

TAREA 7

- Unidad: Modelación probabilística
- Materia: Matemáticas para Ciencia de Datos
- Programa: Maestría en Ciencia de Datos e Información, INFOTEC
- Docente: Juliho Castillo Colmenares, Sc.D.

Grupo A

- Eduardo Gomez Lopez
- David Aaron Ramírez Olmeda
- Erika Araceli Gonzalez
- Ar Sullivan Santana Najera
- Alejandro Macías

Lectura asignada

Wikipedia contributors. (2021, March 18). Markov chain. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 17:50, March 21, 2021, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Markov_chain&oldid=1012769976 (https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Markov_chain&oldid=1012769976)

Instrucciones

1. Completa las lecturas propuestas para esta actividad y reúnete con los miembros de tu equipo para comentar las lecturas y la tarea.
2. Resuelvan el siguiente problema, desarrollando de manera clara todos y cada unos de los puntos.
3. Si incluyes bloque de código, coméntalos de manera concisa, enfatizando su relación con la solución.
4. Detalla la información auxiliar de las gráficas para que tu conclusión sea clara.
5. Organiza tu documento, escribe de manera explícita el enunciado de cada inciso y sepáralos utilizando secciones.
6. Transcríbanlo a un archivo PDF y suban un único archivo por equipo.
7. Se considerará un inciso como incorrecto si el resultado no es el esperado, y se considerará incompleto si el resultado no está debidamente justificado.

Planteamiento del problema

Hay tres categorías de contribuyentes de impuestos sobre la renta en los Estados Unidos: los que nunca evaden impuestos, los que a veces lo hacen y los que siempre lo hacen. Un examen de las declaraciones de impuestos auditadas de un año al siguiente muestra que de aquellos que no evadieron impuestos el año pasado, el 95% continúa en la misma categoría este año, el 4% pasa a

la categoría "a veces" y el resto se mueve a la categoría "siempre". Para aquellos que nunca

Introducción

En este problema se modela la evasión de impuestos en tres categorías de contribuyentes en los Estados Unidos utilizando una cadena de Markov. A partir de la matriz de transición y el vector de probabilidades estacionarias obtenidos, se pudo calcular la reducción anual de los impuestos recaudados debido a la evasión de impuestos en cada categoría.

Inciso A

Expresa el problema en términos de una cadena de Markov, justificando detalladamente la elección de tu modelo.

Podemos definir los siguientes estados:

- Estado 1: "Nunca evaden impuestos"
- Estado 2: "A veces evaden impuestos"
- Estado 3: "Siempre evaden impuestos"

La matriz de transición correspondiente es la siguiente:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Estado del} \\ \text{sistema el} \\ \text{siguiente año} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Estado del sistema} \\ \text{este año} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.95 & 0.40 & 0.01 \\ 0.06 & 0.90 & 0.04 \\ 0.00 & 0.10 & 0.90 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Es posible justificar el uso de este problema como una cadena de Markov bajo la definición de las propiedades de esta, ser discreta en el tiempo, se define en un espacio finito de espacios posibles y el cambio entre estados esta determinado por un cambio de probabilidades, así como que un estado futuro depende sólo del estado inmediatamente anterior.

Esto se refleja en el problema de los contribuyentes de impuestos bajo el siguiente orden, es discreta en tiempo, pues el tiempo del problema en base a los años fiscales registrados. El espacio finito de espacios se define bajo los únicos tres estados que posee este sistema, nunca evaden impuestos, los que a veces lo hacen y los que siempre lo hacen. La tercera propiedad aparece en los cambios que se definen en el enunciado y por último cada uno de los futuros propuestos ocurre únicamente en base a los datos del estado actual.

Por ejemplo: La entrada en la fila i y columna j de la matriz P representa la probabilidad de que un individuo en el estado i pase al estado j en el siguiente período de tiempo. La probabilidad de que un individuo que está en el estado 1 ("Nunca evaden impuestos") en un año dado pase al estado 2 ("A veces evaden impuestos") en el siguiente año es del 4%, mientras que la probabilidad de permanecer en el estado 1 es del 95%.

Inciso B

Calcula la distribución estacionaria y explica este resultado en términos de nuestro problema de impuestos.

Se dice que una Cadena de Markov en tiempo discreto admite una distribución estacionaria en la medida que las probabilidades de largo plazo existen y es independiente de la distribución inicial.

La distribución estacionaria es el vector π tal que $\pi P = \pi$, donde P es la matriz de transición. En otras palabras, la proporción de tiempo que la cadena pasa en cada estado cuando se ejecuta durante un tiempo infinito.

```
In [1]: import numpy as np

P = np.array([[0.95, 0.04, 0.01], [0.06, 0.90, 0.04], [0.00, 0.10, 0.90]])

A = P.T - np.eye(3)
b = np.zeros((3, 1))
b[0] = 1

pi = np.linalg.solve(A, b)
pi = pi / np.sum(pi)
print("Distribución estacionaria:", pi.flatten())
```

Distribución estacionaria: [0.44117647 0.36764706 0.19117647]

Lo anterior significa que, a largo plazo, aproximadamente el 44% de los contribuyentes nunca evadirá impuestos, el 36% evadirá impuestos ocasionalmente y el 19% evadirá impuestos siempre.

Inciso C

Inciso C Las estadísticas muestran que un contribuyente en la categoría "a veces" evade impuestos aproximadamente 5000 por declaración y en la categoría "siempre" sobre alrededor de 12000 Suponiendo que la población de contribuyentes es de 70 millones y que la tasa de impuesto sobre la renta promedio es del 12%, determinar la reducción anual de los impuestos recaudados por evasión.

In [2]: `n = 70000000`

```
imp_nunca = n *  $\pi$ [0]
imp_avece = n *  $\pi$ [1]
imp_siemp = n *  $\pi$ [2]
total = imp_nunca + imp_avece + imp_siemp

print(f"Nunca evade: {imp_nunca.astype(int)}")
print(f"A veces evade: {imp_avece.astype(int)}")
print(f"Siempre evade: {imp_siemp.astype(int)}")
print(f"Total: {total.astype(int)}")
```

```
Nunca evade: [30882352]
A veces evade: [25735294]
Siempre evade: [13382352]
Total: [70000000]
```

In [3]: `tax = 0.12`

```
tax_imp_avece = (imp_avece * 5000 * tax) / 1000000
tax_imp_siemp = (imp_siemp * 12000 * tax) / 1000000

print(f"Impuestos evadidos por contribuyentes 'a veces': ${tax_imp_avece.it
print(f"Impuestos evadidos por contribuyentes 'siempre': ${tax_imp_siemp.it
print()
print(f"Impuestos evadidos por contribuyentes 'siempre': ${tax_imp_siemp.it
```

```
Impuestos evadidos por contribuyentes 'a veces': $15441.18 millones
Impuestos evadidos por contribuyentes 'siempre': $19270.59 millones

Impuestos evadidos por contribuyentes 'siempre': $34711.76 millones
```

Conclusión

En este problema, se utilizó una cadena de Markov para modelar la evasión de impuestos en tres categorías de contribuyentes. A partir de la distribución estacionaria obtenida, se pudo calcular la cantidad de impuestos evadidos y la reducción anual en la recaudación de impuestos debido a la evasión de impuestos