

Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»**

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЕНИЯ

Кафедра интеллектуальных информационных технологий

**Отчет
Лабораторная работа №3**

По дисциплине: Численные методы

Выполнил: Рассохов Е.П., гр. 421703

Проверил: Князева Л.П.

Минск, 2025

Интерполяция и среднеквадратичное приближение функции, заданной в узлах, алгебраическими многочленами

Вариант: 8

Функция: $y = x \cos(2x)$

Отрезок $[a, b] = [-\pi/4, \pi/3]$

Задание 1. Исследование зависимости погрешности интерполирования многочленом функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих точках отрезка от степени интерполяционного многочлена (от расстояния между узлами).

Цель задания: Построить интерполяционные многочлены степени n для функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих точках отрезка $[a, b]$, и исследовать зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$ и 10) (или, что равносильно, от расстояния между узлами $h = (b-a)/n$)

Пример результатов вычислений при $n = 5$:

Список и таблица:

$\{-0.785398, 0.\}, \{-0.418879, -0.280285\}, \{-0.05236, -0.052073\},$
 $\{0.314159, 0.25416\}, \{0.680678, 0.141521\}, \{1.0472, -0.523599\}$

x	f[x]
-0.785398	0.
-0.418879	-0.280285
-0.05236	-0.052073
0.314159	0.25416
0.680678	0.141521
1.0472	-0.523599

Графики функции $y = x \cos(2x)$, интерполяционного многочлена степени n и точки интерполирования:

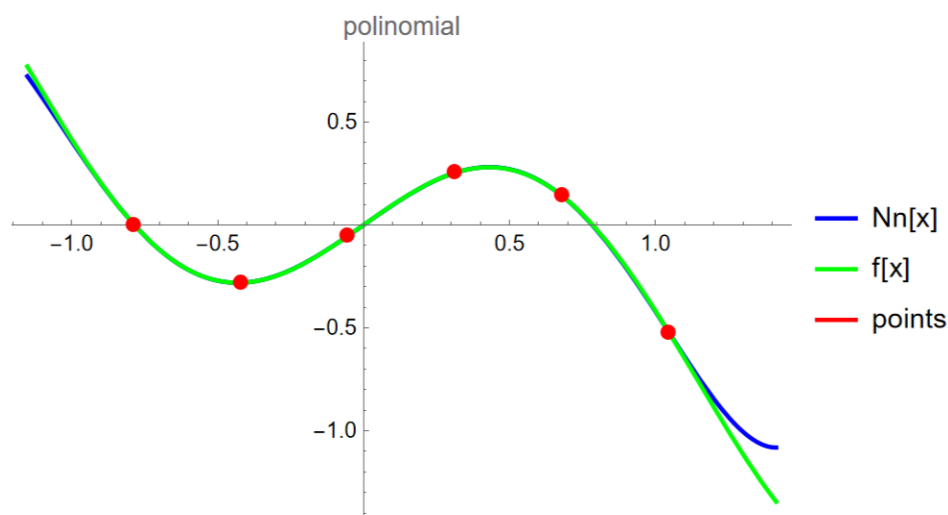
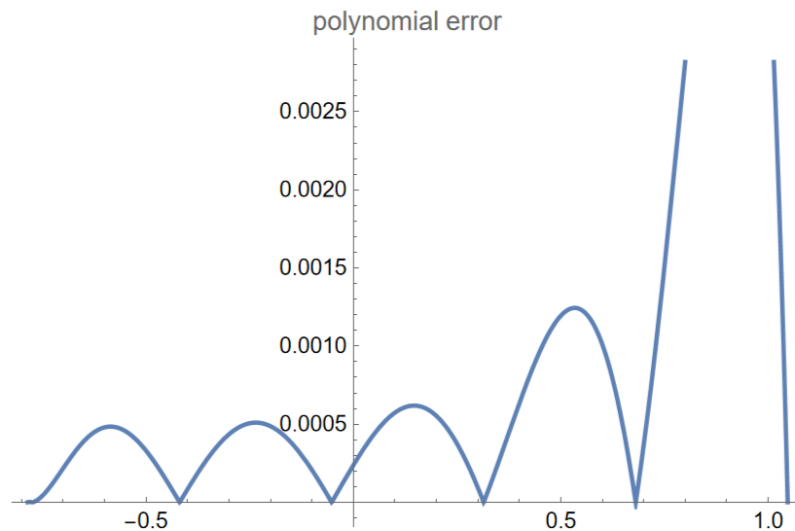


График абсолютной погрешности и максимум погрешности:



```
NMaximize[{Abs[f[x] - Nn[x]], a ≤ x ≤ b}, x]  
[численная ... [абсолютное значение  
{0.00520799, {x → 0.928858}}
```

Максимум погрешности: 0.00520799

Задание 2. Исследование зависимости погрешности интерполирования многочленом функции $f(x)$, заданной в неравноотстоящих точках отрезка от степени интерполяционного многочлена.

Цель задания: Построить интерполяционные многочлены степени n для функции $f(x)$, заданной в точках отрезка $[a, b]$, расположенным пропорционально нулям многочлена Чебышева, и исследовать зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$ и 10) (или, что равносильно, от расстояния между узлами $h = (b-a)/n$).

Пример результатов вычислений при $n = 5$:

Список и таблица:

```
{{1.01598, -0.452091}, {0.77882, 0.0102459}, {0.368055, 0.27276},  
{-0.106256, -0.103865}, {-0.517021, -0.264379}, {-0.754176, -0.0470633}}
```

x	f[x]
1.01598	-0.452091
0.77882	0.0102459
0.368055	0.27276
-0.106256	-0.103865
-0.517021	-0.264379
-0.754176	-0.0470633

Графики функции $y=x\cos(2x)$, интерполяционного многочлена степени и точки интерполирования:

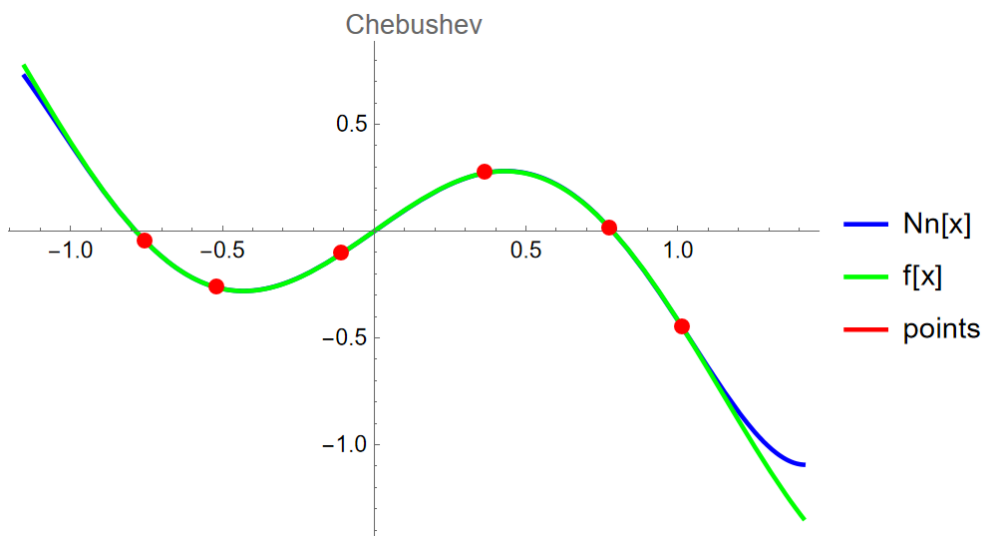
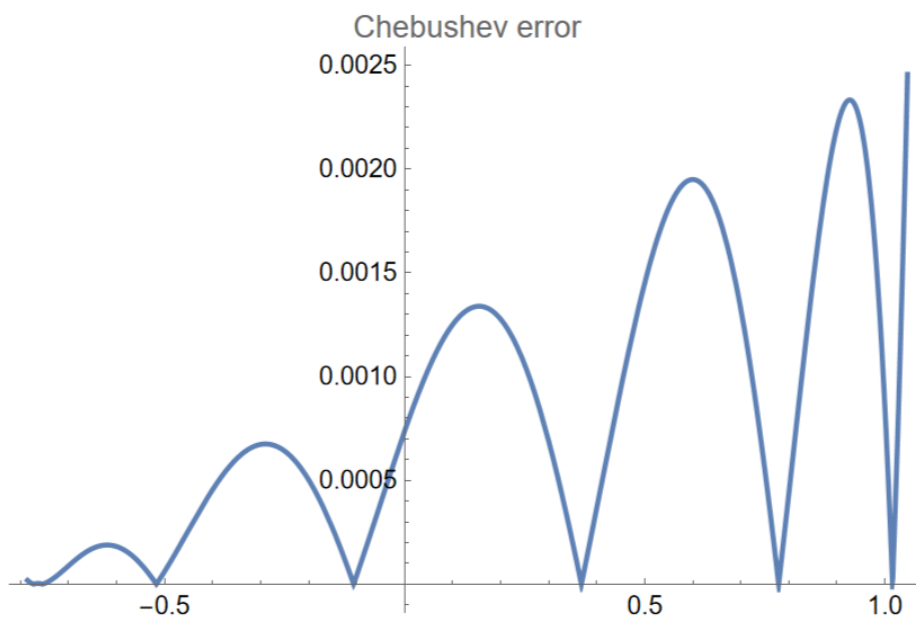


График абсолютной погрешности и максимум погрешности:



$\{0.00245619, \{x \rightarrow 1.0472\}\}$

Максимальная погрешность: 0.00245619

Задание 3. Исследование зависимости погрешности интерполирования сплайном функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих точках отрезка от количества узлов интерполяции.

Цель задания: Выполнить интерполяцию функции $f(x)$ сплайном $Sf(x)$ с помощью функции **Interpolation**[data,Method->"Spline"], используя таблицу значений функции $f(x)$ в равноотстоящих точках для $n = 5$ и 10:

Пример решения для $n=5$:

Графики функции $y=x\cos(2x)$, функция интерполированная сплайнами и точки интерполирования:

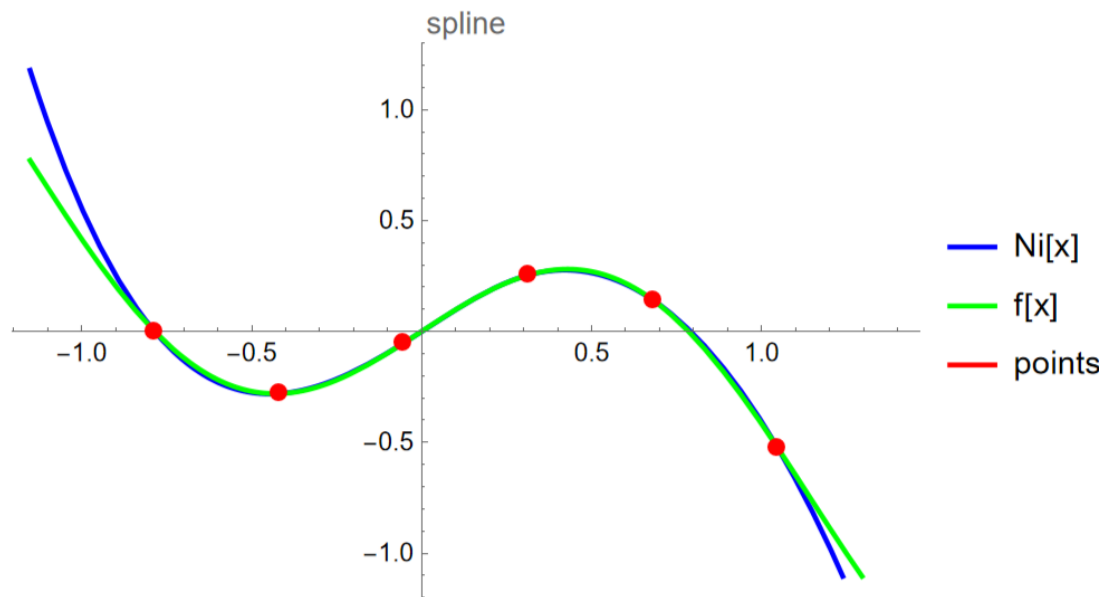
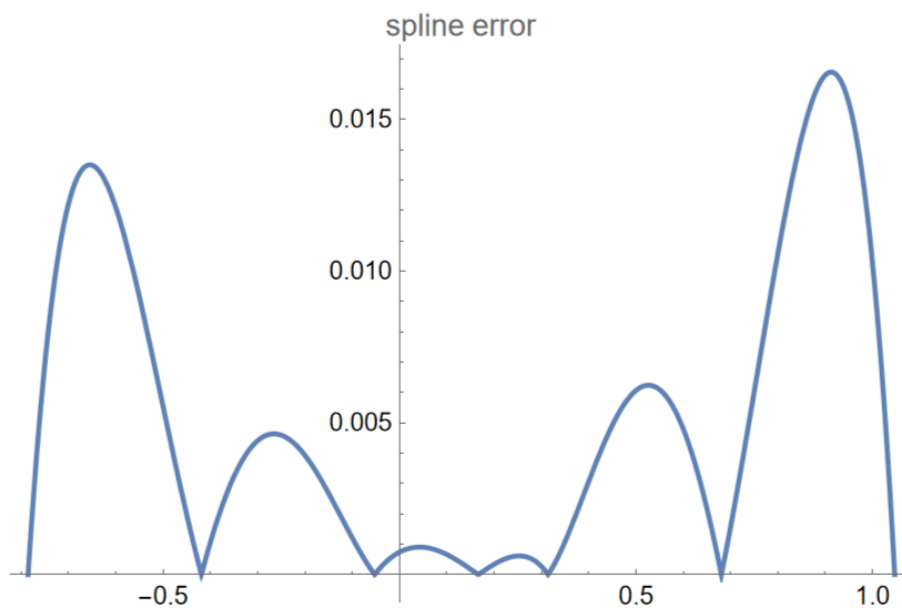


График погрешности:



$\{0.0165606, \{x \rightarrow 0.912864\}\}$

Максимум погрешности: 0.0165606

Задание 4. Анализ абсолютной погрешности $R_n(x)$ для разных значений n для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов.

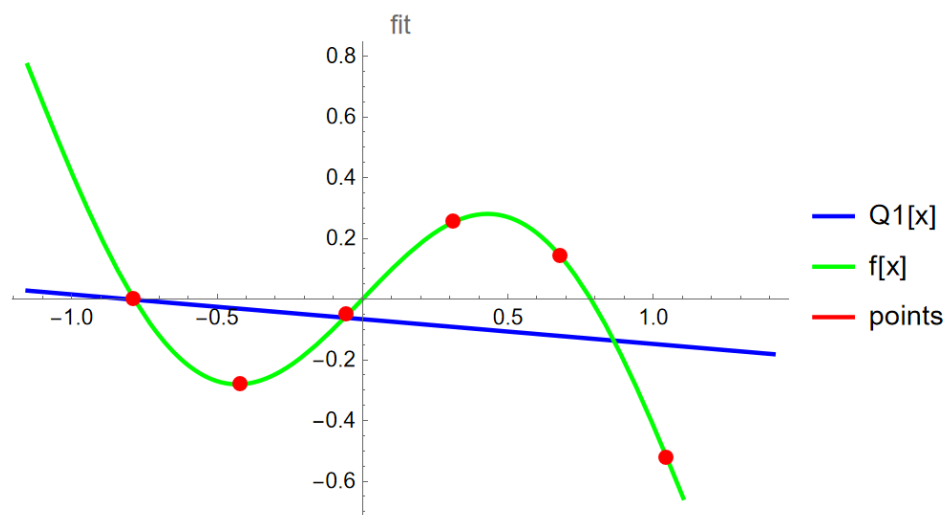
Цель задания: Составить таблицу максимальных значений погрешности $R_n(x)$ для разных значений n по результатам заданий 1, 2 и 3. Сравнить для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов и сделайте выводы о зависимости погрешности интерполирования от числа узлов и их расположения на отрезке. Сравнить с результатами интерполирования сплайнами.

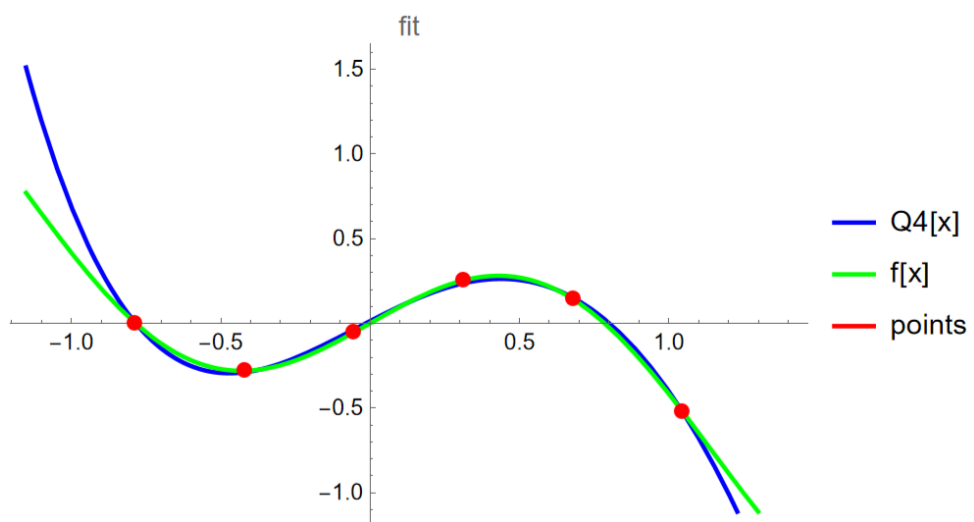
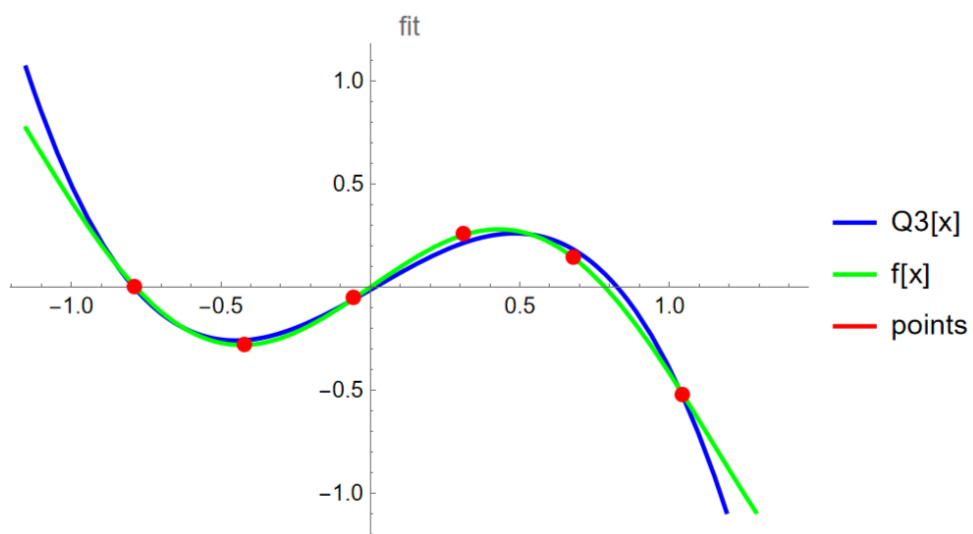
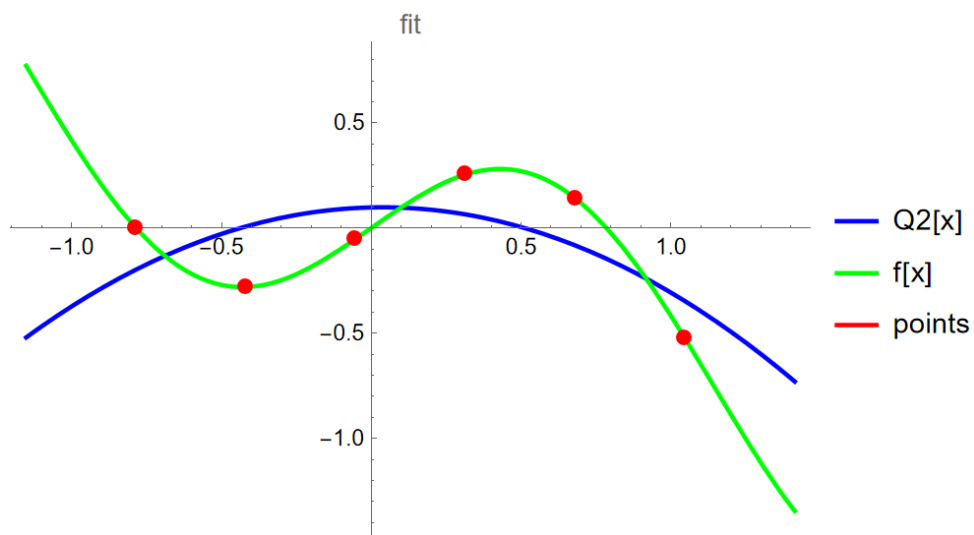
Степень многочлена, n	Погрешность p и равноотстоящих узлах	Погрешность p и неравноотстоящих узлах	Погрешность интерполяционного сплайна
1	0.637435	0.590721	
2	0.427173	0.301657	
3	0.095907	0.0678942	
4	0.0410665	0.0228131	
5	0.00520799	0.00245619	0.0165606
10	0.00000177	0.000000096	0.00105669

Задание 5. Построение с помощью метода наименьших квадратов аппроксимирующих алгебраических многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения.

Цель задания: Построить алгебраические многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения различных степеней ($m = 1, 2, 3, 4$) для заданной функции $f(x)$ и исследовать, как степень многочлена влияет на качество аппроксимации при разных количествах узлов ($n = 5$ и $n = 10$).

Пример решения для $n=5$:





Выводы: С увеличением количества узлов, уменьшается максимум погрешности, что приводит к более близким вычислениям. Сплайн-интерполяция, в свою очередь, заметно уступает по точности обоим полиномиальным методам. Это свидетельствует о том, что для гладких, но стремительно возрастающих функций полиномиальная интерполяция с большим числом узлов может оказаться более эффективной, чем сплайн.

Таким образом, наилучшая точность достигается при интерполяции многочленом на узлах Чебышева, особенно при большей степени многочлена.