XianLin Campus
No.1 Wenyuan Road.
Nanjing 210023,P.R.China
Tel:86-25-85898785

IPDG.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{\text{设 } u \in H^{3/2}(\Omega)} \quad \underline{\text{保证 } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_e \in L^2(e)}$$

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

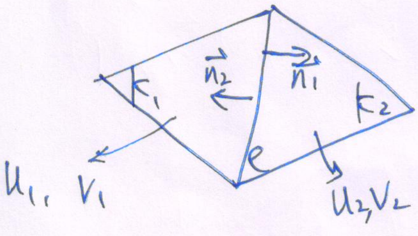
在 $K \subset \mathcal{T}_h$ 上有 $(\nabla u, \nabla v)_K - \langle \nabla u \cdot \vec{n}, v \rangle_{\partial K} = (f, v)_K \quad \forall v \in H^1(K)$

定义 $V_h = \{ v \in L^2(\Omega),\ v|_K \in V_K \ \forall K \in \mathcal{T}_h \}$. 其中 V_K 是 K 上有限维空间.

$$\cancel{\text{记 } V(h) = V_h + \Big(H_0^1(\Omega) \cap \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^r(K) \Big) \quad r > \tfrac{3}{2}}$$

则有 $\displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big((\nabla u, \nabla v)_K - \langle \nabla u \cdot \vec{n}, v \rangle_{\partial K} \Big) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$

$$\Rightarrow \quad (\nabla_h u, \nabla_h v)_{\mathcal{T}_h} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \nabla u \cdot \vec{n}, v \rangle_{\partial K} = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$



内部边/面 e

$$\int_e \left(v_1 \nabla u_1 \cdot \vec{n}_1 + v_2 \nabla u_2 \cdot \vec{n}_2 \right) ds$$

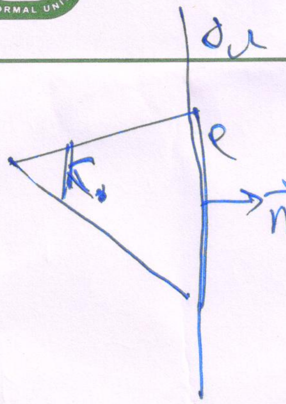
$$= \int_e \left(v_1 \nabla u_1 - v_2 \nabla u_2 \right) \cdot \vec{n}_1 \, ds$$

利用 $a_1 b_1 - a_2 b_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}(b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)\dfrac{b_1 + b_2}{2}$

定义. $\{\!\{ \nabla_h u \}\!\} = \dfrac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2} \qquad [\![v]\!] = v_1 - v_2$

$[\![\nabla_h u]\!] = \nabla u_1 - \nabla u_2 \qquad \{\!\{ v \}\!\} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$

有 $= \displaystyle\int_e \left(\{\!\{ \nabla_h u \}\!\} [\![v]\!] + [\![\nabla_h u]\!] \{\!\{ v \}\!\} \right) \cdot \vec{n}_e \, ds \qquad$ 记 $\vec{n}_e = \vec{n}_1$



边界边 e.

$$\int_e (\nabla u\cdot\vec{n})\, v\, ds$$

$$= \int_e \left(\{\{\nabla_h u\}\}\, [[v]]\right)\cdot \vec{n}_e\, ds$$

其中 记 边界边上 $\{\{\nabla_h u\}\} = \nabla_h u$.

$[[v]] = v$

综上可得

$$a_h^0(u,v) \triangleq (\nabla_h u, \nabla_h v)_{\mathcal{T}_h} - \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_e \{\{\nabla_h u\}\}\cdot\vec{n}_e\, [[v]]\, ds - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i}\int_e [[\nabla_h u]]\cdot\vec{n}_e\, \{\{v\}\}\, ds$$

$$= (f, v) \quad \forall v\in V_h$$

由于 u 是真解. $u\in H^{3/2}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 所以 $[[\nabla_h u]]\big|_{e\in\mathcal{E}_h^i} = 0$

$$\Rightarrow a_h^0(u,v) = (\nabla_h u, \nabla_h v)_{\mathcal{T}_h} - \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_e \{\{\nabla_h u\}\}\cdot\vec{n}_e\, [[v]]\, ds = (f, v)$$

引进新记号 $\{\nabla_h u\} = \{\{\nabla_h u\}\}$ $\quad [v] = v_1\vec{n}_1 + v_2\vec{n}_2 = [[v]]\,\vec{n}_e$

$$\boxed{\Rightarrow (\nabla_h u, \nabla_h v)_{\mathcal{T}_h} - \langle \{\nabla_h u\}, [v]\rangle_{\mathcal{E}_h} = (f, v) \quad \forall v\in V_h}$$

NNU · 南京师范大学 · 数学科学学院
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES NANJING NORMAL UNIVERSITY

XianLin Campus
No.1 Wenyuan Road.
Nanjing 210023,P.R.China
Tel:86-25-85898785

问题是 对 $a_h^0(u,v)$ 无法证明 coercivity.

方法. 加 penalty.

定义

$$a_h(u,v) = (\nabla_h u, \nabla_h v)_{\mathcal{T}_h} - \langle \{\nabla_h u\}, [v] \rangle_{\mathcal{E}_h}$$

$$\pm \langle \{\nabla_h v\}, [u] \rangle_{\mathcal{E}_h} + \eta \langle \frac{1}{h_e}[u], [v] \rangle_{\mathcal{E}_h}$$

注意 $a_h(u,v) = a_h^0(u,v)$ $\quad \forall u \in H^{3/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

即对真解 u 成立.

所以真解 u 满足

$$a_h(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V_h.$$

定义 DG解 u_h : 求 $u_h \in V_h$ s.t.

$$a_h(u_h, v) = (f,v) \quad \forall v \in V_h.$$

记 $V(h) = V_h + (H_0^1(\Omega) \cap H^{3/2}(\Omega))$.

定义 $V(h)$ 上范数

$$|||v||| = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \|\{\nabla v\}\|_{0,e}^2 + \eta \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e} \|[v]\|_e^2 \right)^{1/2}$$

可证明 $|||v||| \approx |||v|||_h \quad \forall v \in J_h$.

NNU · 南京师范大学 · 数学科学学院
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES NANJING NORMAL UNIVERSITY

XianLin Campus
No.1 Wenyuan Road.
Nanjing 210023,P.R.China
Tel:86-25-85898785

① u_h的存在唯一性. 定义V_h上范数 $\|v\|_h = \left(\|\nabla_h v\|^2_{\mathcal{T}_h} + \eta \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2\right)^{1/2}$

离散问题. 仅需证明 a_h 的 coercivity.

(利用 L-M 和 有限维空间中所有线性算子都有界)

及

* 对称: $a_h(v,v) = \|\nabla_h v\|^2_{\mathcal{T}_h} + \eta \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2$

$$= \|v\|_h^2$$

* 对称: $a_h(v,v) \geq \|\nabla_h v\|^2_{\mathcal{T}_h} - 2\sum_{e\in\mathcal{E}_h} \left(h_e^{1/2}\|\{\nabla_h v\}\|_e\right)\left(\frac{1}{h_e^{1/2}}\|[v]\|_e\right) + \eta \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2$

$$\geq \|\nabla_h v\|^2_{\mathcal{T}_h} - 2\left(\sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_e\|\{\nabla_h v\}\|_e^2\right)^{1/2}\left(\sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2\right)^{1/2} + \eta \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2$$

(利用 $2ab = 2(\varepsilon^{1/2}a)\left(\frac{b}{\varepsilon^{1/2}}\right) \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$)

$$\geq \|\nabla_h v\|^2_{\mathcal{T}_h} - \varepsilon \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_e\|\{\nabla_h v\}\|_e^2 + \left(\eta - \frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2$$

ε足够小时 $\geq C\|\nabla_h v\|^2_{\mathcal{T}_h} + \left(\eta - \frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{1}{h_e}\|[v]\|_e^2$

η足够大时 $\geq \|v\|_h^2$

利用 迹不等式 和 逆不等式

$h_e\|\{\nabla_h v\}\|_e^2 \le C h_e\|\nabla v_1\|_e^2 + C h_e\|\nabla v_2\|_e^2$

~~$\le C h^{-1}\|v_1\|_e^2 + \cdots$~~

$\le C\|\nabla v\|^2_{T_1} + h_T^2\|\nabla^2 v_1\|^2_{T_1} + \cdots$

$\le C\|\nabla v\|^2_{T_1} + \cdots$

另证 a_h 的有界性.

XianLin Campus
No.1 Wenyuan Road.
Nanjing 210023,P.R.China
Tel:86-25-85898785

② 误差估计.

$$a_h(u-u_h, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h.$$

$$|||u-u_h||| \le |||u-I_h u||| + |||I_h u - u_h|||$$

其中 $|||I_h u-u_h|||^2 \le C a_h(I_h u-u_h, I_h u-u_h)$

$$= C\, a_h(I_h u-u, I_h u-u_h)$$

$$\le C\, |||u-I_h u|||\ |||I_h u-u_h|||$$

L^2 误差. 记 $\begin{cases} -\Delta\phi = u-u_h & \text{in } \Omega. \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

$$\|u-u_h\|^2 = (-\Delta\phi, u-u_h) = (\nabla_h\phi, \nabla_h(u-u_h))_{\mathcal{T}_h} - \langle\{\nabla_h\phi\}, [u-u_h]\rangle_{\mathcal{E}_h}$$

$$= a_h(\phi, u-u_h) = a_h(\phi - I_h\phi, u-u_h)$$

$$\le C\, |||\phi - I_h\phi|||\ |||u-u_h|||$$

$$\le C h \|\phi\|_{H^2}\ |||u-u_h|||$$

$$\le C h\ \|u-u_h\|\ |||u-u_h|||$$