Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 13.05.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	11	31
erreichte Punkte				

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist die in Abbildung 1 dargestellte Kurbelschwinge, welche zur Umwandlung einer Drehbewegung in eine translatorische Bewegung genutzt wird. Dabei treibt die rotierende Kurbel (Antriebsmoment M_K, Radius r_K, Trägheitsmoment I_K um Drehpunkt, vernachlässigbare Masse) die Schwinge an. Die Schwinge (Masse m_S mit Schwerpunktsabstand l_S vom Drehpunkt A und Trägheitsmoment I_S um Schwerpunkt) wiederum bewegt einen masselosen Schlitten hin und her, an welchem eine Feder (Federkonstante k_F und entspannte Federlänge l_{F0}) befestigt ist. 10 P.|

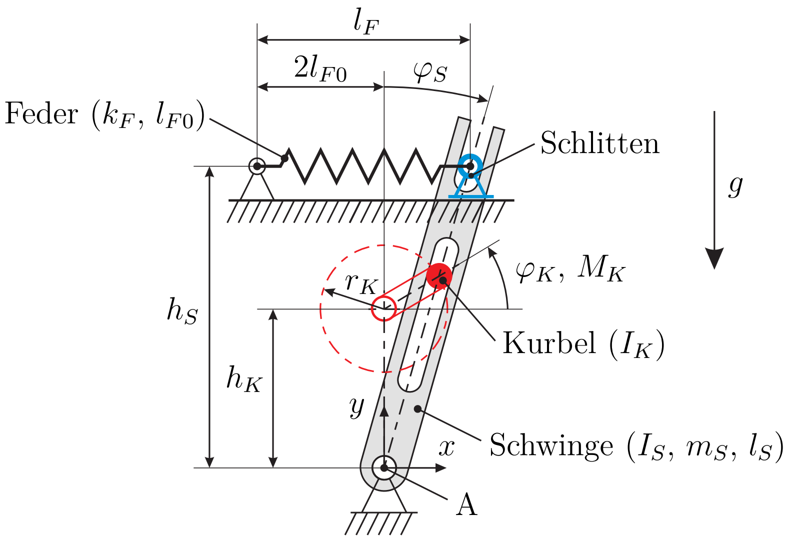

Abbildung 1: Kurbelschwinge.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung der Kurbelschwinge sind folgende Teilaufgaben zu lösen:

a) Geben Sie den Schwingenwinkel φ_S als Funktion des Kurbelwinkels φ_K an. Berechnen Sie in weiterer Folge die Ableitung des Schwingenwinkels $\dot{\varphi}_S$ in Abhängigkeit von $\dot{\varphi}_K$. 2.0 P.|
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$

b) Bestimmen Sie die Länge der Feder l_F als Funktion des Winkels φ_S. 0.5 P.|

c) Stellen Sie den Vektor zum Schwerpunkt der Schwinge auf und berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\mathbf{v}_S$ der Schwinge in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_S$. 1.0 P.|

d) Ermitteln Sie die kinetische Energie der Kurbel $T_K = T_K(\dot{\varphi}_K)$ und der Schwinge $T_S = T_S(\dot{\varphi}_S)$. 2.0 P.|

e) Ermitteln Sie die potentielle Energie der Schwinge V_S zufolge der Schwerkraft und die potentielle Energie der Feder V_F in Abhängigkeit von φ_S. 2.0 P.|

f) Ermitteln Sie die generalisierte Kraft Q bezüglich der Minimalkoordinate φ_K zufolge des Antriebsmomentes M_K. 0.5 P.|

g) Geben Sie die Lagrange-Funktion L und die Euler-Lagrange Gleichungen zur Ermittlung der Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit der Minimalkoordinate φ_K an. Sie müssen die Ausdrücke nicht explizit auswerten. 2.0 P.|
Hinweis: Sollten Sie in Aufgabe 1a keine Lösung für φ_S und $\dot{\varphi}_S$ erhalten haben, setzen Sie diese in allgemeiner Form, d.h. als $\varphi_S = \varphi_S(\varphi_K)$ und $\dot{\varphi}_S = \dot{\varphi}_S(\varphi_K, \dot{\varphi}_K)$ an.

Lösung:

a) *Schwingenwinkel:*

$$\varphi_S = \arctan\left(\frac{r_K \cos(\varphi_K)}{h_K + r_K \sin(\varphi_K)}\right)$$
$$\dot{\varphi}_S = -\frac{r_K(r_K + \sin(\varphi_K)h_K)}{r_K^2 + 2\sin(\varphi_K)h_K r_K + h_K^2}\dot{\varphi}_K$$

b) *Länge der Feder:*

$$l_F = h_S \tan(\varphi_S) + 2l_{F0}$$

c) *Schwerpunktsvektor und Schwerpunktsgeschwindigkeit:*

$$\mathbf{r}_S = l_S \begin{bmatrix}\sin(\varphi_S)\\ \cos(\varphi_S)\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_S = l_S \begin{bmatrix}\cos(\varphi_S)\\ -\sin(\varphi_S)\end{bmatrix}\dot{\varphi}_S$$

d) *Kinetische Energien:*

$$T_K = \frac{1}{2} I_K \dot{\varphi}_K^2$$
$$T_S = \frac{1}{2}\left(I_S + m_S l_S^2\right)\dot{\varphi}_S^2$$

e) *Potentielle Energien:*

$$V_S = l_S m_S g \cos(\varphi_S)$$
$$V_F = \frac{1}{2} k_F (h_S \tan(\varphi_S) + l_{F0})^2$$

f) *Generalisierte Kraft:*

$$Q = M_K$$

g) *Lagrange-Funktion L und Euler-Lagrange-Gleichungen:*

$$\begin{aligned}
L = T - V = \frac{1}{2}\left(I_K + \left(I_S + m_S l_S^2\right)\left(\frac{r_K(r_K + \sin(\varphi_K)h_K)}{r_K^2 + 2\sin(\varphi_K)h_K r_K + h_K^2}\right)^2\right)\dot{\varphi}_K^2 \\
- l_S m_S g \cos\left(\arctan\left(\frac{r_K \cos(\varphi_K)}{h_K + r_K \sin(\varphi_K)}\right)\right) \\
- \frac{1}{2} k_F \left(h_S \frac{r_K \cos(\varphi_K)}{h_K + r_K \sin(\varphi_K)} + l_{F0}\right)^2
\end{aligned}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_K}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_K} = Q$$

2. Ein Block mit der Masse m_1 hängt nach Abbildung 2 an einem masselosen Seil. Das Seil wird reibungsfrei über eine masselose Rolle geführt und auf einer Trommel (Masse m_2, Trägheitsmoment Θ_2) aufgewickelt. Die Trommel rollt über die Kontaktfläche ohne dabei zu gleiten. Zudem wirkt eine Feder ohne Vorspannung mit der konstanten Federsteifigkeit k der Bewegung der Trommel entgegen. Das gesamte System befindet sich im Schwerefeld. 10 P.

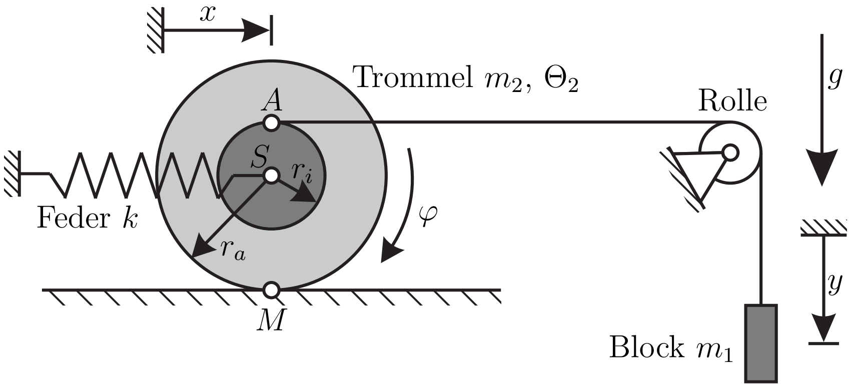

Abbildung 2: Bewegte Masse.

a) Zerlegen Sie das System in einzelne Körper (Block, Rolle, Trommel) und zeichnen Sie alle Kräfte ein. 2.0 P.
Hinweis: Beachten Sie auch die Trägheitskräfte und die Reibkraft.

b) Geben Sie das Kräftegleichgewicht in y-Richtung für die Trommel an. 0.5 P.

c) Stellen Sie die Impulsbilanz in x-Richtung sowie die Drehimpulsbilanz für die Trommel um den Punkt S auf. 1.0 P.

d) Bestimmen Sie die Impulsbilanz in y-Richtung für den Block. 0.5 P.

e) Wie lautet der kinematische Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}$ und der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ sowie den Beschleunigungen $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$ der Trommel. 1.0 P.

f) Geben Sie den kinematischen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}_A$ des Punktes A und der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Trommel sowie den Zusammenhang für die Beschleunigung $\ddot{x}_A$ an. Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}_A$ des Punktes A und der Geschwindigkeit $\dot{y}$ des Blockes sowie den entsprechenden Beschleunigungen $\ddot{x}_A$ und $\ddot{y}$? Begründen Sie ihre Aussage. 2.0 P.

g) Geben Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwerpunktes S an. Eliminieren Sie dabei alle unbekannten Größen, sodass die Gleichung in der Form $\ddot{x} = f(x, m_1, m_2, \Theta_2, r_i, r_a, k, g)$ dargestellt werden kann. 3.0 P.
Hinweis: Falls Sie die Aufgaben 2e und 2f nicht gelöst haben, verwenden Sie die folgenden Zusammenhänge $\ddot{x} = a\ddot{\varphi}$ und $\ddot{y} = b\ddot{\varphi}$.

Lösung:

a) *Freischneiden des Systems: Siehe Abbildung 3*

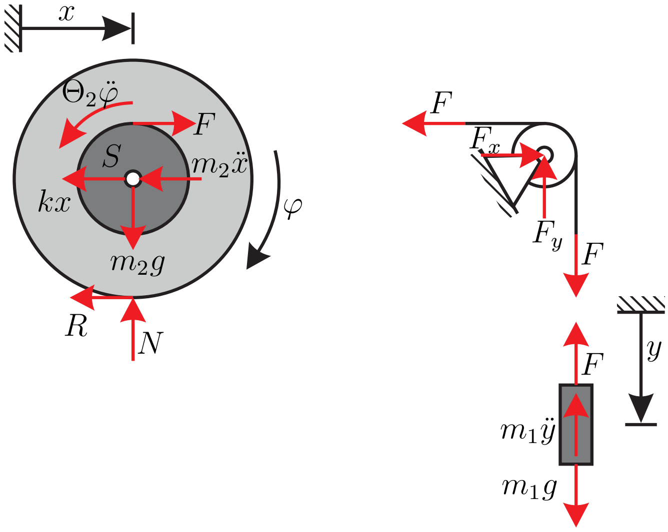

Abbildung 3: Freischneiden des Systems.

b) *Kräftegleichgewicht in y-Richtung für die Trommel:*

$$N - m_2 g = 0$$

c) *Impulsbilanz in x-Richtung für die Trommel:*

$$F - R - kx - m_2\ddot{x} = 0$$

Drehimpulsbilanz um den Schwerpunkt S der Trommel:

$$r_i F + r_a R - \Theta_2\ddot{\varphi} = 0$$

d) *Impulsbilanz in y-Richtung für den Block:*

$$m_1 g - F - m_1\ddot{y} = 0$$

e) *Die Trommel rollt über den so genannten Momentanpol M, d.h. die Geschwindigkeit v_M an dieser Stelle ist gleich null, und infolgedessen gilt für die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes S (siehe Abbilding 4)*

$$\dot{x} = r_a\dot{\varphi}$$
$$\ddot{x} = r_a\ddot{\varphi}.$$

f) *Bei einem ungedehnten Seil ist die Geschwindigkeit $\dot{y}$ des Blocks gleich der Geschwindigkeit $\dot{x}_A$ des Punktes A, d.h. $\dot{y} = \dot{x}_A$. Daraus folgt (siehe Abbilding 4)*

$$\dot{y} = (r_i + r_a)\dot{\varphi}$$
$$\ddot{y} = (r_i + r_a)\ddot{\varphi}.$$

g) *Die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwerpunkts S lautet:*

$$\ddot{x} = \frac{m_1(r_i + r_a)r_a g - r_a^2 kx}{m_1(r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + \Theta_2}$$

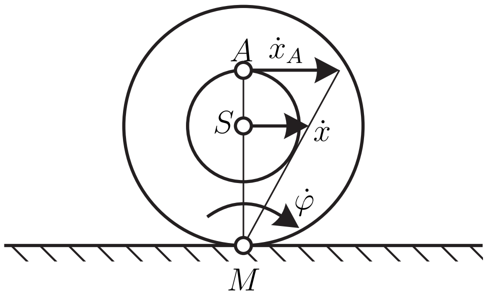

Abbildung 4: Geschwindigkeiten an der Trommel.

3. In Abbildung 5 ist ein elektrisches Kabel der Länge L bestehend aus einem elektrischen Leiter und einer Isolierung dargestellt. Durch den elektrischen Leiter fließt 11 P.

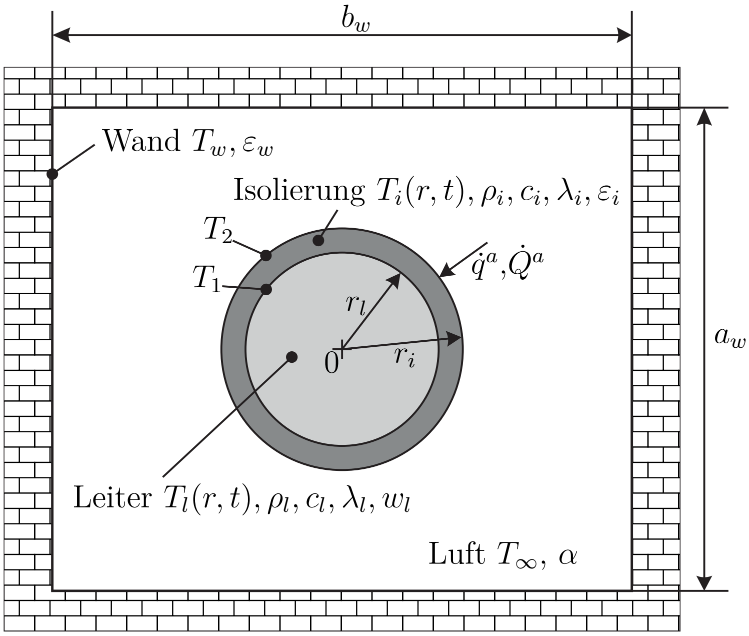

Abbildung 5: Elektrisches Kabel bestehend aus einem Leiter und einer Isolation.

der Strom I und erzeugt dadurch Wärme (ohmsche Wärmequelle). Das Kabel befindet sich in einem mit Luft gefüllten Raum konstanter Temperatur T_∞. Dieser Raum wird von einer Wand mit konstanter Temperatur T_w, der Emissivität ε_w und der Seitenlängen a_w und b_w umgeben. Zwischen der Isolierung und ihrer Umgebung (Luft und Wand) findet ein Wärmeaustausch $\dot{Q}^a$ statt.
Der elektrische Leiter besitzt die Parameter:

- Radius r_l
- Dichte ρ_l, spezifische Wärmekapazität c_l, Wärmeleitfähigkeit λ_l
- Spezifischer ohmscher Widerstand w_l

Die Isolierung hat die Parameter:

- Radius r_i (Leiter plus Isolierung)
- Dichte ρ_i, spezifische Wärmekapazität c_i, Wärmeleitfähigkeit λ_i, Emissivität ε_i

An dieser Stelle sei angemerkt, dass alle Materialparameter konstant sind und die Länge L des Kabels sehr viel größer ist als die Radien r_l und r_i, d.h. $L \gg r_l, r_i$.

a) Geben Sie die instationäre Wärmeleitgleichung in allgemeiner Form für den Leiter $T_l(r,t)$ und die Isolierung $T_i(r,t)$ sowie den entsprechenden Definitionsbereich in radialer Richtung an. Vereinfachen Sie die beiden Wärmeleitgleichungen infolge der geometrischen Gegebenheiten und begründen Sie diese Vereinfachungen. Welche Bedingungen hinsichtlich der Temperaturen $T_l(r,t)$ und $T_i(r,t)$ müssen an den Stellen $r=0$, $r=r_l$ und $r=r_i$ gelten? **Hinweis:** An der Stelle $r=0$ kommt die Symmetrie zum Tragen. 2.0 P.|

b) Wie lauten die stationären Wärmeleitgleichungen für das vorliegende Problem? Verifizieren Sie, dass die folgenden beiden Gleichungen die stationären Wärmeleitgleichungen erfüllen 1.5 P.|

$$T_l(r) = T_1 + \frac{g r_l^2}{4\lambda_l}\left(1 - \frac{r^2}{r_l^2}\right) \qquad r \in [0, r_l] \tag{1}$$

$$T_i(r) = T_2 + (T_1 - T_2)\frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_l/r_i)} \qquad r \in [r_l, r_i] \tag{2}$$

Hierbei beschreibt T_1 die Temperatur an der Stelle r_l und T_2 jene an der Stelle r_i und g ist die volumetrische Wärmequelle.

c) Fertigen Sie eine schematische Skizze des Temperaturverlaufs über den Radius $r \in [0, r_i]$ an. Berücksichtigen Sie dabei die in Aufgabe 3a) definierten Bedingungen an den Stellen $r=0$ und $r=r_l$. 1.5 P.|

d) Bestimmen Sie die volumetrische Wärmequelle g infolge der ohmschen Last, d.h. $g = g(I, w_l)$. Geben Sie einen Zusammenhang zwischen der in das System eingebrachten Wärme $\dot{W}$ und dem Strom I an. **Hinweis:** Es gilt $\dot{W} = \int_{\mathcal{V}} g \mathrm{d}\mathcal{V}$. 1.5 P.|

Die Teilaufgaben 3e) bis 3g) können unabhängig von den Teilaufgaben 3a) bis 3d) gelöst werden.
Der Wärmestrom $\dot{Q}^a$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Einerseits kommt es zwischen der Isolierung und der Luft zu einem konvektiven Wärmeübergang, der durch den Wärmeübergangskoeffizienten α charakterisiert ist, und andererseits tauscht die Isolierung mit der Wand Energie in Form von Strahlung aus.

e) Bei der Strahlungsberechnung mittels der Netto-Strahlungsmethode muss man Sichtfaktoren bestimmen. Geben Sie die beiden bei der Berechnung der Sichtfaktoren nützlichen Gesetzmäßigkeiten an. Welche Eigenschaft gilt bei konvexen Körpern? **Hinweis:** Der Strahlungsraum besteht aus N Teilstücken mit der Oberfläche A_i, $i = 1, \ldots, N$. 1.5 P.|

f) Berechnen Sie die Sichtfaktoren für das vorliegende Problem und bestimmen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_s^a$ infolge von Strahlung. **Hinweis:** Bei der Berechnung der strahlungs-bedingten Wärmestromdichte $\dot{q}_s^a$ sind nur die Matrizen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ sowie die Vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\mathbf{T}$ zu definieren. Die Formel muss nicht ausgewertet werden. 2.0 P.|

g) Bestimmen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_k^a$ infolge von Konvektion. Wie lautet der gesamte Wärmestrom $\dot{Q}^a$ an der Außenseite $r=r_i$ der Isolierung. 1.0 P.|

Lösung:

a) *Wärmeleitgleichung für Isolation und Kabel;*

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_l(r,t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_l(r,t)}{\partial z^2} \right) + g \quad r \in [0, r_l]$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i(r,t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_i(r,t)}{\partial z^2} \right) \quad r \in (r_l, r_i]$$

In beiden Gleichungen kann die z-Koordinate infolge des unendlich langen Kabels vernachlässigt werden und weiters kann aufgrund der Symmetrie die Abhängigkeit bezüglich φ entfallen.
Basierend auf der Symmetrie muss an der Stelle $r = 0$

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

gelten. Die Wärmeleitgleichung ist eine parabolische Differentialgleichung und bedingt, dass die Lösung 2-mal stetig differenzierbar ist und infolgedessen kann der Temperaturverlauf keine Unstetigkeit aufweisen. Daher gilt an der Kontaktstelle $r = r_l$ zwischen dem Kabel und der Isolierung

$$T_l(r_l, t) = T_i(r_l, t).$$

Das Kabel samt Isolation tauscht mit der Umgebung Energie in Form von Konvektion und Strahlung aus und somit gilt an der Stelle $r = r_i$

$$-\lambda_i \left. \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} \right|_{r=r_i} = -\dot{q}^a(t).$$

b) *Die stationären Gleichungen lauten*

$$0 = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial r} \right) \right) + g \qquad r \in [0, r_l]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} \right) \qquad r \in [r_l, r_i]$$

und ausgehend von diesen beiden Gleichungen kann einfach nachgeprüft werden, dass die beiden angegebenen Temperaturprofile die stationären Gleichungen erfüllen.

c) *Örtlicher Temperaturverlauf: Siehe Abbildung 6. Hier gilt $T_0 = T_1 + \frac{g r_l^2}{4\lambda_l}$.*

d) *Mit Hilfe des spezifischen Widerstands w_l des Kabels folgt die volumetrische Wärmequelle g zu*

$$g = w_l \left(\frac{I}{r_l^2 \pi} \right)^2.$$

Die in das System eingebrachte Wärme $\dot{W}$ lautet

$$\dot{W} = g r_l^2 \pi L = \frac{w_l L}{r_l^2 \pi} I^2.$$

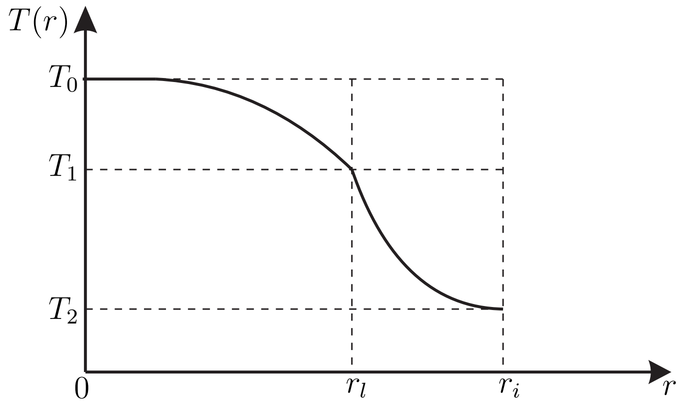

Abbildung 6: Örtlicher Temperaturverlauf.

e) *Zur Berechnung der Sichtfaktoren verwendet man einerseits die Reziprozitätsregeln und andererseits die Summationsregeln*

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$
$$1 = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Bei konvexen Körpern ist der Sichtfaktor F_{ii} *gleich null.*

f) *Die strahlungs-bedingte Wärmestromdichte erhält man aus der Formel*

$$\dot{\mathbf{q}}_s = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1}\, \mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\sigma \mathbf{T}^4$$

mit den Vektoren $\dot{\mathbf{q}}_s = [\dot{q}_s^a, \dot{q}_s^w]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{T} = [T_2, T_w]^{\mathrm{T}}$ *und* $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i, \varepsilon_w]^{\mathrm{T}}$, *der Einheitsmatrix*

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und der Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2r_i\pi}{a_w + b_w} & 1 - \frac{2r_i\pi}{a_w + b_w} \end{bmatrix}.$$

g) *Die konvektive Wärmestromdichte* $\dot{q}_k^a$ *ergibt sich zu* $\dot{q}_k^a = \alpha(T_\infty - T_2)$ *und daraus folgt direkt der Wärmestrom* $\dot{Q}^a$ *an der Stelle* $r = r_i$ *zu*

$$\dot{Q}^a = 2r_i\pi L(\dot{q}_k^a + \dot{q}_s^a).$$