Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

Formelsammlung zum Skriptum Modellbildung

Kapitel 2

Polarkoordinaten:

$$x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$$

Kugelkoordinaten:

$$x(t) = r(t)\sin(\theta(t))\cos(\varphi(t)), \quad y(t) = r(t)\sin(\theta(t))\sin(\varphi(t)), \quad z(t) = r(t)\cos(\theta(t))$$

Resultierende Kraft in einem zentralen Kräftesystem:

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i$$

Drehmoment:

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yf_z - zf_y \\ zf_x - xf_z \\ xf_y - yf_x \end{bmatrix}$$

Resultierendes Moment bezüglich des Punktes A:

$$\boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i^{(A)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tau_{i,x}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,x}^{(A)}} \mathbf{e}_x + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tau_{i,y}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,y}^{(A)}} \mathbf{e}_y + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tau_{i,z}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,z}^{(A)}} \mathbf{e}_z$$

Masse eines Starrkörpers:

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Schwerpunkt eines Körpers:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{\int\limits_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r}\rho_1(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathcal{V}_1 + \ldots + \int\limits_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r}\rho_j(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathcal{V}_j + \ldots + \int\limits_{\mathcal{V}_N} \mathbf{r}\rho_N(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathcal{V}_N}{m} \\ &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{r}_{Sj} m_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j} \end{aligned}$$

Impulserhaltung einer Punktmasse:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f}$$

Translatorische kinetische Energie eines Starrkörpers:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_S^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{r}}_S$$

Potentielle Energie:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} \qquad \text{mit} \quad V(\mathbf{r}_I) = 0$$

Dissipative Kräfte

Körper in Fluid:	$f_D \mathbf{e}_v = -c_W A \frac{\rho_f}{2} v^2 \mathbf{e}_v$	Widerstandsbeiwert $c_W > 0$
Haftreibung:	$f_H = \mu_H f_N$	Haftreibungskoeffizient $\mu_H > 0$
Trockene Gleitreibung:	$f_C = \mu_C f_N \operatorname{sign}(\dot{x})$	Gleitreibungskoeffizient $\mu_C > 0$
Rollwiderstand:	$f_R = \mu_R f_V$	Rollreibungskoeffizient $\mu_R > 0$
Viskose Reibung:	$f_r = \mu_V \Delta v$	viskoser Reibungskoeffizient $\mu_V > 0$
Seilreibung:	$f_{S2} = f_{S1} \exp(\mu\alpha)$	Haftreibungskoeffizient $\mu = \mu_H > 0$

Impulserhaltung für Körper mit veränderlicher Masse:

$$m(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \mu \mathbf{w}(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m = -\mu$$

Drehimpulserhaltung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{l}^{(0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}^{(0)}$$

Rotatorische kinetische Energie eines Starrkörpers:

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{zz} \dot{\varphi}^2$$

Massenträgheitsmoment

Für Drehungen um den Schwerpunkt S in der $\mathbf{e}_z$-Achse:

$$\theta_{zz}^{(S)} = \int_{\mathcal{V}} \left(r^{(S)}\right)^2 \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \left(\left(x^{(S)}\right)^2 + \left(y^{(S)}\right)^2 \right) \mathrm{d}m$$

Verschiebung in einen allgemeinen Aufpunkt A (Satz von Steiner):

$$\theta_{zz}^{(A)} = \theta_{zz}^{(S)} + m \left(\left(x_S^{(A)}\right)^2 + \left(y_S^{(A)}\right)^2 \right)$$

Kapitel 3

Wärmestromdichte:

$$\dot{\mathbf{q}}(t,\mathbf{x}) = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x},T)\cdot\nabla T(t,\mathbf{x})$$

Fouriersche Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho c_p(\mathbf{x},T)\frac{\partial T(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \nabla\cdot\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x},T)\nabla T(t,\mathbf{x})\right) + g(t,\mathbf{x},T)$$

Fouriersche Wärmeleitungsgleichung für ein isotropes, homogenes Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit λ in

- kartesischen Koordinaten:

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + g(t,x,y,z,T)$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + g(t,r,\varphi,z,T)$$

- Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} =& \lambda\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right)+\\ & g(t,r,\theta,\varphi,T)\end{aligned}$$

Dimensionslose Kennzahlen:

Kennzahl	Formel	Grenzschichtdicke lam.	Grenzschichtdicke turb.
Reynolds-Zahl	$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$	$\delta_u(x) = 5\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\delta_u(x) = 0.37\mathrm{Re}_x^{1/5}$
Prandtl-Zahl	$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$	$\delta_u(x) = \delta_T(x)\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$	$\delta_u(x) = \delta_T(x)$
Nußelt-Zahl	$\mathrm{Nu}_x = \dot{q}_x\frac{x}{(T_P-T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha_x x}{\lambda}$		

Gemittelte Wärmestromdichte:

$$\dot{q} = \frac{1}{L}\int_0^L \dot{q}_x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha_x\,\mathrm{d}x(T_P-T_\infty) = \alpha(T_P-T_\infty)$$

Mittlere Nußelt-Zahl:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nu} &= \dot{q}\frac{L}{(T_P-T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha L}{\lambda}\\ &= \begin{cases}2\sqrt{\mathrm{Re}_L}\varphi(\mathrm{Pr}) & \text{wenn } L\le x_c\\ 2\sqrt{\mathrm{Re}_c}\varphi(\mathrm{Pr}) + 0.0370\left(\mathrm{Re}_L^{4/5}-\mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\sqrt[3]{\mathrm{Pr}} & \text{sonst}\end{cases}\\ &= \begin{cases}2\mathrm{Nu}_{lam,L} & \text{wenn } L\le x_c\\ 2\mathrm{Nu}_{lam,x_c}+\frac{5}{4}(\mathrm{Nu}_{tur,L}-\mathrm{Nu}_{tur,x_c}) & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

Spektrale Strahlung eines schwarzen Körpers:

$$E_{\lambda,b}(\lambda,T) = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1\right)}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda = \frac{0.002897768\ m\ K}{T}$$

Emissions- und Absorptionsvermögen:

Spektrale Emissivität	$\varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \frac{E_\lambda(\lambda,T)}{E_{\lambda,b}(\lambda,T)} \in [0,1]$
Spektraler Absorptionsgrad	$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0,1]$
Spektraler Reflexionsgrad	$\rho_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,r}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0,1]$
Spektraler Transmissionsgrad	$\tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0,1]$

Totale Ausstrahlung:

$$E(T) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda,T) E_{\lambda,b}(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda$$

Für einen schwarzen Strahler (Stefan-Boltzmann Gesetz):

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1\right)}\,\mathrm{d}\lambda = \sigma T^4$$

Definition des Sichtfaktors:

$$F_{ij} = \frac{J_{ji}}{A_i J_i} = \frac{1}{A_i}\int_{A_i}\int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i)\cos(\theta_j)}{s_{ij}^2 \pi}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_j\,\mathrm{d}\mathcal{A}_i$$

Reziprozitätsgesetz der Sichtfaktoren:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

Summationsregel der Sichtfaktoren:

$$1 = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,N\}$$

Von einer Oberfläche austretende Nettowärmestromdichte:

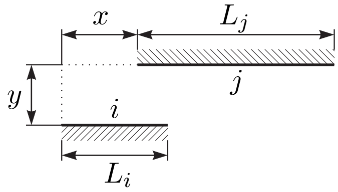
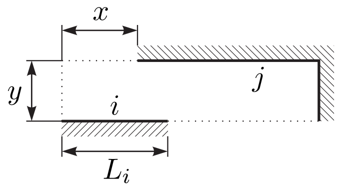
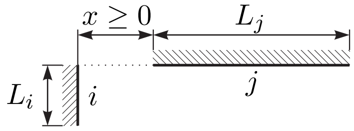
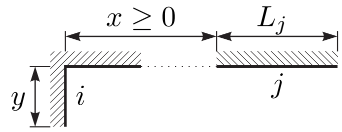
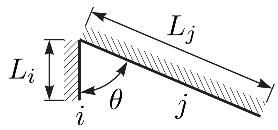
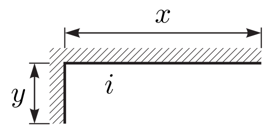
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E}-\mathbf{F})(\mathbf{E}-(\mathbf{E}-\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1}\,\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\sigma\mathbf{T}^4 \\ &= \mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}(\mathbf{E}-\mathbf{F}(\mathbf{E}-\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4\end{aligned}$$

mit $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]_{i=1,\ldots,N}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]_{i=1,\ldots,N}$, $\mathbf{T}^4 = [T_i^4]_{i=1,\ldots,N}$, $\mathbf{G} = [G_i]_{i=1,\ldots,N}$ und $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=1,\ldots,N,j=1,\ldots,N}$

Sichtfaktoren von zwei-dimensionalen Strukturen:

$$F_{ij} = \frac{1}{a_i}\int_{a_i}\int_{a_j}\frac{\cos(\theta_i)\cos(\theta_j)}{2 s_{ij}}\,\mathrm{d}a_j\,\mathrm{d}a_i = \frac{1}{2a_i}\int_{a_i}\sin(\theta_{i,1}) - \sin(\theta_{i,0})\,\mathrm{d}a_i.$$

Einige Beispiele sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet:

$F_{ij} = \frac{1}{2L_i}\Big(\sqrt{y^2+(x+L_j)^2} + \sqrt{y^2+(x-L_i)^2} - \sqrt{y^2+(x+L_j-L_i)^2} - \sqrt{y^2+x^2}\Big)$	
$F_{ij} = \frac{1}{2L_i}\Big(L_i + \sqrt{y^2+(x-L_i)^2} - \sqrt{y^2+x^2}\Big)$	
$F_{ij} = \frac{1}{2L_i}\Big(L_j + \sqrt{y^2+x^2} - \sqrt{y^2+(x+L_j)^2}\Big)$	
$F_{ij} = \frac{1}{2L_i}\Big(L_i + L_j - \sqrt{L_i^2 + L_j^2 - 2L_iL_j\cos(\theta)}\Big)$	
$F_{ii} = 1 - \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{y+x}$	

Stationäres Temperaturprofil in einer ebenen Wand:

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0)\frac{\int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})}\,\mathrm{d}\tilde{x}}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})}\,\mathrm{d}\tilde{x}}$$

Stationäre Wärmestromdichte in einer mehrschichtigen, ebenen Wand:

$$\dot{q} = k(T_{\infty,0} - T_{\infty,L}) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{N}\frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_L}}$$

Stationäre Wärmestromdichte in einer mehrschichtigen, zylinderförmigen Wand:

$$\dot{q}(r) = (T_F - T_\infty)\underbrace{\frac{1}{r}\frac{1}{\frac{1}{r_0\alpha_0} + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i}\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N\alpha_N}}}_{=k(r)}$$

Vom Radius unabhängiger, auf die Rohrlänge bezogener Wärmestrom:

$$\dot{q}^\circ = (T_F - T_\infty)\underbrace{\frac{2\pi}{\frac{1}{r_0\alpha_0} + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i}\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N\alpha_N}}}_{=k^\circ}$$

Stationärer Temperaturverlauf eines Wärmetauschers:

$$T_h(x) = T_{h,1} + \frac{c_{p,c}\dot{m}_c(T_{c,1} - T_{h,1})}{c_{p,h}\dot{m}_h + c_{p,c}\dot{m}_c}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c}\right)K(x)\right)\right)$$
$$T_c(x) = T_{c,1} + \frac{c_{p,h}\dot{m}_h(T_{h,1} - T_{c,1})}{c_{p,h}\dot{m}_h + c_{p,c}\dot{m}_c}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c}\right)K(x)\right)\right)$$

Gesamtwärmestrom des Wärmetausers:

$$\dot{Q} = \dot{m}_h c_{p,h}(T_{h,1} - T_{h,2}) = \dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,2} - T_{c,1}) = K(L)\Delta T_{\log}$$

mit

$$\Delta T_{\log} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

Differenzenquotienten für gleichförmige Schrittweiten:

1. Ableitung, Vorwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, Rückwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, zentrale Differenz	$y'(x) = \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$
2. Ableitung, zentrale Differenz	$y''(x) = \frac{y(x-\Delta x) - 2y(x) + y(x+\Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

Finite Differenzen Methode für 1-dimensionales Wärmeleitproblem:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t a}{\Delta x^2}(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \qquad j \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$T_0^{j+1} = T_0^j + \frac{2\Delta t a}{\Delta x^2}(T_1^j - T_0^j) \qquad j \geq 0$$

mit den Anfangswerten

$$T_i^0 = T_A(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

Analogie zwischen elektrischen und thermischen Netzwerken:

Elektrische Größe	Einheit	**Thermische Größe**	Variable	Einheit
Potentialdifferenz	V	Temperaturdifferenz	T	K
Elektrischer Strom	A	Wärmestrom	$\dot{Q}$	W
Elektrische Ladung	C	Enthalpie	H	J
Elektrischer Widerstand	Ω	Thermischer Widerstand	R	K/W
Elektrische Kapazität	F	Thermische Kapazität	C	J/K

Thermischer Widerstand:

$$\Delta T = R\dot{Q}$$

Thermische Kapazität:

$$\dot{T} = \frac{\dot{Q}}{C}$$

Cauer Modell des 1-dimensionalen Wärmeleitproblems:

$$\underbrace{\Delta x A \rho c_p}_{=C_i} \dot{T}_i(t) = \underbrace{A\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} (T_{i-1}(t) - T_i(t)) + \underbrace{A\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i,i+1}}} (T_{i+1}(t) - T_i(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\underbrace{\frac{\Delta x}{2} A \rho c_p}_{=C_0} \dot{T}_0(t) = \underbrace{A\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{0,1}}} (T_1(t) - T_0(t))$$

Konstanten:

Konstante	Wert
Plancksche Konstante	$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Boltzmann Konstante	$k = 1.381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma = \frac{2}{15}\frac{\pi^5 k^4}{c_0^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,K^4/m}$

Parameter von Luft bei Normzustand:

Parameter	Variable	Wert
spez. Wärmekapazität	c_ν	0.718 kJ/(kg K)
spez. Wärmekapazität	c_p	1.005 kJ/(kg K)
spezifische Gaskonstante	$R_s = c_p - c_\nu$	287 J/(kg K)
Adiabatenexponent	$\kappa = \frac{c_p}{c_\nu}$	1.4
Dichte	ρ_0	1.292 kg/m^3
Druck	p_0	101325 Pa
Temperatur	T_0	293.15 K