FEALPy 偏微分方程数值解程序设计与实现:
拉格朗日有限元求解 Poisson 方程

魏华祎

weihuayi@xtu.edu.cn

湘潭大学 • 数学与计算科学学院

July 20, 2020

Outline

Outline

Poisson 方程

给定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 其边界 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\
u &= g_D, \quad \text{on } \Gamma_D \leftarrow \textbf{Dirichlet} \\
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= g_N, \quad \text{on } \Gamma_N \leftarrow \textbf{Neumann} \\
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \kappa u &= g_R, \quad \text{on } \Gamma_R \leftarrow \textbf{Robin}
\end{aligned}
$$

其中

- $\Delta u(x) = u_{xx}$
- $\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$
- $\Delta u(x, y, z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla u \cdot \boldsymbol{n}$

连续的弱形式

方程两端分别乘以测试函数 $v \in H^1_{D,0}(\Omega)$，则连续的弱形式可以写为

$$(f, v) = -(\Delta u, v)$$

再分部积分

$$\begin{aligned}
(f, v) &= -(\Delta u, v) \\
&= (\nabla u, \nabla v) - < \nabla u \cdot \boldsymbol{n}, v >_{\partial\Omega} \\
&= (\nabla u, \nabla v) - < g_N, v >_{\Gamma_N} + < \kappa u, v >_{\Gamma_R} - < g_R, v >_{\Gamma_R}
\end{aligned}$$

整理可得

$$(\nabla u, \nabla v) + < \kappa u, v >_{\Gamma_R} = (f, v) + < g_R, v >_{\Gamma_R} + < g_N, v >_{\Gamma_N}$$

Remark

测试函数 $v|_{\Gamma_D} = 0$!

离散的弱形式

给定 Ω 上一个单纯形网格离散 $\mathcal{T}$, 构造连续的分片 p 次有限元空间 $V_h \subset H^1(\Omega)$, 其基函数向量记为:

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{N-1}],$$

则离散的弱连续形式:求解 $u_h = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{u} \in V_h(\Omega)$, 对于任意 ϕ_i 有

$$(\nabla u_h, \nabla \phi_i) + < \kappa u_h, \phi_i >_{\Gamma_R} = (f, \phi_i) + < g_R, \phi_i >_{\Gamma_R} + < g_N, \phi_i >_{\Gamma_N},$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是 u_h 在基函数 $\boldsymbol{\phi}$ 下的坐标**列向量**。

Remark

注意, 基函数向量 $\boldsymbol{\phi}$ 中包括内部和边界的所有基函数, 而其中的 Dirichlet 边界对应的基函数会留到后面处理。

离散的代数系统

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}_N + \boldsymbol{b}_R$$

$$\boldsymbol{A} = \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{\phi})^T \nabla \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_\tau (\nabla \boldsymbol{\phi}|_\tau)^T \nabla \boldsymbol{\phi}|_\tau \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{R} = \int_{\Gamma_R} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{e_R \in \Gamma_R} \int_{e_R} (\boldsymbol{\phi}|_{e_R})^T \boldsymbol{\phi}|_{e_R} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{b} = \int_\Omega f \boldsymbol{\phi}^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_\tau f (\boldsymbol{\phi}|_\tau)^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{b}_N = \int_{\Gamma_N} g_N \boldsymbol{\phi}^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{e_N \in \Gamma_N} \int_{e_N} g_N (\boldsymbol{\phi}|_{e_N})^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{b}_R = \int_{\Gamma_R} g_R \boldsymbol{\phi}^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{e_R \in \Gamma_R} \int_{e_R} g_R (\boldsymbol{\phi}|_{e_R})^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

Outline

1 Poisson 方程变分与离散

2 边界条件处理
- Dirichlet 边界
- Neumann 边界
- Robin 边界
- 混合边界条件

3 作业

Outline

1. Poisson 方程变分与离散
2. 边界条件处理
   - Dirichlet 边界
   - Neumann 边界
   - Robin 边界
   - 混合边界条件
3. 作业

纯 Dirichlet 边界条件处理

如果 Poisson 方程只有 Dirichlet 边界条件, 则最终代数方程变为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

把 $\boldsymbol{u}$ 进行向量分解

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_I(\text{区域内部自由度}) + \boldsymbol{u}_D(\text{Dirichlet 边界自由度})$$

代入离散代数系统, 可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_I = \boldsymbol{F} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_D$$

纯 Dirichlet 边界条件处理

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_I = F := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_D$$

接着有两种方法进行离散系统求解

- 在 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 中，只区域内部自由度对应的子矩阵和子向量进行求解，这样会改变原始离散系统的规模。
- 把 F 中 Dirichlet 边界自由度对应的分量设真解的值，并把 A 中 Dirichlet 边界自由度对应的行列的主对角元素改为 1，其它元素改为 0。

Outline

纯 Neumann 边界条例处理

如果 Poisson 方程只有 Neumann 边界条件，则离散代数系统变为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}_N$$

而模型真解是关于常数唯一，需要再加一个条件，常用的条件是：

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \to \int_\Omega \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \to \boldsymbol{C}\boldsymbol{u} = 0$$

其中 $\boldsymbol{C} = [\int_\Omega \phi_0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \cdots, \int_\Omega \phi_{N-1} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}]$。最终系统化为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Outline

纯 Robin 边界条件处理

如果 Poisson 方程只有 Robin 边界条件，则离散代数系统变为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}_R$$

直接求解即可。

Outline

混合边界条件

如果 Poisson 方程是混合边界条件,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}_R+\boldsymbol{b}_N$$

Remark

首先处理 Neumann 和 Robin 边界，最后处理 Dirichlet 边界。

Outline

作业

根据下面椭圆方程模型，构造一个二维有真解模型例子，用 p 次有限元进行求解，画出误差阶，并输出误差表格。

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + 3u &= f, \quad \text{in } \Omega \\
u &= g_D, \quad \text{on } \Gamma_D \leftarrow \textbf{Dirichlet} \\
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= g_N, \quad \text{on } \Gamma_N \leftarrow \textbf{Neumann} \\
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + u &= g_R, \quad \text{on } \Gamma_R \leftarrow \textbf{Robin}
\end{aligned}
$$

求解区域为 $[0,1]^2$，其中在 $x=0$ 上是 Robin 边界条件，在 $x=1$ 的边界上为 Neumann 边界条件，其余边界为 Dirichlet 边界。