

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 2.10.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

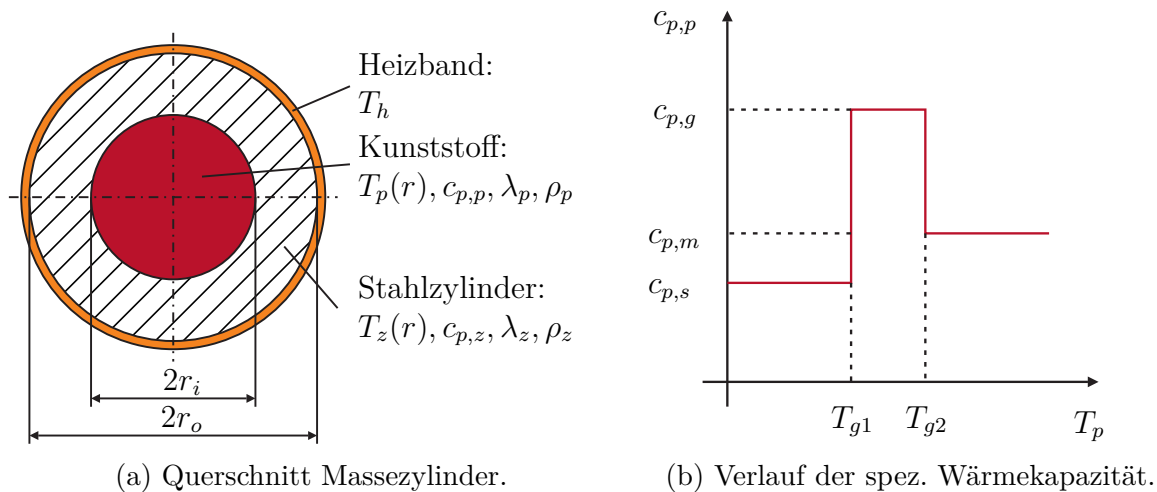
Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	13	8	7	12	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. In dieser Aufgabe soll das Aufschmelzen eines thermoplastischen Polymers ausgehend von der Raumtemperatur  $T_\infty$  betrachtet werden. Abb. 1a zeigt den Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur. Um den Kunststoff im Inneren zu schmelzen, führen Heizmatten auf der Außenseite eines Hohlzylinders aus Stahl der Länge  $L$  konstant die Leistung  $P$  zu. Bei der sogenannten Glasübergangstemperatur wird die kristalline Struktur des Polymers in eine flüssige Schmelze gewandelt. Die dafür benötigte Energie kann ersatzweise durch eine von der Kunststofftemperatur  $T_p$  abhängige spezifische Wärmekapazität  $c_{p,p} = c_{p,p}(T_p)$  beschrieben werden, siehe Abb. 1b. Die Heizbänder sollen mit homogener Temperaturverteilung  $T_h$  und vernach-



lässigbarer Dicke modelliert werden. Durch freie Konvektion kommt es zum Energieaustausch mit der Umgebung. Diese kann ebenso wie der Wärmeübergang vom Heizband auf den Massezylinder und der Übergang vom Zylinder auf den Kunststoff durch Randbedingungen dritter Art der Form  $\dot{q}_i = \alpha_i \Delta T_i$ ,  $i \in \{\infty, hz, zp\}$  mit konstanten Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_i$  beschrieben werden.

- a) Stellen Sie das gekoppelte Differentialgleichungssystem inklusive Anfangs- und Randbedingungen des vorliegenden Wärmeleitproblems mit dem Systemeingang  $P$  auf. Die Wärmeleitung in axialer Richtung kann dabei vernachlässigt werden.

4 P. |

**Hinweis:** Berechnen Sie die Heizbandtemperatur  $T_h$  als Funktion der Leistung  $P$ , der Raumtemperatur  $T_\infty$  und des Wärmestroms  $\dot{q}_{hz}$ .

Vernachlässigen Sie für die folgenden Aufgaben die Wärmekapazität des Metallzylinders und nähern Sie den Kunststoff als konzentrierte Masse mit homogener Temperatur  $T_p$  an.

- b) Geben Sie ein RC-Ersatzschaltbild des Wärmeleitproblems der vorigen Aufgabe an und bestimmen Sie alle auftretenden Ersatzgrößen inklusive deren Einheiten.
- c) Bestimmen Sie den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur  $T_p$  in einem Bereich mit konstanter spezifischer Wärmekapazität  $c_{p,p} = \text{konst.}$  ausgehend von  $T_\infty$ .
- d) Skizzieren Sie qualitativ den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur  $T_p$  bis zum Erreichen der Flüssigphase des Polymers. Unterteilen Sie dafür den Aufschmelzvorgang in drei Phasen: Aufheizen bis  $T_{g1}$ , Aufschmelzen bis  $T_{g2}$  sowie das Erwärmen auf die Endtemperatur  $T_p(t_e) = T_e > T_{g2}$ .

3 P. |

4 P. |

2 P. |

Lösung:

a) • Zylinderwand:

$$\rho_z c_{p,z} \dot{T}_z(r, t) = \lambda_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) \right) \right)$$

Randbedingungen:

$$\dot{q}_{hz} = \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) |_{r=r_o}$$

$$\dot{q}_{zp} = -\lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) |_{r=r_i}$$

Anfangsbedingung:

$$T_z(r, 0) = T_\infty$$

• Polymer:

$$\rho_p c_{p,p}(T_p) \dot{T}_p(r, t) = \lambda_p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) \right) \right)$$

Randbedingung:

$$\dot{q}_{zp} = \lambda_p \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) |_{r=r_i}$$

Anfangsbedingung:

$$T_p(r, 0) = T_\infty$$

• Wärmestromdichten für Randbedingungen:

$$\dot{q}_{zp} = \alpha_{zp}(T_z(r_i) - T_p(r_i))$$

$$\dot{q}_{hz} = \alpha_{hz}(T_h - T_z(r_o))$$

$$= \frac{\alpha_{hz}/\alpha_\infty \frac{P}{A} + \alpha_{hz}(T_\infty - T_z(r_o))}{1 + \alpha_{hz}/\alpha_\infty}$$

b) • Ersatzschaltbild

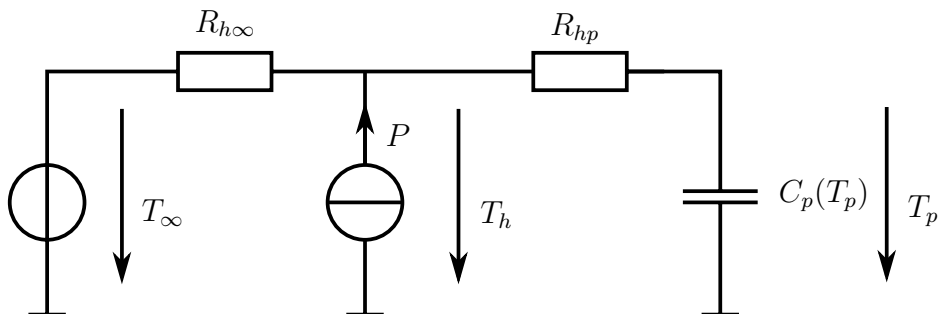


Abbildung 2: Ersatzschaltbild.

- Auftretende Größen:

$$R_{h\infty} = \frac{1}{2r_o\pi L\alpha_\infty}$$

$$C_p = r_i^2\pi L\rho_p c_{p,p}(T)$$

Der Widerstand zwischen Heizband und Polymer

$$R_{hp} = \frac{1}{2r_o\pi Lk(r_o)}$$

ergibt sich mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k(r) = \frac{1}{r \frac{1}{\alpha_{hz}r_o} + \frac{1}{\lambda_z} \log\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{\alpha_{zp}r_i}}$$

zu

$$R_{hp} = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{\alpha_{hz}r_o} + \frac{1}{\lambda_z} \log\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{\alpha_{zp}r_i} \right) .$$

- Einheiten der Größen im ESB:

$$[R] = \text{K W}^{-1}$$

$$[C] = \text{J K}^{-1}$$

$$[P] = \text{W}$$

$$[T] = \text{K}$$

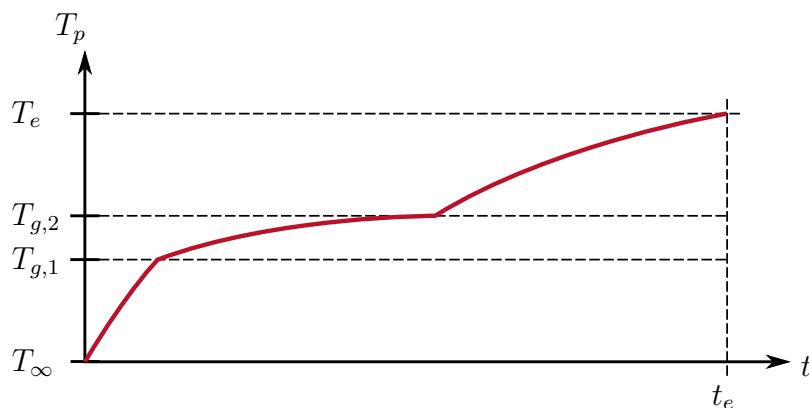
- c) Im Allgemeinen lautet die ODE für das RC Ersatzschaltbild

$$\underbrace{(R_{hp} + R_{h\infty})C_p(T_p)}_{\tau(T_p)} \dot{T}_p = T_\infty + PR_{h\infty} - T_p .$$

Für den Fall  $c_{p,p} = \text{konst.}$  ergibt sich die Lösung der ODE für die Anfangsbedingung  $T_p(0) = T_\infty$  und konstanter Leistung  $P$  zu

$$T_p(t) = T_\infty + PR_{h\infty}(1 - \exp(-t/\tau)) .$$

- d) Temperaturverlauf der homogen und konzentriert angenommenen Kunststoff-Masse bei konstanter Heizleistung:



2. In Abb. 3 ist der Massezylinder mit der Länge  $L$  der vorigen Aufgabe mit seiner Umgebung dargestellt. Der Zylinder gibt über freie Konvektion Wärme an die Umgebungsluft mit der fixen Temperatur  $T_\infty$  ab. Zusätzlich geht Wärme an die umgebenen Oberflächen durch thermische Strahlung verloren. Das Maschinenbett hat die Oberflächentemperatur  $T_2$  und ist auf der Unterseite ideal isoliert.

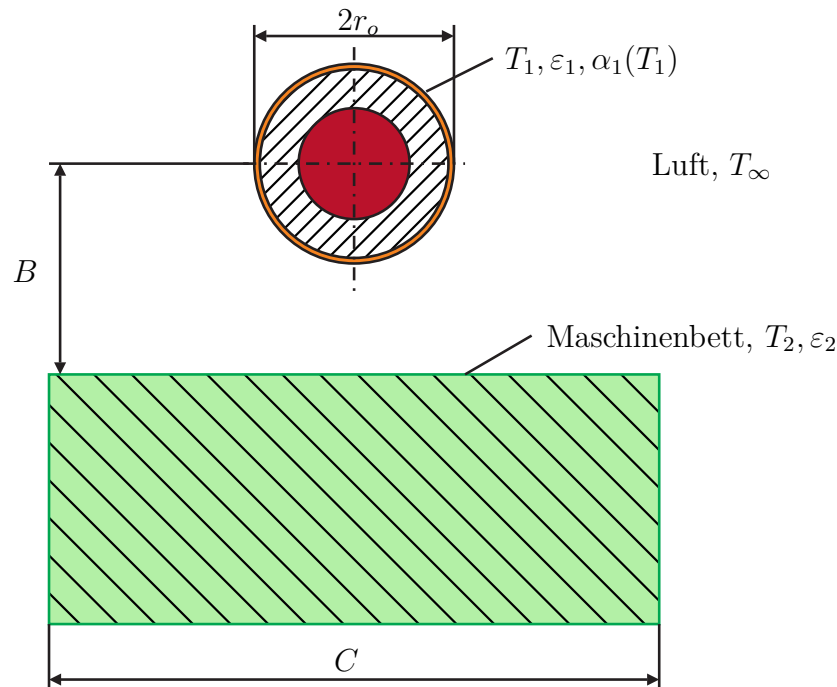


Abbildung 3: Querschnitt.

Alle Oberflächen sind diffuse, graue Strahler. Die Halle, in der sich die Maschine befindet, soll als unendlich weit ausgedehnte Hülle angenähert werden, deren Oberfläche hingegen ein schwarzer Strahler mit der Temperatur  $T_\infty$  ist. Vernachlässigen Sie weiters einen Energieaustausch über die Stirnflächen des Zylinders sowie über die Seitenflächen des Maschinenbettes.

- a) Um die Zylindertemperatur  $T_1$  konstant zu halten, müssen die Wärmeverluste kompensiert werden. Dies soll von am Umfang verteilten Heizelementen mit der Gesamtleistung  $P$  erreicht werden. Geben Sie die benötigte Heizleistung unter Berücksichtigung von freier Konvektion mit dem Proportionalitätsfaktor  $\alpha_1(T_1)$  und einer allgemeinen Wärmestromdichte  $\dot{q}_1$  durch thermische Strahlung an. 2 P. |

Nun soll der Wärmeaustausch mithilfe der Netto-Strahlungsmethode zwischen Zylinder, Maschinenbett und der Halle bestimmt werden. Der Sichtfaktor  $F_{12}$  und die Emissivitäten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  seien gegeben.

- b) Berechnen Sie alle auftretenden Sichtfaktoren der in Abb. 3 dargestellten Konfiguration. 3 P. |
- c) Skizzieren Sie die weiteren Schritte zur Berechnung der Nettowärmeströme und geben Sie alle auftretenden Größen an. (Die explizite Bestimmung der Wärmeströme durch Matrixmultiplikationen muss nicht durchgeführt werden!) 3 P. |

Lösung:

a) Die benötigte Leistung berechnet sich zu

$$P = 2r_o L(\alpha_1(T_1)(T_1 - T_\infty) + \dot{q}_1) .$$

b) Da die Oberflächen des Massezylinders sowie des Maschinenbetts konvex sind, gilt  $F_{11} = 0, F_{22} = 0$ . Aus der Summationsregel der Sichtfaktoren für den Körper 1

$$F_{11} + F_{12} + F_{1\infty} = 1$$

folgt somit

$$F_{1\infty} = 1 - F_{12}$$

bzw. für Körper 2

$$F_{22} + F_{21} + F_{2\infty} = 1$$

folgt

$$F_{2\infty} = 1 - F_{21}$$

mit  $F_{21} = \frac{2r_o\pi}{C}F_{12}$  aus dem Reziprozitätsgesetz. Da die Halle als unendlich weit ausgedehnt angenommen wird gilt  $A_\infty \rightarrow \infty$ . Somit folgt aus dem Reziprozitätsgesetz  $F_{\infty 1} = F_{\infty 2} = 0$  und aus

$$F_{\infty\infty} + F_{\infty 1} + F_{\infty 2} = 1$$

direkt  $F_{\infty\infty} = 1$ .

c) Die Nettowärmestromdichten können mit

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F})^{-1} \text{diag } \boldsymbol{\varepsilon} \sigma \mathbf{T}^4$$

berechnet werden. Es gilt  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_\infty]^T$ ,  $\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_\infty]^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_\infty]^T$ ,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{1\infty} \\ F_{21} & 0 & F_{2\infty} \\ 0 & 0 & F_{\infty\infty} \end{bmatrix}$$

und die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ , wobei die Halle als schwarzer Strahler ( $\varepsilon_\infty = 1$ ) beschrieben wird.

3. Im Sportklettern wird häufig mobiles Sicherungsgerät benutzt, wenn beispielsweise keine fest installierten Sicherungsgeräte zur Verfügung stehen. Ein beliebtes, modernes Utensil ist der sogenannte “Friend” bzw. “Cam”, welcher aufgrund von Haftreibung zwischen Gerät und Fels die Kräfte beim Sturz eines Kletterers auffangen kann. Die beiden Segmente (siehe Abb. 4) werden dabei durch die Last  $F$  selbst gegen den Stein gepresst, wodurch eine hohe Belastbarkeit erreicht wird. 7 P.

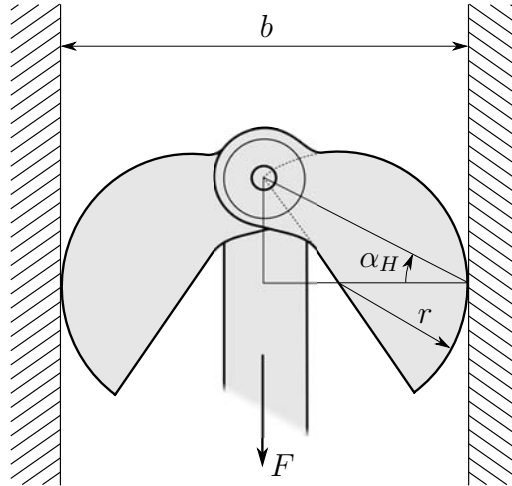


Abbildung 4: Ein Friend mit kreisförmigen Segmenten, welcher in einer Felsspalte der Breite  $b$  haftet.

- a) Skizzieren Sie die auftretenden Kräfte und bestimmen Sie die Haftbedingung des Friends für einen fest vorgegebenen Haltewinkel  $\alpha_H$ . 2 P.
- b) Aufgrund der kreisförmigen Gestaltung der Segmente (siehe Abb. 4) ist der Haltewinkel von der Breite der Felsspalte abhängig. Schreiben Sie die Haftbedingung in der Form  $\mu > f(\delta)$  mit  $\delta = b/2r$  an und skizzieren Sie grob den Verlauf von  $f(\delta)$  für sinnvolle Werte von  $\delta$ . Zeichnen Sie weiters für ein bestimmtes  $\mu$  die Menge der Spaltbreiten ein, für welche der Friend haftet. 5 P.

**Hinweis:** Verwenden Sie den Zusammenhang

$$\tan\left(\frac{1}{2} \arccos(x)\right) = \tan\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)\right) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Abbildung 5: Verlauf von  $f(\delta)$  und Menge der zulässigen bezogenen Breiten  $\mathcal{A}_\delta(\mu)$ .



4. Zum Transport von schweren Lasten werden häufig Laufkatzen verwendet, welche auf einer oder mehreren Schienen gleiten. Abbildung 6 zeigt eine vereinfachte Skizze. Durch einen Motor wird eine Kraft  $F$  auf die Laufkatze aufgebracht, welche eine zylinderförmige Last (Masse  $m_L$ , Trägheitsmoment  $\theta_L$ ) über ein näherungsweise starr angenommenes Seil bewegt. Zwischen Schienen und Laufkatze wird viskose Reibung mit Koeffizienten  $d$  sowie Haftreibung mit Koeffizienten  $\mu$  angenommen. Durch die zusätzliche Haftreibung kommt es zu sog. Stick-Slip-Effekten, welche durch Umschalten zwischen zwei dynamischen Systemen - einem haftenden und einem gleitenden Modell - analysiert werden können. Im Folgenden soll zuerst ein Modell für eine gleitende Laufkatze erstellt werden und daraus ein haftendes Modell samt Umschaltbedingungen ermittelt werden. 12 P. |

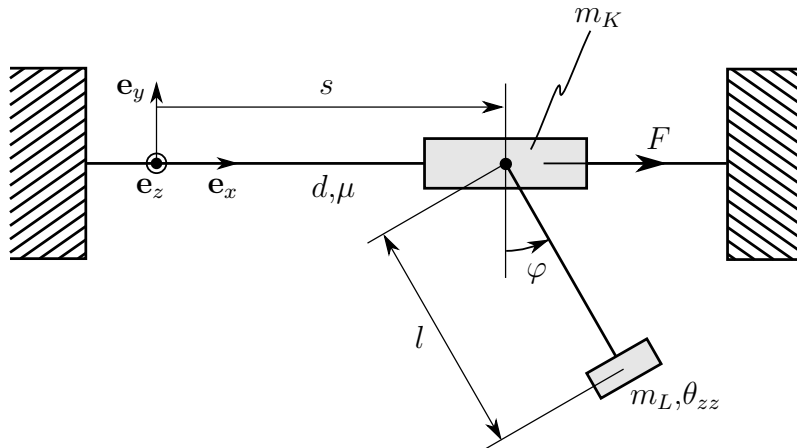


Abbildung 6: Skizze einer Laufkatze mit zylinderförmiger Last.

- a) Berechnen Sie die Position der Last  $\mathbf{p}_L$  und deren Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{p}}_L$  in Abhängigkeit der Freiheitsgrade  $s$  und  $\varphi$ . Nutzen Sie die Ergebnisse, um die kinetische Energie  $T(\mathbf{q})$  und die potentielle  $V(\mathbf{q})$  mit  $\mathbf{q} = [s, \varphi]^T$  zu bestimmen. Bestimmen Sie die potentielle Energie derart, dass  $V(\mathbf{0}) = 0$  gilt. 4 P. |
- b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mittels Euler-Lagrange Formalismus unter Vernachlässigung der Haftreibung. 4 P. |
- c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung der haftenden Laufkatze, d.h. für  $\dot{s} = \ddot{s} = 0$ , aus dem obigen Resultat her. 1 P. |
- d) Bestimmen Sie Haftbedingung für die Laufkatze und beschreiben Sie, wann von haftendem auf gleitendes Modell und vice versa umgeschaltet wird. 3 P. |
- Hinweis:** Betrachten Sie die erste Gleichung des vollständigen Modells für den Fall  $\dot{s} = \ddot{s} = 0$  unter Berücksichtigung der Haftreibung. Die Normalkraft  $F_N$  muss nicht als Funktion von  $\mathbf{q}$  und dessen Ableitungen bestimmt werden.

Lösung:

a) Aus der Geometrie folgt

$$\mathbf{p}_L = \begin{bmatrix} s + l \sin(\varphi) \\ -l \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}}_L = \begin{bmatrix} \dot{s} + l \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ l \sin(\varphi) \dot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Mit dem Geschwindigkeitsbetrag

$$\|\dot{\mathbf{p}}_L\|^2 = \dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}\dot{\varphi}l \cos \varphi$$

lässt sich die kinetische Energie als

$$T = \frac{1}{2}m_K \dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_L \|\dot{\mathbf{p}}_L\|^2 + \frac{1}{2}\theta_{zz} \dot{\varphi}^2$$

schreiben. Die potentielle Energie ergibt sich direkt zu  $V = -m_L g l \cos \varphi + V_0$ .  
Durch die Eichbedingung folgt schließlich

$$V = m_L g l (1 - \cos \varphi).$$

b) Mit der Lagrange-Funktion  $L = T - V$  ergeben sich die Bewegungsgleichungen des gleitenden Systems zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_{np}$$

mit den einzelnen Bestandteilen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -m_L l \sin \varphi (\dot{s} \dot{\varphi} + g) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \begin{bmatrix} (m_L + m_K) \dot{s} + m_L l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ (\theta_{zz} + m_L l^2) \dot{\varphi} + m_L l \dot{s} \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \begin{bmatrix} (m_L + m_K) \ddot{s} + m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ (\theta_{zz} + m_L l^2) \ddot{\varphi} + m_L l \ddot{s} \cos \varphi - m_L l \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{f}_{np} = \begin{bmatrix} -d_K \dot{s} + F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Aus der zweite Zeile der Bewegungsgleichungen erhält man mit  $\dot{s} = \ddot{s} = 0$  direkt die Bewegungsgleichung des haftenden Systems,

$$(\theta_{zz} + m_L l^2) \ddot{\varphi} + m_L l g \sin \varphi = 0,$$

was einem frei schwingenden Pendel mit Gravitation entspricht.

d) Durch Einführen einer resultierenden Haftkraft  $F_H$  gemäß

$$\mathbf{f}_{np} = \begin{bmatrix} -d_K \dot{s} + F + F_H \\ 0 \end{bmatrix}$$

liefert die erste Zeile der vollständigen Bewegungsgleichungen im Fall  $\dot{s} = \ddot{s} = 0$  die Haftbedingung

$$|F_H| = |m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 - F| \leq \mu F_N.$$

Die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  lässt sich mit dem Ergebnis aus c) eliminieren. Dies liefert die Bedingung

$$\left| \frac{g m_L^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\theta_{zz} + m_L l^2} + m_L l \dot{\varphi}^2 + F \right| \leq \mu F_N.$$

Während diese Bedingung eingehalten wird und  $\dot{s} = 0$  gilt, haftet das System. Ansonsten muss das gleitende System betrachtet werden.