Università di Genova

Università di Genova

Macchine di Turing Quantistiche

Relatori

Elena Zucca

Francesco Dagnino

Candidato

Pietro Zignaigo

16-12-2024

Computazione quantistica

- Lo stato di un computer quantistico è una sovrapposizione di stati discreti
- L'unità minima di informazione quantistica è il *qubit*

$$[1, 0] = |0\rangle$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

- Osservazione distrugge parte dell'informazione, facendo collassare su $|0\rangle$ o su $|1\rangle$

Computazione quantistica

Quantum advantage: A parità di problema, la complessità temporale degli algoritmi quantistici può essere minore di quella degli algoritmi classici

Modello matematico

Spazi di Hilbert

- Per modellare uno stato quantistico si utilizzano gli *spazi di Hilbert*:

$$\ell^2(\mathcal{B}) = \left\{ \phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{B}} |\phi(\mathcal{C})|^2 < \infty \right\}$$

- Prendiamo in considerazione solo ℓ_1^2

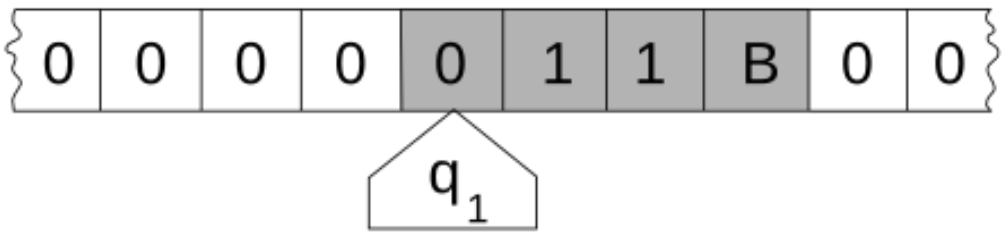
$$\ell_1^2(\mathcal{B}) = \left\{ \phi \in \ell^2(\mathcal{B}) \;\middle|\; \|\phi\|^2 = 1 \right\}$$

Modello matematico

Operatori

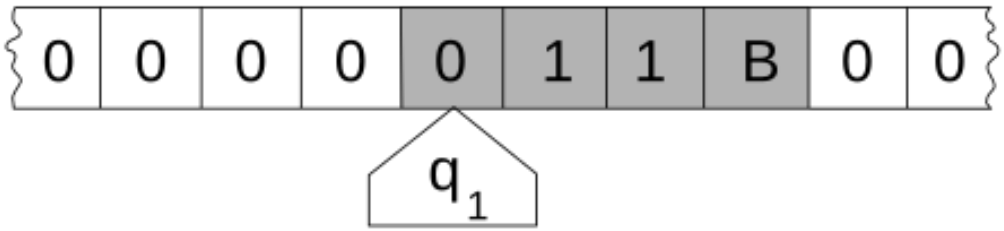
- L'equivalente delle porte logiche classiche sono gli operatori lineari
- Possono essere usati solo *operatori unitari*:
  - invertibili
  - conservano la norma
- Perché l'operatore, visto in forma matriciale, sia unitario:
  1. Deve avere colonne con norma 1 (perché la norma sia sempre conservata)
  2. Ogni coppia di colonne deve essere ortogonale, ovvero due configurazioni pure non possono sovrapporsi dopo aver applicato l'operatore

Macchina di Turing



- Modello matematico per descrivere funzioni calcolabili da un algoritmo
- **Funzioni calcolabili**: Funzioni parziali $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sono calcolabili da una macchina di Turing.

Configurazioni



- Una configurazione di una macchina di Turing è:

$$\langle \alpha, q, \beta, i \rangle \in \Sigma^* \times \mathcal{Q} \times \Sigma^* \times \mathbb{Z}$$

- *Q-configurazioni*: Elementi di $\ell_1^2(\Sigma^* \times \mathcal{Q} \times \Sigma^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N})$.
- Definiamo $\mathfrak{C}_M = \Sigma^* \times \mathcal{Q} \times \Sigma^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Macchina di Turing quantistica

- Una pre-macchina di Turing quantistica è una tupla

$$M = \langle \Sigma \times \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}_s \times \mathcal{Q}_t \times \delta_0 \times q_i \times q_f \rangle$$

- Funzione δ_0:

$$\delta_0 : (\mathcal{Q} \backslash \mathcal{Q}_t) \times \Sigma \to \ell_1^2 ((\mathcal{Q} \backslash \mathcal{Q}_s) \times \Sigma \times \mathbb{D})$$

- Una pre-macchina di Turing quantistica è una macchina di Turing quantistica se l'operatore di transizione U_M è unitario

Operatore di transizione

- Definiamo U_M su ogni $|C\rangle$ con $C \in \mathfrak{C}_M$
- Se $C \in \mathfrak{C}_M^0 \setminus \mathfrak{C}_M^t$

$$U_M(|C\rangle) = \sum_{(p,v,d)\in(\mathcal{Q}\setminus\mathcal{Q}_s)\times\Sigma\times\mathbb{D}} \delta_0(q,u)(p,v,d)\,|C_{p,v,d}\rangle$$

- Esiste un teorema che garantisce l'unitarietà se δ_0 rispetta certe condizioni

Funzioni calcolabili quantistiche

PPD e computazioni

- Una *Partial Probability Distribution (PPD)* è una funzione $\mathcal{P} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{[0,1]}$ tale che $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n) \leq 1$
  Una *Probability Distribution (PD)* è una *PPD* tale che $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n) = 1$
- A ogni $|\phi\rangle$ si può associare una PPD $\mathcal{P}_{|\phi\rangle}$
  $\mathcal{P}_{|\phi\rangle}(n) =$ probabilità di $|\phi\rangle$ di collassare su una configurazione finale con n simboli 1 sul nastro

Funzioni calcolabili quantistiche

PPD e computazioni

- Una computazione $K^M_{|\phi\rangle}$ è una sequenza $|\phi_i\rangle$ tale che
  1. $|\phi_0\rangle = |\phi\rangle$ è una q-configurazione finale
  2. $|\phi_i\rangle = U^i_M |\phi\rangle$
- A ogni computazione si associa una sequenza di PPD $\mathcal{P}_{|\phi_i\rangle}$
- La sequenza $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{|\phi_i\rangle}(n)$ è crescente

Funzioni calcolabili quantistiche

Definizione

- Prendiamo in considerazione funzioni di forma $f : \ell_1^2(\mathbb{N}) \to PPD$
- $\mathcal{P} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{|\phi_i\rangle}$ è l'*output calcolato* di M
- Scegliamo una codifica da $\ell_1^2(\mathbb{N})$ a $\ell_1^2\left(\mathfrak{C}_M^{init}\right)$
- **Funzioni calcolabili quantistiche**: Funzioni $f : \ell_1^2(\mathbb{N}) \to PPD$ rappresentabili da una Macchina di Turing quantistica

Categorie di terminazione

Una data computazione può:

1. Produrre una *PD* in un numero di passi finito
2. Non produrre una *PD* in un numero di passi finito, ma avere una *PD* come *PPD* limite
3. Non avere una *PD* come *PPD* limite

Misurazioni

Conclusione