}{4p}\left(-\frac{1}{h^2}\cdot\dot{h}\right)\right)$

$\frac{\partial}{\partial h} L = \frac{1}{2}\cancel{m_K}\left(\frac{1}{4p}\dot{h}^2\left(-\frac{1}{h^2}\right) + \frac{1}{p}\dot{\varphi}^2\right) - \cancel{m_K} g$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{4ph} + 1\right)\ddot{h} - \frac{\dot{h}^2}{4ph^2} + \frac{\dot{h}^2}{8ph^2} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{p} + g = 0$

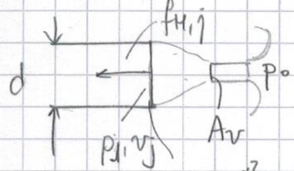
$\underline{\left(\frac{1}{4ph} + 1\right)\ddot{h} - \frac{\dot{h}^2}{8ph^2} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{p} + g = 0}$

$\dot{\varphi}^2 = 2pg \Rightarrow \underline{|\dot{\varphi}| = \sqrt{2pg}}$

27.06.2014 2) Bewässerungsanlage

- Hauptleitungen – D : $L_i,\ i \in \{1,2,3\}$ $\quad q_1, q_2$ – den Pflanzen zugeführte Volumenstrom
- Nebenleitungen – d : $l_j,\ j \in \{1,2\}$
- Düsen – scharfkantige Drosseln – A_v – vena contracta
- Strömungen – stationär, inkompress. (zunächst) reibungsfrei

a) $p_j, v_j = ?$



$A = \frac{d^2}{4}\pi$

$$\frac{d}{dt}V = \sum_i q_i$$

$$q_1 = A \cdot v_1, \quad q_2 = A \cdot v_2$$

$$\Rightarrow \underline{v_j = \frac{q_j}{A}}$$

Bernoulli – Gl:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + zg = \text{konst.}$$

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{A_v}{A_1}\right)^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{p_1 - p_v}$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \frac{1}{2}v_j^2 + \frac{p_j}{\rho} = \frac{1}{2}v_{vj}^2 + \frac{p_0}{\rho} \quad \Big/ \cdot 2\rho$$

$$\rho v_j^2 + 2p_j = v_{vj}^2\rho + 2p_0$$

$$\Rightarrow \underline{p_j = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_{vj}^2 - v_j^2\right)}$$

b) Druckverluste in den Leitungen:

$$\Delta p_v = \rho\frac{v^2}{2}\lambda\frac{l}{d} \qquad \lambda = \frac{64}{Re} \text{ – Rohrreibungszahl} \qquad Re = \frac{\rho v d}{\eta} \text{ – Reynolds-Zahl}$$

η – dynamische Viskosität

$\Delta p_v = ?$ in H1,2,3, N1,2

$$\Delta p_v = \cancel{\rho}\cdot\frac{v^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\,\frac{\overset{32}{\cancel{64}}\eta}{\cancel{\rho}\cancel{v}d}\cdot\frac{l}{d} = 32\,\frac{v\eta l}{d^2} \qquad v_1 = \frac{4q_1}{d^2\pi},\ v_2 = \frac{4q_2}{d^2\pi}$$

N1: $\Delta p_v = 32\,\frac{v_1\eta l_1}{d^2}$; N2: $\Delta p_v = 32\,\frac{v_2\eta l_2}{d^2}$ $\quad v_1, v_2$ aus a)

H1: $\underline{q_{H1} = q_1 + q_2} \Rightarrow v_{H1} = \frac{4(q_1+q_2)}{D^2\pi} \Rightarrow \Delta p_v = 32\,\frac{v_{H1}\eta L_1}{D^2}$

beide Volumenströme aufsummiert

H2: $q_{H2} = q_2 \Rightarrow v_{H2} = \frac{4q_2}{D^2\pi} \Rightarrow \Delta p_v = 32\,\frac{v_{H2}\eta L_2}{D^2}$

H3: $q_{H3} = 0 \Rightarrow v_{H3} = 0 \Rightarrow \underline{\Delta p_v = 0}$

27.06.2014 2)

c) Versorgungsdruck: $p_D = ?$ $l_2 = ?$

B-Gl: um Δp_v erweitern

am Ende der Leitung L_1 ist p_D um $\Delta p_{v,H1}$ kleiner!

Druckregler – Düse 1:

$$\frac{1}{2} v_{H1}^2 + \frac{p_D - \Delta p_{v,H1}}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1 + \Delta p_{v,N1}}{\rho} \quad / \cdot \rho$$

um die vorgegene Volumenströme einzuhalten, müssen die Verluste am Ende der Nebenleit. 1 kompensiert werden.

$$p_D - \Delta p_{v,H1} = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_{H1}^2) + p_1 + \Delta p_{v,N1}$$

$$\Rightarrow p_D = \underbrace{\frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_{H1}^2) + p_1}_{\text{ohne Verluste}} \underbrace{+ \Delta p_{v,N1} + \Delta p_{v,H1}}_{+\text{Verluste!}}$$

Oder: einfach alle Druckverluste müssen durch den Versorgungsdruck kompensiert werden

$l_2 = ?$

$$\Delta p_{v,N2} = 32 \frac{v_2 \eta \boxed{l_2}}{d^2}$$

alle Verluste kompensieren!!

Potentialdifferenz!

Druckregler – Düse 2:

$$\frac{1}{2} v_{H,1}^2 + \frac{p_D}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2 + \Delta p_{v,H1} + \Delta p_{v,H2} + \Delta p_{v,N2}}{\rho} + g \cdot (h_2 - L_2 \sin\alpha) \quad / \cdot \rho$$

$$l_2 = \frac{d^2}{32 v_2 \eta} \left(\frac{\rho}{2}(v_{H,1}^2 - v_2^2) + p_D - p_2 - \Delta p_{v,H1} - \Delta p_{v,H2} - g\rho(h_2 - L_2 \sin\alpha) \right)$$

d) i) $q_1 = q_2 = 0$ – alle Düsen geschlossen $\Rightarrow v_1 = v_2 = 0$

p_D, an welcher Stelle maximaler Druck? $p_{max} = ?$

Druckregler – Hauptleitung 3

$$\frac{1}{2} \underbrace{v_{H1}^2}_{=0} + \frac{p_D}{\rho} = \frac{1}{2} \underbrace{v_{H3}^2}_{=0} + \frac{p_3}{\rho} - g \sin\alpha L_2 \quad / \cdot \rho$$

$$\Rightarrow p_3 = p_D + \rho g \sin\alpha L_2 \quad \Rightarrow \text{Maximaler Druck in H3 / Abschluss}$$

Immer wenn es Höhendifferenzen gibt, gibt es auch Druckunterschiede!

ii) $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$ – etwas anders?

$$p_D - p_3 = \overbrace{\underbrace{\Delta p_{v,H1} + \Delta p_{v,H2}}_{\text{kommt zusätzlich}} - \frac{\rho}{2} v_{H1}^2 - g\rho \sin\alpha L_2}^{X}$$

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung:

$X = 0 \Rightarrow p_D = p_3$

$X < 0 \Rightarrow p_D < p_3$

$X > 0 \Rightarrow p_D > p_3$

p_{max} entweder am Druckregler oder am Abschluss

27.06.2014 3)

$\rightarrow \varepsilon_r = 1$

Sonne – r_s, schwarzer Körper, Solarkonst. E_0 – $\frac{W}{m^2}$

l_{SE}

a) $J_s = ?$ [totale Ausstrahlung] $\rightarrow$ [in $\frac{W}{m^2}$]

$T_s = ?$ $T_s(E_0)$ J_s

Stefan-Boltzmann Gesetz: $\overbrace{E_b(T)}^{J_s} = \sigma T_s^4 \Rightarrow T_s = \sqrt[4]{\frac{E_0 (r_s + l_s)^2}{\sigma r_s^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} E_0 - 4\pi (r_s + l_s)^2 \\ J_s - 4\pi r_s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow J_s = E_0 \frac{\cancel{4\pi}(r_s+l_s)^2}{\cancel{4\pi} r_s^2} \Rightarrow J_s = E_0 \frac{(r_s+l_s)^2}{r_s^2}$$

$(J_s 4\pi r_s^2 = E_0 4\pi (r_s + l_s)^2)$
$\hookrightarrow$ Leistung bleibt erhalten

b) G_E – eintretende Einstrahlung

Rohr – r, l, T_R

Nettowärmestrom?

Strahlung – ε_r: $\dot{q}_s = \varepsilon_r \sigma (T_R^4 - T_{U,\infty}^4) \Rightarrow \dot{q}_s = \varepsilon_r \sigma T_R^4$

Konvektion – α_U; $T_{U,\infty}$: $\dot{q}_K = \alpha_U (T_R - T_{U,\infty})$

Wärmeleitung über den Boden – $T_{B,\infty}$, α_B: $\dot{q}_W = \alpha_B (T_R - T_{B,\infty})$

$\hookrightarrow$ Bestimmungsgl. angeben

c) Bestimmungsgl. für T_R im stationären Fall?

Kirchhoffsches Gesetz

$l >> r$ – $\dot{q}$ an den Stirnflächen ≈ 0

$\boxed{\alpha_A = \varepsilon_r}$

Über $\dot{Q}$ bilanzieren: $\dot{Q} = \dot{q} \cdot A$

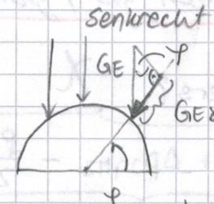
$\frac{W}{m^2}$?

$\dot{Q}_E = \alpha_A \int G_E \underline{\sin\varphi}\, dA = \varepsilon_r 2 r l G_E$

$A = \underbrace{l \cdot 2 r \pi}_{\text{Mantelfläche}} \cdot \frac{1}{2} = l r \pi$

Wir müssen den Anteil betrachten, der senkrecht auf den Rohr einfällt!

$\dot{Q} = 0 = \dot{Q}_E - \dot{Q}_S - \dot{Q}_K - \dot{Q}_W = 0$



$\dot{Q}_E = \varepsilon_r \int_0^{\pi} G_E \sin\varphi\, dA = \varepsilon_r l r G_E \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi}$

$\dot{Q}_{S,K,W} = l r \pi\, \dot{q}_{S,K,W}$

$dA = l \cdot ds = l \cdot r\, d\varphi$

$-\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2$

$$\Rightarrow 2 \varepsilon_r \cancel{l} r G_E - \pi \cancel{l} \left(\varepsilon_r \sigma T_R^4 + \alpha_U (T_R - T_{U,\infty}) + \alpha_B (T_R - T_{B,\infty}) \right) = 0$$

$\Rightarrow \dot{Q}_E = 2 \varepsilon_r l r G_E$

27.06.2014. 4) Schwingender Kugel

Präzisionsrohr – d

Metallkugel – d, m_k – Periodendauer T

Gas – p, V

$\neq$ polytrop (c = konst.) $q^1 = 0$

Prozess als adiabatisch und reversibel (d.h. isentrop) angesehen => $c = 0$

↳ s = konst => $ds = 0$ (die Entropie ist konstant)

a) $p_0 = ?$ $x = x_0 = 0$ – Ruhelage der Kugel

$$A = \frac{d^2}{4}\pi$$

reicht hier:

$$\underbrace{m_k g + p_a A = p_0 \cdot A}_{\text{Kräfte müssen im Gleichgewicht sein!}} \Rightarrow p_0 = p_a + \frac{m_k g}{A}$$

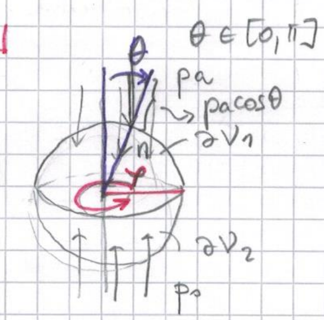
$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum_i f_i$$

II Impulserhaltung: $\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(t,x)\, v(t,x)\, dV = \sum_i f_i$ $\qquad \varphi \in [0, 2\pi]$

↓ $\qquad \theta \in [0, \pi]$

für die Kugel: $v = 0 \Rightarrow \sum_i f_i = 0$

$$\boxed{f_g = -\int_{V(t)} \rho(t,x)\, g\, e_z\, dV} \quad ; \quad \boxed{f_p = -\int_{\partial V(t)} p \cdot n\, dA}$$



$$\rho = \text{konst} \Rightarrow f_g = -\rho g \underbrace{\int_{V(t)} dV}_{\frac{m_k}{\rho}} = -m_k g$$

$$\Rightarrow 0 = m_k g + \int_{\partial V} p \cdot n\, dA = m_k g + \int_{\partial V_1} \overbrace{p_a n}^{p_a\cos\theta}\, dA + \int_{\partial V_2} \overbrace{p_0 n}^{p_0\cos\theta}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow m_k g + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} p_a \cos\theta\, \underbrace{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{dA} + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} p_0 \cos\theta\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

$$\Rightarrow m_k g + \overbrace{2\pi r^2}^{A} p_a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2}\, d\theta - \overbrace{\pi r^2}^{A} p_0 = 0$$

$$r = \frac{d}{2} \qquad \bar\theta = 2\theta \Rightarrow d\bar\theta = 2 d\theta \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin\bar\theta \frac{d\bar\theta}{2} = 1, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin\bar\theta \frac{d\bar\theta}{2} = -1$$

$$\Rightarrow m_k g = A(p_0 - p_a) \Rightarrow \underline{p_0 = p_a + \frac{m_k g}{A}}$$

Besser dem zweiten Weg zu folgen!

24.06.2014. 4)

b) $p(t) = ?$ $V(t)$ $\rightarrow$ $\underline{p(V)}$ in Abhängigkeit von V!

Ruhelage $V = V_0$, $p = p_0$ – Entwicklung bis zum linearen Glied

Prozessführung – adiabat $\Rightarrow$ $pV^{\kappa} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow p_0 V_0^{\kappa} = p(t) V(t)^{\kappa} \quad \Rightarrow \underline{p(t) = p_0 \left(\frac{V_0}{V(t)}\right)^{\kappa}}$$

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ – Taylorreihe 1. Ordnung

$x_0 = (p_0, V_0)$

$\Rightarrow p(x_0) = p_0$

$$f'(x) = \frac{dp}{dV} = p_0 \kappa \left(\frac{V_0}{V(t)}\right)^{\kappa-1} \cdot V_0 \cdot \left(-\frac{1}{V^2}\right) = -p_0 \kappa \frac{V_0^{\kappa}}{V^{\kappa+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -p_0 \kappa \frac{V_0^{\kappa}}{V_0^{\kappa+1}} = -p_0 \frac{\kappa}{V_0}$$

$$\Rightarrow p(V) = p_0 - p_0 \frac{\kappa}{V_0}(V(t) - V_0) = \underline{p_0\left(1 - \frac{\kappa}{V_0}(V(t) - V_0)\right)}$$

$V(t) - x(t)$?

$$\underline{V(t) = V_0 + A \cdot x(t), \quad A = \frac{d^2}{4}\pi}$$

c) Bewegungsgleichung:

$$m_K \ddot{x} = -m_K g + (p - p_a) A$$

$$= -m_K g + \left(p_0\left(1 - \frac{\kappa}{V_0}(V(t) - V_0)\right) - p_a\right) A$$

$$= -m_K g + \left(\underbrace{p_0}_{\cancel{p_a} + \frac{m_K g}{A}} - \frac{p_0 \kappa}{V_0}(\cancel{V_0} + A \cdot x(t) - \cancel{V_0}) - \cancel{p_a}\right) A$$

$$= -\cancel{m_K g} + \cancel{m_K g} - \frac{p_0 \kappa A^2}{V_0} x(t) \quad \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{p_0 \kappa A^2}{m_K V_0} x(t)$$

d) $x(0) = x_A$, $x(t) = ?$ $\quad t = ?$

$x(t) = A\cos(\omega t)$ – Ansatz

$\hookrightarrow \dot{x}(t) = -A\sin(\omega t) \cdot \omega \quad \Rightarrow \ddot{x}(t) = -A\cos(\omega t) \cdot \omega^2$

$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{p_0 \kappa A^2}{m_K V_0}}\, t\right)$

$$\Rightarrow \cancel{-}\cancel{A\cos(\omega t)} \cdot \omega^2 = \cancel{-}\frac{p_0 \kappa A^2}{m_K V_0} \cdot \cancel{A\cos(\omega t)} \quad \Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\frac{p_0 \kappa A^2}{m_K V_0}}}$$

Anfangsbed.: $A = x_A$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = x_A \cos\left(\sqrt{\frac{p_0 \kappa A^2}{m_K V_0}}\, t\right)}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_K V_0}{p_0 \kappa A^2}} \quad \uparrow^2 \qquad \kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m_K V_0}{p_0 \underbrace{A^2}_{\frac{d^4}{16}\pi^2}} = \underline{\underline{\frac{64\, m_K V_0}{T^2 p_0 d^4}}}$$

27.06.2014. 4)

e) $p(t) = ?$ $T(t) = ?$

$x_0 = 0$ - p_0, T_0

$$p(t) = p_0 \frac{V_0^k}{V(t)^k} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + A x(t)} \right)^k$$

$T v^{k-1} = \text{konst.} \Rightarrow T V(t)^{k-1}$

$$T_0 V_0^{k-1} = T(t) V(t)^{k-1} \Rightarrow T(t) = T_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + A x(t)} \right)^{k-1}$$

03.10.2014. 1) Quadcopter

Zylinder – r_z, h_z, m_z; 4 Verbindungsstücke – l_Q, b_Q, h_Q, m_Q

4 Hohlzylindern – r_2, r_1, h_{HZ}, m_{HZ}

Leistung eines Propellers: $P_{P,i} = k_P \tau_{P,i} \omega_{P,i}$

a) $\Theta_{zz}^{(0)} = ?$

$$V_{HZ} = \pi h_{HZ} (r_2^2 - r_1^2) \qquad \Theta_{zz} = \int_V r^2 dm \qquad \Theta_{zz,Q}^{(S)} = \frac{m_Q}{12}(l_Q^2 + b_Q^2)$$

$$\Theta_{zz}^{(0)} = \Theta_{zz,z}^{(0)} + 4\Theta_{zz,HZ}^{(S)} + 4m_{HZ}(r_z + l_Q + r_2)^2 + 4\Theta_{zz,Q}^{(S)} + 4m_Q\left(r_z + \frac{l_Q}{2}\right)^2$$

Zylinderkoordinaten:

$$m_z = \rho_z \cdot V_z = \rho_z \cdot r_z^2 \pi h_z$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

$$\Rightarrow \rho_z = \frac{m_z}{r_z^2 \pi h_z}$$

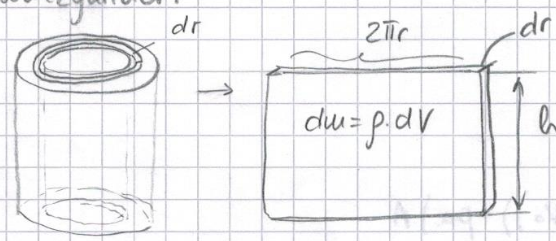
$$dm = \rho dV = \rho \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$\Theta_{zz,z}^{(0)} = \rho_z \int_0^{h_z}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_z} \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} r\,dr\,d\varphi\,dz = \rho_z \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4_2}\Big|_0^{r_z} h_z$$

$$\Rightarrow \Theta_{zz,z}^{(0)} = \frac{\pi}{2} r_z^4 \rho_z h_z = \underbrace{r_z^2 \pi \rho_z h_z}_{m_z} \frac{r_z^2}{2}$$

Hohlzylinder:

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{zz,z}^{(0)} = \frac{m_z r_z^2}{2}} \checkmark$$



$$\Rightarrow dm = \rho \cdot 2\pi r h\,dr$$

$$\frac{m_{HZ}}{\rho} = V_{HZ} \quad (r_2^4 - r_1^4) = (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$$

$$\Rightarrow \Theta_{zz,HZ}^{(0)} = \rho\int_{r_1}^{r_2} r^3 2\pi h_{HZ}\,dr = \rho h_{HZ} 2\pi \frac{r^4}{{}_2 4}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho \pi h_{HZ}}{2}(r_2^4 - r_1^4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{zz,HZ}^{(0)} = \frac{m_{HZ}}{2}(r_1^2 + r_2^2)}$$

$$\Rightarrow \Theta_{zz}^{(0)} = \overset{2}{\cancel{4}}\frac{m_{HZ}}{\cancel{2}}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2}m_z r_z^2 + 4m_{HZ}(r_z + l_Q + r_2)^2 + m_Q\Big(\frac{1}{3}(l_Q^2 + b_Q^2)$$

$$+ 4\left(r_z + \frac{l_Q}{2}\right)^2\Big)$$

03.10.2014 1)

b) Schub in z-Richtung

$P_{A,i} = F_{z,i}\, v_{h,i}$ – Propellerleistung

$v_{h,i} = \sqrt{\frac{F_{z,i}}{2\rho_0 A_L}}$ – Luftgeschw.

$\ddot z(\omega_{P,i}) = ?$ Bewegungsgl. in z-Richtung

$F_{z,i} = k_\tau \tau_{P,i}\,,\; k_\tau > 0$

$P_{A,i} = \underbrace{F_{z,i}}\, v_{h,i} = k_P\, \tau_{P,i}\, \omega_{P,i} = P_{P,i} \qquad \hat{=} \sqrt{\frac{F_{z,i}}{2\rho_0 A_L}}$

$k_\tau \tau_{P,i} \cdot v_{h,i} = k_P\, \tau_{P,i}\, \omega_{P,i} \Rightarrow v_{h,i} = \frac{k_P}{k_\tau}\omega_{P,i} \quad \nearrow^2$

$\Rightarrow F_{z,i} = \frac{2\rho_0 A_L k_P^2}{k_\tau^2}\,\omega_{P,i}^2$

$\Rightarrow m\ddot z = \sum_{i=1}^{4} F_{z,i} - mg$

$m = m_Z + 4m_Q + 4m_{HZ} \qquad \Rightarrow m\ddot z = \frac{2\rho_0 A_L k_P^2}{k_\tau^2}\sum_{i=1}^{4}\omega_{P,i}^2 - mg$

c) Bewegungsgl. für $\omega_{P,i}$? $\qquad e_v = e_z$

Reibung in einem fluiden Medium: $f_D = -c_W A_R \frac{\rho_0}{2} v^2 e_v$

$v = r_1 \cdot \omega_{P,i}$

$e_z:\; \Theta^{(S)}_{zz,HZ} \cdot \dot\omega_{P,i} = \tau_{P,1} + r_1 f_D$

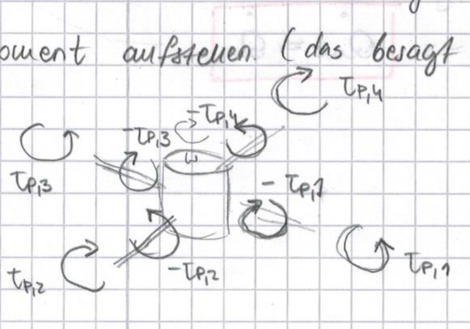
$\Rightarrow \Theta_P \dot\omega_{P,i} = \tau_{P,i} - c_W \frac{\rho_0}{2} A_R v^2 \cdot r_1$

$\Theta_P \dot\omega_{P,i} = \tau_{P,i} - \underbrace{c_W \frac{\rho_0}{2} A_R r_1^3}_{k_W}\omega_{P,i}^2$

d) $\Theta^{(0)}_{zz} \cdot \dot\omega = +\tau_{P,1} + \tau_{P,3} - \tau_{P,2} - \tau_{P,4}$

$= k_W\left(+\omega_{P,1}^2 + \omega_{P,3}^2 - \omega_{P,2}^2 - \omega_{P,4}^2\right) + \Theta_P\left(+\dot\omega_{P,1} + \dot\omega_{P,3} - \dot\omega_{P,2} - \dot\omega_{P,4}\right)$

- **Schnittprinzip:** Soll sich der Zylinder nicht in Richtung eines Hohlzylinders drehen, dann muss sich seits des Zylinders ein entsprechend hohes entgegengesetztes Moment aufstellen (das besagt der Schnittprinzip!)



Immer wenn auf einen Teil des Systems Kraft / Moment in einer Richtung wirkt, wirkt dieselbe Kr/Mom. auf den anderen Teil des Systems in entgegengesetzter Richtung!!

03.10.2014 2)

a) Wärmestromdichte ? $\dot{q} = ?$

T_I, T_U = konst.

$\alpha_P = \infty$ => $T_3 = T_U$ (Wärmeübertragung-ideal) ideale Kontaktbedingungen

k_D = ? der isolierten Mauer

Wärmeleitung => λ - Wärmeleitfähigk.
Konvektion => α - Wärmeübergangskoeff.
Wärmestrahlung => ε - Emissivität

$$\dot{q} = k_D \cdot (T_I - T_U)$$

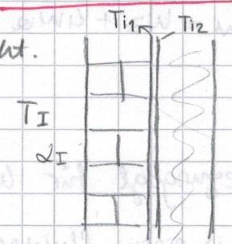
$$\dot{q} = \alpha_I (T_I - T_1) = \frac{\lambda_Z}{d_Z}(T_1 - T_{i1}) = \alpha_Z (T_{i1} - T_{i2}) = \frac{\lambda_S}{d_S}(T_{i2} - T_2) = \alpha_A (T_2 - T_U)$$

$$\Rightarrow T_I - T_U = (T_I - T_1) + (T_1 - T_{i1}) + \ldots + (T_2 - T_U)$$

Da ein Wärmeübergangskoeff. zwischen Ziegelmauer und Styropor gegeben ist (α_Z), heißt das, dass kein idealer Kontakt zw. den beiden Oberflächen besteht => eine "dünne Schicht" zw. den beiden besteht.

↳ wenn ideal : $\alpha_Z \to \infty \Rightarrow T_{i1} = T_{i2}$

↳ eigentlich ein Temperatursprung



b) Wärmepumpe - P_{zu} (Wärmebad mit T_U)

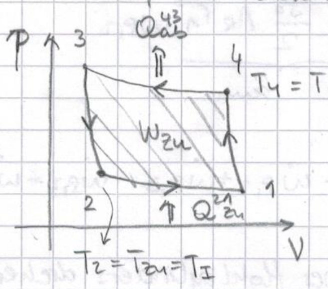
T_I = ? - stat. A_W - Wandfläche im Haus

Carnotscher Linksprozess (+ Kältemaschine)

↳ ideal, Wärmeleitung durch Decke und Boden vernachl.

$$\dot{q} = k_D (T_I - T_U)$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = k_D A_W (T_I - T_U)$$



$$\Rightarrow \dot{Q}_{ab} = \eta_{KL} \cdot P_{zu} = \frac{T_{ab}}{T_{ab} - T_{zu}} P_{zu}$$

$T_{zu} = T_U$, $T_{ab} = T_I$

$$= \frac{T_I}{T_I - T_U} \cdot P_{zu}$$

$$W_{zu} = Q_{zu}^{21} + Q_{ab}^{43}$$

Wärmestrom von der Pumpe wird komplett von der Wand aufgenommen

$$\Rightarrow \boxed{\dot{Q}_{ab} = \dot{Q}}$$

Q - Wärme -> Energie E

$\dot{Q}$ - Wärmestrom -> Leistung P

03.10.2014 2)

a)

$$T_I - T_U = \dot{q}\left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{d_Z}{\lambda_Z} + \frac{1}{\alpha_Z} + \frac{d_S}{\lambda_S} + \frac{1}{\alpha_A}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{d_Z}{\lambda_Z} + \frac{1}{\alpha_Z} + \frac{d_S}{\lambda_S} + \frac{1}{\alpha_A}}}_{k_D}\left(T_I - T_U\right)$$

Carnotscher Linksprozess = Kältemaschine, Wärmepumpe

↳ der Pumpe wird Arbeit zugeführt (P_{zu}, W_{zu}) um Wärme als Endprodukt abzugeben! (Q_{ab}) und da nicht die ganze Arbeit direkt in die Wärme umgewandelt werden kann (Verluste) => Wirkungsgrad

$$\boxed{\eta_{CL} = \frac{|Q_{ab}^{43}|}{W_{zu}}} > 1$$

Carnotscher Rechtsprozess = Dampfmaschine

↳ der Maschine wird Wärme zugeführt (Q_{zu}) um Arbeit als Endprodukt abzugeben! (W_{ab}) und hier treten Verluste auch =>

$$\boxed{\eta_{CR} = \frac{|W_{ab}|}{Q_{zu}^{34}}} < 1$$

b)

$$\frac{T_I}{T_I - T_U} \cdot P_{zu} = k_D A_W (T_I - T_U) \quad \Big/ \cdot (T_I - T_U)$$

$$P_{zu} \cdot T_I = k_D A_W T_I^2 - 2 T_I T_U k_D A_W + k_D A_W T_U^2$$

$$\Rightarrow k_D A_W T_I^2 - T_I\left(2 T_U k_D A_W + P_{zu}\right) + k_D A_W T_U^2 = 0$$

$$D = \left(2 T_U k_D A_W + P_{zu}\right)^2 - 4 k_D^2 A_W^2 T_U^2 = \cancel{4 T_U^2 k_D^2 A_W^2} + 4 T_U k_D A_W P_{zu} + P_{zu}^2 - \cancel{4 k_D^2 A_W^2 T_U^2}$$

$$T_{I_{1,2}} = \frac{\left(2 T_U k_D A_W + P_{zu}\right) \pm \sqrt{4 T_U k_D A_W P_{zu} + P_{zu}^2}}{2 k_D A_W}$$

$$= T_U + \frac{P_{zu}}{2 k_D A_W} + \sqrt{\frac{P_{zu}^2}{4 k_D^2 A_W^2}\left(1 + \frac{4 T_U A_W k_D}{P_{zu}}\right)}$$

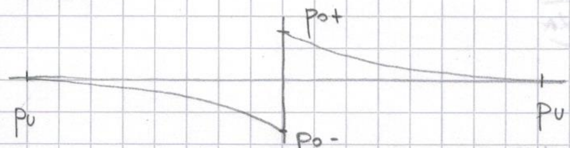
$$T_I = T_U + \frac{P_{zu}}{2 k_D A_W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 T_U A_W k_D}{P_{zu}}}\right)$$

03.10.'14 3)

v_1 - Fluggeschw; F - Schubkraft; A_0 - Propellerfläche

A_1, v_1 — A_0, v_0 — A_2, v_2

- KV (Kontrollvolumen) - $A_e \gg A_1, A_2 \Rightarrow A_e - A_1 \cong A_e - A_2$



g - nicht berücksichtigt

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} v^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \underbrace{g\frac{\partial z}{\partial \xi}}_{\to 0} = 0$$

stationäre Strömung und Druckverlauf!

a) $v_2 = ?$ $v_2(v_1, F)$

i) Bgl. a - b-

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_u}{\rho} = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{p_{0-}}{\rho} \quad / \cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{konst.}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + \frac{2}{\rho}(p_u - p_{0-})$$

ii) b+ - c

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{p_{0+}}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_u}{\rho} \quad / \cdot 2$$

$$v_1^2 + \frac{2}{\rho}(\cancel{p_u} - p_{0-}) + \frac{2}{\rho}p_{0+} = v_2^2 + \cancel{\frac{2}{\rho}p_u}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2}{\rho}\underbrace{(p_{0+} - p_{0-})}_{\frac{F}{A_0}}$$

$$\boxed{F = A_0 \cdot (p_{0+} - p_{0-})}$$

$$\boxed{p_{0+} - p_{0-} = \frac{F}{A_0}}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2}{\rho}\frac{F}{A_0}}}$$

b) Impulsbilanz für KV aufstellen: $\frac{d}{dt} I(t) = F_0 + F$

i) $I(t) = \int_V \rho v(t) dV$

Reynoldsches Transporttheorem

stationäre Strömung vorliegt

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho v(t) dV}_{\frac{dI(t)}{dt}} = \underbrace{\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v(t)) dV}_{=0} + \int_{\partial V(t)} \rho v(t) v \cdot n\, dA}$$

- Da der Normalenvektor bei der Mantelfläche senkrecht auf die Geschw. steht, wird sie nicht von der horizontalen Strömung durchgesetzt, nur die Stirnflächen!
↳ nach außen gerichtet!

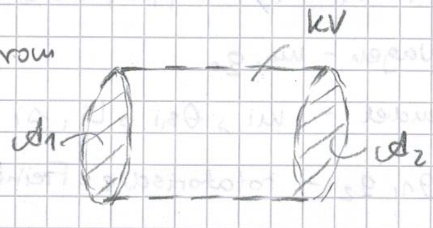
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}I(t) = \rho\int_{A_1} v_1 (v_1 \cdot (-n_1)) dA + \rho\int_{A_2} v_2 (v_2 \cdot n_2) dA$$

$$= -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2$$

03.10.2014 3)

b) i) $\frac{d}{dt} I(t)$ - Impulszu- bzw. Impulsabstrom

$\quad \overset{"}{} F \qquad$ gleich dem Schub!



$$\Rightarrow \underbrace{F = -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2}$$

ii) $F_0 = \oint_{\partial V} p n \, dA \qquad$ n zeigt vom Kontrollvolumen nach außen!

$$F_0 = \int_{A_1} p_u(-n_1)\,dA + \int_{A_2} p_u n_2 \,dA + \int_{\underline{\underline{A_M}}} \overset{\nearrow 0}{p n \, dA}$$

Integral über die ganze Mantelfläche ergibt 0!

$$F_0 = -p_u A_1 + p_u A_2 = p_u \underbrace{(A_2 - A_1)}_{=0!} \quad - \quad A_1 = A_2 \text{ beim Kontrollvolumen}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_0 = 0}$$

c) Massenbilanz ? A_0, A_1, A_2 - Querschnittsflächen

$v_0(v_1, v_2) = ?$

$$\sum_i \dot{m}_i = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{\rho v_1 A_1 = \rho v_0 A_0 = \rho v_2 A_2}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho q \qquad v_0 = v_1 \frac{A_1}{A_0} = v_2 \frac{A_2}{A_0}$$

$$v_0 = \frac{v_0 + v_0}{2} = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{2 A_0}$$

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \quad \Downarrow \quad \underbrace{v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2}{\cancel{\rho}} \frac{1}{A_0} \cancel{\rho} \left(A_2 v_2^2 - A_1 v_1^2\right)$$

$$\underbrace{v_2^2}_{\cancel{v_0^2}\frac{\cancel{A_0^2}}{A_2^2}} \left(1 - \frac{2A_2}{A_0}\right) = v_1^2 \left(1 - \frac{2A_1}{A_0}\right) \qquad = \cancel{v_0^2} \frac{\cancel{A_0^2}}{A_1^2} \frac{A_0 - 2A_1}{\cancel{A_0}}$$

$$\cancel{v_0^2}\frac{\cancel{A_0^2}}{A_2^2} \frac{A_0 - 2A_2}{\cancel{A_0}} \quad \Rightarrow \quad A_1^2(A_0 - 2A_2) = A_2^2(A_0 - 2A_1)$$

$$A_0\underbrace{(A_1^2 - A_2^2)}_{(\cancel{A_1 - A_2})(A_1 + A_2)} = 2A_1A_2\cancel{(A_1 - A_2)} \quad \Rightarrow \underbrace{A_0 = \frac{2A_1A_2}{A_1 + A_2}} = \frac{2}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}}$$

$$A_1^2\left(1 - \frac{2A_2}{A_0}\right) = A_2^2\left(1 - \frac{2A_1}{A_0}\right)$$

$$v_0 = v_1 \frac{A_1 + A_2}{2A_2} = v_2 \frac{A_1 + A_2}{2A_1}$$

$$A_1^2(A_0 - 2A_2) = A_2^2(A_0 - 2A_1)$$

$$A_0(\cancel{A_1 - A_2})(A_1 + A_2) = 2A_1A_2\cancel{(A_1 - A_2)}$$

$$v_0 = v_1 \cdot \frac{A_1}{2}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right) = v_1\left(\frac{1}{2} + \frac{A_1}{2A_2}\right)$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{v_1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{v_1 \frac{A_1}{A_2}}_{v_2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

03.10.14. 4) Doppelpendel mit Wagen

Wagen – m_0, q_0

Pendel – $m_i, \Theta_{S,i}, L_i, s_i$, $i = \{1,2\}$

q_1, q_2 – rotatorische Freiheitsgrade, q_0 – transl. Freiheitsgr.

$$q = [q_0, q_1, q_2]^T$$

S_2 muss nicht unbedingt $\frac{L_2}{2}$ sein!

a) $X_2, v_2 = ?$ Fkt. von $q, \dot q$

$$X_2 = \begin{bmatrix} L_1 \sin q_1 + \frac{L_2}{2} \sin(q_1+q_2) \boxed{+q_0} \\ -L_1 \cos q_1 - S_2 \cos(q_1+q_2) \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \dot X_2 = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 (\dot q_1) + S_2 \cos(q_1+q_2)(\dot q_1 + \dot q_2) \boxed{+\dot q_0} \\ L_1 \sin q_1 \dot q_1 + S_2 \sin(q_1+q_2)(\dot q_1+\dot q_2) \end{bmatrix}$$

($\frac{L_2}{2} \to S_2$)

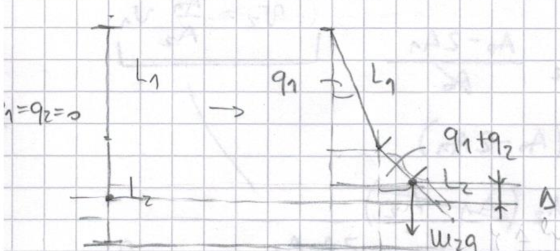
b) $T_2 = ?$

$$T_2 = T_{R,2} + T_{T,2}$$

$$T_{T,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 \; ; \quad T_{R,2} = \frac{1}{2} \Theta_{S,2} \cdot (\dot q_1 + \dot q_2)^2$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} \Theta_{S,2} (\dot q_1 + \dot q_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2$$

c) $V_2 = ?$ $q_R = [q_0, 0, 0]^T \Rightarrow V_2(q_R) = 0$



$$\Rightarrow V_2 = m_2 g \Delta h$$

$$V_2 = m_2 g \left(L_1(1-\cos q_1) + s_2(1-\cos(q_1+q_2))\right)$$

$$\Delta h = (L_1 + s_2) - (\cos(q_1) L_1 + \cos(q_1+q_2) s_2)$$

d) $f_q = ?$

$$f_q = f_E^T \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)$$

$$f_q = [\underbrace{f_{q_0}}_{F}, \underbrace{f_{q_1}}_{L_1 F \cos q_1}, \underbrace{f_{q_2}}_{=0}]^T \quad \left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right) = 0$$

$$f_E^T = [F, 0, 0]$$

$$\Rightarrow f_q = \begin{bmatrix} F \\ L_1 F \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} q_0 + \sin q_1 L_1 \\ L_1 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial q_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial r}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 \\ -L_1 \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

28.11.2014. 1) Nasstauchanzug

Neoprenschaum: $d_{s,0} = d_s(p_0, T_0)$ - Dicke

Porosität: $\phi_0 = \phi(p_0, T_0)$ - Maß für den Gasanteil des Schaumes

$$\phi(p,T) = \frac{\rho_s(p,T) - \rho_n(p,T)}{\rho_g(p,T) - \rho_n(p,T)} = \frac{V_g(p,T)}{V_s(p,T)}$$

Schaum = Neopren + Gasblasen

→ gilt nur für Gas!

a) $\rho_s = ?$ $\;= \rho_s(p)$ $\quad p, T = T_0 = \text{konst.} \Rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho} = \text{konst.}} \Rightarrow pV = \text{konst}$

Neopren - inkompressibel - nur das Gas wird komprimiert $\quad \boxed{V_{n,0} = V_n}$

$\boxed{p_0 V_{g,0} = p \cdot V_g} \Rightarrow V_g = \frac{p_0}{p} V_{g,0} = \frac{p_0}{p}\phi_0 V_{s,0}$

$m_s = \rho_{s,0} V_{s,0} = \rho_s V_s$ - Massenbilanz

$V_s = V_n + V_g$

$V_{s,0} = V_n + V_{g,0}$

$V_n = V_{s,0} - V_{g,0} = V_{s,0}(1-\phi_0)$

$$\phi_0 = \frac{V_{g,0}}{V_{s,0}} \Rightarrow V_{g,0} = \phi_0 \cdot V_{s,0}$$

$$\rho_{s,0} \cdot V_{s,0} = \rho_s \left(V_{s,0}(1-\phi_0) + V_g \right)$$

$$\Rightarrow \rho_{s,0} \cancel{V_{s,0}} = \rho_s \left(\cancel{V_{s,0}}(1-\phi_0) + \frac{p_0}{p}\phi_0 \cancel{V_{s,0}} \right)$$

$$\Rightarrow \rho_s = \frac{\rho_{s,0}}{1 + \phi\left(\frac{p_0}{p} - 1\right)}$$

! Prozessführungen und Zwangsbedingungen ($\frac{p}{\rho}$, ρT, $pv^\kappa = \text{konst.}$...) gelten nur für ideale Gasen!

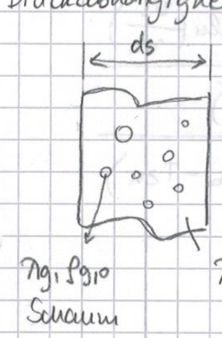
b) Wärmewiderstand = thermischer W. $\bar{R}_s = ?$ - bezogen auf A_s

obere und untere Schranke bestimmen! $\quad$ Allgemein: $\boxed{R_s = \frac{l}{\lambda A_s}}$ λ - Wärmeleitf.

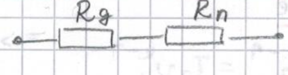
je nach Verschaltung kommt man auf die beiden Schranken - Parallel-/Serienschaltung

$\boxed{\Delta T = R \cdot \dot{Q}}$

- Druckabhängigkeit muss nicht explizit angegeben werden!

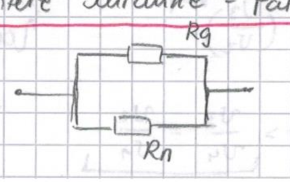


obere Schranke = Serienschaltung



$R_{s,o} = R_g + R_n$

untere Schranke = Parallelschaltung



$$R_{s,u} = \frac{R_g R_n}{R_g + R_n}$$

28.11.2014 1)

b)

$$\phi = \frac{V_g}{V_s} \Rightarrow V_g = \phi V_s \Rightarrow V_n = V_s - V_g = (1-\phi) V_s$$

Für Serienschaltung! $\boxed{R_g = \frac{d_s \cdot \phi}{\lambda_g A_s}}$, $\boxed{R_n = \frac{d_s (1-\phi)}{\lambda_n A_s}}$

$$\Rightarrow \underline{R_{s,o} = \frac{d_s \phi \lambda_n + d_s(1-\phi)\lambda_g}{A_s \lambda_g \lambda_n}} \qquad R_{s,u} = \frac{1}{\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_n}} = \frac{R_n R_g}{R_n + R_g} \qquad \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_n} = \frac{R_n + R_g}{R_n R_g}$$

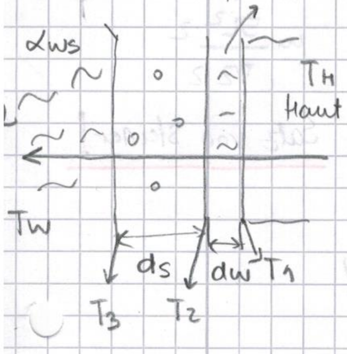
Andere Anordnung => andere Widerstandswerte für Parallelschaltung!

$$\boxed{R_g = \frac{d_s}{\lambda_g A_s \phi}} , \boxed{R_n = \frac{d_s}{\lambda_n A_s (1-\phi)}} \longrightarrow R_{s,u} = \frac{d_s}{A_s \left(\lambda_g \phi + \lambda_n (1-\phi)\right)}$$

$$R_s = \frac{d_s}{A_s \lambda_s} \Rightarrow \underline{\lambda_{s,o} = \frac{\lambda_g \lambda_n}{\phi \lambda_n + (1-\phi)\lambda_g}} \; ; \; \underline{\lambda_{s,u} = \lambda_g \phi + \lambda_n (1-\phi)}$$

c) $\alpha = ?$ vom kalten Wasser zur Haut

α_{WS} , α_{WM}



! Taucher in Bewegung: freie Konv. an der Haut, erzwungene Konv. an der Außenschicht

Taucher in Ruhe: freie Konv. an beiden Schichten

$$\dot{q} = \alpha (T_H - T_W)$$ – Randbed. 2. Art (vorgegebener Wärmestrom!)

$$= \alpha_{WM} (T_H - T_1) = \frac{\lambda_W}{d_W} (T_1 - T_2)$$

$$= \frac{\lambda_S}{d_S} (T_2 - T_3) = \alpha_{WS} (T_3 - T_W)$$

$$\Rightarrow T_H - T_W = \underbrace{(T_H - T_1)}_{\dot{q}\frac{1}{\alpha_{WM}}} + \underbrace{(T_1 - T_2)}_{\dot{q}\frac{d_W}{\lambda_W}} + \underbrace{(T_2 - T_3)}_{\dot{q}\frac{d_S}{\lambda_S}} + \underbrace{(T_3 - T_W)}_{\dot{q}\frac{1}{\alpha_{WS}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{WM}} + \frac{d_W}{\lambda_W} + \frac{d_S}{\lambda_S} + \frac{1}{\alpha_{WS}}}}$$

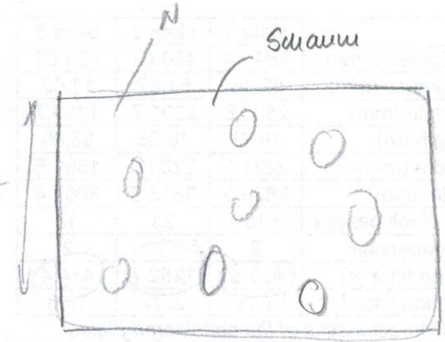
d) $Q = ?$ Δt $Q = \dot{Q}\Delta t = \dot{q} \cdot A_s \Delta t$ T_H – Körpertemperatur

A_M – Körperoberfläche

$$\Rightarrow Q = \frac{A_M \Delta t (T_H - T_W)}{\frac{1}{\alpha_{WM}} + \frac{d_W}{\lambda_W} + \frac{d_S}{\lambda_S} + \frac{1}{\alpha_{WS}}}$$

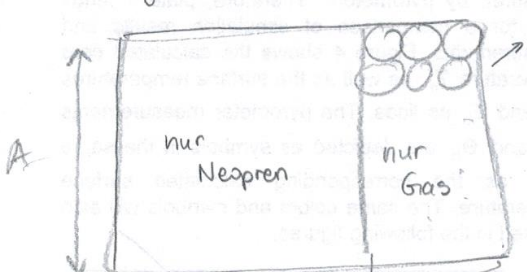
$\underbrace{d_W, d_S}_{\text{Anzug dicker!}}$ – vergrößern, $\underbrace{\lambda_W, \lambda_S}_{\text{Wärmeleitf.} \downarrow}$ – verkleinern!

b) $\phi = \frac{V_g}{V}$

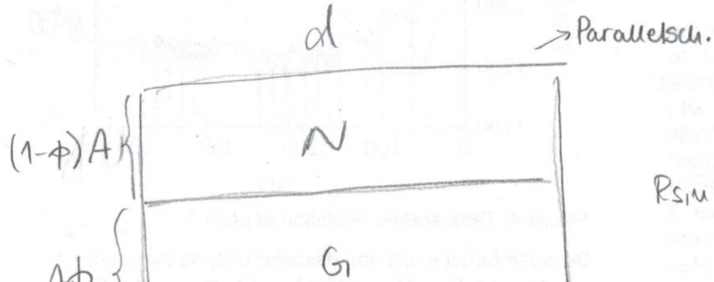


Grobe Abschätzung des Gesamtwiderstands durch Trennung!

$R_{g,s} = \frac{d_s \cdot \phi}{\lambda_g \cdot A_s}$; $R_{n,s} = \frac{d_s(1-\phi)}{\lambda_n \cdot A_s}$



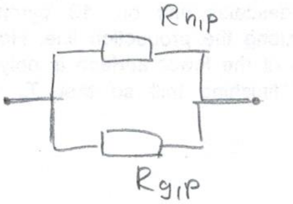
$$\Rightarrow R_{s,o} = \frac{\lambda_n d_s \phi + \lambda_g d_s (1-\phi)}{\lambda_g A_s \lambda_n}$$



$R_{n,p} = \frac{d_s}{\lambda_n (1-\phi) A_s}$; $R_{g,p} = \frac{d_s}{\lambda_g \phi A_s}$

$$R_{s,M} = \frac{R_{n,p} \cdot R_{g,p}}{R_{n,p} + R_{g,p}}$$

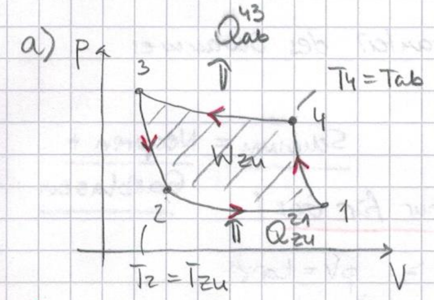
$$= \frac{\frac{d_s^2}{\lambda_n \lambda_g A_s^2 \phi (1-\phi)}}{\frac{d_s \lambda_g \phi + d_s \lambda_n (1-\phi)}{\lambda_n \lambda_g (1-\phi) \phi A_s}} = \underline{\underline{\frac{d_s}{A_s(\lambda_g \phi + \lambda_n (1-\phi))}}}$$

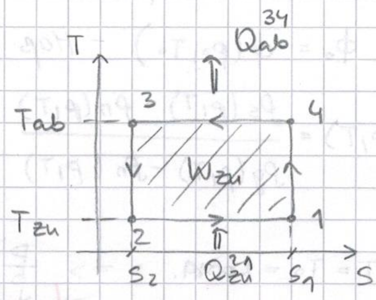


28.11.2014. 2) Carnotscher Linksprozess

ideales Gas - m

a)





1-4 : adiabate Kompression ($V_4 < V_1$)

4-3 : isotherme Kompr. ($V_3 < V_4$)

3-2 : adiabate Expansion ($V_2 > V_2$)

2-1 : isotherme Exp. ($V_1 > V_2$)

$W_{zu} = Q_{zu}^{21} + Q_{ab}^{43}$

c) Typische Beispiele: Wärmepumpe, Kältemaschine

d)

$$\eta_{cL} = \frac{Q_{ab}^{43}}{Q_{ab}^{43} + Q_{zu}^{21}} = \frac{T_{ab}}{T_{ab} - T_{zu}} \text{ - herleiten}$$

$$\boxed{w' = -p\,dv}$$

Q_{zu}^{21}, Q_{ab}^{43} = ?

$\rightarrow T = \text{konst.}$

$2 \rightarrow 1$: isotherme Expansion => Arbeit muss vom System abgeführt werden!

$$W_{ab}^{21} = -\int_{v_2}^{v_1} p\,dv = -mR_sT \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v} = -mR_sT \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$$

$$p = \rho R_s T = \frac{mR_sT}{v}$$

$$m = \rho \cdot v$$

$$de_i^{21} = w_{ab}^{21} + q_{zu}^{21} = 0 \,!$$

↳ innere Energie hängt nicht vom Volumen, sondern nur von der Temp!

$$\Rightarrow Q_{zu}^{21} = -W_{ab}^{21} = \underbrace{mR_sT_{zu} \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}$$

$4 \rightarrow 3$: isotherme Kompression

↳ Arbeit muss zugeführt werden!

$$W_{zu}^{43} = \ldots = -mR_sT_{ab} \ln\left(\frac{v_3}{v_4}\right) \;\rightarrow\; Q_{ab}^{43} = -W_{zu}^{43} = \underbrace{mR_sT_{ab} \ln\left(\frac{v_3}{v_4}\right)}$$

1-4, 3-2 - adiabate Prozesse

$$T_1 v_1^{k-1} = T_4 v_4^{k-1}, \quad T_3 v_3^{k-1} = T_2 v_2^{k-1}$$

$$T_1 = T_2, \quad T_3 = T_4$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{v_4}{v_1}\right)^{k-1} = \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{v_4}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} \Rightarrow \underbrace{\frac{v_3}{v_4} = \frac{v_2}{v_1}}$$

$$\Rightarrow \eta_{cL} = \frac{\cancel{mR_s}T_{ab}\cancel{\ln\left(\frac{v_3}{v_4}\right)}}{\cancel{\ln\left(\frac{v_3}{v_4}\right)}\cancel{mR_s}(T_{ab} - T_{zu})}$$

$$\eta_{cL} = \frac{T_{ab}}{T_{ab} - T_{zu}}$$

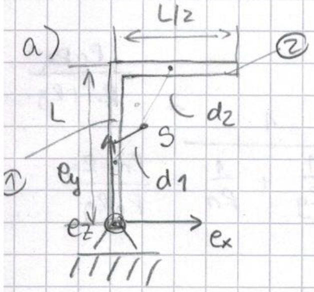
28.11.2014. 3)

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

2 Stäbe: L, m ; $\frac{L}{2}, \frac{m}{2}$

$\Theta^{(s)}_{zz,S} = \frac{m_s L_s^2}{12}$

a)



$r_S = ?$ $\Theta^{(s)}_{zz,S} = ?$

$$r_S = \frac{\sum_{j=1}^{2} r_{Sj} m_j}{\sum_{j=1}^{2} m_j}$$

$$r_{S1} = \begin{bmatrix} 0 \\ L/2 \end{bmatrix}, \quad r_{S2} = \begin{bmatrix} \frac{L}{4} \\ L \end{bmatrix} \Rightarrow r_S = \frac{\cancel{m}\begin{bmatrix} 0 \\ L/2 \end{bmatrix} + \frac{\cancel{m}}{2}\begin{bmatrix} \frac{L}{4} \\ L \end{bmatrix}}{\frac{3\cancel{m}}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \frac{L}{8} \\ L \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$d_1 = r_{S1} - r_S = \begin{bmatrix} -\frac{L}{12} \\ \frac{L}{6} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r_{S,x} = \frac{L}{12}, \; r_{S,y} = \frac{2}{3}L$

$\Rightarrow r_S = \left[\frac{L}{12}, \frac{2}{3}L, 0\right]^T$ $\quad \frac{5L}{6}$

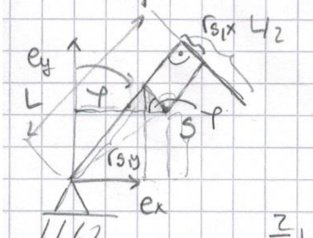
$$\Theta^{(s)}_{zz,S} = \underbrace{\frac{m \cdot L^2}{12}}_{\frac{8mL^2}{96}} + \underbrace{\frac{\frac{m}{2}\cdot\frac{L^2}{4}}{12}}_{\frac{mL^2}{96}} + m\underbrace{\left(\left(\frac{L}{12}\right)^2 + \left(\frac{L}{6}\right)^2\right)}_{\frac{5L^2}{144}} + \underbrace{\frac{m}{2}\left(\left(\frac{L}{6}\right)^2 + \left(\frac{L}{3}\right)^2\right)}_{m\frac{5L^2 \cdot 2}{72 \cdot 2}}$$

$\frac{15 mL^2}{144}$

Satz von Steiner!

$$= mL^2\underbrace{\left(\frac{9}{96} + \frac{15}{144}\right)}_{\frac{27+30}{288}} = \frac{\cancel{57}}{\cancel{288}} \Rightarrow \Theta^{(s)}_{zz} = \frac{19}{96}mL^2$$

b) $r_S(q) = ?$ $\quad q = [\varphi]$



$$r_{S,y}(q) = \overbrace{r_{S,y,0}}^{\frac{2}{3}L} \cdot \cos\varphi - \overbrace{r_{S,x,0}}^{\frac{L}{12}} \cdot \sin\varphi$$

$$r_{S,x}(q) = \overbrace{r_{S,y,0}}^{\frac{2}{3}L} \cdot \sin\varphi + \overbrace{r_{S,x,0}}^{\frac{L}{12}} \cos\varphi \; ;$$

$$\Rightarrow r_S(q) = \left[\frac{2}{3}L\sin\varphi + \frac{L}{12}\cos\varphi \; ; \; -\frac{L}{12}\sin\varphi + \frac{2}{3}L\cos\varphi \; ; \; 0\right]^T$$

28.11.2014 3)

c) gen. Geschwindigkeiten?

$$\omega_s = [0, 0, -\dot\varphi]^T \qquad v_s = \dot r_s(q) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}L\cos\varphi\cdot\dot\varphi - \frac{L}{12}\sin\varphi\cdot\dot\varphi \\ -\frac{L}{12}\cos\varphi\cdot\dot\varphi - \frac{2}{3}L\sin\varphi\cdot\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Rückstellfeder mit k_F

Allgemeine Formel für Potentialenergie:

$$\boxed{V = -\sum_i m_i g^T r_{s_i} + V_0}$$

z.B.: $\vec g = [0, -g, 0]^T$

$\varphi = 0 \Rightarrow$ Feder entspannt

$T, V = ?$

$$T = T_{T,s} + T_{R,s} = \frac{1}{2}\frac{3m}{2} v_s^T v_s + \frac{1}{2}\Theta_{zz}^{(s)}\cdot\dot\varphi^2$$

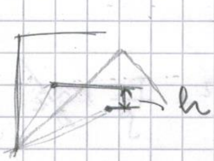
$$= \frac{\cancel{3}m}{4}\left(\frac{4}{9}L^2\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{144}\dot\varphi\right) + \frac{1}{2}\frac{19}{96}mL^2\dot\varphi^2$$

$$= \frac{64L^2\dot\varphi^2 + 1L^2\dot\varphi}{\cancel{144}\ 48}$$

$$= \frac{65mL^2\dot\varphi^2}{192} + \frac{19}{192}mL^2\dot\varphi^2 = \frac{\cancel{84}\ \cancel{21}\ 7}{\cancel{192}\ \cancel{48}\ 16}mL^2\dot\varphi^2 = \frac{7}{16}mL^2\dot\varphi^2$$

$$V = V_G + V_F$$

$$V_G = \frac{3}{2}mgh$$ Bezug zum SP für $\varphi = 0$?



Rückstellfeder:

$$\boxed{V_F = \frac{1}{2}k_F\varphi^2}$$

$$h = \frac{L}{6} + \frac{L}{12}\sin\varphi - \frac{2}{3}L\cos\varphi$$

$$V_G = +\frac{3}{2}mg\left(-\frac{L}{12}\sin\varphi + \frac{2}{3}L\cos\varphi\right) = -mgL\frac{\sin\varphi}{8} + mgL\cos\varphi$$

als Nullniveau das Niveau des Koordinatenursprungs gewählt!

e) $f_q = ?$ Euler-Lagrange Formalismus: $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = f_q}$

$$f_q = f_E^T\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right) \qquad q = \varphi$$

$$f_E^T = [\cos\varphi F, -\sin\varphi F, 0]^T$$

$$r = [L\sin\varphi, L\cos\varphi, 0]^T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial q} = [L\cos\varphi, -L\sin\varphi, 0]^T$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f_q = LF}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{7}{8}mL^2\dot\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{7}{8}mL^2\ddot\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -k_F\varphi - mgL\frac{\cos\varphi}{8} - mgL\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8}mL^2\ddot\varphi + mgL\frac{\cos\varphi}{8} + mgL\sin\varphi + k_F\varphi = LF$$

$$L = T - V = \frac{7}{16}mL^2\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}k_F\varphi^2 - mgL\frac{\sin\varphi}{8} + mgL\cos\varphi$$

28.11.2014. 4) Venturi - Prinzip

ρ, $D_1 \to D_2$

B1: p_1, v_1 B2: p_2, v_2

Angenommen: reibungsfreie, inkompressible Strömung $\Rightarrow \rho = konst.$

a) ρ_M im U-Rohr - $A_R << \frac{D_{1/2}^2 \pi}{4} \Rightarrow v_R \approx 0$

$h = ?$ $h(p_1, p_2)$

Bgl:

$$\frac{p_1}{\rho_M} + g \cdot z_1 = \frac{p_2}{\rho_M} + g \cdot z_2 \quad , h = z_2 - z_1$$

$$\Rightarrow g \cdot \underbrace{(z_2 - z_1)}_{h} = \frac{p_1 - p_2}{\rho_M} \Rightarrow h = \frac{p_1 - p_2}{\rho_M g} \Rightarrow p_1 - p_2 = h \rho_M g$$

b) Massenbilanz: $v_1 = ?$ $v_1(q)$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt} V}_{=0} = \sum_i q_i} \Rightarrow q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow \rho A_1 v_1 - \rho A_2 v_2 = 0$$

$$A_1 v_1 = q_1 = q_2 = q = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{4q}{D_1^2 \pi} = \frac{v_2 D_2^2 \cancel{\pi}}{D_1^2 \cancel{\pi}}$$

$$q = v_2 \frac{D_2^2 \pi}{4}$$

c) $v_2 = ?$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + \cancel{gz} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + \cancel{gz} \quad / \cdot 2$$

$$v_2^2 \left(\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 - 1 \right) = \frac{2}{\rho} (p_2 - p_1)$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left(\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)}} = \sqrt{\frac{2 h \rho_M g}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)}}$$

d) q aus h

$$\boxed{q = v \cdot A}$$

$$q = \underbrace{\sqrt{\frac{2 h \rho_M g}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)}}}_{v_2} \cdot A_2$$

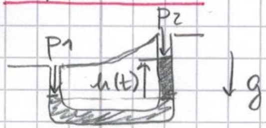
28.11.2014 4)

e) $\ddot{h} = ?$ Manometerhöhe

U-Rohr – A_M, l_M

Impulsbilanz:

$$\frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(mv) = \sum_i f_i$$



$$\underbrace{m}_{\rho_M V_M}\ddot{h}(t) = p_1 A_M - p_2 A_M - m_1 g$$

$V_M = A_M l_M$

$$m_1 = \rho_M \cdot V_1 = \rho_M \cdot A_M \cdot h(t)$$

$$\Rightarrow A_M l_M \rho_M \ddot{h}(t) = A_M (p_1 - p_2) - \rho_M A_M h(t) g$$

$$\Rightarrow \ddot{h}(t) = \frac{p_1 - p_2}{l_M \rho_M} - \frac{h(t) g}{l_M}$$

$$\Rightarrow \ddot{h}(t) + \frac{g}{l_M} h(t) = \frac{p_1 - p_2}{l_M \rho_M}$$

30.01.2015 1) Seiltrommel mit Bremse

t_0 - v_0, m $\qquad F = \text{konst.}$

Seil - J, $r = \text{konst.}$

Balken - ρ, μ

a) $F_g = m_B g = ?$

$m_B = \rho \cdot V_B$

$V_B = h \cdot A_B$, $A_B = b_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} = b_1 \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) + b_2 \frac{l_2}{2}$

$$\Rightarrow F_g = \rho h \left(b_1 \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) + b_2 \frac{l_2}{2}\right) g$$

b) V, T der Last und der Seiltrommel zum Zp. t_0.

$V = 0$ - Nullniveau $\qquad v_0 = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{r}$

$V = mg\Delta$, $T_L = \frac{1}{2} m v_0^2$, $T_{ST} = \frac{1}{2} J \left(\frac{v_0}{r}\right)^2$

$$\Rightarrow T = T_L + T_{ST} = \underline{\frac{1}{2} m v_0^2 + J \frac{v_0^2}{2r^2}}$$

c) $M_r = ?$ Reibmoment - $M_r(F)$

$r_B = [x_S, y_S, z_S]^T$

$\boxed{F_R = \mu \cdot F_N}$

Balken ruht: $\sum M_A = 0$ - Summe der Momente um den Drehpunkt A ist 0!

$\boxed{M_r(F) = R \cdot F_R}$

$$\Rightarrow \sum M_A = \underbrace{\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_G \end{bmatrix}}_{x_S F_G \cdot e_y} + F(l_1 + l_2) e_y - l_3 \cdot F_N \cdot e_y = 0$$

$$\Rightarrow \underline{F_N = \frac{1}{l_3} \left(F_G x_S + F(l_1 + l_2)\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{M_r(F) = \mu R \frac{1}{l_3} \left(F_G x_S + F(l_1 + l_2)\right)}$$

30.01.2015 1)

d) Arbeit von M_r, $W_r(F) = ?$

↳ die in Wärme umgewandelt wird

$$W_r(F) = M_r(F) \cdot \varphi$$

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}} \Rightarrow W_r(F) = M_r(F) \cdot \frac{s}{r}$$

$$P = M_r \cdot \omega$$

$$\dot{E} = P = M_r \cdot \omega$$

$$\Downarrow$$

$$E = M_r \cdot \varphi$$

F - konstant => das Bremsmoment ist auch konst.

=> Arbeit = Moment mal dem zurückgelegten Winkel der Seiltrommel während des Abbremsvorgangs

e) $F = ?$ v_0 innerhalb der Wegstrecke s zum Stillstand

1b, d)

Am Ende des Bremsvorganges ist die kin. und die pot. Energie 0 => die gesamte Energie muss durch die Reibung in Wärme umgewandelt werden!

$$W_r = T + V$$

$$\frac{s}{r} \cdot \mu R \frac{1}{l_3}\left(F_G x_S + F(l_1+l_2)\right) = \underbrace{mgs + \frac{1}{2} m v_0^2 + J\frac{v_0^2}{2r^2}}_{T+V}$$

$$\Rightarrow F_G x_S + F(l_1+l_2) = \frac{l_3 \cdot r(T+V)}{s\mu R}$$

$$\Rightarrow F = \frac{l_3 r(T+V)}{(l_1+l_2)s\mu R} - \frac{F_G x_S}{l_1+l_2}$$

30.01.2015 2) Starrkörpersystem

Balken B – d, ρ, J_B Lager A – viskose Reibung – $d_2 > 0$

Schlitten S – m_S

B-S-Feder – $M(\phi) = c_2 \dot{\phi}$, $c_2 > 0$ $\phi = 0$ – entspannt

Schlittenführung – SF – geschwindigkeitsprop. Reibung – $d_1 > 0$

$c_1 > 0$ – $S = S_{10}$,

a) $m_B = ?$ Abstand vom r_S zu A?

$m_B = \rho \cdot V_B$, $V_B = A_B \cdot d$

$A_B = (b_1 \cdot l_1 + l_2 b_2 + l_3 \cdot b_3)$ $\Rightarrow \underline{m_B = \rho d (b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3)}$

$$r_S = \frac{\sum_{j=1}^{3} m_j r_{Sj}}{\sum_{j=1}^{3} m_j}$$

$m_1 = \rho d b_1 l_1$; $r_{S1} = \begin{bmatrix} l_1/2 \\ b_1/2 \end{bmatrix}$ $m_3 = \rho d l_3 b_3$; $r_{S3} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 + l_3/2 \\ b_1/2 \end{bmatrix}$

$m_2 = \rho d b_2 l_2$; $r_{S2} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2/2 \\ b_1/2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow r_S = \frac{\cancel{\rho d} b_1 l_1 \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \\ \frac{b_1}{2} \end{bmatrix} + \cancel{\rho d} b_2 l_2 \begin{bmatrix} l_1 + \frac{l_2}{2} \\ b_1/2 \end{bmatrix} + \cancel{\rho d} l_3 b_3 \begin{bmatrix} l_1 + l_2 + \frac{l_3}{2} \\ \frac{b_1}{2} \end{bmatrix}}{m_B = \cancel{\rho d}(b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3)}$$

$r_A = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \\ b_1/2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow d = r_S - r_A = \frac{\begin{bmatrix} \cancel{b_1 l_1 \frac{l_1}{2}} + \cancel{b_2 l_2 l_1} + \cancel{b_2 l_2 \frac{l_2}{2}} + \cancel{l_3 b_3 l_1} + \cancel{b_3 l_3 l_2} + b_3 \frac{l_3^2}{2} - \frac{b_1 l_1^2}{2} - b_1 l_1 l_2 - \cancel{b_2 l_2 l_1} - \frac{b_2 l_2^2}{2} - \cancel{b_3 l_3 l_1} - \cancel{l_3 b_3 l_2} \\ \cancel{b_1^2 \frac{l_1}{2}} + \cancel{b_1 \frac{b_2}{2} l_2} + \cancel{l_3 b_3 \frac{b_1}{2}} - \cancel{b_1^2 \frac{l_1}{2}} - \cancel{b_2 b_1 \frac{l_2}{2}} - \cancel{b_3 b_1 \frac{l_3}{2}} \end{bmatrix}}{b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3}$$

$$\Rightarrow d = \frac{b_3 \frac{l_3^2}{2} - \frac{b_1 l_1^2}{2} - b_1 l_1 l_2 - \frac{b_2 l_2^2}{2}}{b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3} \text{ – negativ}$$

$$\Rightarrow \underline{d = \frac{b_1 l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) + b_2 \frac{l_2^2}{2} - b_3 \frac{l_3^2}{2}}{-\|-}}$$

30.01.2015 2)

b) $q^T = [s, \phi]$

$V = ?$

$$V = V_{c1} + V_{c2} + V_{B,R} + V_{B,T} + V_S$$

$$V_{c1} = \frac{1}{2} c_1 (s - s_{10})^2 \; ; \quad V_{c2} = \frac{1}{2} c_2 \phi^2 \; ; \quad V_S = m_S g \cdot s$$

$$V_{B,T} = m_B g \cdot s \; , \; V_{B,R} = m_B g \, l_S \sin\phi \Rightarrow V_B = V_{B,T} + V_{B,R}$$

$$= m_B g (s + l_S \sin\phi)$$

deshalb war gut den Koordinatenursprung im Eckpunkt des Balkens zu setzen!

c) $T = ?$ J_B - Massenträgheitsmoment durch den Schwerpunkt

$$T_S = \frac{1}{2} m_S \cdot \dot{s}^2 \; , \; T_B = T_{B,r} + T_{B,t}$$

$$T_{B,r} = \frac{1}{2} J_B \dot{\phi}^2$$

$$r_{B,S}^{(A)} = \begin{bmatrix} -l_S \cos\phi \\ s + l_S \sin\phi \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{r}_{B,S}^{(A)} = \begin{bmatrix} + l_S \sin\phi \cdot \dot{\phi} \\ \dot{s} + l_S \cos\phi \cdot \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{B,t} = \frac{1}{2} m_B \dot{r}_{B,S}^{(A)T} \dot{r}_{B,S}^{(A)}$$

$$\Rightarrow T_{B,T} = \frac{1}{2} m_B \left(l_S^2 \dot{\phi}^2 + \dot{s}^2 + 2 l_S \dot{s} \cos\phi \cdot \dot{\phi} \right)$$

$$\Rightarrow T = T_S + T_{B,r} + T_{B,t}$$

auch Momente dabei!!

d) gen. Kräfte? f_q - externe + dissipative Kr.

$$f_q = f_E^T \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right) \quad q = [s, \phi]^T \Rightarrow f_q = [f_s, f_\phi]^T$$

Reibkräfte und -momente, die direkt auf die gen. Koordinaten wirken, werden direkt in die Bewegungsgl. aufgenommen!!

Koordinatensystem muss inertial sein, d.h. fest und darf sich nicht bewegen $\Rightarrow$ kann nicht im Punkt A sein!!

$$r_F = \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2)\cos\phi \\ s - (l_1 + l_2)\sin(-\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2)\cos\phi \\ s + (l_1 + l_2)\sin\phi \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial r_F}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial r_F}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} (l_1 + l_2)\sin\phi \\ (l_1 + l_2)\cos\phi \end{bmatrix}$$

- externe Kraft F - stets orthogonal auf den Balken!

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} F \sin\phi \\ F \cos\phi \end{bmatrix} \Rightarrow f_{e,s} = F\cos\phi \; , \; f_{e,\phi} = F(l_1 + l_2)$$

$$f_q = \begin{bmatrix} F\cos\phi - d_1 \dot{s} \\ F(l_1 + l_2) - d_2 \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

30.01.2015 3)

- Behälter - b, h

T_0 - x_0 - in beiden Kammern - Luft (p_0, ρ_0, T_0)

- Luft - ideal, k

- Öl - ρ_f, z_1 $\rightarrow$ $p_f(z)$, p_1 = konst.

a) Hydrostatischer Druck (= Gravitationsdruck, Schweredruck) - Druck, der sich innerhalb eines ruhenden Fluids, durch den Einfluss der Gravitation einstellt.

T_1, $F_1 = ?$ keine Wärmeübertragung zw. der Luft in der linken Kammer und der Umgebung

Bgl. für $p_f(z)$

Kraft auf den Kolben von der rechten Kammer!

$$F_1 = p_f(z) A_z$$

(nicht als resultierende Kr. gemeint!)

$$A_r = h \cdot b - \frac{d^2 \pi}{4} \qquad A_z = h \cdot b$$

Bgl. für Öl: ρ_f = konst.

$$\frac{p_0}{\rho_f} + g \cdot z_1 = \frac{p_f(z)}{\rho_f} + g \cdot z \quad | \cdot \rho_f$$

$$\underline{p_f(z) = p_0 + g(z_1 - z)\rho_f}$$

Kolben an der Höhe $\frac{h}{2}$

$$\Rightarrow p_f\left(\frac{h}{2}\right) = p_0 + g\left(z_1 - \frac{h}{2}\right)\rho_f$$

$$\Rightarrow \underline{F_1 = h b \left(p_0 + g\left(z_1 - \frac{h}{2}\right)\rho_f\right)}$$

b) $T_1 = ?$, $x_1 = ?$ T_1 Luft - ideal: $\underline{p = \rho R_s T}$

Luft - adiabat: $T p^{\frac{1-k}{k}}$ = konst.

$$\Rightarrow T_1 p_1^{\frac{1-k}{k}} = T_0 p_0^{\frac{1-k}{k}}$$

$$\Rightarrow \underline{T_1 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-k}{k}}}$$

$p v^k$ = konst.

$p V^k$ = konst.

$V = A \cdot x$

$$\Rightarrow p_0 \cancel{A^k} x_0^k = p_1 \cancel{A^k} x_1^k \quad |^{1/k}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/k}$$

$p_1 = ?$

$$A_r = bh - \frac{d^2\pi}{4} \qquad p_1 A_r + \boxed{p_0 A_d} = F_1$$

$\hookrightarrow$ Kraft, die auf den Kolben von der Umgebung wirkt!

$$A_d = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{F_1 - p_0 \frac{d^2\pi}{4}}{bh - \frac{d^2\pi}{4}}$$

30.01.2015 3)

c) T_2 – Luft – T_0

$x_2 = ?$ $\qquad z_2 > h$

$a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = 0 \quad , \quad a_0, a_1, a_2 = ?$

$$\Delta V = \Delta V_2$$

$$\Delta V = (x_2 - x_1) \cdot \underbrace{\left(bh - \frac{d^2\pi}{4}\right)}_{Ar} = (z_1 - z_2) \cdot c \cdot b$$

$$\Rightarrow \underbrace{z_2 = z_1 - \frac{(x_2 - x_1)}{b \cdot c} Ar}$$

– Masse des Gases bleibt bei der Kompression erhalten!

$$\rho = \frac{p}{R_S T} \Rightarrow m = V\rho = \frac{pV}{R_S T} \Rightarrow \frac{p_1 V_1}{\cancel{R_S} T_1} = \frac{p_2 V_2}{\cancel{R_S} T_0}$$

$$\Rightarrow p_1 \underbrace{V_1}_{x_1 \cdot \cancel{Ar}} T_0 = p_2 \underbrace{V_2}_{x_2 \cdot \cancel{Ar}} \cdot T_1$$

– p_2?

$$p_2 Ar + \overbrace{p_0 A d}^{F_K} = F_2$$

$$\Rightarrow p_1 x_1 T_0 = p_2 x_2 T_1$$

$F_2 = l b \left(p_0 + g\left(z_2 - \frac{h}{2}\right)\rho_f\right)$ – analog zu F_1

$$p_2 = \frac{F_2 - \overbrace{p_0 A d}^{F_K}}{Ar}$$

$$p_1 x_1 T_0 = \frac{hb\left(p_0 + g\left(z_2 - \frac{h}{2}\right)\rho_f\right) - F_K}{Ar} x_2 T_1$$

$$Ar\, p_1 x_1 T_0 = hb\, x_2 T_1 p_0 + hbg\rho_f \left(z_1 - \frac{(x_2 - x_1)}{bc} Ar - \frac{h}{2}\right) x_2 T_1 - F_K x_2 T_1$$

$$Ar\, p_1 T_0 x_1 = x_2 \left(hb T_1 p_0 + hbg\rho_f T_1 \left(z_1 - \frac{h}{2}\right)\right) - h\cancel{b} g \rho_f T_1 \frac{Ar}{\cancel{b}c}\left(x_2^2 - x_1 x_2\right) - F_K T_1$$

⋮

$$a_2 = \frac{\rho_f g T_1 b h^2}{c}$$

$$a_1 = T_1 p_0 b h - \frac{\rho_f g T_1 b h^2}{2} - T_1 F_K + \rho_f g T_1 b h z_1 - \frac{\rho_f g T_1 b h^2 x_1}{c}$$

$$a_0 = -T_2 p_1 \left(bh - \frac{d^2\pi}{4}\right) x_1$$

30. 01. 2015 4) Beheizter Tank

Tank − V, ρ, c_p

a) DG für $T_f(t)$, $\frac{d}{dt} T_f(t) = ?$

Von der Heizplatte bekommt man Wärmestrom ($+\dot{q}_p$) und durch die Hülle verliert die Flüssigkeit Wärmestrom ($-\dot{q}_h$)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \underbrace{g(t, x, T)}_{=0 \text{ (keine Wärmequelle)}}$$

− stationäre Übertragung in der Hülle und der Trennschicht:

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_p = k_p (T_p - T_f) \qquad \dot{q}_h = k_h (T_f - T_\infty)$$

$$k_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_p} + \frac{L_p}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_f}} \qquad k_h = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_f} + \frac{L_h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

$$\dot{q} = -\Lambda(x, T) \nabla T(x) \qquad J/s = W$$

$$\Rightarrow \boxed{V \rho c_p \frac{\partial T_f}{\partial t} = A_p k_p (T_p - T_f) - A_h k_h (T_f - T_\infty)}$$

$\frac{K}{s}$ $\qquad \dot{Q}$

$$c_p = \frac{Q}{m \Delta T} = \left[\frac{J}{kg\,K} \right] \qquad Q \rightarrow J$$

1. Hauptsatz der Thermodynamik