

Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 26.06.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	11	7	10	6	34
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 sind zwei Pendel (Länge L_1 , Masse m_1) starr mit Hilfe eines Querstabes (Länge L_2 , Masse m_2) miteinander gekoppelt. Die Pendel sind durch eine lineare Drehfeder (Federkonstante c_1 , entspannte Lage für $\varphi = 0$) mit dem Querstab verbunden. Über eine masselose Stange der Länge l wird auf eine Punktmasse m_K mittels eines Elektromotors (Masse m_M , fix im Schwerpunkt des Querstabes befestigt) ein externes Drehmoment τ aufgebracht. Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibungsmomente in den Aufhängepunkten (horizontaler Abstand L_2) durch drehwinkelgeschwindigkeitsproportionale Drehdämpfer (Dämpferkonstante d_1) ausgedrückt werden können. 11 P.

Hinweis: Das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes (Masse m , Länge l), der um eine Querachse durch den Schwerpunkt rotiert, kann näherungsweise mit $\frac{1}{12}ml^2$ angenommen werden.

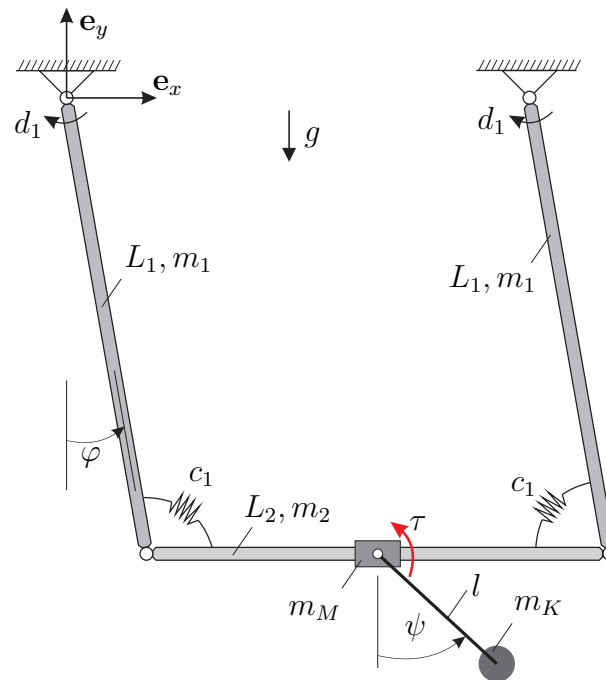


Abbildung 1: Starr gekoppelte Pendel.

- Wählen Sie einen geeigneten Vektor der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und stellen Sie die Ortsvektoren \mathbf{r}_2 und \mathbf{r}_K vom Ursprung des Koordinatensystems zu den Schwerpunkten des Querstabes und der Punktmasse. 2 P.
- Bestimmen Sie die translatorische Geschwindigkeit der Punktmasse m_K . 1 P.
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und deren Zeitableitung $\dot{\mathbf{q}}$. 4 P.
- Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} . 2 P.
- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus her. 2 P.

Lösung:

a)

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi \\ -L_1 \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi + l \sin \psi \\ -L_1 \cos \varphi - l \cos \psi \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{\mathbf{r}}_K = L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}$$

c)

$$T = 2\frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 \\ + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right]$$

d)

$$V = 2m_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \varphi) + (m_2 + m_M) g L_1 (1 - \cos \varphi) \\ + m_K g [L_1 (1 - \cos \varphi) + l (1 - \cos \psi)] + 2\frac{1}{2} c_1 \varphi^2$$

e)

$$\left(2 \left(\frac{1}{12}m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) L_1^2 \right) \ddot{\varphi} \\ + m_K L_1 l \frac{d}{dt} \left(\dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) \\ - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi) \\ + \sin \varphi (m_1 + m_M + m_2 + m_K) g L_1 + 2c_1 \varphi = -2d_1 \dot{\varphi} \\ m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 l \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\ - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \\ + m_K g l \sin \psi = \tau$$

2. In Abbildung 2 ist eine auf eine Dachschräge senkrecht eintretende Sonneneinstrahlung G_S schematisch dargestellt. Durch das Dachfenster aus Milchglas (Absorptionsgrad α_F , Reflexionsgrad ρ_F) wird ein Anteil der Sonneneinstrahlung transmittiert und diffus ins Wohnzimmer (Lufttemperatur T_L) abgestrahlt. Ein Anteil der durch das Fenster transmittierten Sonneneinstrahlung erwärmt das im Kugelaquarium (Radius R , Glasdicke vernachlässigbar) ruhende Wasser. Das Erwärmen des Wassers mit Sonnenenergie wird hierbei in Form einer volumetrischen Wärmequelle $\frac{O_A}{V_W} \dot{q}_A$ modelliert, wobei \dot{q}_A die auf die Aquariumoberfläche O_A eintretende Strahlungsdichte und V_W das Füllvolumen des Aquariums darstellen. Zusätzlich wird das Wasser im Aquarium mit einem kugelförmigen Heizkörper (Radius r , Leistung \dot{Q}) beheizt.

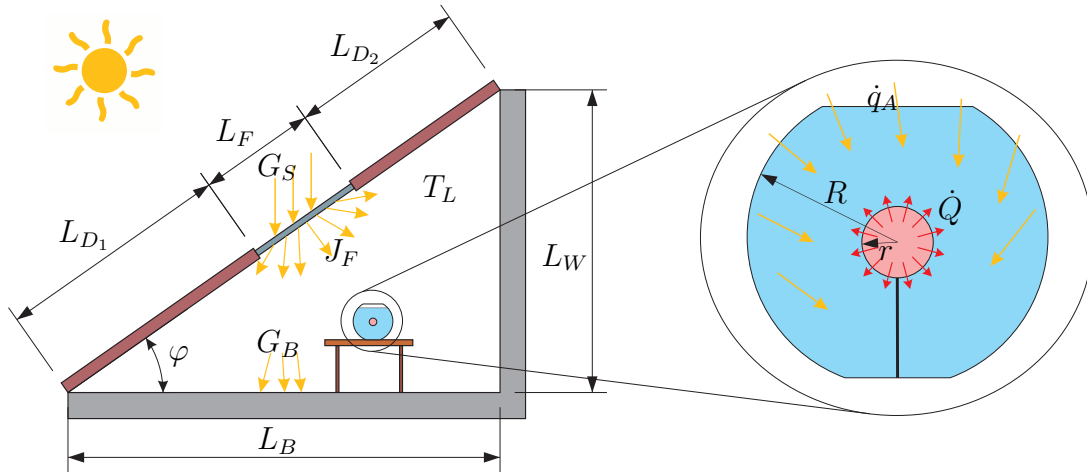


Abbildung 2: Sonneneinstrahlung durch Dachfenster.

- a) Bestimmen Sie den Sichtfaktor F_{F-B} zwischen Fenster und Boden. Berechnen Sie hierfür zuerst die Sichtfaktoren F_{B-D_1} (Boden–Dachstück D_1), F_{B-F} (Boden–Fenster) und F_{B-D_1F} (Boden–Fenster mit Dachstück D_1), indem Sie die Summationsregel für den Strahlungsraum und die Formelsammlung nutzen. Nehmen Sie hierbei an, dass das Wohnzimmer leer ist. 3 P.
- b) Berechnen Sie die auf den Boden eintretende Wärmestromdichte G_B . Nehmen Sie an, dass die vom Fenster ins Wohnzimmer abgehende Ausstrahlung J_F lediglich eine Funktion der durch das Fenster transmittierten Sonneneinstrahlung G_S ist. Die emittierten Ausstrahlungen des Strahlungsraumes können dabei vernachlässigt werden. 1 P.
- c) Nun sei die auf die Aquariumoberfläche eintretende Strahlungsdichte \dot{q}_A bekannt. Formulieren Sie die Wärmeleitgleichung mit den Randbedingungen für das Wasser im Aquarium mit $T(R) = T_L$ unter der Annahme radialsymmetrischer Verhältnisse. Bestimmen Sie das stationäre Temperaturprofil im Aquarium und die Wassertemperatur $T(r)$ für konstante Wärmeleitfähigkeit λ . 3 P.
- Hinweis:** Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r beträgt $4\pi r^2$ und das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
 F_{B-D_1} &= \frac{1}{2L_B} \left(L_B + L_{D_1} - \sqrt{L_B^2 + L_{D_1}^2 - 2L_B L_{D_1} \cos \varphi} \right) \\
 F_{B-D_1F} &= \frac{1}{2L_B} \left(L_B + L_{D_1} + L_F - \sqrt{L_B^2 + (L_{D_1} + L_F)^2 - 2L_B (L_{D_1} + L_F) \cos \varphi} \right) \\
 F_{B-F} &= F_{B-D_1F} - F_{B-D_1} \\
 F_{F-B} &= \frac{L_B}{L_F} (F_{B-D_1F} - F_{B-D_1})
 \end{aligned}$$

b)

$$G_B = F_{F-B} (1 - \alpha_F - \rho_F) G_S \cos \varphi$$

c)

$$\begin{aligned}
 \rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(\bar{r}, t) &= \lambda \left(\frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t) \right) \right) + \underbrace{\frac{3R^2}{R^3 - r^3} \dot{q}_A}_{=:c} \\
 -\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t) \Big|_{\bar{r}=r} &= \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} \\
 T(R, t) &= T_L
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{stat}(\bar{r}) &= \frac{1}{6} \frac{c}{\lambda} (R^2 - \bar{r}^2) + \left(\frac{1}{3} \frac{c}{\lambda} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{r}} \right) + T_L \\
 T_{stat}(r) &= \frac{1}{6} \frac{c}{\lambda} (R^2 - r^2) + \left(\frac{1}{3} \frac{c}{\lambda} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) + T_L
 \end{aligned}$$

3. Mit einer Parallelfachzange wird ein zylindrischer Körper festgehalten, siehe Abbildung 3. Durch die Haltekraft F_H (mit Anteilen in x - und y -Richtung) soll der Zylinder festgehalten werden. Durch die Zange wirkt auf den Körper die Kraft F_Q . Auf den zylindrischen Körper mit der Masse m wirkt die Gravitationskraft in negativer y -Richtung. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Zangenschenkel und Zylinder ist μ . Das Eigengewicht der Zange kann für die Berechnungen vernachlässigt werden. 10 P.]

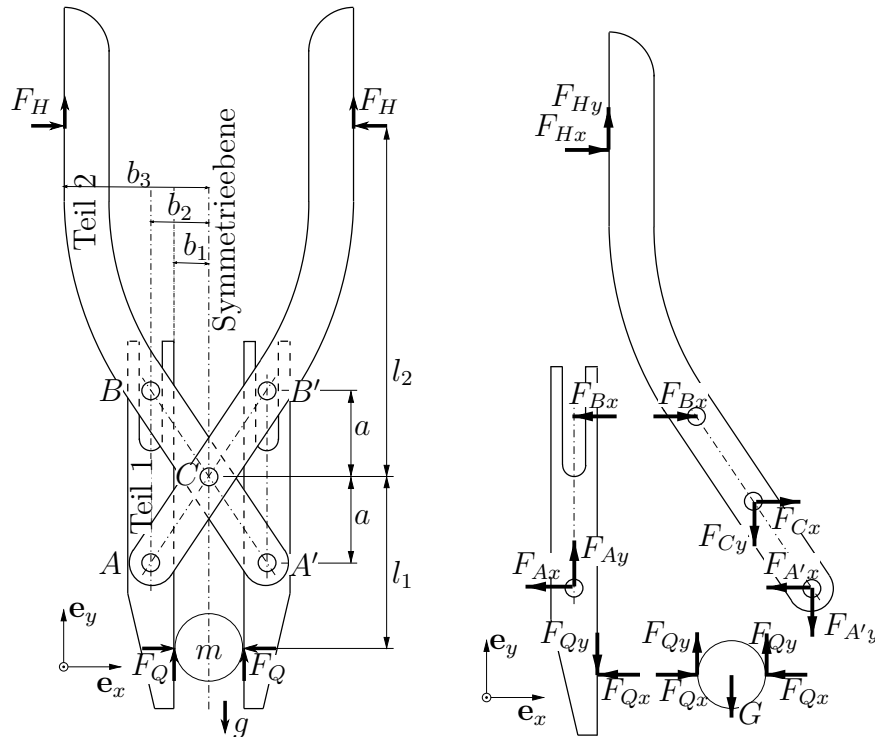


Abbildung 3: Parallelfachzange.

Hinweis: Da alle Kräfte spiegelbildlich zur Symmetrieebene sein müssen genügt es, die aus Teil 1 und Teil 2 bestehende Hälfte zu betrachten.

- a) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die zwei Teile der Zange und den zylindrischen Körper an. Verwenden Sie dazu die Kräfte in den Gelenken A, B, und C in x - und y -Richtung an, wie in Abbildung 3 eingezeichnet. 5 P.]
- Hinweis:** Die in den Gelenken und Bolzen übertragenen Kräfte werden dabei durch Einzelkräfte in deren Mittelpunkten idealisiert. Die Richtung der Kraft B ist normal zur reibungsfreien Führung, d.h. $F_{By} = 0$.
- b) Berechnen Sie die auf den Körper wirkende Kraft $F_Q = [F_{Qx}, F_{Qy}]$, sowie die Gelenkkraft $F_C = [F_{Cx}, F_{Cy}]$ im Gelenk C in Abhängigkeit der Haltekraft $F_H = [F_{Hx}, F_{Hy}]$. 3 P.]
- c) Wie groß muss die Haltekraft F_{Hx} mindestens sein, um den Körper mit der Masse m durch die Haftreibung in der Zange zu halten? 2 P.]

[1] P. Lugner, W. Mack, and M. Plöchl, *Angewandte Mechanik, Aufgaben und Lösungen zur Statik und Festigkeitslehre*. Wien: Springer, 2006. [Online]. Available: <http://link.springer.com/book/10.1007/3-211-33508-0>

Lösung:

a) • Gleichgewichtsbedingungen für Teil 1:

$$F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Qx} = 0 \quad (1a)$$

$$F_{Ay} - F_{Qy} = 0 \quad (1b)$$

$$(l_1 - a)F_{Qx} - 2aF_{Bx} + (b_2 - b_1)F_{Qy} = 0 \quad (1c)$$

• Gleichgewichtsbedingungen für Teil 2:

$$F_{Ax} - F_{Bx} - F_{Cx} - F_{Hx} = 0 \quad (2a)$$

$$F_{Ay} + F_{Cy} - F_{Hy} = 0 \quad (2b)$$

$$aF_{Ax} + aF_{Bx} + l_2F_{Hx} + b_3F_{Hy} + b_2F_{Ay} = 0 \quad (2c)$$

• Gleichgewichtsbedingungen für den Körper:

$$F_{Qx} - F_{Qx} = 0 \quad (3a)$$

$$2F_{Qy} - G = 2F_{Qy} - mg = 0 \quad (3b)$$

Als Bezugspunkte für die Momentengleichgewichte wurden dabei die Punkte A bzw. C gewählt (beliebig). Es gilt $F_{A'x} = F_{Ax}$, $F_{A'y} = F_{Ay}$, $F_{B'x} = F_{Bx}$, da alle Kräfte spiegelbildlich zur Symmetrieebene sind.

b) Aus den Gleichungen der ersten Aufgabe erhält man die Kräfte

$$F_{Qx} = \frac{l_2}{a}F_{Hx} + \frac{b_3 + b_2}{a}F_{Hy} \quad (4a)$$

$$F_{Qy} = F_{Hy} = \frac{1}{2}mg \quad (4b)$$

$$F_{Cx} = - \left(1 + \frac{l_1 l_2}{a^2} \right) F_{Hx} - \left(\frac{b_2 - b_1}{a} + \frac{b_3 l_1 + b_2 l_1}{a^2} \right) \frac{F_{Hy}}{2} \quad (5a)$$

$$F_{Cy} = 0 \quad (5b)$$

$F_{Cy} = 0$ ist direkt aus der Symmetrie ersichtlich, bzw. ergibt das Kräftegleichgewicht in y-Richtung für den zu Teil 2 gespiegelten Teil

$$F_{Ay} - F_{Cy} - F_{Hy} = 0, \quad (6)$$

woraus man mit (2b) $F_{Cy} = 0$ erhält.

c) Die entgegen der Gewichtskraft mg wirkende Reibkraft ergibt sich zu

$$F_F = 2F_{Qy} = 2F_{Qx}\mu, \quad (7)$$

daher muss für die Haltekraft F_{Hx}

$$F_{Hx} > \frac{mg}{2l_2} \left(\frac{a}{\mu} - b_2 - b_3 \right) \quad (8)$$

gelten.

4. In dieser Aufgabe soll die Temperaturmessung eines Festkörpers betrachtet werden. 6 P.
Für eine verallgemeinerte Messsituation kann im Festkörper (Messobjekt) eine innere Zone mit einer Wärmequelle konstanter Leistung \dot{q} bzw. mit einer konstanten Kerntemperatur T_K angenommen werden (siehe Abbildung 4).

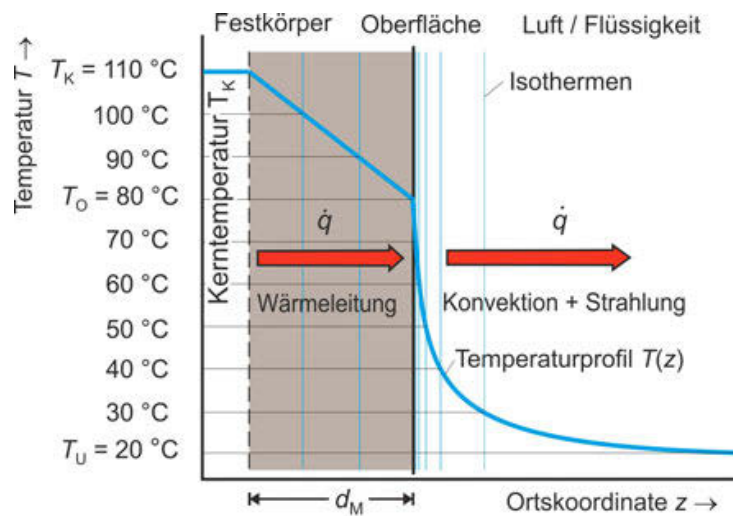


Abbildung 4: Ungestörtes Temperaturprofil an Oberflächen von Festkörpern.

- a) Berechnen Sie die Wärmestromdichte \dot{q} über die Schichtdicke d_M eines homogenen Materials mit der Wärmeleitfähigkeit λ_M . 1 P.
Hinweis: Nehmen Sie dazu die Temperatur der Oberfläche T_O konstant an.
- b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte \dot{q} an der Kontaktfläche zwischen dem Festkörper (Temperatur T_O) und der Luft (Temperatur T_U) mithilfe des Wärmeübergangskoeffizienten α . 1 P.
- c) Zeichnen Sie ein thermisches RC-Ersatzschaltbild (aus 2 thermischen Widerständen R_M und R_A , ohne Kapazität), das das beschriebene Wärmeübertragungsproblem abbildet. Beschriften Sie alle auftretenden Größen und erklären Sie, wie diese berechnet werden. 2 P.

Wie in Abbildung 5 dargestellt, wird ein fest mit der Oberfläche verbundener Temperaturfühler angebracht. Dadurch wird das ursprüngliche Temperaturfeld geändert, was zu einer Oberflächentemperatur T_{OS} und zu einer Wärmestromdichte \dot{q}_S im Sensorbereich führt.

Die Differenz zwischen der Sensortemperatur T_S und der ungestörten Oberflächentemperatur T_O ist der thermische Messfehler und kann als Summe aus drei Teilfehlern dargestellt werden:

$$\Delta T_{th} = T_S - T_O = \Delta T_{th,1} + \Delta T_{th,2} + \Delta T_{th,3} \quad (9)$$

Der erste Teilfehler $\Delta T_{th,1} = T_{OS} - T_O$ ist die Differenz zwischen gestörter und ungestörter Oberflächentemperatur infolge des durch den Temperaturfühler geänderten Temperaturfelds (thermischer Widerstand R_M). Der zweite Teilfehler $\Delta T_{th,2} = T_{SO} - T_{OS}$ ist eine durch den Kontaktwiderstand R_K hervorgerufene Differenz zwischen der gestörten Oberflächentemperatur des Messobjekts T_{OS} und der Temperatur der Kontaktfläche des Temperaturfühlers T_{SO} . Der dritte Teilfehler $\Delta T_{th,3} = T_S - T_{SO}$ ist eine Temperaturdifferenz zwischen der Kontaktfläche des Temperaturfühlers (T_{SO}) und dem eigentlichen Temperatursensor (T_S) durch einen inneren

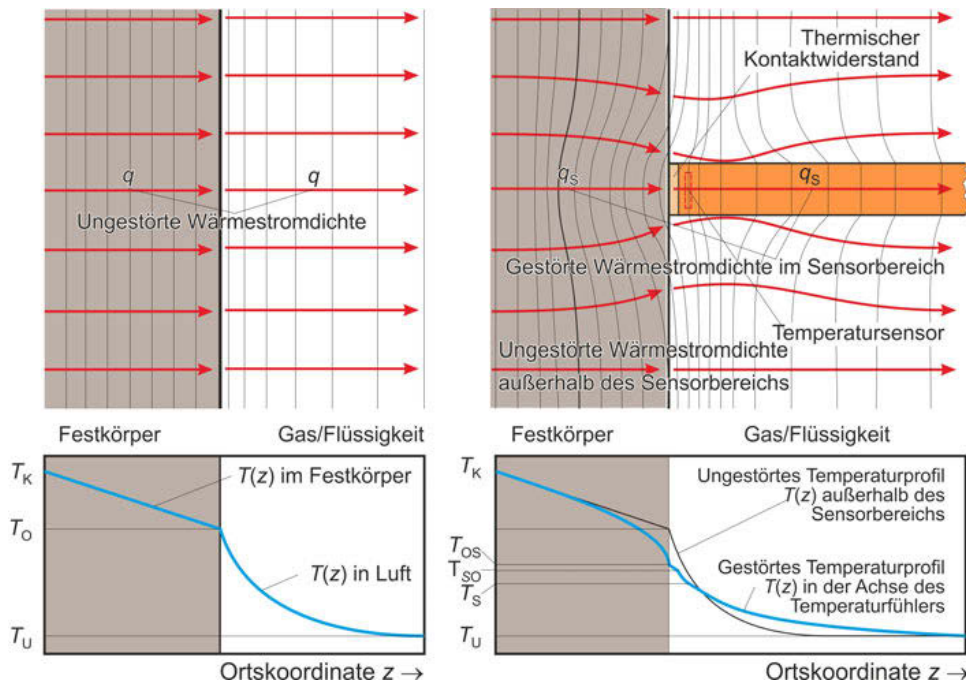


Abbildung 5: Schematische Darstellung der Wärmeströme, Isothermen und Temperaturverläufe $T(z)$ an der Oberfläche eines Festkörpers ohne (links) und mit (rechts) aufgesetztem Tast-Temperaturfühler.

thermischen Widerstand R_S des Temperaturfühlers. Zu diesen sind ein Wärmeleitwiderstand zwischen Temperatursensor und Halterung bzw. Handgriff des Temperaturfühlers und ein Übergangswiderstand von Halterung und Handgriff zur Umgebung - beide zunächst zu R_F zusammengefasst - zu rechnen.

- d) In Abbildung 6 ist das elektroanaloge Modell zur beschriebenen Oberflächentemperaturmessung dargestellt. Berechnen Sie den sogenannten Kopplungsfaktor $B_0 = \frac{T_{OS} - T_U}{T_K - T_U}$. 2 P.

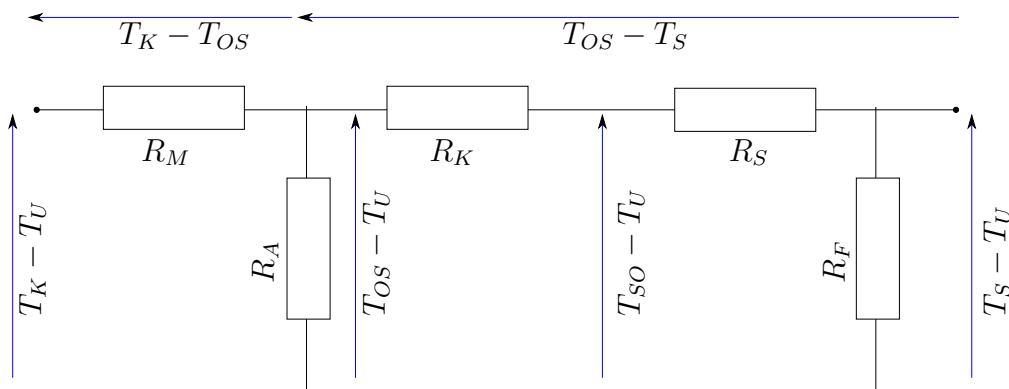


Abbildung 6: Elektroanaloges Modell zur Oberflächentemperaturmessung.

[2] F. Bernhard, Ed., *Handbuch der Technischen Temperaturmessung*. Berlin Heidelberg: Springer, 2014. [Online]. Available: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-24506-0>

Lösung:

a)

$$\dot{q} = \frac{\lambda (T_K - T_O)}{d_m} \quad (10)$$

b)

$$\dot{q} = \alpha (T_O - T_U) \quad (11)$$

c)

$$R_M = \frac{d_m}{\lambda A} \quad (12a)$$

$$R_A = \frac{1}{\alpha A} \quad , \quad (12b)$$

wobei A die Querschnittsfläche des Körpers ist.

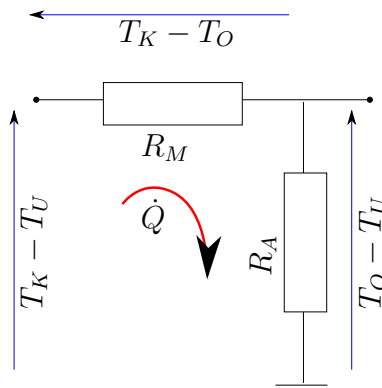


Abbildung 7: Lösung zu Aufgabe 4c, Elektoranaloges Modell zur Oberflächentemperaturmessung (ohne Temperatursensor).

d) Aus den Gleichungen

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \quad (13a)$$

$$(R_K + R_S + R_F)\dot{Q}_2 = T_{OS} - T_U \quad (13b)$$

$$R_A\dot{Q}_1 = T_{OS} - T_U \quad (13c)$$

$$R_M\dot{Q} + R_A\dot{Q}_1 = T_K - T_U \quad (13d)$$

ergibt sich

$$B_0 = \frac{T_{OS} - T_U}{T_K - T_U} = \frac{R_A (R_K + R_S + R_F)}{R_M (R_A + R_K + R_S + R_F) + R_A (R_K + R_S + R_F)} \quad (14)$$