

**Technische Universität Wien**  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 06.03.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	9	6	8	9	32
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. In Abbildung 1 ist vereinfacht eine schwimmende Bohrinsel mit einem Förderturm dargestellt. Die Plattform mit der Masse  $m_P$  ist ausreichend am Grund des Meeres verankert, wodurch eine Bewegung ausschließlich in vertikaler Richtung angenommen wird. Aufgrund der Wellenbewegung und der Auftriebskraft tritt im Schwerpunkt  $S_P$  eine externe Kraft  $F_W$  auf. 9 P.

Der Förderturm besitzt die Masse  $m_T$  und das Trägheitsmoment  $\Theta_T$  bezüglich des Schwerpunkts  $S_T$ . Der Turm ist weiters wie dargestellt sowohl über eine translatorische als auch eine rotatorische Feder mit den Steifigkeiten  $c_x$  und  $c_\varphi$  an der Plattform montiert. Die beiden Federn sind jeweils für  $x = 0$  und  $\varphi = 0$  entspannt.

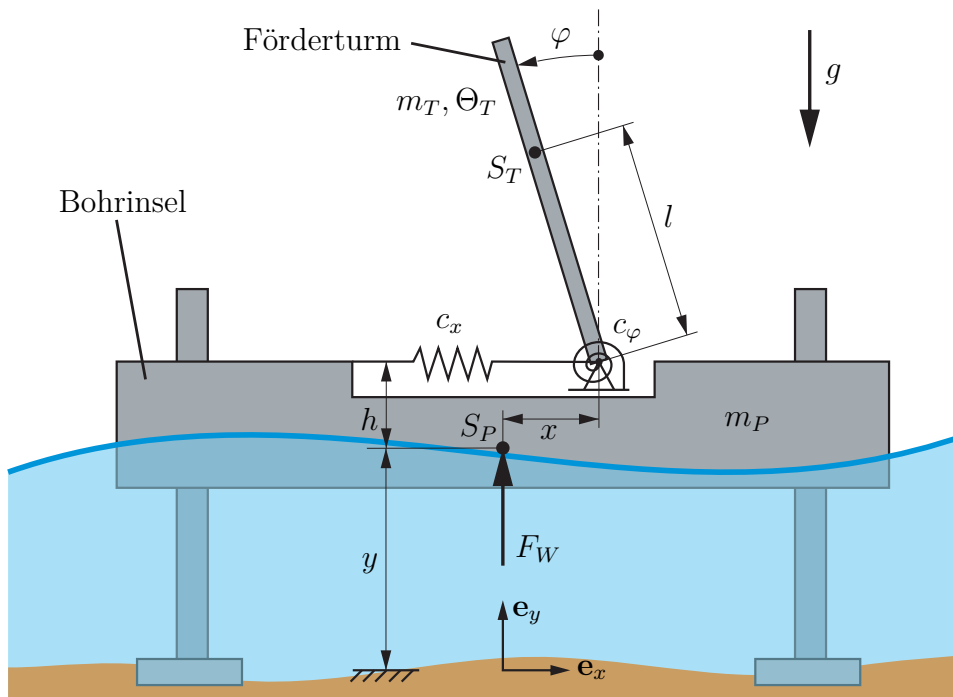


Abbildung 1: Bohrinsel mit Turm.

- Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses System? Wählen Sie dementsprechend einen geeigneten Vektor  $\mathbf{q}$  der generalisierten Koordinaten. 1 P.
- Geben Sie die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_P$  und  $\mathbf{r}_T$  der Schwerpunkte  $S_P$  und  $S_T$  sowie deren Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{r}}_P$  und  $\dot{\mathbf{r}}_T$  an. 2 P.
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und deren Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{q}}$ . 2 P.
- Bestimmen Sie die potentielle Energie der Plattform und des Turms sowie der vorhandenen Federn. Wählen Sie dabei den Meeresboden  $y = 0$  als Bezugspunkt. 2 P.
- Geben Sie die Lagrange-Funktion für dieses System an. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen, die Sie auswerten müssten, um auf die Bewegungsgleichungen zu kommen? 2 P.

Lösung:

a) Das System besitzt 3 Freiheitsgrade.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & y & \varphi \end{bmatrix}^T$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P &= \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, & \mathbf{r}_T &= \begin{bmatrix} x - l \sin \varphi \\ y + h + l \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}}_P &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{bmatrix}, & \dot{\mathbf{r}}_T &= \begin{bmatrix} \dot{x} - l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} - l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) kinetische Energie:

translatorisch:

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} m_P \dot{\mathbf{r}}_P^T \dot{\mathbf{r}}_P = \frac{1}{2} m_P \dot{y}^2 \\ T_T &= \frac{1}{2} m_T \dot{\mathbf{r}}_T^T \dot{\mathbf{r}}_T = \frac{1}{2} m_T \left( (\dot{x} - l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{y} - l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_T \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2l\dot{\varphi} (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) + l^2 \dot{\varphi}^2 \right) \end{aligned}$$

rotatorisch:

$$T_R = \frac{1}{2} \Theta_T \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow T = T_P + T_T + T_R$$

d) potentielle Energie:

Plattform und Turm:

$$\begin{aligned} V_P &= m_P g y \\ V_T &= m_T g (y + h + l \cos \varphi) \end{aligned}$$

Federn:

$$V_F = \frac{1}{2} c_x x^2 + \frac{1}{2} c_\varphi \varphi^2$$

$$\Rightarrow V = V_P + V_T + V_F$$

e) Lagrange-Funktion:  $L = T - V$

$$\text{generalisierten Kräfte: } \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & F_W & 0 \end{bmatrix}^T$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

2. Ein Skifahrer fährt wie in Abbildung 2 dargestellt mit der Geschwindigkeit  $v_0$  über eine Kuppe mit dem Radius  $R$ . Die Masse  $m$  des Skifahrers soll konzentriert im Schwerpunkt in einer Höhe  $h$  über der Schneeoberfläche vorausgesetzt werden. 6 P.

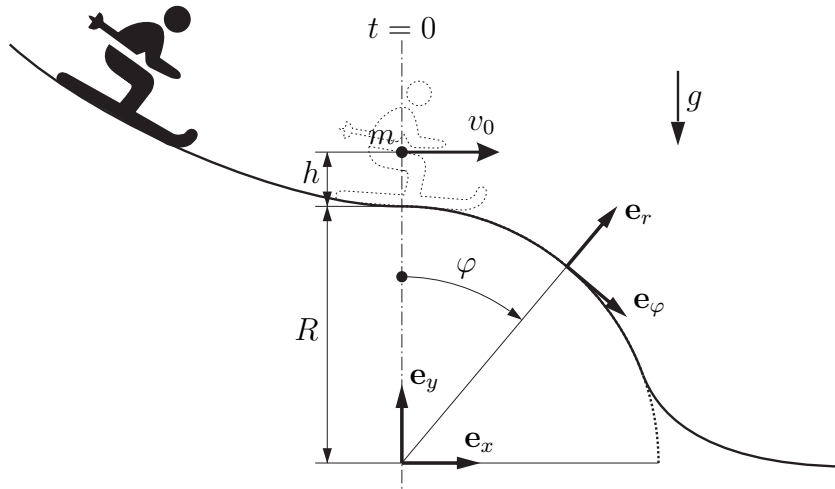


Abbildung 2: Skifahrer mit Kuppe.

- Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  des Polarkoordinatensystems und den Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  des kartesischen Koordinatensystems? 2 P.
- Geben Sie den Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  des Skifahrers in Polarkoordinaten in Komponentenschreibweise an. 1 P.
- Berechnen Sie aus dem Ortsvektor allgemein die Geschwindigkeit und die Beschleunigung und geben Sie diese ebenfalls in Polarkoordinaten an. Berücksichtigen Sie dabei einen zeitabhängigen Radius  $R'(t) = R + h(t)$ . 2 P.
- Wie lautet der Term der Zentripetalbeschleunigung? Welcher Term kann der Corioliskraft zugeordnet werden? 1 P.

Lösung:

a)

$$\mathbf{e}_r = \sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y$$

b)

$$\mathbf{r}(t) = (R + h(t)) \mathbf{e}_r = R' \mathbf{e}_r$$

c)

$$\mathbf{v}(t) = \dot{R}' \mathbf{e}_r + R' \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{R}' - R' \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (R' \ddot{\varphi} + 2\dot{R}' \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi$$

d) Zentripetalbeschleunigung:  $-R' \dot{\varphi}^2$

Term der Corioliskraft:  $2\dot{R}' \dot{\varphi}$

3. In diesem Beispiel wird eine Wasserstrahlpumpe betrachtet, welche aus 2 Rohren sowie einem Behälter besteht, siehe Abbildung 3. Im Rohr mit dem Querschnitt  $A$  befindet sich ein zweites Rohr mit dem Querschnitt  $(1 - n)A$ , das in einen großen Behälter eingetaucht ist. Durch das größere Rohr fließt Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $v_a$  am Querschnitt 2. Dieser Strom führt dazu, dass Flüssigkeit mit der selben Dichte  $\rho$  jedoch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit  $v_b$  über das innere Rohr aus dem Behälter angesaugt wird. Die Größe  $h$  definiert den Abstand zwischen der Oberfläche des Fluids im Behälter sowie der Symmetrieachse des großen Rohres und ist konstant. Bis zum Rohrende (Querschnitt 1) hat sich wieder ein homogenes Geschwindigkeitsprofil ausgebildet. Der Umgebungsdruck ist mit  $p_\infty$  gegeben und das Schwerfeld wird durch die Größe  $g$  repräsentiert. Das Problem kann als zweidimensional, stationär, reibungsfrei und inkompressibel angesehen werden und die Haltekraft am Rohr ist nicht zu berücksichtigen. 8 P.

Gegeben:  $A, n, h, \rho, p_\infty, g$

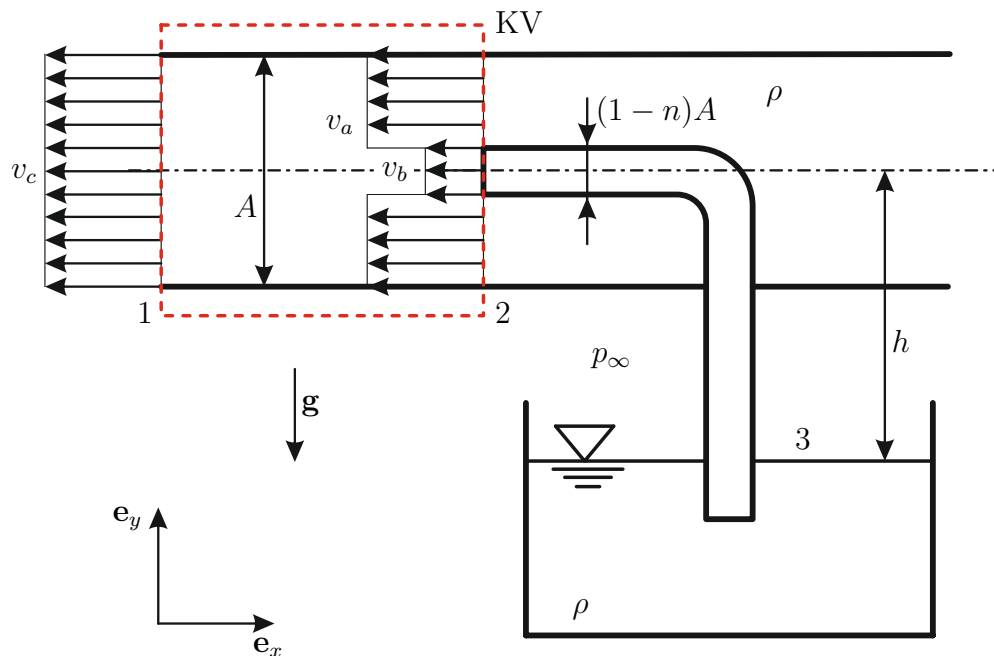


Abbildung 3: Wasserstrahlpumpe.

- Bestimmen Sie mittels der Massenbilanz die Geschwindigkeit  $v_c$  in Abhängigkeit der beiden Geschwindigkeiten  $v_a$  und  $v_b$ . 1 P.
- Geben Sie die stationäre Impulsbilanz für das eingezeichnete Kontrollvolumen KV an und berechnen Sie die Druckdifferenz  $p_\infty - p_2$  in Abhängigkeit der beiden Geschwindigkeiten  $v_a$  und  $v_b$ . 2 P.  
**Hinweis:** Am Querschnitt 1 herrscht Umgebungsdruck.
- Geben Sie die stationäre Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie von 3 nach 2 an und berechnen Sie die Druckdifferenz  $p_\infty - p_2$ . 2 P.
- Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der vorhergehenden Ergebnisse die Geschwindigkeit  $v_a$  in Abhängigkeit von  $v_b$ . Wählen Sie hierbei eine sinnvolle Lösung aus. Welchen Wertebereich darf der Parameter  $n$  annehmen und wie lautet die Lösung für den Fall  $v_b = 0$ . 3 P.  
**Hinweis:** Es soll  $v_a > v_b > 0$  gelten?

Lösung:

a) Die instationäre Massenerhaltung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho dV + \int_{\partial V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Für das vorliegende Problem lautet die stationäre Massenerhaltung wie folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= 0 \\ v_c A - v_a n A - v_b (1 - n) A &= 0 \\ v_c &= v_a n + v_b (1 - n). \end{aligned}$$

b) Instationäre Impulserhaltung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV + \int_{\partial V(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \sum \mathbf{f}.$$

Die stationäre Impulserhaltung für das vorliegende Problem lautet:

$$\int_{\partial V(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{F} + \mathbf{F}_f$$

Es wird nur die Impulsbilanz in  $y$ -Richtung benötigt, da das Problem reibungsfrei betrachtet wird und keine zusätzlichen Kräfte wirken, folgt für die Impulsbilanz

$$-\rho v_c^2 A + \rho v_a^2 n A + \rho v_b^2 (1 - n) A - p_\infty A + p_2 A = 0,$$

wobei man nach längerer Rechnung den folgenden Zusammenhang erhält

$$p_\infty - p_2 = \rho n (1 - n) (v_a - v_b)^2.$$

c) Die Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie 2 nach 3 lautet:

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh = \frac{u_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho}$$

Unter Berücksichtigung von  $u_2 = v_b$ ,  $u_3 = 0$  und  $p_3 = p_\infty$  lässt sich die obige Gleichung zu

$$p_\infty - p_2 = \rho \left( gh + \frac{1}{2} v_b^2 \right)$$

umformen.

d) Nun kann man die Geschwindigkeit  $v_a$  als Funktion von  $v_b$  berechnen und erhält

$$v_a = v_b \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{2} v_b^2 + gh}{n(1 - n)}}$$

Da  $v_a > v_b > 0$  sein soll, ist nur die Addition eine sinnvolle Lösung, wobei  $n > 0$  und  $n \neq 1$  sein muss um einen Nenner ungleich 0 zu gewährleisten, d.h.  $0 < n < 1$ . Für den Grenzfall  $v_b = 0$  gilt

$$v_a = \sqrt{\frac{gh}{n(1 - n)}}$$

4. Im folgenden Beispiel wird ein kleiner Ofen für die Härtung von Ton betrachtet, welcher aus einer dreischichtigen Wand sowie einem Heizelement besteht. In Abbildung 4 ist eine schematische Skizze des Problems dargestellt. Über eine Zuleitung kann kühler Stickstoff mit dem Massenstrom  $\dot{m}_1$  sowie der Temperatur  $T_1$  in den Ofen strömen. Über eine weitere Leitung strömt der Stickstoff mit dem Massenstrom  $\dot{m}_2$  und der Temperatur  $T_s$  aus dem Ofen. In der Mitte des Ofens sitzt ein kreisförmiges Heizelement, das die Temperatur  $T_h$ , die Emissivität  $\varepsilon_h$  und die Oberfläche  $A_h$  besitzt. Das Heizelement interagiert mit dem Stickstoff in Form von erzwungener Konvektion  $\alpha_e$  und mit der Wand in Form von Strahlung. Die unterschiedlichen Schichten der Wand sind durch die jeweilige Dicke  $d_i$ , die konstante Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_i$  sowie die spezifische Wärmekapazität  $c_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  definiert. Die Innenseite der Wand hat die Oberfläche  $A_w$  sowie die Emissivität  $\varepsilon_w$ . Zwischen der Wand und dem Stickstoff wird Wärme in Form von erzwungener Konvektion  $\alpha_e$  ausgetauscht. An der Außenseite der Wand kommt es zu einer freien Konvektion  $\alpha_f$  mit der Umgebungsluft, welche die Temperatur  $T_\infty$  hat.  
 Gegeben:  $d_1, d_2, d_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c_1, c_2, c_3, c_p, \dot{m}_1, \dot{m}_2, T_\infty, \alpha_e, \alpha_f, T_h, \varepsilon_h, A_h, \varepsilon_w, A_w$  9 P.]

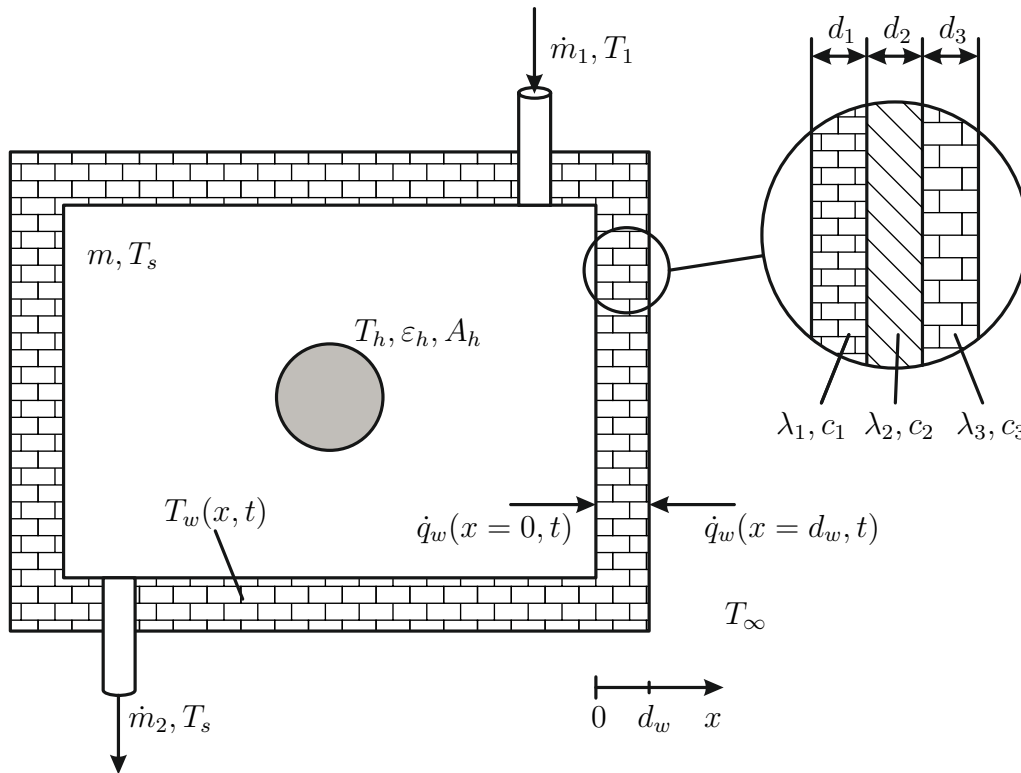


Abbildung 4: Schematik des Ofens.

- a) Bestimmen Sie alle relevanten Sichtfaktoren und die Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}^r = [\dot{q}_h^r, \dot{q}_w^r]^T$  zufolge der Strahlung. 3 P.]
- b) Bestimmen Sie die beiden Wärmestromdichten zufolge der erzwungenen Konvektion  $\dot{q}_e^c$  an der Innenseite der Wand sowie zufolge der freien Konvektion  $\dot{q}_f^c$  an der Außenseite der Wand. 1 P.]
- c) Geben Sie die Differentialgleichung für die Masse  $m(t)$  des Stickstoffs im Ofen an. 1 P.]
- d) Bestimmen Sie die Differentialgleichung für die Temperatur  $T_s(t)$  des Stick- 2 P.]



stoffs.

**Hinweis:** Hierzu verwenden Sie die Enthalpiebilanz, welche eine spezielle Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik darstellt,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{m}_i^{in} c_p T_i^{in} - \sum_{j=1}^M \dot{m}_j^{out} c_p T_j^{out} + \dot{Q}$$
$$H = mc_p T_s,$$

wobei  $\dot{m}_i^{in}$  der einströmende Massenstrom ist,  $T_i^{in}$  die entsprechende Temperatur des einströmenden Massenstroms sowie  $\dot{m}_i^{out}$  der ausströmende Massenstrom,  $T_i^{out}$  die entsprechende Temperatur des ausströmenden Massenstroms. Weiters bezeichnet  $\dot{Q}$  den Wärmestrom. Es gilt  $\dot{Q} = A\dot{q}$ , wobei  $A$  die entsprechende Oberfläche ist und  $\dot{q}$  ist die Wärmestromdichte.

- e) Geben Sie die Wärmeleitungsgleichung für die eindimensionale, ebene Wand 2 P. | an sowie die entsprechenden Randbedingungen.

Lösung:

- a) Das Heizelement sei der Körper 1 und die Wand der Körper 2. Aufstellen der Summationsregel

$$\begin{aligned} F_{11} + F_{12} &= 1 \\ F_{21} + F_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Da der Körper 1 ein konkaver Körper ist, ist der Sichtfaktor  $F_{11} = 0$  und somit folgt sofort  $F_{12} = 1$ . Mithilfe der Reziprozitätsregel  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$  kann man den Sichtfaktor  $F_{12}$  bestimmen und abschließend  $F_{22}$ . Den Vektor der Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}^r = [\dot{q}_h^r, \dot{q}_w^r]^T$  erhält man aus

$$\dot{\mathbf{q}}^r = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}\mathbf{F})^{-1}) \text{diag}\{\varepsilon\} \sigma \mathbf{T}^4,$$

wobei der Vektor  $\mathbf{T}^4$  wie folgt definiert ist  $\mathbf{T}^4 = [T_h^4, T_w^4]^T$

- b) Die beiden Wärmestromdichten zufolge der erzwungenen sowie der freien Konvektion lauten:

$$\begin{aligned} \dot{q}_e^c &= \alpha_e (T_s - T_w(x=0, t)) \\ \dot{q}_f^c &= \alpha_f (T_\infty - T_w(x=d_w, t)) \end{aligned}$$

- c) Differentialgleichung der Masse des Stickstoffs

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

- d) Differentialgleichung der Stickstofftemperatur

$$m c_p \frac{dT_s}{dt} = \dot{m}_1 c_p (T_\infty - T_s) + A_h \alpha_e (T_h - T_s) + A_h \alpha_e (T_w(x=0, t) - T_s)$$

- e) Wärmeleitungsgleichung der Wand sowie die entsprechenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \rho_w c_w \frac{\partial T_w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) \\ \dot{q}_w(x=0, t) &= -\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = \dot{q}_w^r + \dot{q}_e^c \\ \dot{q}_w(x=d, t) &= \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = \dot{q}_f^c \end{aligned}$$

- f) Ausgangspunkt ist die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left( \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \right)}_{=-\dot{q}_w}$$

und hieraus folgt, dass die Wärmestromdichte  $\dot{q}_w = \text{const}$  ist. Der Einfachheit halber führen wir die folgenden Abkürzungen ein  $T_w(x=0, t) = T_{w,0}$ ,

$T_w(x = d_1, t) = T_{w,1}$ ,  $T_w(x = d_2, t) = T_{w,2}$  und  $T_w(x = d_3, t) = T_{w,3}$ . Die folgende Gleichungskette ist aufgrund  $\dot{q}_w = \text{const}$  gültig

$$\begin{aligned}\dot{q}_w &= \alpha_e(T_s - T_{w,0}) = \frac{\lambda_1}{d_1}(T_{w,0} - T_{w,1}) = \frac{\lambda_2}{d_2}(T_{w,1} - T_{w,2}) \\ &= \frac{\lambda_3}{d_3}(T_{w,2} - T_{w,3}) = \alpha_f(T_{w,0} - T_\infty)\end{aligned}$$

Durch umformen der obigen Gleichungskette kann man den Wärmeübergangskoeffizienten  $k$  für die dreischichtige Wand bestimmen und dieser lautet

$$k = \frac{1}{\alpha_e + \sum_{i=1}^3 \frac{d_i}{\lambda_i} + \alpha_f}.$$