Beispiel 1: Fachwerke bezeichnen eine im Bauingenieurwesen oftmals verwendete Art von Tragwerken, welche die entstehenden statischen und dynamischen Kräfte durch an den Enden miteinander verbundene Stäbe aufnehmen. Ein zweidimensionales Fachwerk einer Auskragung ist aus lauter gleichseitigen Dreiecken aufgebaut, wie in Abb. 1 dargestellt. Das Fachwerk wird durch zwei externe Kräfte F_a und F_b belastet, welche aufgrund der Konstruktion eine Zugkraft F_w am oberen Montagepunkt auf die Wand ausüben.

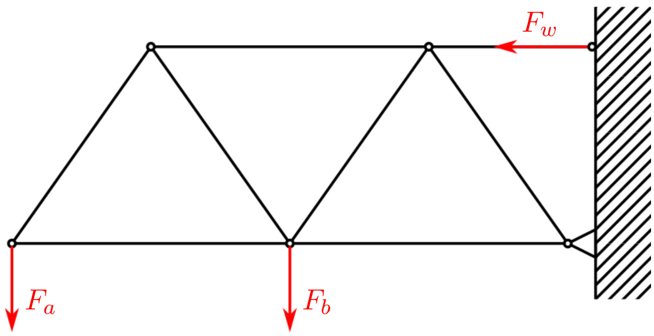

Abbildung 1: Fachwerk

a) Dieses Fachwerk ist statisch bestimmt, d.h. es besitzt keine Freiheitsgrade mehr. Stellen Sie die statischen Gleichgewichtsbedingungen auf.

b) Schreiben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem für die Stabkräfte in Matrixform und zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung existiert.

c) Geben Sie einen Ausdruck für die Kraft F_w als Funktion der Kräfte F_a und F_b an.

d) Wie groß sind die vertikalen und horizontalen Kräfte am unteren Montagepunkt?

Beispiel 2: Im Sportklettern wird häufig mobiles Sicherungsgerät benutzt, wenn beispielsweise keine fest installierten Sicherungsgeräte zur Verfügung stehen. Ein beliebtes, modernes Utensil ist der sogenannte "Friend" bzw. "Cam", welcher aufgrund von Haftreibung zwischen Gerät und Fels die Kräfte beim Sturz eines Kletterers auffangen kann. Die beiden Segmente (siehe Abb. 2) werden dabei durch die Last F selbst gegen den Stein gepresst, wodurch eine hohe Belastbarkeit erreicht wird.

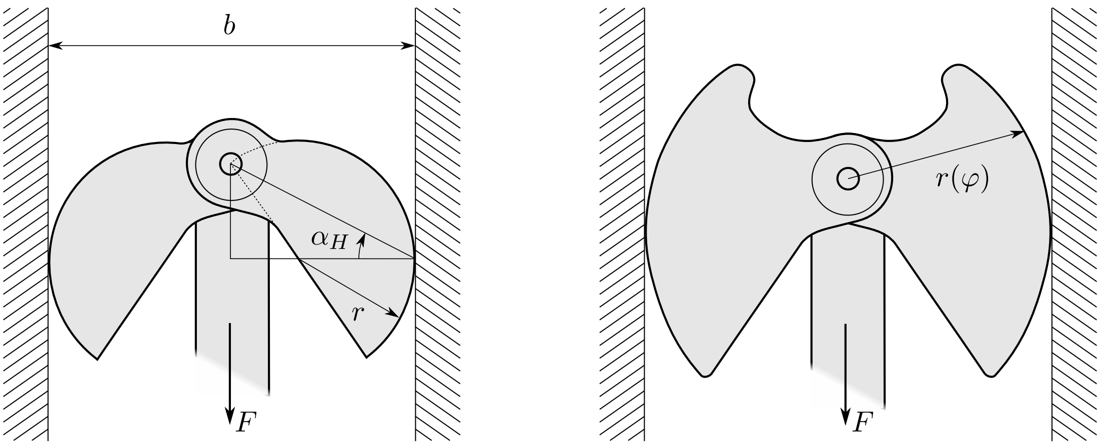

Abbildung 2: Zwei verschiedene Friends, welche in einer Felsspalte der Breite b haften. Die Variante im linken Bild besitzt kreisförmige Segmente, während rechts eine Bauform mit logarithmischen Segmenten dargestellt ist.

a) Skizzieren Sie die auftretenden Kräfte und bestimmen Sie die Haftbedingung des Friends für einen fest vorgegebenen Haltewinkel α_H.

b) Aufgrund der kreisförmigen Gestaltung der Segmente (siehe Abb. 2) ist der Haltewinkel von der Breite der Felsspalte abhängig. Schreiben Sie die Haftbedingung in der Form $\mu > f(\delta)$ mit $\delta = b/2r$ an und skizzieren Sie grob den Verlauf von $f(\delta)$ für sinnvolle Werte von δ. Zeichnen Sie weiters für ein bestimmtes μ die Menge der Spaltbreiten ein, für welche der Friend haftet.
Hinweis: Verwenden Sie den Zusammenhang

$$\tan\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right) = \tan\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)\right) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

c) Wie in Punkt a) berechnet, haftet der Friend nur für bestimmte Haltewinkel α_H. Zeigen Sie, dass für Segmente in Form logarithmischer Spiralen (siehe Abb. 2 rechts) der Haltewinkel unabhängig von der Spaltbreite ist.
Hinweis: Eine logarithmische Spirale in Polarkoordinaten hat die Form

$$r(\varphi) = r_0 \exp(k\varphi).$$

Beispiel 3: Abbildung 3 zeigt einen sogenannten Quadcopter. Dieser besteht aus einem Zylinder (Radius r_Z, Höhe h_Z, Masse m_Z) als Korpus, vier quaderförmigen Verbindungsstücken (Länge l_Q, Breite b_Q, Höhe h_Q, Masse m_Q) und vier Hohlzylindern (Außenradius r_2, Innenradius r_1, Höhe h_{HZ}, Masse m_{HZ}), in denen sich die identischen Propeller mit dem Radius r_P befinden. Die Quader setzen jeweils in der Mitte des Zylinders bzw. der Hohlzylinder an. Alle Elemente sind aus homogenen Materialien gefertigt.

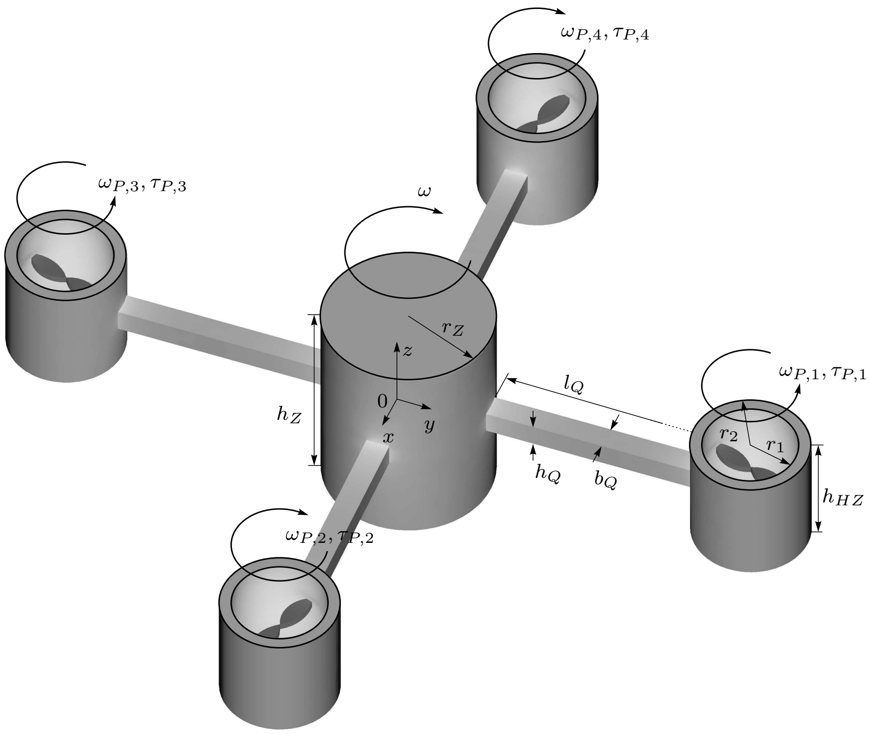

Abbildung 3: Skizze eines Quadcopters.

Die Leistung eines Propellers i ergibt sich zu

$$P_{P,i} = k_P \tau_{P,i} \omega_{P,i}$$

mit dem auftretenden Moment $\tau_{P,i}$, der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{P,i}$ sowie der Konstanten $k_P > 0$. Im folgenden soll ein einfaches mathematisches Modell hergeleitet werden. Bearbeiten sie hierfür folgende Punkte.

a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment $\theta_{zz}^{(0)}$ des Quadcopters um die z-Achse unter Vernachlässigung der Propeller.
Hinweis: Volumen eines Hohlzylinders $V_{HZ} = \pi h_{HZ} \left(r_2^2 - r_1^2 \right)$.

b) Im Folgenden wird angenommen, dass sich der Quadcopter in einer horizontalen Position befindet. Jeder Propeller i setzt hierbei die Leistung

$$P_{A,i} = F_{z,i} v_{h,i}$$

um, wobei $F_{z,i}$ den Schub in z-Richtung und $v_{h,i} = \sqrt{F_{z,i}/2\rho_0 A_L}$ die Luftgeschwindigkeit mit der Dichte der Luft ρ_0 und der durchströmten Fläche A_L bezeichnet. Berechnen Sie die Bewegungsgleichung in z-Richtung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit der Motoren $\omega_{P,i}$. Nehmen Sie hierfür an, dass sich der Schub in z-Richtung als lineare Funktion des Propellermoments $F_{z,i} = k_\tau \tau_{P,i}, k_\tau > 0$ ergibt und vernachlässigen Sie die Reibung.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeiten der Propeller $\omega_{P,i}$ auf. Berücksichtigen Sie hierfür die Reibung in einem fluiden Medium

$$\mathbf{f}_D = -c_w A_R \frac{\rho_0}{2} v^2 \mathbf{e}_v.$$

Hier bezeichnet c_w den Widerstandsbeiwert, A_R die Bezugsfläche und v die Geschwindigkeit, an der die Reibungskraft angreift. Nehmen Sie dafür an, dass die gesamte Reibungskraft an den Spitzen der Propeller wirkt.

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit ω des Quadcopters um die z-Achse in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit der Propeller $\omega_{P,i}$ und deren Änderungsrate $\dot{\omega}_{P,i}$ auf.
Hinweis: Das Schnittprinzip kann auch für Momente angewendet werden.

Beispiel 4: Im folgenden Beispiel wird eine Trommel mit dem Radius r und dem Massenträgheitsmoment Θ betrachtet, siehe Abb. 4. Die Trommel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und hat anfangs die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t=0)=\omega_0$. Der Drehwinkel der Trommel ist mit $\varphi(t)$ gegeben, wobei dieser am Anfang gleich Null ist. Die Trommel soll durch einen Bremshebel der Länge L zum Stillstand gebracht werden. Hierbei ist der Bremshebel an der Stelle $x=0$ drehbar gelagert. An der Stelle $x=L$ wirkt eine externe Kraft F und bei $x=l$ kommt es zu einem reibungsbehafteten Kontakt zwischen dem Hebel und der Trommel. Die Reibung an diesem Kontakt wird durch Gleitreibung mit dem Koeffizienten μ charakterisiert.

Gegeben: $l, L, \Theta, \omega_0, r, \mu, F, M_{ext}, c, d$

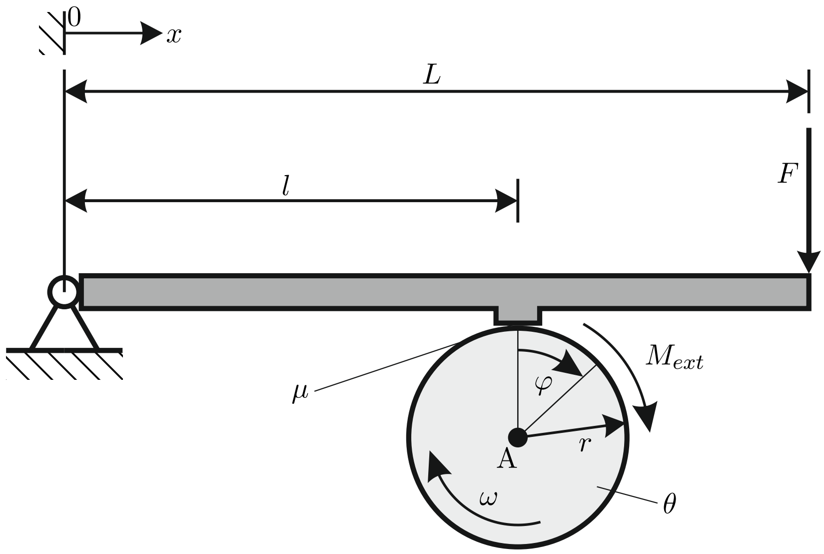

Abbildung 4: Trommel mit Bremshebel.

Für die Unterpunkte 1 bis 5 gilt, dass die Trommel reibungsfrei im Punkt A gelagert ist sowie dass das externe Moment M_{ext} gleich Null ist:

a) Schneiden Sie die Trommel und den Bremshebel frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. Bestimmen Sie die Normalkraft F_N zwischen dem Hebel und der Trommel sowie die Reibkraft F_R.

b) Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an sowie die entsprechenden Anfangsbedingungen.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie mittels der Lösung die Zeit t_s, den Drehwinkel φ_s sowie die Anzahl an Umdrehungen n_s bis zum Stillstand.

d) Wie lautet die kinetische Energie T_0 und T_E der Trommel im Anfangszustand sowie im Endzustand (Stillstand)?

e) Der Winkel φ_s bis zum Stillstand kann auch aus der Reibarbeit W berechnet werden. Die verrichtete Reibarbeit ergibt sich aus dem Arbeitssatz zu $W=T_E-T_0$. Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen n_s bis zum Stillstand aus der Reibarbeit.
Hinweis: Die Reibarbeit lautet $W=\int_0^{\varphi_s} M_R \mathrm{d}\varphi$, wobei M_R das Reibmoment definiert.

Für die Unterpunkte 6 bis 7 gilt, dass im Punkt A eine Drehfeder mit der Federkonstanten c und dem entspannten Winkel $\varphi = 0$, eine Dämpfung mit der Konstanten d sowie das externe Moment $M_{ext} \neq 0$ wirkt. Die Feder ist im Ruhezustand entspannt:

f) Welche zusätzlichen Momente wirken nun an der Trommel? Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an.

g) Schreiben Sie das resultierende Gleichungssystem in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung an und bestimmen Sie die Ruhelagen.

Beispiel 5: In Abb. 5 ist ein drehbar gelagerter Balken (Trägheitsmoment $\theta_{B,zz}^{(A)}$ um den Drehpunkt A, Länge l, Masse vernachlässigbar) abgebildet auf den das Moment τ wirkt. Im betrachteten ebenen Beispiel gleitet ein Würfel mit der Kantenlänge $2k$, dem Massenträgheitsmoment $\theta_{W,zz}^{(S)}$ um den Schwerpunkt S des Würfels und der Masse m reibungsfrei auf diesem Balken. Weiters greift eine parallel zum Balken wirkende Störkraft F_d am Schwerpunkt des Würfels an. Am rechten Ende des Balkens ist eine lineare Feder mit der Federkonstante c und der Nulllänge x_0 angebracht.

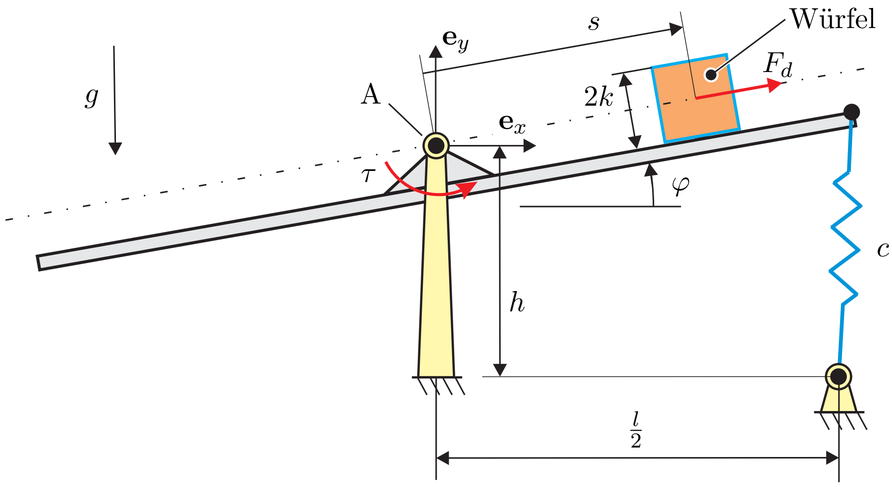

Abbildung 5: Drehbar gelagerter Balken mit gleitendem Würfel.

a) Leiten Sie die Winkelgeschwindigkeit und die translatorische Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Würfels in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\varphi & s\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und deren zeitlicher Ableitungen her.

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ und deren zeitlicher Ableitungen.

c) Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems. Nehmen Sie dazu an, dass die potentielle Energie für $\varphi = 0$ verschwindet.

d) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion an.

e) Leiten Sie mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems her.

Beispiel 6: In Abbildung 6 sind zwei Pendel (Länge L_1, Masse m_1) starr mit Hilfe eines Querstabes (Länge L_2, Masse m_2) miteinander gekoppelt. Die Pendel sind durch eine lineare Drehfeder (Federkonstante c_1, entspannte Lage für $\varphi = 0$) mit dem Querstab verbunden. Über eine masselose Stange der Länge l wird auf eine Punktmasse m_K mittels eines Elektormotors (Masse m_M, fix im Schwerpunkt des Querstabes befestigt) ein externes Drehmoment τ aufgebracht. Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibungsmomente in den Aufhängepunkten (horizontaler Abstand L_2) durch drehwinkelgeschwindigkeitsproportionale Drehdämpfer (Dämpferkonstante d_1) ausgedrückt werden können.
Hinweis: Das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes (Masse m, Länge l), der um eine Querachse durch den Schwerpunkt rotiert, kann näherungsweise mit $\frac{1}{12}ml^2$ angenommen werden.

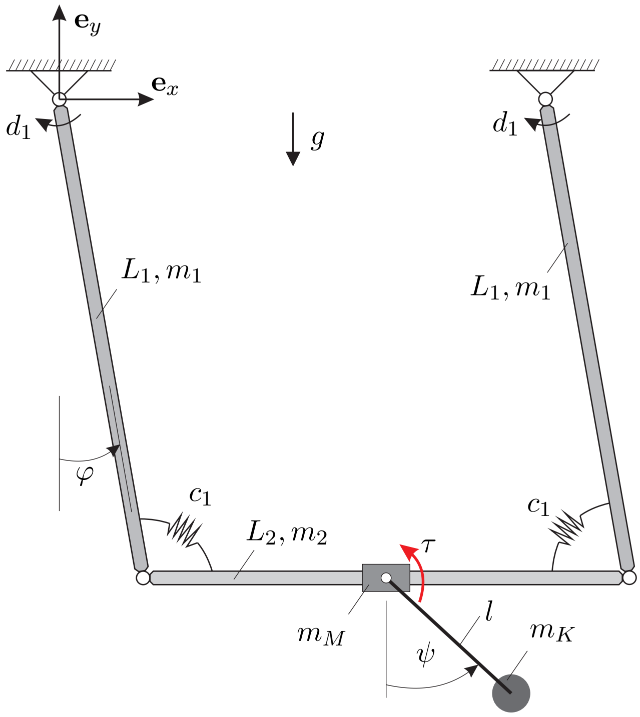

Abbildung 6: Starr gekoppelte Pendel.

a) Wählen Sie einen geeigneten Vektor der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ und stellen Sie die Ortsvektoren $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_K$ vom Ursprung des Koordinatensystems zu den Schwerpunkten des Querstabes und der Punktmasse.

b) Bestimmen Sie die translatorische Geschwindigkeit der Punktmasse m_K.

c) Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ und deren Zeitableitung $\dot{\mathbf{q}}$.

d) Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ derart, dass $V(\mathbf{0}) = 0$ gilt.

e) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus her.