**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования**
**«Белорусский государственный университет**
**информатики и радиоэлектроники»**

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЕНИЯ

Кафедра интеллектуальных информационных технологий

# Отчет
# Лабораторная работа №5

По дисциплине: Численные методы

Выполнил: Рассохов Е.П., гр. 421703

Проверил: Князева Л.П.

**Минск, 2025**

## Вычисление определенных интегралов

Вариант: 8

**Задание 3: вычислите приближенное значение определенного интеграла (согласно номера вашего варианта), разбив область интегрирования на n = 5, 10, 20, 50,100 частей, следующими методами:**

**- левых прямоугольников;**

**- правых прямоугольников;**

**- средних прямоугольников;**

**- трапеций;**

**- Симпсона.**

**Составьте таблицу приближенных значений интеграла I h, полученных этими пятью методами, для каждого разбиения отрезка интегрирования. Сравните с точным значением интеграла, полученным с помощью функций Mathematica, и сделайте выводы о точности формул.**

Реализация методов:

```
exact = NIntegrate[f[x], {x, a, b}]
        квадратурное интегрирование

0.695791

hf[n_] := (b - a) / n;

LeftRect[n_] := hf[n] × Sum[f[a + i hf[n]], {i, 0, n - 1}]
                        сумма

RightRect[n_] := hf[n] × Sum[f[a + i hf[n]], {i, 1, n}]
                         сумма

MidRect[n_] := hf[n] × Sum[f[a + (i + 0.5) hf[n]], {i, 0, n - 1}]
                       сумма

Trap[n_] := (hf[n] / 2) (f[a] + 2 Sum[f[a + i hf[n]], {i, 1, n - 1}] + f[b])
                                  сумма

Simpson[n_] := (hf[n] / 3) (f[a] + f[b] + 4 Sum[f[a + (2 k - 1) * hf[n]], {k, 1, n / 2}] + 2 Sum[f[a + 2 k * hf[n]], {k, 1, n / 2 - 1}])
                                          сумма                                            сумма
```

Приближенные значения интегралов:

| n | h | left | right | mid | trap | simpson |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.16 | 0.735576 | 0.657583 | 0.695396 | 0.696579 | – |
| 10 | 0.08 | 0.715486 | 0.67649 | 0.695693 | 0.695988 | 0.695791 |
| 20 | 0.04 | 0.705589 | 0.686091 | 0.695767 | 0.69584 | 0.695791 |
| 50 | 0.016 | 0.699699 | 0.691899 | 0.695787 | 0.695799 | 0.695791 |
| 100 | 0.008 | 0.697743 | 0.693843 | 0.69579 | 0.695793 | 0.695791 |

Абсолютные погрешности:

| n | h | left | right | mid | trap | simpson |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.16 | 0.0397847 | 0.0382082 | 0.000394982 | 0.000788217 | - |
| 10 | 0.08 | 0.0196948 | 0.0193016 | 0.0000983637 | 0.000196618 | $5.82296\times10^{-7}$ |
| 20 | 0.04 | 0.00979824 | 0.00969999 | 0.0000245669 | 0.0000491269 | $3.66206\times10^{-8}$ |
| 50 | 0.016 | 0.00390751 | 0.00389179 | $3.92963\times10^{-6}$ | $7.85908\times10^{-6}$ | $9.39079\times10^{-10}$ |
| 100 | 0.008 | 0.00195179 | 0.00194786 | $9.82368\times10^{-7}$ | $1.96473\times10^{-6}$ | $5.87072\times10^{-11}$ |

**Вывод:** Не смотря на то, что метод Симпсона не работает на нечетных разбиениях, он оказался наиболее точным. Наименее точные - методы левого и правого треугольников.

**Задание 4: Примените формулы Рунге для уточнения значение интеграла (уточнения значения интеграла по Ричардсону), использовав Ih и I2h для каждого метода, и сделайте вывод.**

Для уточнения по Ричардсона было произведено разделение на 2 и 4 части:

left: 0.695693; абсолютная погрешность: 0.0000983637

right: 0.695693; абсолютная погрешность: 0.0000983637

mid: 0.695791; абсолютная погрешность: $3.20361\times10^{-8}$

trap: 0.695791; абсолютная погрешность: $3.66206\times10^{-8}$

simpson: 0.695791; абсолютная погрешность: $2.42255\times10^{-10}$

**Вывод:** При использовании уточнения по Ричардсону, значительно уменьшились абсолютные погрешности, при этом метод Симпсона остался самы точным, а методы левого и правого треугольников также наименее точными и примерно равными между собой.

**Задание 5: Вычислите с заданной точностью (ε = 10-4, 10-5, 10-6) определенный интеграл, тот же, что и в задании 3, теми же методами. Составьте таблицу приближенных значений интеграла I h и числа разбиений, необходимого для достижения точности рассмотренными методами. Сравните с точным значением интеграла, полученным с помощью функций Mathematica. Сделайте выводы о точности формул, сравнив количество потребовавшихся разбиений.**

| eps | left | right | mid | trap | simpson |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0001 | 976 | 975 | 5 | 8 | 2 |
| 0.00001 | 9750 | 9749 | 16 | 23 | 4 |
| $1.\times10^{-6}$ | 97492 | 97492 | 50 | 71 | 6 |

**Вывод:** В силу схожести методов левого и правого треугольников, их количество итераций примерно равны, меньше всего итераций ушло на метод Симпсона

**Задание 6: Вычислите определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с n узлами. Сравнить с точным значением интеграла.**

```
GausseSq[f_, a_, b_, n_] := Module[{x , r, dPn, w, c},
                            программный модуль
  r = x /. NSolve[LegendreP[n, x ] == 0, x , Reals];
            числе···  P-функция Лежандра первого···  множество дейст
  dPn = D[LegendreP[n, x], x];
        ·· P-функция Лежандра первого рода
  w[t_] := 2 / ((1 - t^2) (dPn /. x → t)^2);
  c = (b - a) / 2;
  N[Sum[(c w[r[[i]]]) f[a + c (1 + r[[i]])], {i, n}], 30]
  ·· сумма
 ];
```

Таблица истинных значений и значений метода Гаусса:

| n | value | exact | error |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.897556 | 0.903332 | 0.00577605 |
| 2 | 0.90305 | 0.903332 | 0.000281846 |
| 3 | 0.903332 | 0.903332 | $3.7067 \times 10^{-7}$ |
| 4 | 0.903332 | 0.903332 | $7.57669 \times 10^{-9}$ |
| 5 | 0.903332 | 0.903332 | $2.97408 \times 10^{-11}$ |

**Вывод:** Метод Гаусса позволяет достичь наивысшей точности при ограниченном и сравнительно небольшом числе вычислений подынтегральной функции. В то же время его использование связано с необходимостью заранее находить узлы и веса, что делает алгоритм немного более сложным по сравнению с методами равномерного шага.