FEALPy 偏微分方程数值解程序设计与实现: 数学基础

魏华祎

weihuayi@xtu.edu.cn

湘潭大学 • 数学与计算科学学院

July 5, 2020

Outline

1. 常用算子符号
2. 散度定理
3. 函数空间
4. 偏微分方程数值解：从无限到有限

Outline

1. 常用算子符号
2. 散度定理
3. 函数空间
4. 偏微分方程数值解：从无限到有限

梯度算子

$\mathbb{R}^d$ 空间中的标量函数 $u(\boldsymbol{x})$，其梯度算子定义如下：

$$\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) = \nabla u(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{d-1}} \end{bmatrix}$$

Remark (梯度的几何意义)

标量函数在一点处的梯度向量，指向该点处函数值增加最快的方向，且长度是该点处沿这个方向的函数变化率。

散度算子

$\mathbb{R}^d$ 空间中向量函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [u_0(\boldsymbol{x}), u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, u_{d-1}(\boldsymbol{x})]^T$，其散度算子定义如下：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_{d-1}}{\partial x_{d-1}}$$

Remark (散度的物理意义)

假设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 代表一个稳定流动的不可压缩流体(密度为 1)的速度场，它在 $\boldsymbol{x}$ 处的散度，就是穿出单位体积边界的通量，也叫**通量密度**，而通量是流场单位时间内沿指定侧通过一个曲面的量。给定一个位于封闭曲面 S 内点 $\boldsymbol{x}$，S 围成的区域记为 Ω

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \lim_{S \to \boldsymbol{x}} \frac{1}{|\Omega|} \int_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s$$

旋度算子

$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量场函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [u_0(\boldsymbol{x}), u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x})]^T$，其旋度算子定义如下：

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remark (旋度的物理意义)

向量场 $\boldsymbol{u}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的旋度向量，用来描述流体以 $\boldsymbol{x}$ 为中心的漩涡强度和方向，它的指向与漩涡旋转最快的方向满足右手法则，长度为旋转最快的方向的角速度的两倍。

旋度算子

$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量场函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [u_0(\boldsymbol{x}), u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x})]^T$，其旋度算子定义如下：

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{pmatrix}$$

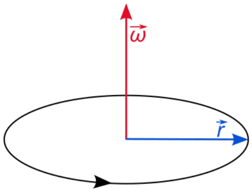

Figure: 旋转角速度向量。

Laplace 算子

$\mathbb{R}^d$ 空间中的标量函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的梯度的散度给出的微分算子称为 **Laplace 算子**, 通常写成

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = \nabla^2 u(\boldsymbol{x}) = \nabla \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Outline

1. 常用算子符号
2. 散度定理
3. 函数空间
4. 偏微分方程数值解：从无限到有限

散度定理

给定定义在 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 向量函数 $\boldsymbol{F}(x)$, 记 $\boldsymbol{n}$ 为 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量, 则有

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad \text{高斯公式}$$

这就是**散度定理**。

散度定理

给定定义在 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 向量函数 $\boldsymbol{F}(x)$, 记 $\boldsymbol{n}$ 为 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量, 则有

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \text{ 高斯公式}$$

这就是**散度定理**。

散度定理的应用

取 $\boldsymbol{F} = v\nabla u$，可得：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$\int_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

散度定理的应用

取 $\boldsymbol{F} = [u, 0, 0]^T$，可得：

$$\int_\Omega \nabla \cdot \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega u_x \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u \boldsymbol{n}_x \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

散度定理的应用

Ω 为有 N 个边 $\{E_i\}_{i=0}^{N-1}$ 的多边形，取 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{x}=[x,y]^T$，则有：

$$
\begin{aligned}
|\Omega| = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{E_i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{E_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_i)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{E_i}\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{x}_i$ 是 Ω 的第 i 个顶点，是边 E_i 起点。

Outline

1. 常用算子符号
2. 散度定理
3. 函数空间
4. 偏微分方程数值解：从无限到有限

函数空间

我们这里用到的**函数空间**, 简单来讲就是**具有某些共同性质**, 且对于**线性运算封闭**的函数组成集合, 它里面通常有无穷多个函数。

- **线性运算封闭性**：对于函数空间 V 中任意两个函数 v, w, 及实数空间 $\mathbb{R}$ 中的任意两个常数 c_0 和 c_1, 满足

$$c_0 v + c_1 w \in V,$$

函数空间

我们这里用到的**函数空间**，简单来讲就是**具有某些共同性质**，且对于**线性运算封闭**的函数组成集合，它里面通常有无穷多个函数。

- **线性运算封闭性**：对于函数空间 V 中任意两个函数 v, w，及实数空间 $\mathbb{R}$ 中的任意两个常数 c_0 和 c_1，满足

$$c_0 v + c_1 w \in V,$$

函数空间的基

- 设 $S=\{\phi_i\}$ 是 V 的一个子集，如果 S 中的元素**线性无关**，且 V 中的任意一个函数 v 可以由它们**线性表出**，即存在一组和 S 中函数一样多的常数集合 $\{c_i\}$，使得

$$v=\sum_{i=0} c_i\phi_i.$$

则称 $\{\phi_i\}$ 为 V 的一组**基**。

Remark

(1) 函数空间是由基唯一决定，即给定一组基，就唯一张成一个空间 $V=\mathrm{span}\{\phi_i\}$.

(2) 函数空间的基不是唯一的，**问题是编程实现的时候你要选哪一组基?**

(3) 给定空间的一组基，就可以建立起空间 V 到向量空间 $\mathbb{R}^d$ 一一映射，其中 d 是向量空间的维数，可以为无穷

$$v\in V \leftrightarrow [c_0,c_1,\cdots]\in\mathbb{R}^d$$

函数空间的基

- 设 $S=\{\phi_i\}$ 是 V 的一个子集, 如果 S 中的元素**线性无关**, 且 V 中的任意一个函数 v 可以由它们**线性表出**, 即存在一组和 S 中函数一样多的常数集合 $\{c_i\}$, 使得

$$v=\sum_{i=0} c_i\phi_i.$$

则称 $\{\phi_i\}$ 为 V 的一组**基**。

Remark

(1) 函数空间是由基唯一决定, 即给定一组基, 就唯一张成一个空间 $V=\mathrm{span}\{\phi_i\}$.

(2) 函数空间的基不是唯一的, **问题是编程实现的时候你要选哪一组基?**

(3) 给定空间的一组基, 就可以建立起空间 V 到向量空间 $\mathbb{R}^d$ 一一映射, 其中 d 是向量空间的维数, 可以为无穷

$$v\in V\leftrightarrow[c_0,c_1,\cdots]\in\mathbb{R}^d$$

函数空间的维数

函数空间基函数的个数就称为函数空间的**维数**。

- 若 $S=\{\phi_i\}$ 有限多个元素，则称 V 是**有限维空间**。
- 若 $S=\{\phi_i\}$ 无限多个元素，则称 V 是**无限维空间**。

Remark

编程实现只能处理有限维的函数空间！

函数空间的维数

函数空间基函数的个数就称为函数空间的**维数**。

- 若 $S=\{\phi_i\}$ 有限多个元素，则称 V 是**有限维空间**。
- 若 $S=\{\phi_i\}$ 无限多个元素，则称 V 是**无限维空间**。

Remark

编程实现只能处理有限维的函数空间！

常见的函数空间

记 Ω 为 $\mathbb{R}^d$ 空间中的任意子区域，

- $L^2(\Omega)$: 对于任意的 $v \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty$。
- $H^1(\Omega)$: 函数及其导数都属于 $L^2(\Omega)$ 空间。
- $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}, \Omega)$: 向量函数空间，向量函数的每个分量及其散度都属于 $L^2(\Omega)$ 空间。
- $\boldsymbol{H}(\mathrm{curl}, \Omega)$: 向量函数空间，向量函数的每个分量及其旋度都属于 $L^2(\Omega)$ 空间。
- $\mathbb{P}_k(\Omega)$: 不大于 k 次的多项式函数组成的空间。
- $\mathbb{P}_k(\Omega; \mathbb{R}^d)$: 每个分量都是不大于 k 次多项式函数的向量函数空间。

Remark

多项式空间是编程实现有限元算法的基础空间。

常见的函数空间

记 Ω 为 $\mathbb{R}^d$ 空间中的任意子区域,

- $L^2(\Omega)$: 对于任意的 $v \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty$。
- $H^1(\Omega)$: 函数及其导数都属于 $L^2(\Omega)$ 空间。
- $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}, \Omega)$: 向量函数空间, 向量函数的每个分量及其散度都属于 $L^2(\Omega)$ 空间。
- $\boldsymbol{H}(\mathrm{curl}, \Omega)$: 向量函数空间, 向量函数的每个分量及其旋度都属于 $L^2(\Omega)$ 空间。
- $\mathbb{P}_k(\Omega)$: 不大于 k 次的多项式函数组成的空间。
- $\mathbb{P}_k(\Omega; \mathbb{R}^d)$: 每个分量都是不大于 k 次多项式函数的向量函数空间。

Remark

多项式空间是编程实现有限元算法的基础空间。

Outline

1 常用算子符号

2 散度定理

3 函数空间

4 偏微分方程数值解：从无限到有限

“Hello World”模型：Poisson 方程

给定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 其边界记为 $\partial\Omega$, 求标量函数 $u(\boldsymbol{x})$, 满足

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$$
$$u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

- Laplace 算子 Δ 的定义
  - $d = 1$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x) = u_x$
  - $d = 2$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$
  - $d = 3$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y, z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- 未知量是什么？要求无穷多个点处对应的函数值。
- 该问题求解的困难是什么？算子和未知量的无限性！

“Hello World”模型：Poisson 方程

给定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 其边界记为 $\partial\Omega$, 求标量函数 $u(\boldsymbol{x})$, 满足

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\
u(\boldsymbol{x}) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

- Laplace 算子 Δ 的定义
  - $d = 1$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x) = u_x$
  - $d = 2$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$
  - $d = 3$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y, z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- 未知量是什么？要求无穷多个点处对应的函数值。
- 该问题求解的困难是什么？算子和未知量的无限性！

“Hello World”模型：Poisson 方程

给定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 其边界记为 $\partial\Omega$, 求标量函数 $u(\boldsymbol{x})$, 满足

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\
u(\boldsymbol{x}) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

- Laplace 算子 Δ 的定义
  - $d = 1$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x) = u_x$
  - $d = 2$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$
  - $d = 3$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y, z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- 未知量是什么？要求无穷多个点处对应的函数值。
- 该问题求解的困难是什么？算子和未知量的无限性！

“Hello World”模型：Poisson 方程

给定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 其边界记为 $\partial\Omega$, 求标量函数 $u(\boldsymbol{x})$, 满足

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\
u(\boldsymbol{x}) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

- Laplace 算子 Δ 的定义
  - □ $d = 1$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x) = u_x$
  - □ $d = 2$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$
  - □ $d = 3$: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u(x, y, z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- 未知量是什么？要求无穷多个点处对应的函数值。
- 该问题求解的困难是什么？算子和未知量的无限性！

从微分到积分：连续的弱形式

任取函数 $v \in H_0^1(\Omega)$ (称为**测试函数**, 下标 0 表示 v 在区域 Ω 的边界取值为 0), 分别乘到 Poisson 方程两端, 积分可得

$$-(\Delta u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

利用散度定理, 可得：

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega v\Delta u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (\Delta u, v)_\Omega &= <\nabla u \cdot \boldsymbol{n}, v>_{\partial\Omega} \\
-(\Delta u, v)_\Omega &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega
\end{aligned}$$

从微分到积分：连续的弱形式

原始求 Poisson 方程的问题转化为：求 $u(\boldsymbol{x}) \in H_0^1(\Omega)$, 满足

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

- 连续的弱形式和原来的 Poisson 问题还是一个问题吗？
- 问题的新形式, 相比原问题的形式, 变的更容易求解了吗？
  - □ 方程由逐点成立, 变成了对任意的测试函数都成立。
  - □ 二阶导数变成一阶导数, 并且一阶导数不要求处处存在, 只要 L^2 可积即可。
  - □ 但 H_0^1 仍是无限维的空间, 所以问题中仍然有无限多个方程要求解。

从无限到有限：离散的弱形式

取一个 N 维的子空间 $V_h = \mathrm{span}\{\phi_i\}_0^{N-1} \subset H_0^1(\Omega)$，替代无限维的空间 $H_0^1(\Omega)$，从而把问题又转化为**离散的弱形式**：求 $u_h \in V_h$，满足

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V,$$

- 离散的弱形式还代表和连续的弱形式同样的问题吗？
  - 不再是同一个问题，离散的弱形式的解和连续弱形式的解有**误差**。
  - 这个误差有多大？可以接受吗？可以改善吗？如何改善?
- 问题的新形式，相比原问题的形式，变的更容易求解了吗？
  - 离散的弱形式只需要对所有的基函数成立就可以了，所以离散的弱形式本质上只包含 N 独立个方程。

从无限到有限：离散的弱形式

对任何 $v_h \in V_h$，它都有唯一的表示

$$v_h = \sum_{i=0}^{N-1} v_i \phi_i.$$

可以看出空间 V_h 和 N 维向量空间 $\mathbb{R}^N$ 是**同构**的，即

$$v = \sum_{i=0}^{N-1} v_i \phi_i \leftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix}$$

其中 N 维向量 $\boldsymbol{v}$ 是函数 v 在基 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 的**坐标**。

从无限到有限：离散的弱形式

设 $u_h = \sum_{i=0}^{N-1} u_i\phi_i$ 是离散弱形式的解，则它满足下面 N 个方程

$$\begin{cases} (\nabla u_h, \nabla\phi_0) = (f, \phi_0) \\ (\nabla u_h, \nabla\phi_1) = (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (\nabla u_h, \nabla\phi_{N-1}) = (f, \phi_{N-1}) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (\sum_{i=0}^{N-1} u_i\nabla\phi_i, \nabla\phi_0) = (f, \phi_0) \\ (\sum_{i=0}^{N-1} u_i\nabla\phi_i, \nabla\phi_1) = (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (\sum_{i=0}^{N-1} u_i\nabla\phi_i, \nabla\phi_{N-1}) = (f, \phi_{N-1}) \end{cases}$$

从无限到有限：离散的弱形式

最终可写为离散代数系统的形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\nabla\phi_0, \nabla\phi_0) & (\nabla\phi_1, \nabla\phi_0) & \cdots & (\nabla\phi_{N-1}, \nabla\phi_0) \\ (\nabla\phi_0, \nabla\phi_1) & (\nabla\phi_1, \nabla\phi_1) & \cdots & (\nabla\phi_{N-1}, \nabla\phi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla\phi_0, \nabla\phi_{N-1}) & (\nabla\phi_1, \nabla\phi_{N-1}) & \cdots & (\nabla\phi_{N-1}, \nabla\phi_{N-1}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} (f, \phi_0) \\ (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (f, \phi_{N-1}) \end{bmatrix}$$

从无限到有限：离散的弱形式

最终可写为离散代数系统的形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F},$$

- 只要可以计算出上面积分 $(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$ 和 (f, ϕ_i)，就完全把原来的 Poisson 方程转化为一个代数方程求解问题。
- 但积分是一个求和的极限，定义在大多数区域上的大多数函数的积分，都不能用分析的办法算出来。

从无限到有限：数值积分

数值积分是**近似计算**定积分的有效方法。对于定义在区域 Ω 上的任意可积函数，大多数的数值积分公式都可以写成如下的形式，

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx |\Omega| \sum_{i=0}^{NQ-1} w_i f(x_i)$$

其中 $\{x_i\}_{i=0}^{NQ-1} \subset \Omega$ 称为**积分点**，$\{w_i\}_{i=0}^{NQ-1}$ 称为**积分权重**，满足 $\sum_{i=1}^{NQ-1} w_i = 1$。

- 对任意次数不高于 k 次的代数多项式都准确成立，但对于 $k+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有 k 次**代数精度**。

从无限到有限：数值积分

数值积分是**近似计算**定积分的有效方法。对于定义在区域 Ω 上的任意可积函数，大多数的数值积分公式都可以写成如下的形式，

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx |\Omega| \sum_{i=0}^{NQ-1} w_i f(x_i)$$

其中 $\{x_i\}_{i=0}^{NQ-1} \subset \Omega$ 称为**积分点**，$\{w_i\}_{i=0}^{NQ-1}$ 称为**积分权重**，满足 $\sum_{i=1}^{NQ-1} w_i = 1$。

- 对任意次数不高于 k 次的代数多项式都准确成立，但对于 $k+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有 k 次**代数精度**。

总结

- 上面通过弱形式 (变分) 把偏微分方程转化为代数方程的方法统称为 **Galerkin** 方法。
- 偏微分数值计算方法就是为解决**偏微分方程模型的无限性和计算资源的有限性**这对本质矛盾而出现、并不断向前发展的。
- 与 Galerkin 方法不同的另一种方法–有限差分法, 是通过**数值微分**来解决微分算子定义的无限性问题。