

**Beispiel 1:** Ein halbkugelförmiger Strahler (Durchmesser  $d$ , Temperatur  $T_2$ , Emissivität  $\varepsilon_2$ ) heizt eine ebene Scheibe (Durchmesser  $D$ , Dicke  $H$ , Emissivität  $\varepsilon_1$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_1$ ) auf, siehe Abb. 1. Der Wärmeaustausch durch Konvektion wird hierbei vernachlässigt. Die Temperatur der Unterseite der Scheibe ist konstant und entspricht der Umgebungstemperatur  $T_\infty$ . Die Außenfläche des Strahlers und die Mantelfläche der Scheibe sind ideal isoliert.

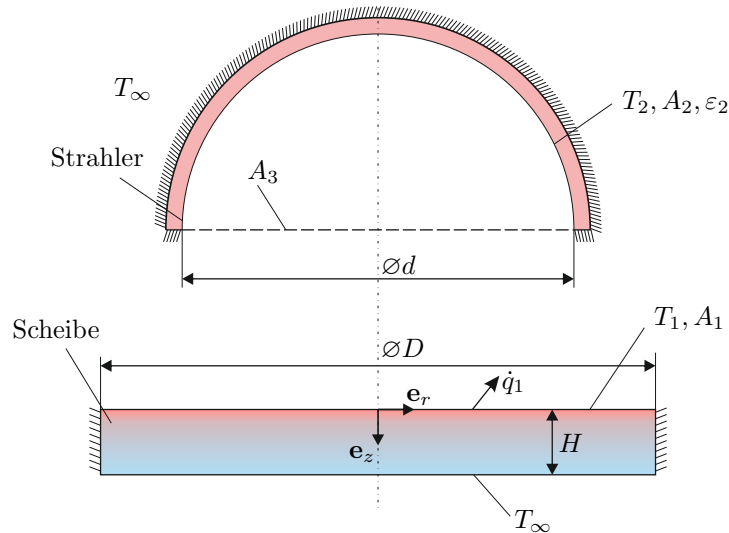


Abbildung 1: Aufheizen einer Scheibe.

- a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren  $F_{12}$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{22}$  und  $F_{23}$ . Der Sichtfaktor  $F_{13}$  zwischen der Scheibe und der imaginären Fläche  $A_3$  ist bekannt. Geben Sie zuerst den Sichtfaktor  $F_{32}$  an.

**Hinweis:** Nutzen Sie hierbei die Summationsregel für die Strahlungsräume bestehend aus  $A_1$ ,  $A_3$  und der Umgebung sowie  $A_2$  und  $A_3$ . Die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$  beträgt  $4\pi R^2$ .

- b) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Nettowärmestromdichten

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4$$

her. Gehen Sie von der Nettowärmestromdichte die die Oberfläche  $A_i$  verlässt, d.h.,  $\dot{q}_i = \varepsilon_i(\sigma T_i^4 - G_i)$  aus, wobei die auf die Fläche  $A_j$  auftreffende Strahlungsenergie sich zu  $G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji}(\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i)G_i)$  errechnet.

- c) Schreiben Sie die Wärmeleitgleichung mit den Randbedingungen für die Scheibe unter der Annahme einer homogenen Temperaturverteilung in radialer und axialer Richtung sowie bekannter Wärmestromdichte  $\dot{q}_1$  an. Bestimmen Sie das stationäre Temperaturprofil der Scheibe in  $z$ -Richtung und die Oberflächentemperatur  $T_1$  für  $\lambda_1(z) = \exp(-z)$ .

## Lösung

a)  $F_{12} = F_{13}$ ,  $F_{21} = \frac{D^2}{2d^2} F_{13}$  und  $F_{22} = F_{23} = 1/2$

b) Der gesuchte Zusammenhang folgt aus

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} [\text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \sigma \mathbf{T}^4 + (\mathbf{E} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{G}]$$

und

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) (\sigma \mathbf{T}^4 - \mathbf{G})$$

durch einfache Umformung

c) Das stationäre Temperaturprofil in der Scheibe folgt zu

$$T_s(z) = T_\infty + \dot{q}_1 (e^z - e^H)$$

und es stellt sich die Oberflächentemperatur

$$T_1 = T_\infty + \dot{q}_1 (1 - e^H)$$

ein

**Beispiel 2:** In Abb. 2a ist ein handelsüblicher Kugelgriller dargestellt. Dabei wird das kugelförmige Grillgut mit Durchmesser  $d_1$ , Emissivität  $\varepsilon_1$  und Masse  $m_1$  innerhalb des kugelförmigen Grillers (Durchmesser  $d_2$  und Emissivität  $\varepsilon_2$ ) erhitzt. Der Einfluss des Grillrosts kann für die Berechnungen vernachlässigt werden.

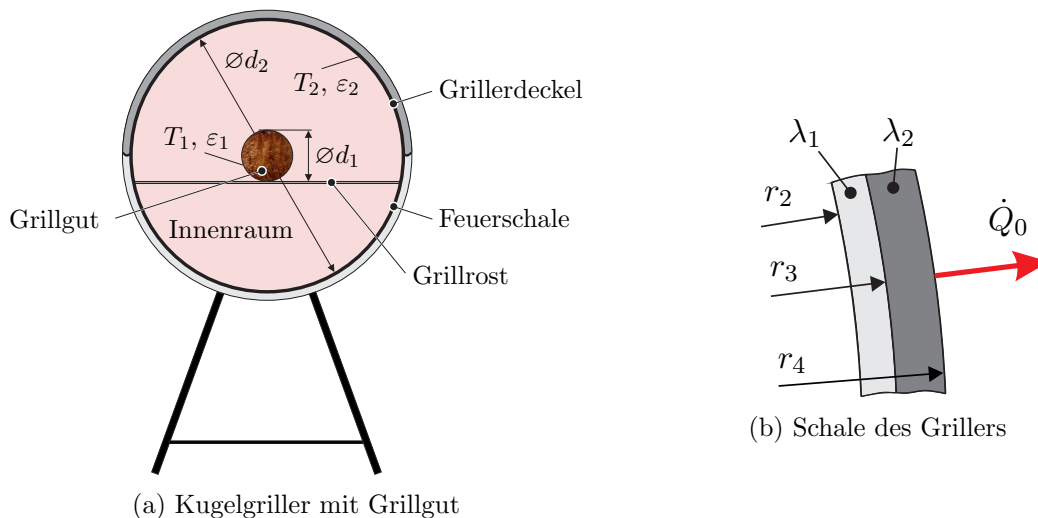


Abbildung 2: Kugelgriller.

- a) Leiten Sie die Sichtfaktoren für den Innenraum des Grillers, d.h. für dessen Schale und das Grillgut her. Dabei können der Grilldeckel und die Feuerschale als eine homogene Schale betrachtet werden.

**Hinweis:** Berücksichtigen Sie dabei geschickt die Eigenschaften der Sichtfaktoren im hier betrachteten radialsymmetrischen Fall.

- b) Berechnen Sie die aus dem Grillgut austretende Nettowärmestromdichte. Durch die spezielle Beschichtung der Innenwand des Grillers gilt  $\varepsilon_2 = 1$  und vernachlässigen Sie weiters die Konvektion.

**Hinweis:** Die Nettowärmestromdichten können mit der Formel

$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4$  berechnet werden.

- c) Leiten Sie die Differentialgleichung der Grillguttemperatur  $T_1$  mithilfe der kalorischen Energiebilanz  $\frac{de_i}{dt} = c_p \frac{dT_1}{dt}$ , wobei  $e_i$  die spezifische innere Energie und  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität bezeichnet, her.

- d) Betrachten Sie die in Abb. 2b dargestellte, kugelförmige Schale des Grillers. Diese besteht aus zwei unterschiedlichen Werkstoffen mit den Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Ermitteln Sie den stationären Temperaturverlauf  $T(r)$  für einen konstanten Wärmestrom  $\dot{Q}_0$  in radialer Richtung für  $T(r_2) = T_2$ .

**Hinweis:** Unter der Annahme radialsymmetrischer Verhältnisse folgt die Wärmeleitgleichung zu  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right)$ .

## Lösung

a) mit  $\kappa = (d_1/d_2)^2$  folgt die Sichtfaktormatrix zu

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 1 - \kappa \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \\ -\sigma \varepsilon_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 (T_1^4 - T_2^4) \end{bmatrix}.$$

c)

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{d_1^2 \pi}{c_p m_1} \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4).$$

d)

$$T_S(r) = \begin{cases} T_2 - \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_1} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) & \text{für } r_2 \leq r \leq r_3 \\ T_2 - \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_1} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) - \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_2} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} \right) & \text{für } r_3 < r \leq r_4, \end{cases}$$

**Beispiel 3:** Bei der Modellierung eines mit Schamott ausgekleideten Glühofens soll die zeitliche Dynamik der Verkleidung berücksichtigt werden. Der in Fig. 3 dargestellte Längsschnitt des Ofens mit quadratischem Querschnitt zeigt ein durch einen nicht näher untersuchten Prozess aufgeheiztes Medium, welches auf die Verkleidung strahlt. Zur Vereinfachung wird lediglich ein Wandsegment untersucht, welches die Form eines Pyramidenstumpfes hat. Um den Rechenaufwand gering zu

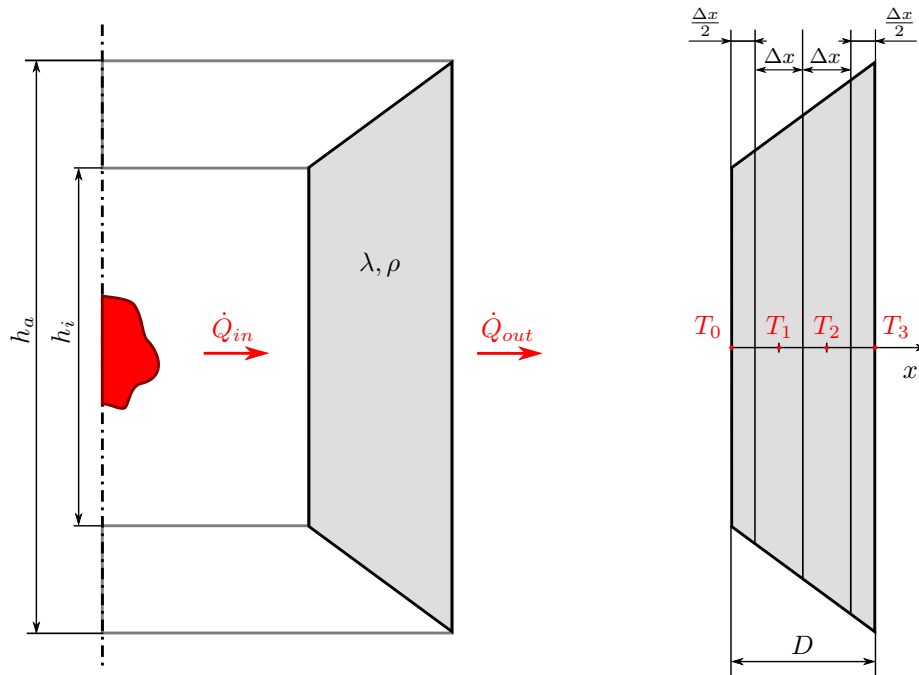


Abbildung 3: Ofen mit Schamottverkleidung. Links: Längsschnitt des Ofens mit betrachtetem Wandsegment (grau) und Wärmeflüssen. Rechts: Wandsegment mit vier diskreten Volumina.

halten, wird ein eindimensionales Modell des Segments verwendet, wobei sowohl die Temperatur  $T$  als auch der lokale Wärmefluss  $\dot{q}$  lediglich von  $x$  abhängen. Die Seitenflächen des Segments werden als adiabatisch isoliert betrachtet. Dies führt auf die partielle Differentialgleichung

$$\rho c_p A(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

wobei  $A(x)$  die Querschnittsfläche des Segments bezeichnet.

- Leiten Sie (1) unter den getroffenen Annahmen aus der Energieerhaltung her. Erklären Sie weiters, warum die Annahme einer adiabatischen Isoliertheit der Seitenflächen näherungsweise gerechtfertigt ist.
- Die partielle Differentialgleichung (1) soll durch ein einfacheres konzentriert-parametrisches Modell approximiert werden. Dazu wird das Wandsegment in vier Teilvolumina (siehe Fig. 3 rechts) mit  $\Delta x = \frac{D}{3}$  zerlegt, in welchen die Temperatur konstant angenommen wird. Leiten Sie aus der Energieerhaltung der Teilvolumina die Differentialgleichungen für die Temperaturen  $T_i$  mit  $i = 0, 1, 2, 3$  her. Approximieren Sie die Ortsableitungen der Temperatur durch geeignete finite Differenzen.
- Zeichnen Sie die erhaltene Approximation als RC-Ersatzschaltbild. Welche Bedingung müssen die Wärmeströme  $\dot{Q}_{in}$  und  $\dot{Q}_{out}$  stationär erfüllen?
- Schreiben Sie die Differentialgleichungen in der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  mit geeignetem  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$ .

## Lösung

a) Anschreiben der Energieerhaltung für eine Scheibe von  $x_1$  bis  $x_2$  liefert

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho c_p A(x) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \dot{q}(x)) \right] dx = 0,$$

woraus das gesuchte Ergebnis folgt

b) mit den Abkürzungen

$$R_i = \frac{\lambda A(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}, \quad C_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho c_p A(\xi) d\xi$$

lautet das vierdimensionale Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_0 \frac{dT_0}{dt} &= R_0(T_1 - T_0) + \dot{Q}_{in} \\ C_1 \frac{dT_1}{dt} &= R_1(T_2 - T_1) - R_0(T_1 - T_0) \\ C_2 \frac{dT_2}{dt} &= R_2(T_3 - T_2) - R_1(T_2 - T_1) \\ C_3 \frac{dT_3}{dt} &= -R_2(T_3 - T_2) - \dot{Q}_{out}. \end{aligned}$$

c)  $\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$

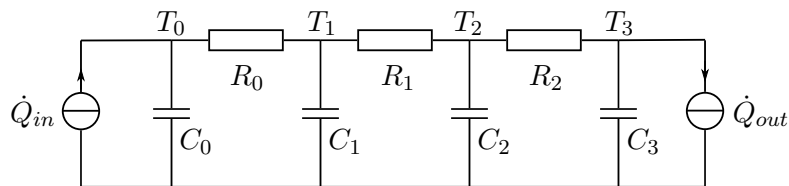


Abbildung 4: Konzentriert-parametrisches Ersatzschaltbild.

d) Mit  $\mathbf{x} = [T_0, T_1, T_2, T_3]^T$  und  $\mathbf{u} = [\dot{Q}_{in}, \dot{Q}_{out}]^T$  folgt die gewünschte Darstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_0}{C_0} & \frac{R_0}{C_0} & 0 & 0 \\ \frac{R_0}{C_1} & -\frac{R_0+R_1}{C_1} & \frac{R_1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{C_2} & -\frac{R_1+R_2}{C_2} & \frac{R_2}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{C_3} & -\frac{R_2}{C_3} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} \mathbf{u}$$

**Beispiel 4:** In dieser Aufgabe soll das Aufschmelzen eines thermoplastischen Polymers ausgehend von der Raumtemperatur  $T_\infty$  betrachtet werden. Abb. 5a zeigt den Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur. Um den Kunststoff im Inneren zu schmelzen, führen Heizmatten auf der Außenseite eines Hohlzylinders aus Stahl der Länge  $L$  konstant die Leistung  $P$  zu. Bei der sogenannten Glasübergangstemperatur wird die kristalline Struktur des Polymers in eine flüssige Schmelze gewandelt. Die dafür benötigte Energie kann ersatzweise durch eine von der Kunststofftemperatur  $T_p$  abhängige spezifische Wärmekapazität  $c_{p,p} = c_{p,p}(T_p)$  beschrieben werden, siehe Abb. 5b.

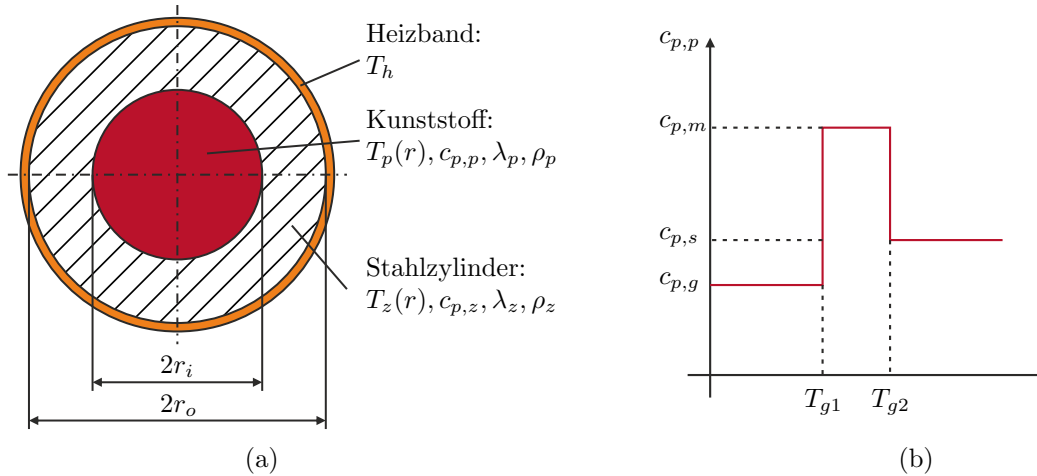


Abbildung 5: Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur (a) und Verlauf der spezifischen Wärmekapazität  $c_{p,p}$  des Polymers (b).

Die Heizbänder sollen mit homogener Temperaturverteilung  $T_h$  und vernachlässigbarer Dicke modelliert werden. Durch freie Konvektion kommt es zum Energieaustausch mit der Umgebung. Diese kann ebenso wie der Wärmeübergang vom Heizband auf den Massezylinder und der Übergang vom Zylinder auf den Kunststoff durch Randbedingungen dritter Art der Form  $\dot{q}_i = \alpha_i \Delta T_i$ ,  $i \in \{\infty, hz, zp\}$  mit konstanten Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_i$  beschrieben werden.

- Stellen Sie das gekoppelte System partieller Differentialgleichungen inklusive Anfangs- und Randbedingungen des vorliegenden Wärmeleitproblems mit dem Systemeingang  $P$  auf. Die Wärmeleitung in axialer Richtung kann dabei vernachlässigt werden.

**Hinweis:** Berechnen Sie die Heizbandtemperatur  $T_h$  als Funktion der Leistung  $P$ , der Raumtemperatur  $T_\infty$  und des Wärmestroms  $\dot{q}_{hz}$ .

Vernachlässigen Sie für die folgenden Aufgaben die Wärmekapazität des Metallzylinders und nähern Sie den Kunststoff als konzentrierte Masse mit homogener Temperatur  $T_p$  an.

- Geben Sie ein RC-Ersatzschaltbild des Wärmeleitproblems der vorigen Aufgabe an und bestimmen Sie alle auftretenden Ersatzgrößen inklusive deren Einheiten.
- Bestimmen Sie den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur  $T_p$  in einem Bereich mit konstanter spezifischer Wärmekapazität  $c_{p,p} = \text{konst.}$  ausgehend von  $T_\infty$  und berechnen Sie die stationäre Endtemperatur  $T_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} T_p(t)$ .
- Skizzieren Sie qualitativ den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur  $T_p$  bis zum Erreichen der Flüssigphase des Polymers. Unterteilen Sie dafür den Aufschmelzvorgang in drei Phasen: Aufheizen bis  $T_{g1}$ , Aufschmelzen bis  $T_{g2}$  sowie das Erwärmen auf die Endtemperatur  $T_p(t_e) = T_e > T_{g2}$ .

## Lösung

- a) Unter Verwendung der allgemeinen Wärmeströme  $\dot{q}_{hz}$  und  $\dot{q}_{zp}$  lässt sich der Polymer durch die partielle Differentialgleichung

$$\rho_p c_{p,p}(T_p) \dot{T}_p(r, t) = \lambda_p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) \right) \right)$$

mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t)|_{r=r_i} &= \dot{q}_{zp} \\ T_p(r, 0) &= T_\infty \end{aligned}$$

beschreiben. Analog dazu gilt für die Zylinderwand

$$\rho_z c_{p,z} \dot{T}_z(r, t) = \lambda_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) \right) \right)$$

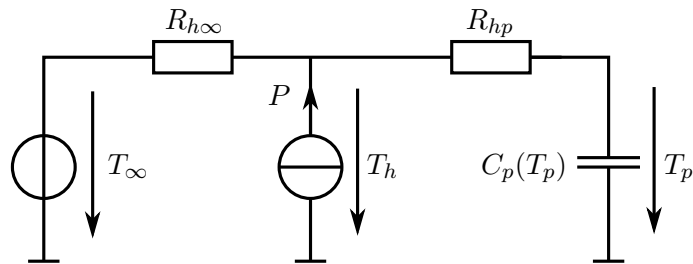
mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t)|_{r=r_o} &= \dot{q}_{hz} \\ \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t)|_{r=r_i} &= -\dot{q}_{zp} \\ T_z(r, 0) &= T_\infty. \end{aligned}$$

Die Wärmeströme ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \dot{q}_{zp} &= \alpha_{zp}(T_z(r_i) - T_p(r_i)) \\ \dot{q}_{hz} &= \frac{\alpha_{hz}/\alpha_\infty \frac{P}{A} + \alpha_{hz}(T_\infty - T_z(r_o))}{1 + \alpha_{hz}/\alpha_\infty} \end{aligned}$$

- b) Es ergibt sich das Ersatzschaltbild



mit den darin auftretenden Größen

$$\begin{aligned} R_{h\infty} &= \frac{1}{2r_o \pi L \alpha_\infty} \\ C_p &= r_i^2 \pi L \rho_p c_{p,p}(T) \\ R_{hp} &= \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{\alpha_{hz} r_i} + \frac{1}{\lambda_z} \ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right) + \frac{1}{\alpha_{zp} r_o} \right). \end{aligned}$$



Einheiten der Größen im ESB:

$$[R] = \text{K W}^{-1}$$

$$[C] = \text{J K}^{-1}$$

$$[P] = \text{W}$$

$$[T] = \text{K}$$

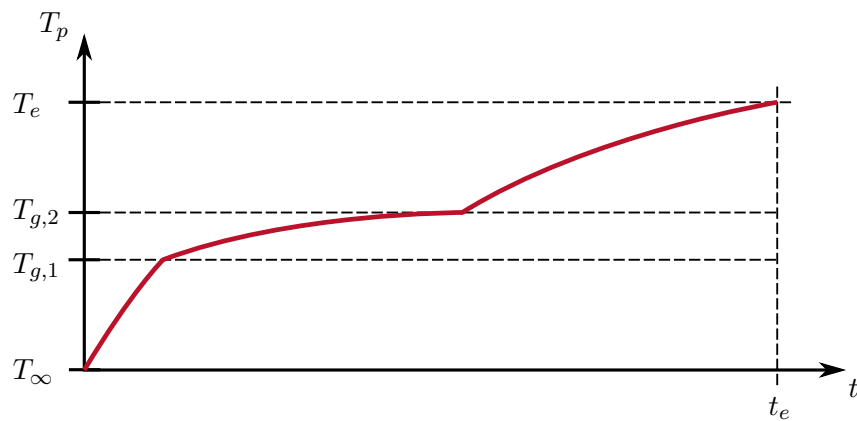
c) Im Allgemeinen lautet die ODE für das RC Ersatzschaltbild

$$\underbrace{(R_{hp} + R_{h\infty})C_p(T_p)}_{\tau(T_p)} \dot{T}_p = T_\infty + PR_{h\infty} - T_p .$$

Für den Fall  $c_{p,p} = \text{konst.}$  ergibt sich die Lösung der ODE für die Anfangsbedingung  $T_p(0) = T_\infty$  und konstanter Leistung  $P$  zu

$$T_p(t) = T_\infty + PR_{h\infty}(1 - \exp(-t/\tau)) .$$

d) Temperaturverlauf der homogen und konzentriert angenommenen Kunststoff-Masse bei konstanter Heizleistung:



**Beispiel 5:** Die eindimensionale Wärmeleitgleichung mit Reaktionsterm

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha T \quad (3a)$$

ist definiert auf dem Gebiet  $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+$ . Für allgemeine Anfang- und Randbedingungen

$$T(x, 0) = \bar{T}_0(x) \quad (3b)$$

$$T(0, t) = \bar{T}_1(t) \quad (3c)$$

$$T(1, t) = \bar{T}_2(t) \quad (3d)$$

soll eine numerische Lösung mithilfe der Finiten-Differenzen-Methode berechnet werden. Dazu wird das äquidistante Gitter  $(i\Delta x, n\Delta t)$  mit  $i = 0, \dots, N$  und  $n = 0, 1, 2, \dots$  eingeführt. Ein verbreitetes numerisches Verfahren zur Lösung parabolischer partieller Differentialgleichungen stellt das Crank-Nicolson-Verfahren dar. Dabei wird allgemein die nichtlineare Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

mit der Funktion  $f$  durch das implizite Differenzenschema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(f_i^{n+1} + f_i^n)$$

approximiert, wobei die Abkürzungen  $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$  und  $f_i^n = f\left(u_i^n, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(i\Delta x, n\Delta t)\right)$  verwendet wurden. Die Ortsableitung in  $f$  muss dabei durch eine geeignete Methode approximiert werden.

- a) Formulieren Sie das Differenzenschema des Crank-Nicolson-Verfahrens für die Wärmeleitgleichung (3a) an einem allgemeinen Punkt im Inneren des Definitionsgebiets. Verwenden Sie dabei den zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der zweiten örtlichen Ableitung.
- b) Unter Verwendung der dirichletschen Randbedingungen soll das Crank-Nicolson-Verfahren als System von Differenzengleichungen in Matrixform

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{T}^n, \bar{T}_1, \bar{T}_2)$$

mit dem Vektor  $\mathbf{T}^n = [T_1^n, \dots, T_{N-1}^n]$  dargestellt werden. Geben Sie auch die notwendige Anfangsbedingung an.

- c) Angenommen, die Randbedingung für  $x = 0$  wird durch eine neumannsche Randbedingung der Form

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{\lambda} \dot{q}(t)$$

ersetzt. Was verändert sich im Vergleich zum vorigen Unterpunkt? Schreiben Sie das Crank-Nicolson-Verfahren in Matrixform an.

- d) Lösen Sie das Anfangswert-Randwert-Problem (3) in numerischer Software wie beispielsweise MATLAB oder Octave.

## Lösung

a) Mit den Abkürzungen  $r = \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2}$  und  $l = 2r - \frac{\alpha\delta t}{2}$  folgt

$$-rT_{i+1}^{n+1} + (1+l)T_i^{n+1} - rT_i^{n+1} = rT_{i+1}^n + (1-l)T_i^n + rT_{i-1}^n.$$

b) Auswerten des Differenzenschemas an  $i = 1, \dots, N-1$  liefert das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+l & -r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & 1+l & -r & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1+l & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1+l & -r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r & 1+l \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-2}^{n+1} \\ T_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} rT_2^n + (1-l)T_1^n + rT_0^n + rT_0^{n+1} \\ rT_3^n + (1-l)T_2^n + rT_1^n \\ rT_4^n + (1-l)T_3^n + rT_2^n \\ \vdots \\ rT_{N-1}^n + (1-l)T_{N-2}^n + rT_{N-3}^n \\ T_N^{n+1} + rT_N^n + (1-l)T_{N-1}^n + rT_{N-2}^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{T}^n, \bar{T}_1, \bar{T}_2)}$$

mit den unbekannten Werten  $T_0^i$  und  $T_N^i$ , welche sich aus den dirichletschen Randbedingungen zu

$$T_0^i = \bar{T}_1(i\Delta t)$$

$$T_N^i = \bar{T}_2(i\Delta t)$$

ergeben.

c) Durch Approximation der Ableitung am Rand mittels einfachen Differenzenquotienten folgt für die Stützstelle am linken Rand

$$T_0^n = T_1^n - \frac{\Delta x}{\lambda} \dot{q}(n\Delta t)$$

d) siehe Lösungsdatei