

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 11.03.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	4	8	9	9	30
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Gegeben ist das in Abbildung 1 dargestellte Experiment zur Bestimmung eines Reibmodells. Dazu wurde mit einer externen Kraft  $f_e$  die Masse  $m$  für verschiedene konstante Geschwindigkeiten  $\dot{x}$  über die Oberfläche bewegt. Die erforderliche externe Antriebskraft  $f_e$  in Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  ist in einer Messkurve (Abbildung 1b.)) dargestellt. 4 P.

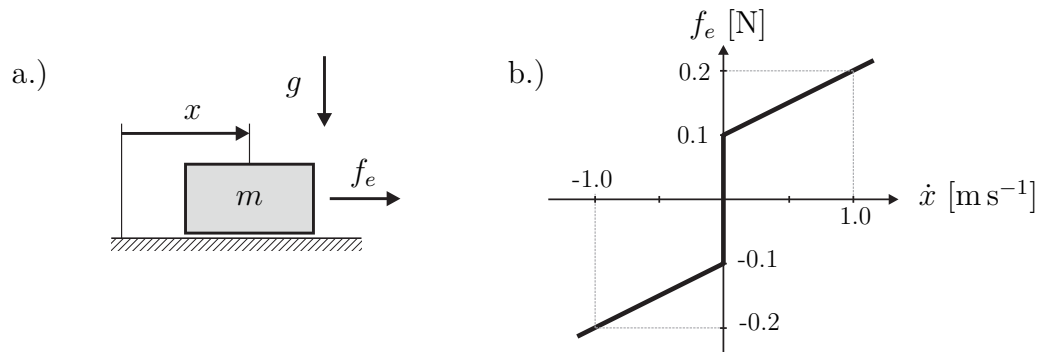


Abbildung 1: Reibkennlinie.

- a) Welche Reibungsarten treten gemäß der dargestellten Messkurve auf? Geben Sie die entsprechenden Reibgesetze dazu an. 2 P.
- b) Bestimmen Sie die entsprechenden Reibparameter des Modells anhand der eingezeichneten Messwerte. Wählen Sie dazu  $m = 0.1 \text{ kg}$  und approximieren Sie die Erdbeschleunigung mit  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ . 1 P.
- c) Wie ändert sich die Reibkennlinie aus Abbildung 1b.) für einen Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H = 0.15$ . Skizzieren Sie diese. 1 P.

Lösung:

a) *Haftreibung*:  $f_H = \mu_H mg$

*Trockene Gleitreibung*:  $f_C = \mu_C mg \operatorname{sign} \dot{x}$

*Viskose Reibung*:  $f_r = \mu_V \dot{x}$

*Fallunterscheidung*:

$$f_e = \begin{cases} f_H & \text{für } \dot{x} = 0 \\ f_C + f_r & \text{sonst} \end{cases}$$

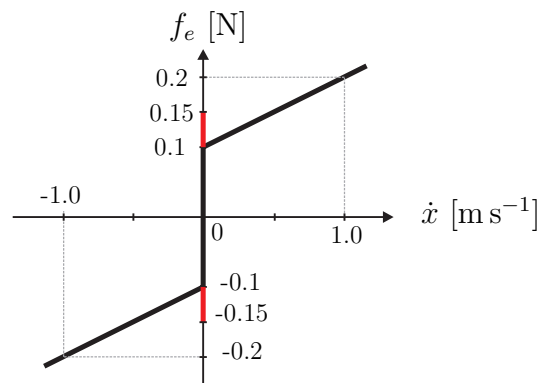
b) *Reibkoeffizienten*

$$\mu_V = \frac{0.1 \text{ N}}{1 \text{ m s}^{-1}} = 0.1 \text{ N s m}^{-1}$$

$$\mu_C = \frac{0.1 \text{ N}}{mg} = 0.1$$

$$\mu_H = \frac{0.1 \text{ N}}{mg} = 0.1$$

c) *Haftreibung*



2. Betrachten Sie den Drehteller aus Abbildung 2, welcher sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht. Die Geschwindigkeit  $\dot{x}_m$  sowie die Beschleunigung  $\ddot{x}_m$  der Masse  $m$  sind für die nachfolgende Untersuchung Null. Der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Drehteller und der Masse  $m$  beträgt  $\mu_H$ . Der Winkel  $\beta$ , die Länge  $l$ , der Abstand  $x_m$ , sowie die entspannte Länge der Feder  $x_0$  und die Federkonstante  $c$  sind bekannt. 8 P.

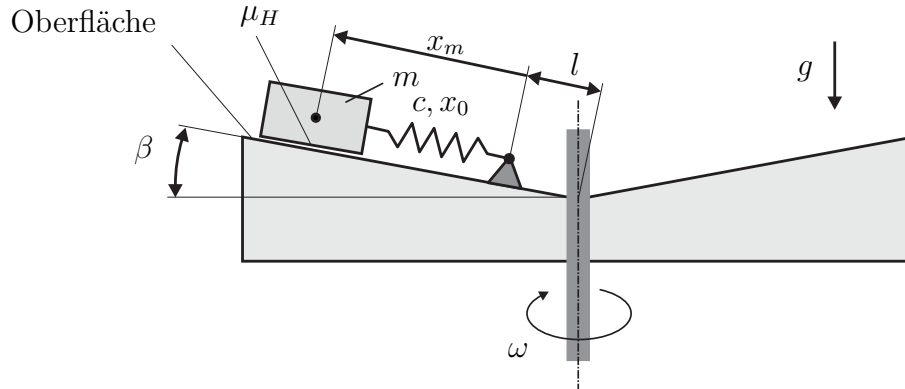


Abbildung 2: Drehteller.

- Skizzieren und benennen Sie alle auftretenden Kräfte. Drücken Sie die Kräfte als Funktionen der gegebenen Größen aus. 2 P.
- Zerlegen Sie die Kräfte in Normal- und Tangentialkomponenten in Bezug auf die Oberfläche. 1 P.
- Bestimmen Sie die Haftbedingungen damit die Masse in Ruhe bleibt. 2 P.
- Ermitteln Sie die kritischen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{\text{krit}}$ , ab welcher sich die Masse  $m$  in Bewegung setzen würde. 3 P.

Lösung:

- a) Fliehkraft  $F_f = m(x_m + l)\cos(\beta)\omega^2$ , Gewichtskraft  $F_g = mg$ ,  
 Federkraft  $F_c = c(x_m - x_0)$ , Reibkraft (siehe Punkt b)  $F_r = (F_{g,n} + F_{f,n})\mu_H$ ;

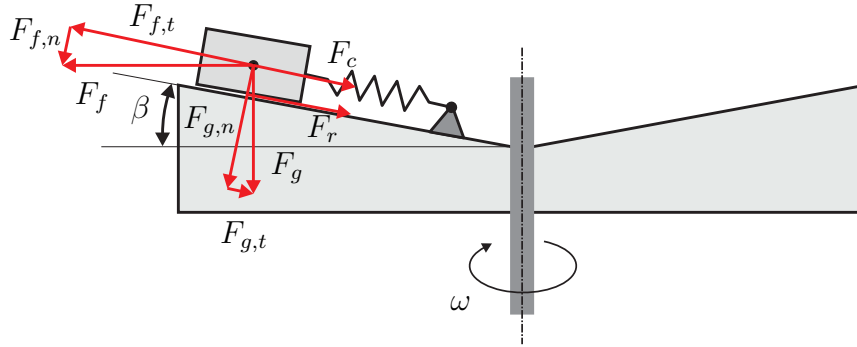


Abbildung 3: Auftretende Kräfte.

b)

$$\begin{aligned} F_{f,t} &= m(x_m + l)\cos(\beta)^2\omega^2 \\ F_{f,n} &= m(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)\omega^2 \\ F_{g,t} &= mg\sin(\beta) \\ F_{g,n} &= mg\cos(\beta) \end{aligned}$$

c) Haftbedingungen

$$\begin{aligned} F_{f,t} - F_{g,t} - F_c &> \mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \quad \rightarrow \quad \text{Bewegung nach außen} \\ F_{f,t} - F_{g,t} - F_c &< -\mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \quad \rightarrow \quad \text{Bewegung nach innen} \end{aligned}$$

d) Bedingung 1:

$$\begin{aligned} F_{f,t} - F_{g,t} - F_c &> \mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \\ m(x_m + l)\cos(\beta)^2\omega^2 - mg\sin(\beta) - c(x_m - x_0) &> \mu_H(mg\cos(\beta) + m(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)\omega^2) \\ \omega^2 &> \frac{mg\sin(\beta) + c(x_m - x_0) + \mu_H mg\cos(\beta)}{m(x_m + l)\cos(\beta)^2 - \mu_H m(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)} \\ \omega_1 &> \sqrt{\frac{mg\sin(\beta) + c(x_m - x_0) + \mu_H mg\cos(\beta)}{m(x_m + l)\cos(\beta)^2 - \mu_H m(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)}} \\ \omega_2 &< -\sqrt{\frac{mg\sin(\beta) + c(x_m - x_0) + \mu_H mg\cos(\beta)}{m(x_m + l)\cos(\beta)^2 - \mu_H m(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)}} \end{aligned}$$

*Bedingung 2:*

$$\begin{aligned}
F_{f,t} - F_{g,t} - F_c &< -\mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \\
m(x_m + l)\cos(\beta)^2\omega^2 - mg\sin(\beta) - c(x_m - x_0) &< -\mu_H\left(mg\cos(\beta) + m(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)\omega^2\right) \\
\omega^2 &< \frac{mg\sin(\beta) + c(x_m - x_0) - \mu_Hmg\cos(\beta)}{m(x_m + l)\cos(\beta)^2 + \mu_Hm(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)} \\
\omega_3 &< \sqrt{\frac{mg\sin(\beta) + c(x_m - x_0) - \mu_Hmg\cos(\beta)}{m(x_m + l)\cos(\beta)^2 + \mu_Hm(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)}} \\
\omega_4 &> -\sqrt{\frac{mg\sin(\beta) + c(x_m - x_0) - \mu_Hmg\cos(\beta)}{m(x_m + l)\cos(\beta)^2 + \mu_Hm(x_m + l)\cos(\beta)\sin(\beta)}}
\end{aligned}$$

3. Gegeben ist der in Abbildung 4 dargestellte Zahnriemenantrieb. Der Schlitten mit der Masse  $m_s$  ist über einen Zahnriemen mit den beiden Riemenscheiben verbunden. Die Riemenscheibe 1 wird über einen Motor mit dem Moment  $M_1$  angetrieben. Die Trägheitsmomente bzw. die Drehwinkel der Riemenscheiben sind mit  $\theta_i$  und  $\varphi_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  bezeichnet. Der Radius der beiden Riemenscheiben ist  $r$ . Das elastische Verhalten des Zahnriemens wird mit Hilfe der drei Federelemente  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  berücksichtigt. Die Position des Schlittens ist mit  $s$  bezeichnet. Die Reibung zwischen Schlitten und Schlittenführung wird als viskose Reibung mit dem Reibkoeffizienten  $\mu_V$  charakterisiert. 9 P.

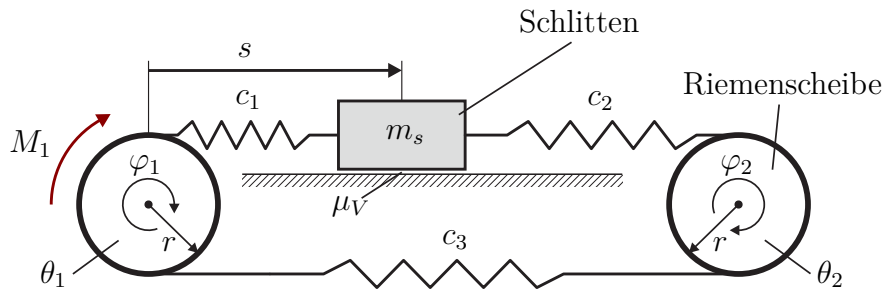


Abbildung 4: Schema des Zahnriemenantriebs.

- Wählen Sie einen geeigneten Vektor der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$ . 1 P.
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und deren Zeitableitung  $\dot{\mathbf{q}}$ . 1 P.
- Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$ . 1 P.
- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus her. 3 P.

Unter der Annahme von  $\theta_1 \gg \theta_2$  kann der Zahnriemenantrieb aus Abbildung 4 näherungsweise als Zwei-Massen-Schwinger betrachtet werden, siehe Abbildung 5.

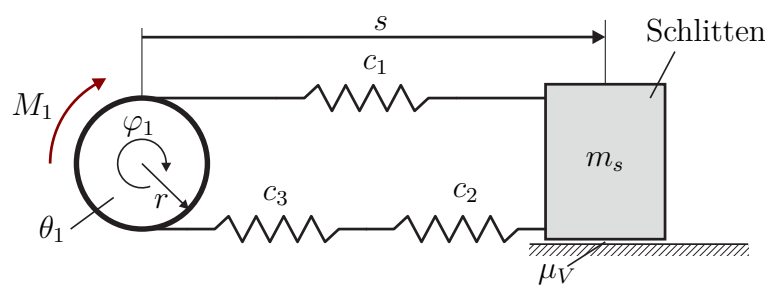


Abbildung 5: Schema des Zwei-Massen-Schwingers.

- Fassen Sie die Federelemente  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  zu einer Gesamtsteifigkeit  $c$  zusammen. 1 P.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das vereinfachte System aus Abbildung 5 auf. 2 P.

Lösung:

a) *Generalisierte Koordinaten*

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ s \end{bmatrix}$$

b) *Kinetische Energie*

$$T = \frac{1}{2}\theta_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{s}^2$$

c) *Potentielle Energie*

$$V = \frac{1}{2}c_1(s - r\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(r\varphi_2 - s)^2 + \frac{1}{2}c_3r^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

d) *Mit der generalisierten Kraft*

$$f_{np} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ -\mu_V\dot{s} \end{bmatrix}$$

*folgen die Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{\theta_1}(M_1 + c_1r(s - r\varphi_1) - c_3r^2(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{\theta_2}(-c_2r(r\varphi_2 - s) + c_3r^2(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ \ddot{s} &= \frac{1}{m_s}(-c_1(s - r\varphi_1) + c_2(r\varphi_2 - s) - \mu_V\dot{s})\end{aligned}$$

e) *Gesamtsteifigkeit der Federn*

$$c = c_1 + \frac{c_2c_3}{c_2 + c_3}$$

f) *Bewegungsgleichungen des Zwei-Massen-Schwingers*

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{\theta_1}(M_1 + cr(s - r\varphi_1)) \\ \ddot{s} &= \frac{1}{m_s}(-c(s - r\varphi_1) - \mu_V\dot{s})\end{aligned}$$



4. In einer isolierten Rohrleitung strömt Heißdampf mit der Temperatur  $T_D$ . Die Temperatur der Umgebung ist  $T_L$ . Die Wärmeübergangszahl an der Rohrrinnenseite beträgt  $\alpha_i$ , die Wärmeleitfähigkeit der Rohrleitung ist  $\lambda$  und die Wärmeübergangszahl an der Rohraußenseite beträgt  $\alpha_a$ . Die Innen- und Außendurchmesser  $2r_i$  bzw.  $2r_a$  sind gegeben. 9 P.

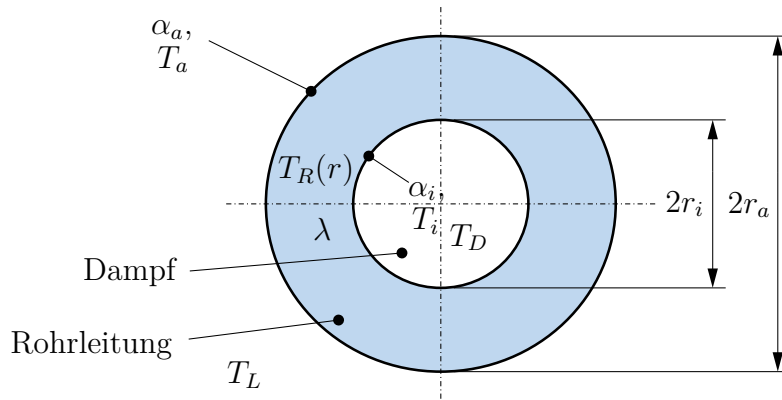


Abbildung 6: Heißdampfleitung im Querschnitt.

- a) Vereinfachen Sie die Wärmeleitgleichung  $\frac{\partial T_R}{\partial t} = a \Delta T_R$  mit einer allgemeinen Konstanten  $a$  für den stationären Fall und einer unendlich langen Leitung. 1.0 P.

**Hinweis:** Zylinderkoordinaten  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(r) = \frac{c_0}{r}$  mit einer Konstanten  $c_0$  die Differentialgleichung erfüllt. 1.0 P.

**Hinweis:** Für diese Aufgabe ist die Substitution  $\frac{\partial T_R}{\partial r} = f(r)$  erforderlich.

**Hinweis:** Die Teilaufgaben 4c) bis 4e) sind unabhängig von den Teilaufgaben 4a) und 4b) lösbar.

- c) Lösen Sie nun die verbleibende Differentialgleichung  $\frac{\partial T_R}{\partial r} = f = \frac{c_0}{r}$ . Geben Sie den stationären, radialen Temperaturverlauf  $T_R(r)$  in der Rohrleitung in allgemeiner Form an. Bezeichnen Sie die Integrationskonstante mit  $c_1$ . 1.5 P.

- d) Bestimmen Sie die Konstanten  $c_0$  und  $c_1$  für gegebene Temperaturen an Innen- und Außenwand  $T_i$  bzw.  $T_a$ . Geben Sie die Funktion  $T_R(r)$  an. 2.5 P.

**Hinweis:** Nehmen Sie die Temperaturen  $T_i$  und  $T_a$  als bekannt an.

- e) Stellen Sie die Randbedingungen  $\dot{Q}_i = f_i(T_i)$  und  $\dot{Q}_a = f_a(T_a)$  dar. Vereinfachen Sie anschließend den in der Leitung mit der Länge  $L$  auftretenden Wärmestrom  $\dot{Q}_\lambda = -\lambda A(r) \frac{\partial T_R}{\partial r}$  mit der Fläche  $A(r)$ . Wie stehen die Wärmeströme  $\dot{Q}_i$ ,  $\dot{Q}_a$  und  $\dot{Q}_\lambda$  in Verbindung zueinander? 3.0 P.

**Hinweis:** Der Wärmestrom ist das Flächenintegral über die Wärmestromdichte:  $\dot{Q} = \int_A \dot{q} dA$ .

Lösung:

a) Aus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

folgt

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_R}{\partial r} = 0.$$

b)

$$f' + \frac{f}{r} = -c_0 r^{-2} + \frac{1}{r} c_0 r^{-1} = 0$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_R}{\partial r} &= \frac{c_0}{r} \\ dT_R &= \frac{c_0}{r} dr \\ T_R(r) &= c_0 \ln(r) + c_1 \end{aligned}$$

d) Aus

$$\begin{aligned} T_i &= c_0 \ln(r_i) + c_1 \\ T_a &= c_0 \ln(r_a) + c_1 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{T_i - T_a}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \\ c_1 &= T_i - \frac{(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \ln(r_i) \\ T_R(r) &= T_i + \frac{(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \alpha_i A_i (T_D - T_i) \\ \dot{Q}_\lambda &= -\lambda A(r) \frac{\partial T_R}{\partial r} = -\lambda 2\pi r L \frac{(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \frac{r_i}{r} \frac{1}{r_i} = -2\pi \lambda L \frac{(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \\ \dot{Q}_a &= \alpha_a A_a (T_a - T_L) \\ \dot{Q}_i &= \dot{Q}_a = \dot{Q}_\lambda \end{aligned}$$