Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЕНИЯ

Отчет к лабораторной работе №2
По дисциплине численные методы

Выполнил: Рассохов Е.П., гр. 421703

Проверил: Князева Л.П.

Минск, 2025

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Задание 1. Исследование погрешности решения СЛАУ прямыми методами.

Цель задания: убедиться в том, что решения двух систем с хорошо и плохо обусловленными матрицами коэффициентов по-разному реагируют на возмущение правой части системы - на точность решения влияют два фактора: число обусловленности матрицы и эквивалентые возмущения.

1 условие:

$$\textbf{1)}\quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & i > j, \\ i+1, & i = j, \\ 2, & i < j, \end{cases} \qquad b_i = 2ki - i^2;$$

где i=$\overline{1,7}$, j=$\overline{1,7}$, k=13

1. **Создание матрицы А по заданным условиям:**

```
A := Table[If[i > j, 1 , If[i == j, i + 1, 2]], {i, 1, 7}, {j, 1, 7}]
```

таблица · условный оп··· · условный оператор

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

2. **Создание вектора В по заданным условиям:**

```
B := Table[2 * k * i - i^2, {i, 1, 7}]
```

таблица значений

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 48 \\ 69 \\ 88 \\ 105 \\ 120 \\ 133 \end{pmatrix}$$

3. Вычисление числа обусловленности матрицы A в норме-максимум:

```
normA := Norm[A, Infinity]
           норма  бесконечнос
Print[normA]
печатать
```

14

```
normAT := Norm[Inverse[A], Infinity]
           но···  обратная мат···  бесконечнос
Print[normAT]
печатать
```

$\frac{25}{14}$

```
condA := normA * normAT
Print[condA]
печатать
```

25

4. Решение системы AX=B:

```
X := LinearSolve[A, B]
     решить линейные уравн
MatrixForm[X] // N
матричная форма  числен
```

$$\begin{pmatrix} -32.0357 \\ -9.03571 \\ 1.46429 \\ 7.79762 \\ 12.0476 \\ 15.0476 \\ 17.2143 \end{pmatrix}$$

5. Решение возмущенных систем:

5.1. 0.01%:

```
B1 = B
B1[[7]] = B1[[7]] * 1.0001
{25, 48, 69, 88, 105, 120, 133}

133.013
```

5.2. 0.1%:

```
B2 = B
B2[[7]] = B2[[7]] * 1.001
{25, 48, 69, 88, 105, 120, 133}

133.133
```

5.3. 1%:

```
B3 = B
B3[[7]] = B3[[7]] * 1.01
{25, 48, 69, 88, 105, 120, 133}

134.33
```

6. Норма векторов абсолютной ошибки:

```
ErrorX1 = SetPrecision[Norm[X1 - X, Infinity], 2]        0.0019
          задать относи…   норма        бесконечность
ErrorX2 = Norm[X2 - X, Infinity]                         0.019
          норма            бесконечность
ErrorX3 = Norm[X3 - X, Infinity]                         0.190
          норма            бесконечность
```

7. Норма векторов относительной ошибки:

```
otnErrorX1 = SetPrecision[ErrorX1 / Norm[X, Infinity], 4]    0.00005931
             задать относительную точ··· норма  бесконечность
otnErrorX2 = SetPrecision[ErrorX2 / Norm[X, Infinity], 4]    0.0005931
             задать относительную точ··· норма  бесконечность
otnErrorX3 = SetPrecision[ErrorX3 / Norm[X, Infinity], 4]    0.005931
             задать относительную точ··· норма  бесконечность
```

8. Норма векторов связки:

```
nerr1 = Norm[A.X1 - B, Infinity]    0.013
        норма          бесконечнос
nerr2 = Norm[A.X2 - B, Infinity]    0.133
        норма          бесконечнос
nerr3 = Norm[A.X3 - B, Infinity]    1.330
        норма          бесконечнос
```

2 Условие:

1. **Создание матрицы A по заданным условиям:**

```
A := Table[1 / (i + j - 1), {i, 1, 7}, {j, 1, 7}]
     таблица значений
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

2. **Создание вектора B по заданным условиям:**

```
B := Table[3*i - 2*k, {i, 1, 7}]
     |таблица значений
```

$$\begin{pmatrix} -23 \\ -20 \\ -17 \\ -14 \\ -11 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

После повторения предыдущего алгоритма:

Норма векторов абсолютной ошибки:

```
ErrorX1 = SetPrecision[Norm[X1 - X, Infinity], 2]
          |задать относи···  |норма       |бесконечность
```

1.9×10^4

```
ErrorX2 = Norm[X2 - X, Infinity]
          |норма       |бесконечность
```

189189.

```
ErrorX3 = Norm[X3 - X, Infinity]
          |норма       |бесконечность
```

1.89189×10^6

Норма векторов относительной ошибки:

```
otnErrorX1 = SetPrecision[ErrorX1 / Norm[X, Infinity], 4]
             |задать относительную точ···  |норма  |бесконечность
```

0.005009

```
otnErrorX2 = SetPrecision[ErrorX2 / Norm[X, Infinity], 4]
             |задать относительную точ···  |норма  |бесконечность
```

0.05009

```
otnErrorX3 = SetPrecision[ErrorX3 / Norm[X, Infinity], 4]
             |задать относительную точ···  |норма  |бесконечность
```

0.5009

Норма векторов связки:

```
nerr1 = Norm[A.X1 - B, Infinity]
        |норма         |бесконечнос
```

0.0005

```
nerr2 = Norm[A.X2 - B, Infinity]
        |норма         |бесконечнос
```

0.005

```
nerr3 = Norm[A.X3 - B, Infinity]
        |норма         |бесконечнос
```

0.05

Результаты вычислений отображены в таблице:

Cond(A)	«возмущение» ,%	Норма вектора абс. ошибки	Норма вектора отн. ошибки	Норма вектора невязки
Хорошо обусл.	0.01	0.0019	0.00005931	0.013
	0.1	0.019	0.0005931	0.133
	1	0.19	0.005931	1.330
Плохо обусл.	0.01	190000	0.005009	0.0005
	0.1	189189	0.05009	0.005
	1	1891890	0.5009	0.05

Вывод:

Исходя из вычислений, можно сказать, что даже при небольших возмущениях плохо обусловленной матрицы могут возникнуть большие погрешности, в то время как хорошо обусловленная матрица более стойкая к этому.

Задание 3. Решить систему n-ого порядка $AX=B$ методом Якоби и методом Зейделя с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ при $n=10$ и $n=20$. Сравнить число итераций, необходимых для достижения точности ε этими методами.
A – матрица с диагональным преобладанием, B – вектор-столбец.

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j,\\ 2n\,, & i=j,\end{cases} \qquad b_i=(2n-1)i+\frac{n(n+1)}{2}+(3n-1)(k-1),$$

где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, k=13

Реализация метода Якоби:

```
JacobiMethod[A_, B_, eps_] := Module[
                                     |программный модуль
  {n = Length[A], x, xNew, iter = 0, diff},
      |длина
  x = ConstantArray[0., n];
     |постоянный массив
  While[True, xNew = Table[ (B[[i]] - Sum[If[i ≠ j, A[[i, j]] * x[[j]], 0], {j, n}]) / A[[i, i]], {i, n}];
  |цикл… |истина        |таблица значе… |с… |условный оператор
   diff = Norm[xNew - x, Infinity];
          |норма          |бесконечность
   x = xNew;
   iter++;
   If[diff ≤ eps, Break[]];
   |условный опера… |прервать цикл
  ];
  {x, iter}]
```

Реализация метода Зейделя:

```
SiedelMethod[A_, B_, eps_] := Module[{n = Length[B], x, xOld, iter = 0, diff},
                                     |программны··· |длина
  x = ConstantArray[0., n];
      |постоянный массив
  While[True, xOld = x;
  |цикл··· |истина
   Do[x[[i]] = (B[[i]] - Sum[A[[i, j]] * x[[j]], {j, 1, i - 1}] - Sum[A[[i, j]] * xOld[[j]], {j, i + 1, n}]) / A[[i, i]], {i, n}];
   |оператор цикла       |сумма                                  |сумма
   diff = Norm[x - xOld, Infinity];
          |норма         |бесконечность
   iter++;
   If[diff < eps, Break[];];
   |условный опер··· |прервать цикл
  {x, iter}]
```

Вычисление норм абсолютной, относительных ошибок, а также вектора связок:

```
Xs := LinearSolve[A, B]
      |решить линейные урав
```

```
ErrorVJ = Norm[XmJ - Xs, Infinity]
          |норма         |бесконечнос
```

```
0.000250128
```

```
otnErrorVJ = Norm[XmJ - Xs, Infinity] / Norm[Xs]
             |норма         |бесконечно··· |норма
```

4.35977×10^{-6}

```
nevErrorVJ = SetPrecision[Norm[A * XmJ - B] / Norm[A * Xs - B], 20]
             |задать относи··· |норма            |норма
```

```
1.0000015337586785069
```

Действуя по данному алгоритму, проводится расчет для методов Якоба и Зейделя для n=10 и n=20. Все значения вносятся в таблицу:

Порядок системы	Количество итераций	Норма вектора абс. погрешности	Норма вектора отн. погрешности	Норма вектора невязки
Якоби				
n=10	14	0.000250128	0.00000436	1.000001434
n=20	15	0.000320992	0.000003064	0.999999277
Зейдель				
n=10	6	0.000064846	0.000001303	1.000000102
n=20	7	0.000017327	0.000000165	0.999999996

Вывод:

Метод Зейделя обеспечивает немного большую точность вычислений, а также меньшее количество итераций, что может повлиять на дальнейшие расчеты.