

Beispiel 1: Ein halbkugelförmiger Strahler (Durchmesser d , Temperatur T_2 , Emissivität ε_2) heizt eine ebene Scheibe (Durchmesser D , Dicke H , Emissivität ε_1 , Wärmeleitfähigkeit λ_1) auf, siehe Abb. 1. Der Wärmeaustausch durch Konvektion wird hierbei vernachlässigt. Die Temperatur der Unterseite der Scheibe ist konstant und entspricht der Umgebungstemperatur T_∞ . Die Außenfläche des Strahlers und die Mantelfläche der Scheibe sind ideal isoliert.

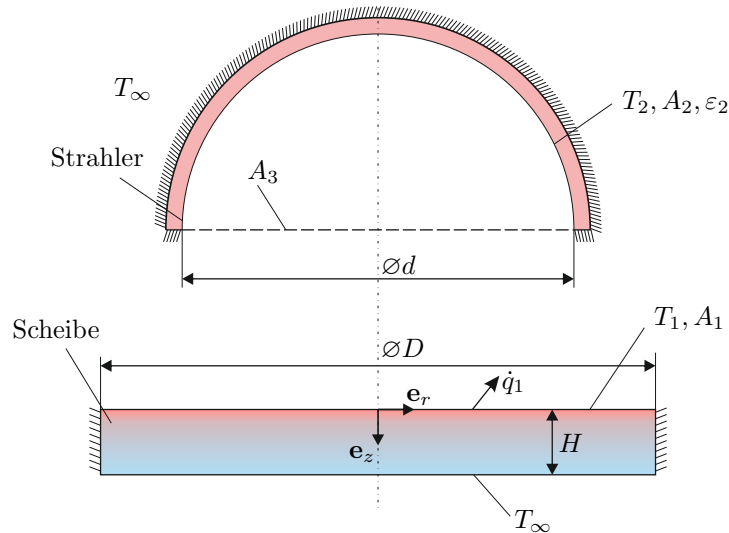


Abbildung 1: Aufheizen einer Scheibe.

- a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren F_{12} , F_{21} , F_{22} und F_{23} . Der Sichtfaktor F_{13} zwischen der Scheibe und der imaginären Fläche A_3 ist bekannt. Geben Sie zuerst den Sichtfaktor F_{32} an.

Hinweis: Nutzen Sie hierbei die Summationsregel für die Strahlungsräume bestehend aus A_1 , A_3 und der Umgebung sowie A_2 und A_3 . Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R beträgt $4\pi R^2$.

- b) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Nettowärmestromdichten

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4$$

her. Gehen Sie von der Nettowärmestromdichte die die Oberfläche A_i verlässt, d.h., $\dot{q}_i = \varepsilon_i(\sigma T_i^4 - G_i)$ aus, wobei die auf die Fläche A_j auftreffende Strahlungsenergie sich zu $G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji}(\varepsilon_i\sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i)G_i)$ errechnet.

- c) Schreiben Sie die Wärmeleitgleichung mit den Randbedingungen für die Scheibe unter der Annahme einer homogenen Temperaturverteilung in radialer und axialer Richtung sowie bekannter Wärmestromdichte \dot{q}_1 an. Bestimmen Sie das stationäre Temperaturprofil der Scheibe in z -Richtung und die Oberflächentemperatur T_1 für $\lambda_1(z) = \exp(-z)$.

Beispiel 2: In Abb. 2a ist ein handelsüblicher Kugelgriller dargestellt. Dabei wird das kugelförmige Grillgut mit Durchmesser d_1 , Emissivität ε_1 und Masse m_1 innerhalb des kugelförmigen Grillers (Durchmesser d_2 und Emissivität ε_2) erhitzt. Der Einfluss des Grillrosts kann für die Berechnungen vernachlässigt werden.

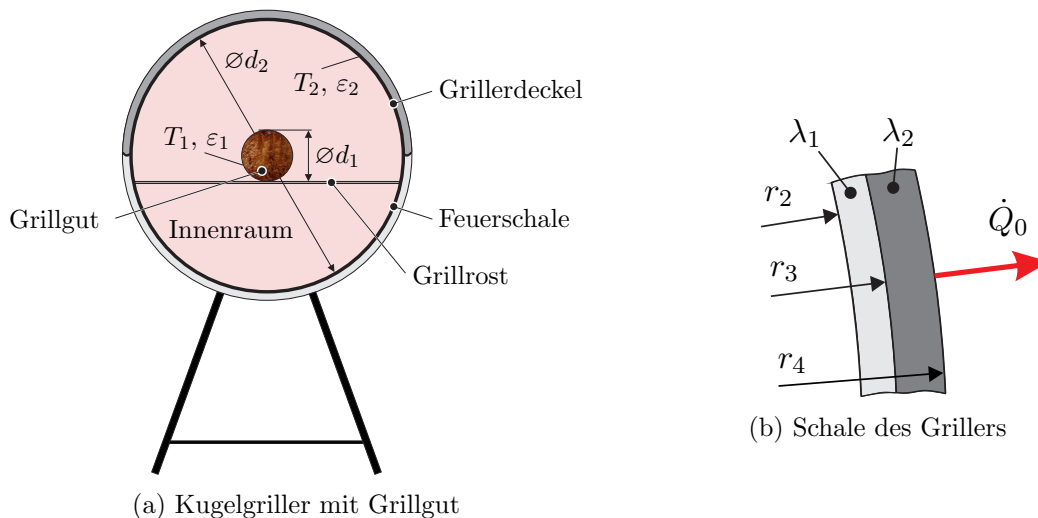


Abbildung 2: Kugelgriller.

- a) Leiten Sie die Sichtfaktoren für den Innenraum des Grillers, d.h. für dessen Schale und das Grillgut her. Dabei können der Grilldeckel und die Feuerschale als eine homogene Schale betrachtet werden.

Hinweis: Berücksichtigen Sie dabei geschickt die Eigenschaften der Sichtfaktoren im hier betrachteten radialsymmetrischen Fall.

- b) Berechnen Sie die aus dem Grillgut austretende Nettowärmestromdichte. Durch die spezielle Beschichtung der Innenwand des Grillers gilt $\varepsilon_2 = 1$ und vernachlässigen Sie weiters die Konvektion.

Hinweis: Die Nettowärmestromdichten können mit der Formel

$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4$ berechnet werden.

- c) Leiten Sie die Differentialgleichung der Grillguttemperatur T_1 mithilfe der kalorischen Energiebilanz $\frac{de_i}{dt} = c_p \frac{dT_1}{dt}$, wobei e_i die spezifische innere Energie und c_p die spezifische Wärmekapazität bezeichnet, her.

- d) Betrachten Sie die in Abb. 2b dargestellte, kugelförmige Schale des Grillers. Diese besteht aus zwei unterschiedlichen Werkstoffen mit den Wärmeleitfähigkeiten λ_1 und λ_2 . Ermitteln Sie den stationären Temperaturverlauf $T(r)$ für einen konstanten Wärmestrom \dot{Q}_0 in radialer Richtung für $T(r_2) = T_2$.

Hinweis: Unter der Annahme radialsymmetrischer Verhältnisse folgt die Wärmeleitgleichung zu $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right)$.

Beispiel 3: Bei der Modellierung eines mit Schamott ausgekleideten Glühofens soll die zeitliche Dynamik der Verkleidung berücksichtigt werden. Der in Fig. 3 dargestellte Längsschnitt des Ofens mit quadratischem Querschnitt zeigt ein durch einen nicht näher untersuchten Prozess aufgeheiztes Medium, welches auf die Verkleidung strahlt. Zur Vereinfachung wird lediglich ein Wandsegment untersucht, welches die Form eines Pyramidenstumpfes hat. Um den Rechenaufwand gering zu

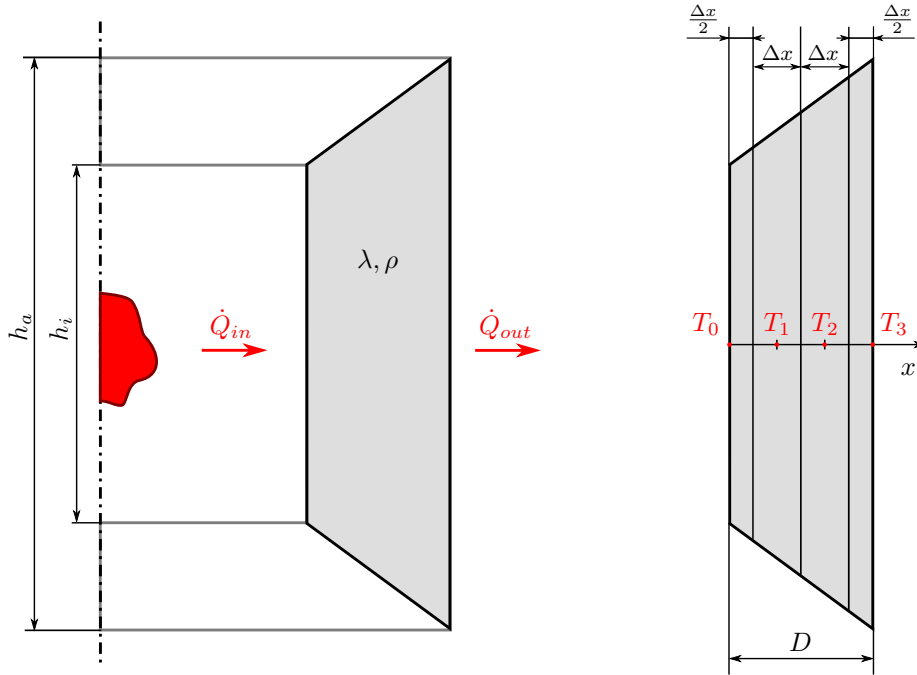


Abbildung 3: Ofen mit Schamottverkleidung. Links: Längsschnitt des Ofens mit betrachtetem Wandsegment (grau) und Wärmeffüssen. Rechts: Wandsegment mit vier diskreten Volumina.

halten, wird ein eindimensionales Modell des Segments verwendet, wobei sowohl die Temperatur T als auch der lokale Wärmefluss \dot{q} lediglich von x abhängen. Die Seitenflächen des Segments werden als adiabatisch isoliert betrachtet. Dies führt auf die partielle Differentialgleichung

$$\rho c_p A(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

wobei $A(x)$ die Querschnittsfläche des Segments bezeichnet.

- Leiten Sie (1) unter den getroffenen Annahmen aus der Energieerhaltung her. Erklären Sie weiters, warum die Annahme einer adiabatischen Isoliertheit der Seitenflächen näherungsweise gerechtfertigt ist.
- Die partielle Differentialgleichung (1) soll durch ein einfacheres konzentriert-parametrisches Modell approximiert werden. Dazu wird das Wandsegment in vier Teilvolumina (siehe Fig. 3 rechts) mit $\Delta x = \frac{D}{3}$ zerlegt, in welchen die Temperatur konstant angenommen wird. Leiten Sie aus der Energieerhaltung der Teilvolumen die Differentialgleichungen für die Temperaturen T_i mit $i = 1, 2, 3, 4$ her. Approximieren Sie die Ortsableitungen der Temperatur durch geeignete finite Differenzen.
- Zeichnen Sie die erhaltene Approximation als RC-Ersatzschaltbild. Welche Bedingung müssen die Wärmeströme \dot{Q}_{in} und \dot{Q}_{out} stationär erfüllen?
- Schreiben Sie die Differentialgleichungen in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ mit geeignetem \mathbf{x} und \mathbf{u} .

Beispiel 4: In dieser Aufgabe soll das Aufschmelzen eines thermoplastischen Polymers ausgehend von der Raumtemperatur T_∞ betrachtet werden. Abb. 4a zeigt den Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur. Um den Kunststoff im Inneren zu schmelzen, führen Heizmatten auf der Außenseite eines Hohlzylinders aus Stahl der Länge L konstant die Leistung P zu. Bei der sogenannten Glasübergangstemperatur wird die kristalline Struktur des Polymers in eine flüssige Schmelze gewandelt. Die dafür benötigte Energie kann ersatzweise durch eine von der Kunststofftemperatur T_p abhängige spezifische Wärmekapazität $c_{p,p} = c_{p,p}(T_p)$ beschrieben werden, siehe Abb. 4b.

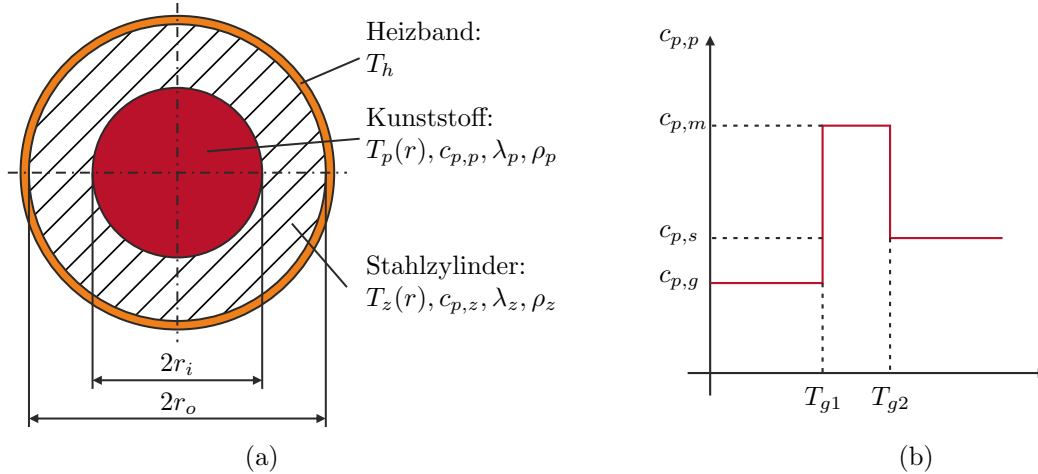


Abbildung 4: Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur (a) und Verlauf der spezifischen Wärmekapazität $c_{p,p}$ des Polymers (b).

Die Heizbänder sollen mit homogener Temperaturverteilung T_h und vernachlässigbarer Dicke modelliert werden. Durch freie Konvektion kommt es zum Energieaustausch mit der Umgebung. Diese kann ebenso wie der Wärmeübergang vom Heizband auf den Massezylinder und der Übergang vom Zylinder auf den Kunststoff durch Randbedingungen dritter Art der Form $\dot{q}_i = \alpha_i \Delta T_i$, $i \in \{\infty, hz, zp\}$ mit konstanten Wärmeübergangskoeffizienten α_i beschrieben werden.

- Stellen Sie das gekoppelte System partieller Differentialgleichungen inklusive Anfangs- und Randbedingungen des vorliegenden Wärmeleitproblems mit dem Systemeingang P auf. Die Wärmeleitung in axialer Richtung kann dabei vernachlässigt werden.

Hinweis: Berechnen Sie die Heizbandtemperatur T_h als Funktion der Leistung P , der Raumtemperatur T_∞ und des Wärmestroms \dot{q}_{hz} .

Vernachlässigen Sie für die folgenden Aufgaben die Wärmekapazität des Metallzylinders und nähern Sie den Kunststoff als konzentrierte Masse mit homogener Temperatur T_p an.

- Geben Sie ein RC-Ersatzschaltbild des Wärmeleitproblems der vorigen Aufgabe an und bestimmen Sie alle auftretenden Ersatzgrößen inklusive deren Einheiten.
- Bestimmen Sie den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur T_p in einem Bereich mit konstanter spezifischer Wärmekapazität $c_{p,p} = \text{konst.}$ ausgehend von T_∞ .
- Skizzieren Sie qualitativ den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur T_p bis zum Erreichen der Flüssigphase des Polymers. Unterteilen Sie dafür den Aufschmelzvorgang in drei Phasen: Aufheizen bis T_{g1} , Aufschmelzen bis T_{g2} sowie das Erwärmen auf die Endtemperatur $T_p(t_e) = T_e > T_{g2}$.

Beispiel 5: Die eindimensionale Wärmeleitgleichung mit Reaktionsterm

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha T \quad (2a)$$

ist definiert auf dem Gebiet $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+$. Für allgemeine Anfang- und Randbedingungen

$$T(x, 0) = \bar{T}_0(x) \quad (2b)$$

$$T(0, t) = \bar{T}_1(t) \quad (2c)$$

$$T(1, t) = \bar{T}_2(t) \quad (2d)$$

soll eine numerische Lösung mithilfe der Finiten-Differenzen-Methode berechnet werden. Dazu wird das äquidistante Gitter $(i\Delta x, n\Delta t)$ mit $i = 0, \dots, N$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ eingeführt. Ein verbreitetes numerisches Verfahren zur Lösung parabolischer partieller Differentialgleichungen stellt das Crank-Nicolson-Verfahren dar. Dabei wird allgemein die nichtlineare Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

mit der Funktion f durch das implizite Differenzenschema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(f_i^{n+1} + f_i^n)$$

approximiert, wobei die Abkürzungen $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$ und $f_i^n = f\left(u_i^n, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(i\Delta x, n\Delta t)\right)$ verwendet wurden. Die Ortsableitung in f muss dabei durch eine geeignete Methode approximiert werden.

- a) Formulieren Sie das Differenzenschema des Crank-Nicolson-Verfahrens für die Wärmeleitgleichung (2a) an einem allgemeinen Punkt im Inneren des Definitionsgebiets. Verwenden Sie dabei den zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der zweiten örtlichen Ableitung.
- b) Unter Verwendung der dirichletschen Randbedingungen soll das Crank-Nicolson-Verfahren als System von Differenzengleichungen in Matrixform

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{T}^n)$$

mit dem Vektor $\mathbf{T}^n = [T_1^n, \dots, T_{N-1}^n]$ dargestellt werden. Geben Sie auch die notwendige Anfangsbedingung an.

- c) Angenommen, die Randbedingung für $x = 0$ wird durch eine neumannsche Randbedingung der Form

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \bar{T}_3(t)$$

ersetzt. Was verändert sich im Vergleich zum vorigen Unterpunkt? Schreiben Sie das Crank-Nicolson-Verfahren in Matrixform an.

- d) Lösen Sie das Anfangswert-Randwert-Problem (2) in numerischer Software wie beispielsweise MATLAB oder Octave.