

UNIVERSITÀ DI GENOVA



**Università
di Genova**

Macchine di Turing Quantistiche

Relatori

Elena Zucca

Francesco Dagnino

Candidato

Pietro Zignaigo

16-12-2024

Introduzione

- Computazione quantistica

- Modello matematico

- Macchina di Turing

Macchina di Turing quantistica

- Configurazioni

- Pre-macchina di Turing quantistica

- Operatore di transizione

Funzioni calcolabili quantistiche

- PPD e computazioni

- Definizione

- Categorie di terminazione

Conclusione

Computazione quantistica

- Stato di un computer quantistico = sovrapposizione di stati discreti

Computazione quantistica

- Stato di un computer quantistico = sovrapposizione di stati discreti
- L'unità minima di informazione quantistica è il *qubit*

$$1|0\rangle + 0|1\rangle$$

$$0|0\rangle + 1|1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Computazione quantistica

- Osservazione ottiene 1 o 0, con probabilità dipendente dai pesi, distrugge parte dell'informazione, facendo collassare su $|0\rangle$ o su $|1\rangle$
- Quantum advantage: Dato un problema, la complessità temporale degli algoritmi quantistici può essere minore di quella degli algoritmi classici

Modello matematico

Spazi di Hilbert

- Spazio di Hilbert generato da \mathcal{B}

$$\ell^2(\mathcal{B}) = \left\{ \phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\phi\|^2 = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{B}} |\phi(\mathcal{C})|^2 < \infty \right\}$$

- Prendiamo in considerazione solo ℓ_1^2

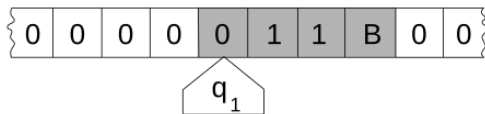
$$\ell_1^2(\mathcal{B}) = \left\{ \phi \in \ell^2(\mathcal{B}) \mid \|\phi\|^2 = 1 \right\}$$

Modello matematico

Operatori

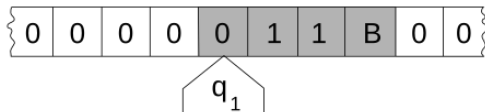
- TODO: trasformazione stato quantistico = operatore lineare = cioè una matrice $B \times B$
- Possono essere usati solo **operatori unitari**
 - invertibili
 - conservano la norma
- In forma matriciale, sia unitario
 1. Deve avere colonne con norma 1 (perché la norma sia sempre conservata)
 2. Ogni coppia di colonne deve essere ortogonale

Macchina di Turing



- Modello matematico per descrivere tutti gli algoritmi
- **Funzioni calcolabili**: Funzioni parziali $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ modellabili da una macchina di Turing

Configurazioni



- Una **configurazione** di una macchina di Turing è

$$\langle \alpha, q, \beta, i \rangle \in \Sigma^* \times \mathcal{Q} \times \Sigma^* \times \mathbb{Z}$$

- Definiamo $\mathfrak{C}_M = \Sigma^* \times \mathcal{Q} \times \Sigma^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
- **Q-configurazioni**: elementi di $\ell_1^2(\mathfrak{C}_M)$ = sovrapposizione quantistica di configurazioni

Pre-macchina di Turing quantistica

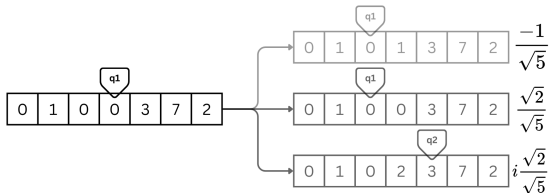
$$M = \langle \Sigma \times \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}_s \times \mathcal{Q}_t \times \delta \times q_i \times q_f \rangle$$

- Funzione di transizione

$$\delta : (\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_t) \times \Sigma \rightarrow \ell_1^2((\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_s) \times \Sigma \times \mathbb{D})$$

Operatore di transizione

- Definiamo U_M su ogni $|C\rangle$ con $C \in \mathcal{C}_M$



- Una pre-macchina di Turing quantistica è una **macchina di Turing quantistica** se U_M è unitario
- Esiste un teorema che garantisce l'unitarietà se δ rispetta certe condizioni

Funzioni calcolabili quantistiche

PPD e computazioni

- Una **Partial Probability Distribution (PPD)** è una funzione $\mathcal{P} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{[0,1]}$ tale che $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n) \leq 1$
Una **Probability Distribution (PD)** è una *PPD* tale che $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n) = 1$
- A ogni $|\phi\rangle$ si può associare una PPD $\mathcal{P}_{|\phi\rangle}$
 $\mathcal{P}_{|\phi\rangle}(n)$ = probabilità di $|\phi\rangle$ di collassare su una configurazione finale con n simboli 1 sul nastro

Funzioni calcolabili quantistiche

PPD e computazioni

- Una **computazione** $K_{|\phi\rangle}^M$ è una sequenza $|\phi_i\rangle$ tale che
 1. $|\phi_0\rangle = |\phi\rangle$ è una q-configurazione finale
 2. $|\phi_i\rangle = U_M^i |\phi\rangle$
- A ogni computazione si associa una sequenza di PPD $\mathcal{P}_{|\phi_i\rangle}$
- La sequenza $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_{|\phi_i\rangle}(n)$ è crescente

Funzioni calcolabili quantistiche

Definizione

- Prendiamo in considerazione funzioni di forma $f : \ell_1^2(\mathbb{N}) \rightarrow PPD$
- $\mathcal{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{|\phi_i\rangle}$ è l'output calcolato di M
- Scegliamo una codifica da $\ell_1^2(\mathbb{N})$ a $\ell_1^2(\mathfrak{C}_M^{init})$
- **Funzioni calcolabili quantistiche:** Funzioni $f : \ell_1^2(\mathbb{N}) \rightarrow PPD$ rappresentabili da una Macchina di Turing quantistica

Categorie di terminazione

Una data computazione può

1. Produrre una PD in un numero di passi finito
2. Non produrre una PD in un numero di passi finito, ma avere una PD come PPD limite
3. Non avere una PD come PPD limite

Conclusione

