Matematyka: definicje, twierdzenia, dowody

Filip Fijałkowski

Spis treści

Rozdział 1

Teoria mnogości

1.1 Podstaowe własności zbiorów

Definicja 1.1. Wyrażeniem logicznym *nazywamy zdania postaci:*

1. $\nu_i = \nu_j$ *oraz* $\nu_k \in \nu_l$
2. *Jeśli* ϕ *oraz* ξ*, są wyrażeniami logicznymi, to są nimi również* $\neg\phi$, $\xi \wedge \phi$, $\exists_{\nu_i}(\phi)$.

Aksjomat 1.2 (*Aksjomat zbioru pustego*)**.** $\forall_{x,y}\exists_z (x \in z \wedge y \in z)$.

Aksjomat 1.3 (*Aksjomat ekstensywności*)**.** $\forall_{x,y} (\forall_z (z \in x \iff z \in y) \implies x = y)$.

Aksjomat 1.4 (*Aksjomat podzbiorów*)**.** *Niech* f *będzie pewną formułą nie zawierającą zmiennej* y*, wówczas* $\exists_y \forall_x (x \in y \iff x \in z \wedge f)$*. Od tej pory będziemy używać notacji:* $y = \{x \in z : f\}$.

Twierdzenie 1.5. *Zbiór pusty jest unikalny* $\emptyset$.

Dowód. Istotnie, na mocy aksjomatu estensywności gdyby istniał inny zbior pusty $\emptyset'$, to zachodziłoby: $\emptyset' \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq \emptyset' \implies \emptyset = \emptyset'$. □

Aksjomat 1.6 (*Aksjomat pary*)**.** $\forall_{x,y}\exists_z (x \in z \wedge y \in z)$

Uwaga 1.7. Aksjomaty [Aks.1.4] oraz [Aks.1.6] gwarantują istnienie zbioru $\{x, y\}$ posiadającego dokładnie dwa dane elementy.

Definicja 1.8. *Aksjomaty pary [Aks.1.6] i podzbiorów [Aks1.4] pozwalają zdefiniować* ***parę uporządkowaną*** *jako:*

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Poprzez rekurencję definiujemy ***n-kę uporządkowaną****:*

$$(x_1, \ldots, x_n) := ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Aksjomat 1.9 (*Aksjomat sumy*)**.** $\forall_{\mathcal{F}}\exists_A\forall_{Y,x}\,(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \implies x \in A)$, *stosujemy również oznaczenie* $A = \bigcup \mathcal{F}$.

Aksjomat 1.10 (*Aksjomat zastępowania*)**.** $\forall_{x\in A}\exists!_y f(x,y) \implies \exists_Y\forall_{x\in A}\exists_{y\in Y} f(x,y)$.

Twierdzenie 1.11. *Istnieją następujące zbiory:*

1. ***Iloraz rodziny*** $\bigcap \mathcal{F} := \left\{x : \forall_{y\in\mathcal{F}} x \in y\right\}$, *gdzie* $\mathcal{F} \neq \emptyset$
2. ***Iloczyn kartezjański*** $A \times B := \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Dowód. (1): Jest przynajmniej jeden element $z \in \mathcal{F}$, zatem korzystając z [Aks1.4] możemy wykazać istnienie $\bigcap \mathcal{F} = \left\{x : x \in z \wedge \forall_{y\in\mathcal{F}}\,(x \in y)\right\}$

(2): Zgodnie z [Def.1.8] i [Aks.1.3] $\forall_y\forall_y\exists!_z\,(z = (x,y))$. Zatem na mocy [Aks.1.4] istnieje zbiór $A \times y = \{z : \exists_{x\in A} z = (x,y)\}$, natomiast [Aks.1.10] zapewnia istnienie $A * B = \{A \times y : y \in B\}$.

Definiujemy $A \times B := \bigcup A * B$. □

Definicja 1.12. ***Różnicą*** $x \setminus y$ *nazywamy zbiór zdefiniowany przez:*

$$z \in x \setminus y \iff (z \in x \wedge z \notin y)$$

Definicja 1.13. ***Dopełnieniem*** $x \subseteq y$ *względem* y *nazywamy zbiór:*

$$x^{\mathsf{C}} := y \setminus x$$

Twierdzenie 1.14 (*(Prawa De Morgana)*)**.** *Dla dowolnej rodziny zbiorów* $\mathcal{F}$ *takiej, że* $\forall_{A\in\mathcal{F}} : A \subseteq X$ *oraz* A *oznacza dopełnienie* A *względem* X *zachodzą równości:*

$$\left(\bigcap \mathcal{F}\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A, \qquad \left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A.$$

Dowód.

$$x \in \left(\bigcap \mathcal{F}\right) \iff \exists_{A\in\mathcal{F}} : x \notin A \iff x \in \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A.$$

Teraz do tej równości podstawmy $B = A$ otrzymując:

$$\left(\bigcap_{B=A} B\right) = \bigcup_{B=A} B_i,$$
$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} (A) = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A,$$

□

Aksjomat 1.15 (*Aksjomat zbioru potęgowego*)**.** $\forall_x\exists_y\forall_z\,(z \subseteq x \implies z \in y)$.

1.2 Relacje, funkcje

Definicja 1.16. ***Relacją*** *między* X *i* Y *nazywamy dowolny podzbiór* $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$.

Definicja 1.17. ***Relacją równoważności*** *na zbiorze* X *nazywamy podzbiór* $\sim \subseteq X \times X$ *spełniający trzy warunki:*

1. $\forall_{x \in X} : (x, x) \in \sim$,
2. $(x, y) \in \sim \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \sim$,
3. $(x, y) \in \sim \implies (y, x) \in \sim$.

Klasą abstrakcji elementu $x \in X$ *względem relacji* $\sim$ *nazywamy:*

$$[x]_\sim = \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Zbiór klas abstrakcji oznaczamy:

$$X/_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$$

Definicja 1.18. *Funkcją* $f : X \to Y$ *nazywamy relację* $f \subseteq X \times Y$ *spełniającą warunek:* $\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} \left((x, y) \in f\right)$. *Fakt, iż* $(x, y) \in f$ *zapisujemy* $f(x) = y$.

Definicja 1.19. *Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru* X *w* Y *oznaczamy* Y^X.

Definicja 1.20. *Niech* $f : X \to Y$ *będzie funkcją. Wówczas:*

- X *nazywamy* ***domeną*** f.
- Y *nazywamy* ***kodomeną*** f.
- $\mathrm{Im}(f) := f(X) := \{y \in Y : \exists_{x \in X} : y = f(x)\}$ *nazywamy* ***obrazem*** f.
- $\mathrm{graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y = f(x)\}$ *nazywamy* ***grafem*** f.
- $f^{-1}(Z) := \{x \in X : f(x) \in Z\}$ *nazywamy* ***przeciwobrazem*** $Z \subseteq Y$.
- *Jeśli* $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : f(x) = y$ *to funkcja jest* ***suriekcją***.
- *Jeśli* $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ *to funkcję nazywamy* ***iniekcją***.
- *Funkcję będącą zarazem iniekcją i suriekcją nazywamy* ***bijekcją***.

Twierdzenie 1.21. *Niech* $\sim$ *będzie relacją równoważności na zbiorze* X. *Istnieje dobrze określona funkcja rzutu na przestrzeń klas:*

$$\pi : X \ni x \to [x]_\sim \in X/_\sim$$

Dowód. Należy wykazać jedynie, że element $[x]_\sim$ jest wyznaczony jednoznacznie - niezależnie od wyboru reprezentanta klasy. Będzie to równoważne wykazani, że każdemu elementowi domeny odpowiada tylko jeden element obrazu. Przypuśćmy, że $x \in [x]_\sim$ oraz $x \in [y]_\sim$ Wówczas:

$$z \in [y]_\sim \impliedby \begin{cases} z \in [x]_\sim \implies (x, z) \in \sim, \\ x \in [y]_\sim \implies (y, x) \in \sim, \end{cases}$$

skąd $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$ na mocy tranzytywności relacji równoważności. W lustrzany sposób możemy pokazać, iż $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$, zatem $[x]_\sim = [y]_\sim$. $\square$

Twierdzenie 1.22. *Niech* $f : X \to Y$ *będzie funkcją, natomiast relacja równoważności na zbiorze* X *będzie zdefiniowana poprzed:* $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. *Istnieje jednoznacznie wyznaczona funkcja* $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$, *dla której poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dowód. Sprawdzenie, iż $\sim$ jest faktycznie relacją równoważności pomijamy jako trywialne zadanie.

Definiujemy funkcję $\widetilde{f} : [x] \mapsto f(x)$, która spełnia warunki zadania. Oczywiście jest unikalna. $\square$

1.3 Porządki

Definicja 1.23. ***Porządkiem*** *na zbiorze* X *nazywamy relację* $\leq \subseteq X \times X$ *spełniającą warunki:*

1. $\forall_{x \in X} : (x, x) \in \leq$
2. $(x, y) \in \leq \wedge (y, z) \in \leq \implies (x, z) \in \leq$
3. $(x, y) \in \leq \wedge (y, x) \in \leq \implies x = y$

Fakt $(x, y) \in \leq$ *zapisujemy inaczej poprzez* $x \leq y$. *Parę* $(X, \leq)$ *nazywamy zbiorem uporządkowanym.*

Definicja 1.24. *Porządek* $(X, \leq)$ *nazywamy* ***liniowym****, jeśli:*

$$\forall_{x,y \in X} x \leq y \vee y \leq x.$$

Definicja 1.25. ***Ograniczeniem dolnym*** *podzbioru* Y *zbioru uporządkowanego* $(X, \leq)$ *nazywamy element* $x \in X$ *taki, że:*

$$\forall_{y \in Y} (x \leq y).$$

Definicja 1.26. *Element* y *podzbioru* $Y \subseteq X$ *jest* ***minimum*** Y *jeśli* $y \in Y$ *oraz* y *jest ograniczeniem dolnym tego podzbioru. Piszemy* $y = \min Y$.

Definicja 1.27. *Porządek* $(X, \leq)$ *jest* ***dobry*** *jeśli każdy niepusty podzbiór* $Y \subseteq X$ *posiada minimum.*

Aksjomat 1.28 (*Aksjomat wyboru*)**.** *Dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów rozłącznych istnieje zbiór zawierający dokładnie po jednym elemencie z każdego ze zbiorów rodziny.*

Definicja 1.29. *Niech* $(X, \leq)$ *będzie zbiorem uporządkowanym. Wówczas zbiór* $Y \subseteq X$ *nazywamy łańcuchem jeśli zbiór* $(Y, \leq|_Y)$ *jeśli porządek określony na* Y *jest liniowy, gdzie:*

$$\leq|_Y := (Y \times Y) \cap \leq .$$

Twierdzenie 1.30. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *Zachodzi warunek podany w aksjomacie Wyboru [Aks.1.28].*
2. *Na każdym zbiorze da się wprowadzić dobry porządek.*
3. *Jeśli* $(X, \leq)$ *jest zbiorem uporządkowanym oraz każdy łańcuch w* X *ma ograniczenie górne, to* X *ma maksimum.*

1.4 Liczby naturalne

Aksjomat 1.31 (*Aksjomat nieskończoności*). $\exists_x (\emptyset \in x \wedge \forall_{y \in x} y \cup \{y\} \in x)$

Twierdzenie 1.32. *Istnieje dokładnie jeden zbiór* $\mathbb{N}$*, że dla dowolnego* I *spełniającego [Aks.1.31]* $\mathbb{N} \subseteq I$.

Dowód. Istnienie: Wprowadźmy oznaczenia:

$$\mathcal{F} := \{X \in \mathcal{P}(I) | X \text{ spełnia [Aks.1.31]}\},$$
$$\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{F}.$$

Ponieważ $I \in \mathcal{F}$, to wybrana rodzina jest niepusta, a $\mathbb{N}$ spełnia tezę twierdzenia.

Jednoznaczność: Przypuśćmy, że istnieje zbiór $\mathbb{N}_2$ inny niż $\mathbb{N}$, również spełniający warunek twierdzenia. Wówczas z definicji $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_2 \wedge \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N} \implies \mathbb{N} = \mathbb{N}_2$. □

Definicja 1.33. *Zbiór* $\mathbb{N}$ *z [Tw.1.32] przyjmujemy jako definicję zbioru* ***liczb naturalnych****.*

Definicja 1.34. ***Porządkiem liczb naturalnych*** $(X, \leq)$ *nazywamy relację:*

$$x \leq y \iff x \subseteq y.$$

Twierdzenie 1.35. *Porządek liczb naturalnych jest dobry.*

Dowód. Rozumując przez zaprzeczenie przypuśćmy, że pewien niepusty podzbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ nie ma elementu najmniejszego. Zbiór:

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \text{x jest ograniczeniem dolnym S}\}$$

Jest niepusty, gdyż na podstawie [Tw.1.32] $\emptyset \in B$.

Niech $n \in B$. Skoro S nie ma minimum, to $n \notin S$ oraz $\forall_{m \in S} (n < m)$. Stąd $n + 1 \leq m \implies n + 1 \in B \implies B = \mathbb{N}$. Zatem $m \in S \implies m \in \mathbb{N} \implies m \in B \implies m$ jest elementem najmniejszym S, co przeczy założeniu. □

Twierdzenie 1.36 (*Zasada indukcji*)**.** *Niech* $S \subseteq \mathbb{N}$*, natomiast* $S \ni p \mapsto P(x) \in \{0, 1\}$ *pewną funkcją. Wówczas jeśli:*

$$\left(\forall_{S \ni x < y} \left(P(x) = 1\right)\right) \implies P(y) = 1, \qquad\qquad P(s_0) = 1,$$

gdzie $s_0 := \min S$*, to zachodzi:*

$$\forall_{y \in S} \left(P(y) = 1\right).$$

Dowód. Niech $Z = \{x \in S : P(x) = 0\}$, natomiast z_0 będzie elementem najmniejszym Z. Wówczas nie może zachodzić $\forall_{x \leq z_0} \left(P(x) = 1\right)$ chyba, że $z_0 = s_0$ oraz $0 = P(z_0) = P(s_0) = 1$, co jest samo w sobie sprzecznością. □

1.5 Moc zbiorów

Definicja 1.37. *Zbiory* A *i* B *są* ***równoliczne*** *jeśli istnieje bijekcja* $f : A \to B$*. Jest to relacja równoważności oznaczana często przez* $A \sim B$*.*

Definicja 1.38. *Zbiór nazywamy* ***przeliczalnym*** *jeśli jest równoliczny z jakimś podzbiorem zbioru liczb naturalnych.*

Twierdzenie 1.39. *Dla żadnego* X *nie istnieje suriekcja* $f : X \to \mathcal{P}(X)$*.*

Dowód. Weźmy funkcję $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$. Wykażemy, że ϕ nie jest suriekcją pokazując, że:

$$Y = \{x \in X : x \notin \phi(x)\} \tag{1.1}$$

nie należy do $\mathrm{Im}(\phi)$.

Dążąc do sprzeczności przypuśćmy, że znaleźliśmy taki y dla którego $\phi(y) = Y$. Wówczas:

1. $y \in Y \implies y \notin \phi(y) = Y$, albo
2. $y \notin Y \implies y \in \phi(y) = Y$,

co doprowadza nas do sprzeczności - nie możemy wybrać takiego y, że jego obrazem jest (1.1). □

Twierdzenie 1.40 (*Cantor-Bernstein-Schröder*)**.** *Jeśli* A *ma podzbiór równoliczny z* B*, a* B *ma podzbiór równoliczny z* A*, to* $A \sim B$*.*

Dowód. Zgodnie z założeniem możemy znaleźć bijekcje f, g takie, że:

$$f(A) = B_1 \subseteq B, \qquad\qquad g(B) = A_1 \subseteq A.$$

Ustalmy też dwa ciągi:

$$B_n = f(A_{n-1}), \qquad\qquad A_n = g(B_{n-1})$$

Możemy przedstawić:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots,$$
$$A_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots,$$

lub jako:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \cup M \cup N, \qquad A_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \cup M \cup N_1,$$

gdzie:

$$M = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_5 \setminus A_6) \cup \ldots,$$
$$N = (A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots,$$
$$N_1 = (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \ldots$$

Zauważmy, że $f \circ g$ jest bijekcją oraz: $f \circ g(A \setminus A_1) = A_2 \setminus A_3$, skąd wynika również $N \sim N_1$. Stąd $A_1 \sim A$ i rezultacie $A \sim B$, jako że równoliczność zbiorów jest relacją równoważności oraz $A_1 \sim B$. □

1.6 Operacje na zbiorach

Definicja 1.41. *Funkcję postaci $\circledcirc : X \times X \to X$ nazywamy* ***działaniem na zbiorze*** X. *Jeśli ponadto:*

1. $\forall_{x,y,z \in X} : x \circledcirc (y \circledcirc z) = (x \circledcirc y) \circledcirc z$ *to działanie nazywamy* ***łącznym***.
2. $\forall_{x,y \in X} : x \circledcirc y = y \circledcirc x$ *to działanie nazywamy* ***przemiennym***.
3. $\exists_{e \in X} \forall_{x \in X} : x \circledcirc e = e \circledcirc x = x$ *to* e *nazywamy* ***elementem neutralnym działania***.

Twierdzenie 1.42. *Jeśli działanie ma element neutralny, to jest on wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód. Niech e będzie elementem neutralnym działania $\circledcirc : X \times X \to X$. Przypuśćmy, że istnieje jeszcze inny element neutralny e'. Wówczas:

$$e' = e' \circledcirc e = e \circledcirc e' = e$$

□

1.7 Grupa permutacji

Definicja 1.43. ***Grupa*** *to trójka* $(G, \cdot, \mathbb{1})$, *gdzie:*

1. *G jest zbiorem.*
2. $\cdot$ *jest działaniem łącznym.*
3. $\mathbb{1}$ *jest elementem neutralnym działania.*
4. $\forall_{g \in G} \exists_{g^{-1} \in G} : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$

Jeśli ponadto działanie $\cdot$ *jest przemienne to grupę nazywamy* ***abelową****.*

Definicja 1.44. ***Podgrupą*** *grupy* $(G, \cdot, \mathbb{1})$ *nazywamy zbiór* $H \subseteq G$ *taki, że:*

1. $H \cdot H \subseteq H$
2. $\forall_{h \in H} \left(h^{-1} \in H\right)$

Definicja 1.45. *Niech* $(G_1, \cdot_1, \mathbb{1})_1)$ *i* $(G_2, \cdot_2, \mathbb{1}_2)$ *będą grupami.* ***Homomorfizmem grup*** *nazywamy funkcję* $\phi : G_1 \to G_2$ *spełniającą warunek:*

$$\phi\left(x \cdot_1 y\right) = \phi\left(x\right) \cdot_2 \phi\left(y\right)$$

Twierdzenie 1.46. *Jeśli* $\phi : G_1 \to G_2$ *jest homomorfizmem grup, to* $\phi\left(\mathbb{1}_1\right) = \mathbb{1}_2$.

Dowód.

$$\phi\left(\mathbb{1}_1\right) = \mathbb{1}_2 \iff \begin{cases} \phi\left(x\right) = \phi\left(\mathbb{1}_1 \cdot_1 x\right) = \phi\left(\mathbb{1}_1\right) \cdot_2 \phi\left(x\right) \\ \phi\left(x\right) = \phi\left(x \cdot_1 \mathbb{1}_1\right) = \phi\left(x\right) \cdot_2 \phi\left(\mathbb{1}_1\right) \end{cases}$$

□

Definicja 1.47. ***Permutacją*** X *nazywamy dowolna bijekcję* $\sigma : X \to X$.

Twierdzenie 1.48. *Niech* S_X *oznacza grupę permutacji* X, *a* $\circ$ *operację składania funkcji. Wówczas* $(S_X, \circ, \mathrm{id}())$ *jest grupą.*

Definicja 1.49. *Grupę permutacji na zbiorze* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *oznaczamy* S_n.

1.8 Pierścień wielomianów

Definicja 1.50. ***Pierścień*** *to czwórka* $(R, +, \cdot, 0,)$, *gdzie:*

1. $(R, +, 0)$ *jest grupą abelową.*
2. $\cdot$ *jest działaniem łącznym.*
3. *Zachodzi* ***rozdzielność*** *dodawania względem mnożenia:*

$$\forall_{a,b,c \in R} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Definicja 1.51. *Niech* $(R, +, \cdot, 0,)$ *będzie pierścieniem.*

1. $x \in R$ *nazywamy* ***dzielnikiem zera*** *jeśli istnieje* $y \neq 0$ *dla którego* $xy = 0$.
2. *Mówimy, że* $x \in R$ *jest* ***nilpotentny*** *jeśli dla pewnego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $x^n = 0$.

Definicja 1.52. ***Ideałem*** *w pierścieniu* R *nazywamy* $I \subseteq R$ *spełniający:*

1. $(I, +, 0)$ *jest grupą.*
2. $\forall_{a \in I} \forall_{x \in R} : a \cdot x \in I \wedge x \cdot a \in I$
3. $\mathbb{1} \notin I$

Definicja 1.53. ***Ciało*** *to piątka* $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, \mathbb{1})$, *gdzie:*

1. $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, \mathbb{1})$ *jest pierścieniem.*
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, \mathbb{1})$ *jest grupą abelową.*
3. $\mathbb{1} \neq 0$

Twierdzenie 1.54. *Niech* $\mathbb{K}[x]$ *oznacza pierścień wielomianów nad ciałem* $\mathbb{K}$. *Dla dowolnych niezerowych* $p, q \in \mathbb{K}[x]$ *istnieją jednoznacznie wyznaczone elementy* $r, s \in \mathbb{K}[x]$ *takie, że:*

$$p = s \cdot q + r \wedge \deg(r) < \deg(q).$$

Dowód. (istnienie): Jeśli $\deg(p) < \deg(q)$, to wystarczy przyjąć $s = 0$ oraz $r = p$. Przypuśćmy zatem, że $\deg(q) \leq \deg(p)$. Wielomiany mają reprezentację postaci:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i x^i, \qquad q = \sum_{j=1}^{m} q_j x^j,$$

gdzie $p_n, q_m \neq 0$ i $m \leq n$. Ustalmy rekurencyjnie:

$$s_{(1)} := p_n q_m^{-1} x^{n-m} \qquad p_{(1)} := p - s_{(1)} q,$$
$$s_{(x+1)} := s_{(x)} + p_{\deg(p_{(x)})} q_m^{-1} x^{\deg(p_{(x)}) - m} \qquad p_{(x+1)} := p - s_{(x+1)} q.$$

Algorytm powtarzamy do czasu aż $s := s_{(x)}$ i $r := p_{(x)}$ spełniają warunki zadania. To tylko zarys dowodu, ale szczegóły zajęłyby niepotrzebnie wiele miejsca.

(unikalność): Przypuśćmy, że $p = sq + r = s'q + r'$ oraz $(s - s') \neq 0$, wówczas $0 = (s - s')q + (r - r')$. Z założenia, że $\deg(r) < \deg(q)$ wynika sprzeczność, gdyż $(s - s')q + (r - r') = 0 \implies \deg(r) \geq \deg(r - r') = \deg((s - s')q) \geq \deg(q)$. □

Twierdzenie 1.55. *Każdy ideał* $I \subseteq \mathbb{K}[x]$ *można, dla pewnego* $w \in \mathbb{K}[x]$, *przedstawić w postaci:*

$$I = \{w \cdot v : v \in \mathbb{K}[x]\}.$$

Dowód. Niech $w_1 \in I$ będzie niezerowym wielomianem minimalnego stopnia w ideale, oraz $w_2 \in I$. Na mocy [Tw.1.54] istnieją $r \in \mathbb{K}[x]$ stopnia mniejszego niż w_2 oraz $v \in \mathbb{K}[x]$, dla których:

$$w_2 = v \cdot w_1 + r$$

Z definicji ideału wiemy też, że:

$$w_1 \in I \implies v \cdot w_1 \in I$$
$$r = w_2 - v \cdot w_1 \in I$$

Ponadto, ponieważ stopień w_1 był minimalny, to $r = 0$. Innymi słowy każdy wielomian w I dzieli się przez w_1. $\square$

Rozdział 2

Algebra liniowa

Definicja 2.1. ***Przestrzenią wektorową*** *nad ciałem* $\mathbb{K}$ *nazywamy piątkę* $(V, \mathbb{K}, +, \cdot, 0)$*, gdzie:*

1. $(V, +, 0)$ *jest grupą abelową.*
2. $\cdot : \mathbb{K} \times V \ni (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \in V$ *zwana* ***mnożeniem przez skalar*** *jest funkcją spełniającą warunki rozdzielności:*

   $$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \qquad \lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v,$$

   łączności:

   $$(\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \mu) v = \lambda \cdot (\mu \cdot v),$$

   gdzie „$\cdot_{\mathbb{K}}$*" oznacza działanie mnożenia w ciele. Z elementem neutralnym* $\mathbb{1} \in \mathbb{K}$*:*

   $$\mathbb{1} \cdot v = v.$$

Definicja 2.2. ***Podprzestrzenią*** *przestrzeni* $(V, \mathbb{K}, +, \cdot, 0)$ *nazywamy taki podzbiór* $V \subseteq W$*, że:*

1. $V + V \subseteq V$
2. $\mathbb{K} \cdot V \subseteq V$

Definicja 2.3. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem* $\mathbb{K}$*.* ***Operator liniowy*** *to homomorfizm przestrzeni liniowych, czyli funkcja* $A : V \to W$ *taka, że:*

$$\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}; x,y \in V} : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y.$$

Przestrzeń operatorów liniowych oznaczamy $\mathrm{Hom}(V, W)$ *Jeśli* $V = W$ *to homomorfizm nazywamy* ***endomorfizmem*** *i* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *oznaczamy* $\mathrm{End}(V)$*. Jeśli* A *ma lewą odwrotność to jest* ***epimorfizmem****. Jeśli prawą -* ***monomorfizmem****. Gdy obie -* ***izomorfizmem****.*

Definicja 2.4. *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową nad* $\mathbb{K}$*. Podzbiór* $E \subseteq V$ *jest* ***liniowo niezależny*** *jeśli niezależnie od wyboru* $n \in \mathbb{N}$ *nie ma skończonych, niezerowych ciągów* $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ *oraz* $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq E$ *takich, że* $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$*.*

Definicja 2.5. *Niech V będzie przestrzenią wektorową.* ***Bazą*** *przestrzeni nazywamy dowolny maksymalny liniowo niezależny podzbiór V. (Niezawarty w żadnym innym)*

Twierdzenie 2.6. *Każda przestrzeń wektorowa ma bazę.*

Dowód. Jest to prosty wniosek z [Tw.1.30.3]. Jeśli przyjmiemy relację zawierania jako porządek na wszystkich zbiorach liniowo niezależnych to istnieje taki zbiór maksymalny. □

Definicja 2.7. *Jeśli każdy element przestrzeni V można zapisać jako liniową kombinację elementów zbioru A, to mówimy, że A rozpina przestrzeń V, co zapisujemy:*

$$V = \mathrm{span}(A)$$

2.1 Przestrzenie o skończonym wymiarze

Definicja 2.8. *Przestrzeń wektorowa ma* ***wymiar*** *$n \in \mathbb{N}$ jeśli istnieje jej baza posiadająca n elementów.*

Twierdzenie 2.9. *Niech zbiór $\{e_i\}_{i=1}^n$ stanowi bazę n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas:*

1. *Każdy wektor $v \in V$ można przedstawić w postaci sumy $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{K}$.*
2. *Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.*

Dowód. (1): Przyjmijmy, że $v \notin \{e_i\}_{i=1}^n$, gdyż wówczas teza jest oczywista. Rozważmy zbiór $\{e_i\}_{i=1}^n \cup \{v\}$. Nie może on być liniowo niezależny wprost z [Def.2.5], zatem istnieje zestaw skalarów, że:

$$\alpha_0 v + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

gdzie $\alpha_0 \neq 0$. Wtedy:

$$v = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} e_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n\right)$$

(2): Przypuśćmy, że:

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = v = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Równanie odejmujemy stronami:

$$(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0.$$

Zgodnie z [Def.2.4] wszystkie współczynniki w tej równości muszą być zerami. □

Twierdzenie 2.10. *Niech V będzie przestrzenią wektorową o wymiarze n. Wówczas każda baza tej przestrzeni ma n elementów.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwie różne bazy $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ oraz $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, gdzie $k < m$ (co zakładamy bez straty ogólności). Rozważmy liniowo niezależny zbiór $B = \{e_1, \ldots, e_s, f_p, \ldots, f_q\}$ dla $s \in \{0, \ldots, k\}$. Wykażemy, że możemy w nim zastąpić jeden z wektorów f_i przez e_{s+1} w ten sposób, by pozostał liniowo niezależny. Istotnie mamy dwie możliwości:

(1): $B \cup \{e_{k+1}\}$ jest liniowo niezależny. Wówczas usuwamy z niego dowolny f_i.

(2): $B \cup \{e_{k+1}\}$ jest liniowo zależny i możemy zapisać:

$$e_{k+1} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_n + \beta_1 f_p + \beta_{q-p+1} f_q, \tag{2.1}$$

gdzie przynajmniej jedno $\beta_i \neq 0$. Gdyby było inaczej to E byłby układem liniowo zależnym. Zastępujemy f_i wektorem e_{k+1}, a otrzymany zbiór B' jest wciąż liniowo niezależny. (Gdyby było inaczej, to moglibyśmy wybrać $a_1 e_1 + \ldots + a_{k+1} e_{k+1} + a_{k+2} f_s + \ldots + a_m f_d = 0$, pod e_{k+1} podstawić (2.1) i wykazać liniową zależność B).

To znaczy, że możemy stworzyć liniowo niezależny zbiór:

$$\{e_1, \ldots, e_k, f_t, \ldots, f_r\},$$

posiadający m wektorów, zawierający bazę E. Jest to sprzeczne z definicją bazy jako maksymalnego zbioru liniowo niezależnego. □

Uwaga 2.11. Każdy operator liniowy na przestrzeni o skończonym wymiarze jest jednoznacznie wyznaczony przez obrazy elementów bazy tej przestrzeni.

Lemat 2.12. *Każdy zbiór liniowo niezależny można dopełnić do bazy.*

Dowód. Można zastosować algorytm analogiczny do tego zastosowanego w dowodzie [Tw.2.10]. □

Lemat 2.13. *Podprzestrzeń $W \subseteq V$ przestrzeni V o wymiarze n ma wymiar $m \leq n$.*

Dowód. Jeśli $W \neq \{\mathbf{0}\}$, to możemy wybrać wektor $w_1 \in W$ taki, że $\mathrm{span}\{w_1\} \subseteq W$, potem rekurencyjnie w_{k+1} dla którego $\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$ jest liniowo niezależny oraz $\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\} \subseteq W$ itd...

Jeśli w którymś momencie nie jesteśmy w stanie wybrać $k+1$ wektora, to $\dim W = k$. Jeśli natomiast dojdziemy do $k = n$, to $W = V$. □

Twierdzenie 2.14. *Niech W będzie przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze, natomiast U, V jej podprzestrzeniami takimi, że $W = \{v + u : v \in V, u \in U\} = V + U$. Wówczas $\dim W = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$.*

Dowód. Oznaczmy bazę $V \cap U$ przez E zakładając przy tym dla wygody, że jeśli $V \cap U = \{\mathbf{0}\}$, to $E = \emptyset$. Na mocy [Tw.2.12] można dopełnić ten zbiór do bazy E_1 podprzestrzeni V i osobno bazy E_2 podprzestrzeni W. Wówczas:

$$(E_1 \setminus E) \cup (E_2 \setminus E) \cup E,$$

liczy $(\dim U + \dim V - \dim U \cap V)$ elementów oraz jest bazą W. □

Definicja 2.15. *Izomorfizm liniowy* $T : V \to W$ *nazwiemy* ***kanonicznym*** *jeśli możemy zdefiniować go niezależnie od wyboru baz przestrzeni* V *i* W.

Definicja 2.16. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi. Wówczas taki operator liniowy* $P : V \to W$, *że* $\forall_{v \in V} : P(v) = P(P(v))$ *nazywamy* ***rzutem***.

2.2 Suma prosta przestrzeni

Definicja 2.17. *Niech* W, V, U *będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem* $\mathbb{K}$. *Mówimy, że* W *jest* ***suma prostą*** V *i* U, *co zapisujemy* $W = V \oplus U$, *jeśli każdy wektor* $w \in W$ *można jednoznacznie zapisać w postaci* $w = v + u$, *gdzie* $v \in V$ *oraz* $u \in U$.

Twierdzenie 2.18. *Zbiór* $W = \{V + U : v \in V, u \in U\}$ *jest sumą prostą przestrzeni* V *i* U *wtedy i tylko wtedy, gdy* $V \cap U = \{0\}$.

Dowód. ($\Longrightarrow$): Jeśli W jest sumą prostą, ale $\exists_{a \in V \cap U} : a \neq 0$, to rozkład $0 = 0 + 0 = a + (-a)$ nie jest jednoznaczny.

($\Longleftarrow$): Jeśli $w = v_1 + u_1 = v_2 + u_2$, to $v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \in V \cap U = 0$. □

Wniosek 2.19. Zbiór $W = \{V + U | v \in V, u \in U\}$ jest sumą prostą przestrzeni V i U wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim W = \dim V + \dim U$.

Dowód. Wynika z [Tw.2.14]. □

Wniosek 2.20. $W = V \oplus W \cong V \times W$.

Dowód. Wystarczy zauważyć istnienie naturalnego izomorfizmu $W \ni v + w \mapsto (v, w)$. □

2.3 Przestrzeń ilorazowa

Twierdzenie 2.21. *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową, natomiast* W *jej podprzestrzenią. Wprowadźmy na* V *następującą relację:*

$$\forall_{x,y \in V} : x\mathcal{R}y \iff x - y \in W.$$

Wówczas jest to relacja równoważności. Ponadto jeśli na tym zbiorze wprowadzimy działania:

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad \alpha[x] = [\alpha x],$$

to zyska on strukturę przestrzeni wektorowej.

Dowód. (1): Pokażmy najpierw, że relacja jest relacją równoważności. Ponieważ W jest podprzestrzenią:

- $x - x = 0 \in W$

- $x - y \in W \wedge y - z \in W \implies (x-y)+(y-z) = x - z \in W$
- $x - y \in W \implies -(x-y) = y - x \in W$

(2): Sprawdzimy, że działania są jednoznacznie zdefiniowane, to znaczy wykażmy:

$$x, x' \in [x]; y, y' \in [y] \implies [x+y] = [x'+y'] \wedge [\alpha x] = [\alpha x'],$$

ale to proste, bo $(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in W$ oraz $[\alpha x - \alpha x'] \in W$. □

Uwaga 2.22. Rzut $\pi : V \to {}^{V}\!/_{W}$ jest operatorem liniowym.

Lemat 2.23. *Niech* V, W, Q *będą przestrzeniami wektorowymi, a* $A : V \to W$ *oraz* $S : V \to Q$ *operatorami liniowymi. Ponadto niech* $H : Q \to W$ *będzie operatorem liniowym dla którego* $H \circ S = A$*, czyli takim dla którego poniższy diagram jest przemienny. Wówczas* H *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker S \subseteq \ker A$*. Ponadto jest wyznaczone jednoznacznie na* $\mathrm{Im}(S)$*.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "S"'] & & W \\ & Q \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Jeśli H istnieje, to $S(v) = 0 \implies H \circ S = A = 0$.

($\Longrightarrow$): Teraz załóżmy, że $\ker S \subseteq \ker A$. Na podprzestrzeni $\mathrm{im}(S)$ możemy ustalić $H(S(v)) = H(u) = A(v)$, gdzie $u = S(v)$. Natomiast na zbiorze $W \setminus \mathrm{im}(S)$ ustalmy $H = 0$. Tak zdefiniowane H jest liniowe, gdyż:

$$H(S(v+u)) = A(v+u) = A(v) + A(u) = H(S(v)) + H(S(u)),$$
$$H(S(\alpha v)) = \alpha A(v) = \alpha H(S(v)).$$

Operator H jest dobrze określony, ponieważ:

$$S(v_1) = S(v_2) \implies v_1 - v_2 \in \ker S \implies$$
$$\implies v_1 - v_2 \in \ker A \implies A(v_1) = A(v_2)$$

□

Twierdzenie 2.24. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi nad* $\mathbb{K}$*. Ponadto niech* $A : V \to W$ *będzie operatorem liniowym. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony operator liniowy* $\bar{A} : {}^{V}\!/_{\ker A} \to W$ *spełniający* $\bar{A} \circ \pi = A$*, gdzie* π *jest rzutem na przestrzeń ilorazową.*

Dowód. Skorzystajmy z [Lem.2.23] zastępując Q przez $\ker A$. □

2.4 Przestrzeń dualna

Definicja 2.25. *Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Kowektorem nazywamy dowolny operator liniowy $f : V \to \mathbb{K}$.*

Twierdzenie 2.26. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Zbiór funkcjonałów na V ma strukturę przestrzeni wektorowej.*

Dowód. Dowód jest trywialny, dla kowektorów f, g:

$$(\alpha f + \beta g)(\delta x + \gamma y) = \delta(\alpha f + \beta g)(x) + \gamma(\alpha f + \beta g)(y).$$

$\square$

Definicja 2.27. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Przestrzeń kowektorów na V nazywamy **przestrzenią dualną** do V i oznaczamy V^*.*

Twierdzenie 2.28. *Niech f będzie niezerowym kowektorem w V^*. Ustalmy element $x_0 \in V \setminus \ker f$. Dowolny wektor $v \in V$ może być jednoznacznie zapisany w postaci $v = \alpha x_0 + y$, gdzie $y \in \ker f$.*

Dowód. Niech:

$$y = v - \frac{f(v)}{f(x_0)} x_0.$$

Wówczas $f(y) = 0$, zatem $y \in \ker f$ oraz $v = \frac{f(v)}{f(x_0)} x_0 + y$.

[*unikalność*]: Jeśli $v = \alpha x_0 + y_1 = \beta x_0 + y_2$, to $(\alpha - \beta) x_0 = y_2 - y_1 = 0$. $\square$

Definicja 2.29. *Niech V będzie przestrzenią wektorową, a $W \subseteq V$ jej podprzestrzenią. Kowymiarem W nazywamy:*

$$\mathrm{codim}(W) = \dim {}^{V}\!/\!_{W}$$

Twierdzenie 2.30. *Niech $f \in V^*$ będzie niezerowym kowektorem, wówczas $\mathrm{codim}(\ker f) = 1$.*

Dowód. Mamy $\mathrm{codim}(\ker f) = \dim {}^{V}\!/\!_{\ker f}$. Korzystając z [Tw.2.28] wybieramy $x_0 \in V \setminus \ker f$. Taki element istnieje gdyż f jest niezerowy. każdy element $v \in V$ można zapisać jako sumę $v = \alpha x_0 + y$, gdzie $y \in \ker f$. Stąd jeśli $\pi : V \to {}^{V}\!/\!_{\ker f}$ jest rzutem, to:

$$\pi(v) = \alpha[x_0] \implies [x_0] \text{ jest bazą } {}^{V}\!/\!_{\ker f}.$$

$\square$

Twierdzenie 2.31. *Jeśli $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V, a funkcjonał e^i jest zdefiniowany wzorem:*

$$e^i(\alpha e_j) = \alpha \delta^i_j,$$

to zbiór $E^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ jest bazą V^*.

Dowód. (e^i jest kowektorem): Niech $v, w \in V$, wówczas $e^i(v+w) = e^i\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j + \sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right) = \alpha_i + \beta_i = e^i(v) + e^i(w)$.

(E^* jest bazą): Jest to wniosek z [Tw.2.28]. □

Twierdzenie 2.32. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm $(V^*)^* \simeq V$.*

Dowód. Wybierzmy odwzorowanie:

$$\begin{aligned} &\Phi : V \ni v \mapsto v^{**}, \text{ gdzie} \\ &v^{**}(f) = f(v) \end{aligned}$$

To, że Φ jest liniowe oraz v^{**} faktycznie należy do V^{**} jest proste do wykazania.

[*monomorfizm*]: $v_1^{**} = v_2^{**} \implies \forall_{f \in V^*} : f(v_1) = f(v_2)$

[*epimorfizm*]: Skorzystajmy z [Tw.2.30]. Weźmy dowolny wektor $t \in V^{**}$. Musi istnieć dokładnie jeden element $t' \in V^*$, że $t(t') = 1$ oraz dokładnie jeden $t'' \in V$ dla którego $t'(t'') = 1$. Wówczas $(\Phi(t''))\,(t') = t'(t'') = t(t') = 1$. □

Rozdział 3

Algebra wieloliniowa i iloczyn tensorowy

3.1 Odwzorowania wieloliniowe

3.2 Iloczyn tensorowy przestrzeni

Definicja 3.1. *Rozważmy przestrzenie wektorowe V oraz W nad ciałem $\mathbb{K}$. Ponadto niech:*

1. *$\mathcal{M}$ oznacza przestrzeń wektorową napisów postaci:*

$$\left\{ \sum_{i,j}^{k} v_i \otimes w_j | v_i \in V, w_j \in W \right\}.$$

2. *$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ oznacza podprzestrzeń wszystkich napisów, których składniki są sumami postaci:*

   - $\lambda(v \otimes w) - (\lambda v) \otimes w$,
   - $\lambda(v \otimes w) - v \otimes (\lambda w)$,
   - $(v_1 + v_2) \otimes w - v_1 \otimes w - v_2 \otimes w$,
   - $v \otimes (w_1 + w_2) - v \otimes w_1 - v \otimes w_2$,

   gdzie $\lambda \in \mathbb{K}$; $v, v_1, v_2 \in V$; $w, w_1, w_2 \in W$.

*Wówczas przestrzeń wektorową $\mathcal{M}/_{\mathcal{M}_0}$ oznaczamy przez $V \otimes W$ i nazywamy **iloczynem tensorowym** przestrzeni.*

Twierdzenie 3.2. *Niech V, W, Q będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie:*

$$\pi : V \times W \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W,$$

jest dwuliniowe. Ponadto dla dowolnego odwzorowania dwuliniowego $f : V \times W \to Q$ *istnieje dokładnie jeden operator* $\bar{f} : V \otimes W \to Q$ *takie, że* $f = \bar{f} \circ \pi$*, a poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Q \\
& V \otimes W \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dowód. (1): Wykażmy najpierw, że π jest dwuliniowe:

$$\begin{aligned}
&(\alpha x + \beta y, w) = (\alpha x + \beta y) \otimes w = \\
&= (\alpha x + \beta y) \otimes w - \alpha x \otimes w - \beta y \otimes w + \alpha x \otimes w + \beta y \otimes w = \\
&= \alpha x \otimes w + \beta y \otimes w, \\
&(v, \alpha x + \beta y) = v \otimes (\alpha x + \beta y) = \\
&= v \otimes (\alpha x + \beta y) - \alpha v \otimes x - \beta v \otimes y + \alpha v \otimes x + \beta v \otimes y = \\
&= \alpha v \otimes x + \beta v \otimes y.
\end{aligned}$$

(Korzystamy przy tym z własności przestrzeni ilorazowych).

(2): Teraz wykażemy istnienie i unikalność $\bar{f}$. Niech operator $g : V \otimes W \to Q$ będzie zadany wzorem:

$$g\left(\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{i,j}(v_i \otimes w_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{i,j} f(v_i, w_j) = f(\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{i,j}(v_i, v_j))$$

Wprost z [Def.3.1] wynika, że $\mathcal{M}_0 \subseteq \ker g$ z powodu dwuliniowości f. Wówczas g generuje operator $\bar{f}$ w sensie [Tw.1.22]. $\square$

3.3 Iloczyn tensorowy przestrzeni o skończonym wymiarze

Lemat 3.3. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem* $\mathbb{K}$*, natomiast* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *i* $\{w_1, \dots, w_m\}$ *bazami. Wówczas:*

1. *Każdy tensor* $t \in V \otimes W$ *może być przedstawiony w postaci sumy* $t = \sum_{i,j=1}^{n,m} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j$.
2. *Tensor* t *może być zapisany również w postaci* $\sum_{i=1}^{k} a_i \otimes b_i$*, gdzie* $a_i \in V$, $b_i \in W$ *oraz* $k = \min(n, m)$.

Dowód. (1): Wystarczy skorzystać z dwuliniowości π wykazanej w [Stw.3.2] i rozłożyć każdy z wektorów iloczynu w bazie.

(2): Bez utraty ogólności przyjmijmy $n \leq m$, wówczas $t = \sum_{i,j=1}^{n,m} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes b_i$, gdzie $b_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j$. $\square$

Lemat 3.4. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem* $\mathbb{K}$ *oraz* $f^* \in V^*$. *Wówczas funkcja* f^* *zdefiniowana jako:*

$$f^*(\sum_{i}^{k} v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{k} f^*(v_i)w_i,$$

gdzie $v_i \in V$, $w_i \in W$, *jest operatorem liniowym.*

Dowód. Liniowość jest trywialna do udowodnienia. Musimy jedynie wykazać, że nasz operator jest dobrze zdefiniowany, to jest:

$$a \otimes b = c \otimes d \implies f^*(a \otimes b) = f^*(c \otimes d)$$

Niech $m_0 \in \mathcal{M}_0$ gdzie $\mathcal{M}_0$ jest zdefiniowany w [Def.3.1]. Wówczas $a \otimes b = c \otimes d \iff \exists_{m_0} a \otimes b = c \otimes d + m_0$, a wówczas $f^*(a \otimes b) = f^*(c \otimes d + m_0) = f^*(c \otimes d) + f^*(m_0) = f^*(c \otimes d)$. □

Lemat 3.5. *Niech* $\{v_1, \dots, v_p\}$ *oraz* $\{w_1, \dots, w_q\}$ *będą układami liniowo niezależnymi. Wówczas układ*

$$\left\{v_i \otimes w_j | i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\}\right\}$$

jest również liniowo niezależny.

Dowód. Rozważmy sumę:

$$\sum_{i,j=1}^{p,q} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j = 0.$$

Dla dowolnego $f^* \in V^*$ stosujemy operator zdefiniowany w [Lem.3.4] do naszej liniowej kombinacji, otrzymując:

$$f^*(\sum_{i,j=1}^{p,q} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j) = \sum_{i,j=1}^{p,q} \alpha_{ij} f^*(v_i) w_j = 0 \iff$$
$$\iff \forall_{i,j} \alpha_{ij} = 0.$$

□

Twierdzenie 3.6. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi o skończonym wymiarze. Wówczas:*

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$$

Dowód. Niech $\{v_1, \dots, v_p\}$ oraz $\{w_1, \dots, w_q\}$ będą bazami odpowiednich przestrzeni. Na podstawie [Lem.3.3] układ:

$$\left\{v_i \otimes w_j | i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\}\right\},$$

rozpina przestrzeń $V \otimes W$. Z [Lem.3.5] wynika, że jest liniowo niezależny. □

3.4 Przestrzenie wyższego rzędu.

Twierdzenie 3.7. *Iloczyn tensorowy jest łączny i przemienny, to znaczy istnieją naturalne izomorfizmy:*

1. $U \otimes (V \otimes W) \simeq (U \otimes V) \otimes W$
2. $V \otimes W \simeq W \otimes V$

Dowód. (1): Ustalmy odwzorowanie:

$$\sum u \otimes (v \otimes w) \mapsto \sum (u \otimes v) \otimes w. \tag{3.1}$$

Jest ono liniowe, gdyż:

$$\begin{aligned} &\alpha \sum u \otimes (v \otimes w) = \\ &= \sum \alpha u \otimes (v \otimes w) \mapsto \sum \alpha (u \otimes v) \otimes w = \\ &= \alpha \sum (u \otimes v) \otimes w. \end{aligned}$$

[*iniekcja*]: Łatwo zauważyć, iż tensory zerowe odpowiadają tensorom zerowym. Przypuśćmy, że:

$$\begin{aligned} \sum u \otimes (v \otimes w) &\mapsto \sum (u \otimes v) \otimes w, \\ \sum x \otimes (y \otimes z) &\mapsto \sum (u \otimes v) \otimes w, \end{aligned}$$

wówczas $\sum u \otimes (v \otimes w) - \sum x \otimes (y \otimes z) \mapsto (0 \otimes 0) \otimes 0$, zatem obie sumy są różnymi reprezentacjami tego samego tensora.

[*suriekcja*]: Każdy tensor w $(U \otimes V) \otimes W$ ma reprezentację $\sum (u \otimes v) \otimes w$ wprost z definicji odwzorowania (3.1).

(2): Definicja iloczynu tensorowego jest symetryczna. □

Definicja 3.8. *Zdefiniujmy działanie elementów przestrzeni* $V^* \otimes W^*$ *na* $V \otimes W$ *wzorem:*

$$v^* \otimes w^* (a \otimes b) = v^* (a) \cdot w^* (b)$$

Twierdzenie 3.9. *Dla dowolnych przestrzzeni* V, W, T *achodzą naturalne izomorfizmy:*

1. $(V \otimes W)^* \simeq V^* \otimes W^*$
2. $(V \oplus W) \otimes T \simeq (V \otimes T) \oplus (W \otimes T)$
3. $\mathrm{Hom}(V \otimes W, T) \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, T))$

Dowód. Dowód jest trywialny. (Tylko (2) wymaga nieco uzasadnienia) □

Definicja 3.10. *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową. Tensory należące do przestrzeni:*

$$V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^* = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q},$$

*nazywamy **tensorami rzędu*** (p, q).

Uwaga 3.11. Można uogólnić własność uniwersalną iloczynu tensorowego [Tw3.2] do przypadku tensora rzędu (p, q).

Uwaga 3.12. W przypadku przestrzeni V nad $\mathbb{K}$, skończonego wymiaru przestrzeń tensorów $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ jest izomorficzna z przestrzenią przestrzeni odwzorowań $p + q$ liniowych postaci $(V^*)^p \times V^q \to \mathbb{K}$.

3.5 Iloczyn zewnętrzny

Twierdzenie 3.13. *Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Wówczas zbiór wszystkich liniowych kombinacji tensorów postaci $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, jest podprzestrzenią wektorową $V \otimes V$.*

Dowód. Zauważmy, że $\mathbf{0} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$. W równie banalny sposób można wykazać, że każdy element zbioru ma w nim element przeciwny. $\square$

Definicja 3.14. *Przestrzeń opisaną w [Tw.3.13] nazywamy* ***iloczynem zewnętrznym*** *i oznaczamy $V \wedge V$ lub $\bigwedge^2 V$ oraz $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$.*

Definicja 3.15. ***Iloczynem zewnętrznym*** *k przestrzeni wektorowych V nazywamy przestrzeń $\bigwedge^k V$ wszystkich tensorów będącymi liniowymi kombinacjami elementów postaci:*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Elementy $\bigwedge^k V$ nazywamy k-wektorami. Ponadto przyjmiemy dla wygody oznaczenia $\bigwedge^0 V = \mathbb{K}$ oraz $\bigwedge^1 V = V$.

Twierdzenie 3.16. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Wówczas k-wektor $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge^k V$ spełnia następujące zależności:*

1. $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = (-1)^k v_k \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k-1}$
2. $(\lambda v_1) \wedge \ldots \wedge v_k = v_1 \wedge (\lambda v_2) \wedge \ldots \wedge v_k = \ldots = v_1 \wedge \ldots \wedge (\lambda v_k)$
3. $(v_1 + w) \wedge \ldots \wedge v_k = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k + w \wedge \ldots \wedge v_k$

Dowód. Dowód wynika z prostych własności permutacji lub iloczynu tensorowego. $\square$

Twierdzenie 3.17. *Niech V będzie przestrzenią wektorową. Istnieje kanoniczny izomorfizm:*

$$\left(\bigwedge^n V\right)^* \simeq \bigwedge^n V^* \tag{3.2}$$

Dowód. Jest to trywialny izomorfizm. $\square$

Twierdzenie 3.18. *Iloczyn wewnętrzny zdefiniowany poprzez:*

$$i_{a^*}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) := a^*(v_1) \cdot v_2 \wedge v_3 \wedge \ldots \wedge v_n - a^*(v_2) \cdot v_1 \wedge v_3 \wedge \ldots \wedge v_n + \\ \ldots + (-1)^n a^*(v_n) \cdot v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{n-1},$$

gdzie $a^* \in V^*$*, jest dobrze zdefiniowanym odwzorowaniem liniowym* $\bigwedge^n V \to \bigwedge^{n-1} V$.

Dowód. Liniowość i_{a^*} jest jasna.

Należy wykazać, że funkcja jest dobrze zdefiniowana - to znaczy obraz nie zależy od reprezentacji tensora. Dowód nie jest trudny, napiszę innym razem. Wystarczy sprawdzić, że operacje które nie zmieniają tensora jak zamiana kolejności wyrazów wraz z odpowiednią zmianą znaku oraz dodanie wektora liniowo zależnego nie zmieniają wyniku i_{a^*}. □

Twierdzenie 3.19. *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową. Układ* $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gry* $\mathbf{v_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n} \neq 0$.

Dowód. ($\Longleftarrow$): Jest to konsekwencja [Tw.3.16] i faktu, iż:

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge v_k \ldots \wedge v_n = 0$$

Więc żeby tensor był niezerowy układ musi być koniecznie liniowo niezależny.

($\Longrightarrow$): Przypuśćmy teraz, że $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ jest układem liniowo niezależnym. Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na ilość wektorów. Jeśli układ $\{v_1\}$ jest liniowo niezależny to oczywiście odpowiadający mu 1-tensor jest niezerowy. Teraz zgodnie ze zwykłą procedurą indukcji przyjmijmy, iż twierdzenie jest prawdziwe dla układu k-1 wektorów liniowo niezależnych. Wykażemy, że obraz k-wektora odpowiadającego układowi względem $i_{v_1^*}$ jest niezerowy, co zakończy dowód gdyż tylko niezerowy wektor może mieć niezerowy obraz względem odwzorowania liniowego.

$$i_{v_1^*}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = v_2 \wedge \ldots \wedge v_k,$$

który to k-1-wektor zgodnie założeniem indukcyjnym jest lniowo niezależny. □

Lemat 3.20. *Dla każdego n-wektora* $\omega \in \bigwedge^n V$*, gdzie* n *jest wymiarem* V*, istnieje taki układ wektorów* $\{v_1, \ldots, v_n\}$*, że* $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

Dowód. Przyjmijmy, że:

$$\omega = x_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1n} + \ldots + x_{k1} \wedge \ldots \wedge x_{kn}$$

Z [Tw.3.19] wiadomo, iż $\{x_{11}, \ldots, x_{1n}\}$ jest bazą V. Pozostałe wektory x_{pq} można rozłożyć w tej bazie, a potem przedstawić każdy składnik sumy jako $\lambda_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1n}$. □

Lemat 3.21. *Niech* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ *będzie układem liniowo niezależnym. Wówczas zbiór* $\binom{n}{m}$ *p-wektorów* $\left\{v_{k_1} \wedge \ldots \wedge v_{k_m} : 1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_m \leq n\right\}$ *jest liniowo niezależny.*

Dowód. Najpierw udowodnijmy tezę dla przypadku $n = 2$. Następnie uogólnimy go przy pomocy indukcji matematycznej. Przypuśćmy, że zbiór $\{v_i \wedge v_j : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ jest liniowo zależny. Istnieje wówczas kombinacja:

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_{ij} v_i \wedge v_j = 0, \tag{3.3}$$

gdzie pewien współczynnik $\lambda_{pq} \neq 0$. Na kombinację zadziałamy iloczynem wewnętrznym:

$$i_{v_p^*}\left(\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_{ij} v_i \wedge v_j\right) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{ip} v_i + \sum_{j=p}^{n} \lambda_{pj} v_j \neq 0,$$

co przeczy równaniu (3.3), bo obrazem zerowego wektora w odwzorowaniu liniowym jest wektor zerowy.

Przejdźmy do indukcyjnej części dowodu. Przypuśćmy, iż zestaw (n-1)-wektorów z tezy lematu jest liniowo niezależny. Wówczas dowód liniowej niezależności k-wektorów przeprowadzamy podobnie jak powyżej działając iloczynem wewnętrznym. □

Twierdzenie 3.22. *Wymiar przestrzeni* $\bigwedge^m V$ *jest równy* $\binom{n}{m}$*, gdzie* $\dim V = n$

Dowód. Jest to prosta konsekwencja dwóch lematów [Lem.3.20] i [Lem.3.21]. □

3.6 Wyznacznik endomorfizmu

Definicja 3.23. *Niech* $A \in \mathrm{End}(V)$*. Operator* $\wedge^n A^n : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$ *definiujemy wzorem:*

$$\wedge^n A^n (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_n$$

Definicja 3.24. ***Wyznacznikiem*** *endomorfizmu* $A \in \mathrm{End}(V)$ *nazywamy taką liczbę* $\det A$*, że:*

$$\wedge^n A^n (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \det A \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$$

gdzie $\dim V = n$.

Rozdział 4

Przestrzenie metryczne

4.1 Odległość punktów

Definicja 4.1. *Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolnym zbiorem, a $\rho : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0, \infty]$ funkcją spełniającym warunki:*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

*Wówczas funkcję ρ nazywamy **metryką** na zbiorze $\mathcal{S}$. Para $(\mathcal{S}, \rho)$ to **przestrzeń metryczna**.*

Definicja 4.2. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przestrzenią metryczną. **Średnicą** podzbioru $A \subseteq \mathcal{S}$ liczbę:*

$$\sup\{\rho(x, y) | x, y \in A\}.$$

4.2 Topologia

Definicja 4.3. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przestrzenią metryczną. **Kulą otwartą** o środku $x_0 \in \mathcal{S}$ i promieniu $\mathbb{R} \ni r > 0$ nazywamy zbiór:*

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in \mathcal{S} : \rho(x_0, x) < r\}.$$

Definicja 4.4. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że $X \subseteq \mathcal{S}$ jest **podzbiorem otwartym przestrzeni metrycznej** jeśli każdy punkt X jest środkiem pewnej kuli w nim zawartej. Równoważnie można napisać:*

$$\forall_{x \in X} \exists_{r > 0} : \mathcal{B}(x, r) \subseteq X.$$

Twierdzenie 4.5. *Kula otwarta jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Rozważmy dowolną kulę $\mathcal{B}(x_0, R)$ oraz jakikolwiek punkt $x \in \mathcal{B}(x_0, R)$. Dla wygody wprowadźmy oznaczenie $\rho(x, x_0) = r$.

Wykażemy, że $\mathcal{B}(x, R-r) \subseteq \mathcal{B}(x_0, R)$. Istotnie, dla dowolnego $y \in \mathcal{B}(x, R-r)$ mamy:

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) = r + (R - r) = R.$$

□

Twierdzenie 4.6. *Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich otwartych podzbiorów przestrzeni metrycznej $\mathcal{S}$. Spełnia trzy ona warunki:*

1. *Dla dowolnej podrodziny $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, suma $\bigcup_{X \in \mathcal{P}} X \in \mathcal{T}$.*
2. *Dla dowolnej skończonej podrodziny $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, przecięcie $\bigcap_{X \in \mathcal{P}} X \in \mathcal{T}$.*
3. *$\emptyset, \mathcal{S} \in \mathcal{T}$.*

Dowód. (1): Skoro każdy punkt każdego zbioru jest środkiem pewnej kuli w tym zbiorze, to tym bardziej jest również środkiem kuli w sumie zbiorów.
(2): Ponieważ rodzina $\mathcal{P}$ jest skończona, to możemy ponumerować zbiory w niej zawarte w następujący sposób: $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wówczas zachodzi:

$$\forall_{x \in \bigcap_{i=1}^{k} X_i} \forall_{i \in \{1,\ldots k\}} \exists_{\varepsilon_k > 0} : \mathcal{B}(x, \varepsilon_k) \subseteq X_i.$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ to $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} X_i$.
(3): $\mathcal{S}$ oraz $\emptyset$ należą do $\mathcal{T}$ wprost z definicji kuli [Def.4.4]. □

Definicja 4.7. *Niech X będzie dowolnym zbiorem, a rodzina $\mathcal{T}$ jego podzbiorów spełnia trzy warunki wymienione w [Tw.4.6]. Rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy wówczas **topologią** X. Para $(X, \mathcal{T})$ to **przestrzeń topologiczna**. Każdy zbiór $X \in \mathcal{T}$ nazywamy **otwartym**.*

Uwaga 4.8. Każda przestrzeń metryczna jest topologiczna.

Definicja 4.9. ***Otoczeniem** punktu x w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy dowolny zbiór $\mathcal{N}_x \subseteq X$ taki, że dla pewnego $U \in \mathcal{T}$ zachodzi $x \in U \subseteq \mathcal{N}_x$.*

Definicja 4.10. *Podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni topologicznej X nazywamy **domkniętym** jeśli jego dopełnienie $A = X \setminus A$ jest otwarte.*

Twierdzenie 4.11. *Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich zamkniętych podzbiorów przestrzeni topologicznej $\mathcal{S}$. Spełnia ona warunki:*

1. *Dla dowolnej podrodziny $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, przecięcie $\bigcap_{X \in \mathcal{P}} X \in \mathcal{T}$.*
2. *Dla dowolnej skończonej podrodziny $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, suma $\bigcup_{X \in \mathcal{P}} X \in \mathcal{T}$.*
3. *$\emptyset, \mathcal{S} \in \mathcal{T}$.*

Dowód. Wystarczy zastosować [Tw.1.14] wraz z [Tw.4.6]. □

Definicja 4.12. *Niech $\mathcal{T}$ będzie przestrzenią topologiczną, a $X \subseteq \mathcal{T}$ jej podzbiorem. **Domknięciem** tego podzbioru nazywamy przecięcie $\overline{X}$ wszystkich zbiorów zamkniętych zawierających X.*

Wniosek 4.13. Zbiór X jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \overline{X}$.

Wniosek 4.14. W szczególności z [Def.4.12] wynika $X \subseteq \overline{X}$.

Twierdzenie 4.15. *Punkt x należy do domknięcia $\overline{X}$ zbioru X w przestrzeni topologicznej wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne otoczenie x przecina X.*

Dowód. Dowód podzielimy na dwie części najpierw z lewej strony równoważności wyprowadzając prawą, a następnie z prawej wyprowadzając lewą.

$(\implies)$: Dążąc do absurdu przyjmijmy, że $x \in \overline{X}$, ale istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{U}_x$ tego punktu, które nie przecina X. Wówczas zbiór $Z = \overline{X} \cap (X \setminus \mathcal{U}_x)$ jest domknięty na mocy [Tw.4.11.1] oraz $X \subseteq Z \subseteq \overline{X}$ i $Z \neq \overline{X}$, co przeczy [Def.4.12].

$(\impliedby)$: Jeśli dowolne otoczenie x przecina X, ale istnieje zbiór domknięty Z taki, że $X \subseteq Z$ i $x \notin Z$, to $x \in Z$ oraz Z jest otwarty. Jest to niemożliwe, gdyż nie istnieje kula $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq Z$. □

Definicja 4.16. *Niech $A \subseteq X$ będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej.* ***Wnętrzem*** *zbioru A nazywamy $A^o \subseteq X$ będący sumą wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A.*

Definicja 4.17. ***Brzegiem*** *podzbioru A przestrzeni topologicznej nazywamy $\partial A = \bar{A} \setminus A^o$.*

Wniosek 4.18. Ponieważ dla dowolnych zbiorów $A \setminus B = A \cap B$, brzeg można zdefiniować równoważnie jako $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A}$.

Definicja 4.19. *Niech $(X_i, \mathcal{T}_i)$ dla $i = 1, \ldots, n$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych.* ***Iloczynem przestrzeni topologicznych*** *nazywamy parę $(X_1 \times \ldots \times X_n, \mathcal{T}_1 \times \ldots \times \mathcal{T}_n)$.*

Definicja 4.20. *Niech $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ będzie rodziną przzestrzeni topologicznych. Iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych nazywamy zbiór $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ wraz z topologią:*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \ldots \times \mathcal{T}_n$$

4.3 Zbieżność ciągów

Definicja 4.21. ***Ciągiem*** *elementów X nazywamy funkcję $f \in X^{\mathbb{N}}$.*

Definicja 4.22. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$* ***zbiega*** *do punktu $x \in \mathcal{S}$ jeśli dla dowolnego $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{S}$ będącego otoczeniem x:*

$$\exists_N \forall_{n>N} : x_n \in \mathcal{N}_x.$$

Innymi słowy do dowolnie małej kuli wokół x należą wszystkie elementy ciągu poza co najwyżej skończenie wieloma. Stosujemy notację:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

Wniosek 4.23. Następujące warunki są równoważne:

1. Punkt x należy do domknięcia $\overline{X}$ zbioru X.
2. istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ zbieżny do x.

Dowód. Trywialne z [Tw.4.15]. □

Definicja 4.24. *Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej. Mówimy, że jest on* ***ciągiem Cauchy'ego*** *jeśli:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N_\varepsilon} : \rho\left(x_n - x_m\right) < \varepsilon,$$

albo równoważnie:

$$\rho(x_m, x_n) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \tag{4.1}$$

Uwaga 4.25. Jeśli ciąg jest zbieżny w przestrzeni metrycznej to spełnia Warunek Cauchy'ego.

Dowód. Dla ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do x zachodzi $\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, a wtedy $\forall_{m,n>N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon$. □

4.4 Funkcje ciągłe

Definicja 4.26. *Funkcję $f : X \to Y$ między przestrzeniami topologicznymi $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywamy* ***ciągłą*** *jeśli przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty, to znaczy:*

$$\forall_{\tau\in\mathcal{T}_Y} : f^{-1}(\tau) \in \mathcal{T}_X.$$

Twierdzenie 4.27. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją między przestrzeniami topologicznymi. Następujące warunki są równoważne:*

1. *f jest ciągła.*
2. *A jest domknięty w $Y \implies f^{-1}(A)$ jest domknięty w X.*
3. *$\forall_{A\subseteq X} : f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.*
4. *Dla każdego $x \in X$ i otoczenia $\mathcal{N}_{f(x)}$ punktu $f(x)$ istnieje otoczenie $\mathcal{N}_x$ punktu x spełniające: $f(\mathcal{N}_x) \subseteq \mathcal{N}_{f(x)}$.*

Dowód. (1) $\implies$ (4): Dla dowolnego otoczenia $\mathcal{N}_{f(x)}$ punktu $f(x)$ można wybrać zbiór otwarty $\mathcal{U}_{f(x)} \subseteq \mathcal{N}_{f(x)}$ oraz zbiór $\mathcal{N}_x = f^{-1}\left(\mathcal{U}_{f(x)}\right) = \left\{x : f(x) \in \mathcal{U}_{f(x)}\right\}$. $\mathcal{N}_x$ jest otwartym otoczeniem x oraz $f(\mathcal{N}_x) \subseteq \mathcal{N}_{f(x)}$.

(4) $\implies$ (3): Weźmy dowolne $x \in \overline{A}$. i otoczenie $\mathcal{N}_{f(x)}$. Istnieje $\mathcal{N}_x$ dla którego $f(\mathcal{N}_x) \subseteq \mathcal{N}_{f(x)}$. Z [Tw. 4.15]:

$$\mathcal{N}_x \cap A \neq \emptyset \implies \emptyset \neq f(\mathcal{N}_x \cap A) \subseteq \mathcal{N}_{f(x)} \cap f(A)$$

Zatem dowolne otoczenie $f(x)$ przecina $f(A)$.

(3) $\implies$ (2): Niech $F \subseteq Y$ będzie domkniętym zbiorem. Oznaczmy $A = f^{-1}(F)$. Wówczas $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \bar{F} = F \implies \overline{A} \subseteq A \implies \bar{A} = A$

(2) $\implies$ (1): Trywialne z [Def.4.10]. □

Definicja 4.28. $f : X \to Y$ *jest* ***ciągła w punkcie*** x *jeśli dla dowolnego otoczenia* $\mathcal{N}_{f(x)}$ *punktu* $f(x)$ *można zaleźć takie otoczenie* $\mathcal{N}_x$ *punktu* x*, że* $f(\mathcal{N}_x) \subseteq \mathcal{N}_{f(x)}$.

Twierdzenie 4.29. *Niech* $\mathcal{S}$*,* $\mathcal{R}$ *będą przestrzeniami metrycznymi. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Przekształcenie* $f : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ *jest ciągłe w* x.
2. *Dla każdego ciągu* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$*:*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2): Z [Def.4.28] wynika, iż dla dowolnej kuli $\mathcal{B}_{f(x)}$ wokół $f(x)$ znajdziemy kulę $\mathcal{B}_x$ wokół x spełniającą: $f(\mathcal{B}_x) \subseteq \mathcal{B}_{f(x)}$.
Zatem jeśli $\mathcal{B}_x$ zawiera prawie wszystkie elementy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to $\mathcal{B}_{f(x)}$ zawiera prawie wszystkie elementy $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Gdyby f nie było ciągłe w x to możemy wybrać takie otoczenie $\mathcal{N}_{f(x)}$, że żadne otoczenie punktu x nie spełnia warunku $f(\mathcal{N}_x) \subseteq \mathcal{N}_{f(x)}$. To znaczy możemy wybrać taki ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, że:

$$x_n \in \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \wedge x_n \notin \mathcal{N}_{f(x)}.$$

Co implikuje:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies f(x_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

□

Definicja 4.30. *Funkcja* $f : X \to Y$ *między przestrzeniami metrycznymi* (X, ρ_X) *oraz* (Y, ρ_Y) *jest* ***jednostajnie ciągła*** *jeśli:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_\delta : \rho_X(x, y) \le \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) \le \varepsilon.$$

Definicja 4.31. *Funkcja* $f : X \to Y$ *między przestrzeniami metrycznymi* (X, ρ_X) *i* (Y, ρ_Y) *spełnia* ***warunek Lipchitza*** *jeśli istnieje liczba* $\mathbb{R} \ni L > 0$ *taka, że:*

$$\forall_{x_1,x_2\in X} : \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L \cdot \rho_X(x_1, x_2)$$

Twierdzenie 4.32. *Funkcja* f *spełniająca warunek Lipchitza jest ciągła.*

Dowód. f spełnia [Tw. 4.29.2], gdyż jeśli ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to:

$$\rho_X(x_n, x_m) \to 0 \implies 0 \le \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) \le L \cdot \rho_X(x_n, x_m) \to 0$$

□

4.5 Zbieżność funkcji

Definicja 4.33. *Niech* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem funkcji* $f_n : X \to Y$. *Jeśli zbiega on do* $f : X \to Y$ *w metryce:*

$$\rho_{\sup}(f_n, f) = \sup_{x\in X} \rho(f_n(x), f(x)),$$

gdzie (Y, ρ) *jest przestrzenią metryczną, to mówimy, że ciąg* f_n ***zbiega jednostajnie*** *do* f.

Twierdzenie 4.34. *Niech ciąg funkcji* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zbiega jednostajnie do* $f : X \to Y$, *gdzie* X *i* Y *są przestrzeniami metrycznymi.*

Wtedy, jeśli prawie wszystkie funkcje f_n *są ciągłe w* $x \in X$, *to* f *jest ciągła w* x.

Dowód.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies d(f(x_n), f(x)) \leq$$
$$\leq d(f(x_n), f_k(x_n)) + d(f_k(x_n), f(f_k(x))) + d(f_k(x), f(x)) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$$

□

4.6 Zbiory zwarte

Definicja 4.35. *Rodzina* $\mathcal{F}$ *podzbiorów przestrzeni topologicznej* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ *nazywamy* ***pokryciem*** *zbioru* $X \subseteq \mathcal{S}$ *jeśli:*

$$X \subseteq \bigcup \mathcal{F}$$

Jeśli $\forall_{X\in\mathcal{F}} X \in \mathcal{T}$, *to pokrycie nazywamy* ***otwartym***.

Definicja 4.36. *Przeliczalny ciąg* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *podzbiorów przestrzeni topologicznej jest* ***zstępujący*** *jeśli każde skończone przecięcie zbiorów* A_n *jest niepuste:*

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=1}^{m} A_n \neq \emptyset$$

Definicja 4.37. *Zbiór* X *nazywamy* ***zwartym*** *jeśli z dowolnego jego pokrycia otwartego można wybrać pokrycie skończone.*

Lemat 4.38 (*Liczba Lesbegue'a*)**.** *Niech* $A \subseteq (\mathcal{S}, \rho)$ *będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej, natomiast* $\mathcal{F}$ *jego pokryciem otwartym. Jeśli z każdego ciągu w* A *można wybrać podciąg zbieżny do jakiegoś punktu* $a \in A$, *to istnieje liczba* $\delta > 0$, *że dla dowolnego* $x \in A$ *kula* $\mathcal{B}(x, \delta)$ *jest w całości zawarta w jednym z elementów rodziny* $\mathcal{F}$.

Dowód. Dążąc do sprzeczności przypuśćmy, że taka liczba nie istnieje. Możemy zatem wybrać ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n\in A} : \mathcal{B}\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \text{ nie jest zawarta w żadnym z elementów } \mathcal{F}. \tag{4.2}$$

Z założenia możemy wybrać $a \in A$ oraz podciąg $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, że:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \supseteq \{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

Musi istnieć zbiór U otwarty spełniający $a \in U \in \mathcal{F}$ oraz kula $\mathcal{B}(a, \varepsilon) \subseteq U$ zawierająca prawie wszystkie elementy podciągu. Dla dostatecznie dużego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi:

1. $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$
2. $d(x_{n_m}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Wówczas kula $\mathcal{B}\left(x_{n_m}, \frac{1}{m}\right) \subseteq U$, co przeczy założeniu (2.2). □

Twierdzenie 4.39. *Niech $X \subseteq \mathcal{S}$ będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Zbiór X jest zwarty.*
2. *Każdy zstępujący ciąg $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niepustych zbiorów domkniętych w X ma niepuste przecięcie.*
3. *Z każdego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego $x \in X$.*

Dowód. (1) $\implies$ (2): Załóżmy wbrew tezie, iż $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Zdefiniujmy rodzinę:

$$\mathcal{U} = \{X \setminus A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem X, gdyż:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X,$$

z drugiej strony z $\mathcal{U}$ nie da się wybrać skończonego podpokrycia X na mocy [Def.4.36]. Zatem przestrzeń X nie jest zwarta.

(2) $\implies$ (3): Weźmy dowolny ciąg oraz rodzinę zbiorów domkniętych $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określoną:

$$F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}.$$

Zgodnie z (2) istnieje punkt $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Każde otoczenie a przecina dowolny ze zbiorów $\{x_n : n \geq m\}$. Zatem zgodnie z [Def.4.22] możemy wybrać podciąg $\{x_{n_m}\} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że:

$$x_{n_m} \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \mathcal{B}\left(a, \frac{1}{m}\right), \text{ więc } x_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} a.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1): Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem X, a δ liczbą Lesbegue'a tego pokrycia wybraną zgodnie z [Lem.4.38]. Dążąc do sprzeczności przypuśćmy, że zbioru X nie da się pokryć skończoną liczbą elementów $\mathcal{U}$.

Rodzina $\{\mathcal{B}(x,\delta) : x \in X\}$ jest otwartym pokryciem, ale również nie można z niej wybrać pokrycia skończonego X. Gdyby się dało znaleźć takie $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$, to $\{U_1, \ldots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{B}_i \subseteq U_i$ byłoby również skończonym pokryciem X.

Możemy wybrać taki ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_m \notin \bigcup_{n<m} \mathcal{B}(x_n,\delta)$. Ale wtedy dla $n \neq m$ mamy $d(x_n, x_m) > \frac{\delta}{2}$. Tak wybrany ciąg nie może mieć podciągu zbieżnego. Założenie o niezwartości X prowadzi do sprzeczności. $\square$

Twierdzenie 4.40. *Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłą funkcją między dwoma przestrzeniami metrycznymi. Jeśli $A \subseteq X$ jest zbiorem zwartym, to $f(X)$ jest też zwarty.*

Dowód. Trywialny wniosek z [Tw.4.29] oraz [Tw.4.39.3]. Wybierzmy dowolny ciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i odpowiadający mu ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $f(x_n) = y_n$. Ten drugi ma podciąg $x_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$, którego obraz zbiega do $y = f(x)$. $\square$

Twierdzenie 4.41. *Domknięty podzbiór K przestrzeni zwartej $\mathcal{S}$ jest zwarty.*

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem K. $\mathcal{U} \cup (\mathcal{S} \setminus K)$ jest otwartym pokryciem $\mathcal{S}$ z którego możemy wybrać pokrycie skończone. $\square$

Definicja 4.42. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przestrzenią metryczną. Podzbiór $X \subseteq \mathcal{S}$ nazywamy **ograniczonym** jeśli jest zawarty w jakiejś kuli.*

Twierdzenie 4.43. *Iloczyn kartezjański przestrzeni zwartych jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Niech przestrzeń $(X \times Y, \mathcal{T} = \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y)$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych zwartych, a $\mathcal{U}$ jej dowolnym pokryciem otwartym. Oznaczmy rodzinę zbiorów:

$$\mathcal{V} := \{V \in \mathcal{T}_X : V \times Y \text{ można pokryć skończenie wieloma elementami } \mathcal{U}\}$$

Ustalmy dowolny $x \in X$. Dla każdego $y \in Y$ istnieje $U(y) \in \mathcal{U}$ taki, że $(x,y) \in U(y)$ oraz zbiory otwarte $V(y) \in \mathcal{T}_X$ i $W(y) \in \mathcal{T}_Y$, że $V(y) \times W(y) \subseteq U(y)$. Ponieważ Y jest zwarta, możemy wybrać taką rodzinę $\{y_i\}_{i=1}^m$ dla której $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^m W(y_i)$. Mamy więc $(x,y) \in \bigcap_{i=1}^m W(y_i) \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^m U(y_i)$, skąd wobec dowolności x wynika, iż $\bigcup \mathcal{V} = X$.

Ponieważ $\mathcal{V}$ jest otwartym pokryciem X, możemy z niego wybrać podpokrycie skończone, co kończy dowód. $\square$

Definicja 4.44. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Rodzina przekształceń ciągłych $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ w metryczna przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, d)$ jest **jednakowo ciągła**, jeśli dla dowolnego $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie otwarte $U_x \in \mathcal{T}$ punktu x takie, że:*

$$\forall_{y,z\in U_x} \forall_{f\in\mathcal{F}} \left(d(y,z) \leq \varepsilon\right).$$

Definicja 4.45. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Rodzina przekształceń ciągłych $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ w metryczna przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, d)$ jest **ograniczona** jeżeli:*

$$\exists_{r>0} \forall_{f \in \mathcal{F}} \left(f(X) \subseteq \mathcal{B}(0, r)\right).$$

Twierdzenie 4.46 (*Arzelà–Ascoli*)**.** *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, a rodzina przekształceń ciągłych $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ w metryczna przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, d)$ będzie jednakowo ciągła i ograniczona.*

Wówczas domknięcie $\mathcal{F}$ w przestrzeni metrycznej $\left(C(X, \mathbb{R}^n), d_{sup}\right)$ jest zbiorem zwartym.

Dowód. □

4.7 Przestrzenie zupełne

Definicja 4.47. *Przestrzeń metryczna $\mathcal{S}$ jest **zupełna** jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w niej zawarty ma granicę należącą do $\mathcal{S}$.*

Definicja 4.48. *Niech $(\mathcal{S}, \rho)$ będzie przestrzenią metryczną. Funkcję $f : X \to X$ nazywa się **kontrakcją** jeśli istnieje $\lambda \in]0, 1[$ spełniająca:*

$$\forall_{x,y \in X} : \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho(x, y).$$

Uwaga 4.49. Każda kontrakcja jest funkcją ciągłą.

Definicja 4.50. ***Punktem stałym** funkcji $f : X \to X$ nazywamy taki $x \in X$, że $f(x) = x$.*

Twierdzenie 4.51 (*Banacha o punkcie stałym*)**.** *Jeśli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną, a $f : X \to X$ kontrakcją, to f ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. (1): Przypuśćmy, że istnieją dwa punkty stałe x i y:

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) = \lambda \cdot d(x, y) \implies x = y$$

(2): Z powyższego wynika unikalność punktu stałego. Pozostaje udowodnić jego istnienie. Wybierzmy dowolny $x_0 \in X$ i zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg: $x_{n+1} = f(x_n)$. Przyjmując bez utraty ogólności $m > n$ i korzystając z nierówności trójkąta wykażemy, że jest to ciąg Cauchy'ego:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{i=m}^{n} \lambda^i \cdot d(x_1, x_0) \leq$$
$$\leq \lambda^m \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \lambda} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

Skoro przestrzeń X jest zupełna, to istnieje granica ciągu $\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x \in X$ oraz:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} (x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = x,$$

gdyż kontrakcja jako funkcja lipschizowska jest ciągła na mocy [Tw.4.32]. □

Twierdzenie 4.52. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *Przestrzeń metryczna $\mathcal{M}$ jest zupełna.*
2. *Każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów zamkniętych w $\mathcal{M}$ ma niepuste przecięcie.*

Dowód. (1) $\implies$ (2): Dążąc do sprzeczności przypuśćmy, że zstępujący ciąg zbiorów domkniętych $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej zupełnej ma puste przecięcie. Wówczas dowolny ciąg $x_n \in F_n$ spełnia warunek Cauchy'ego ([Def.4.2]), zatem $x_n \to x$ dla jakiegoś $x \in X$. W świetle [Tw.4.15] $\forall_n \in \mathbb{N} : x \in F_n$.

(2) $\implies$ (1): Przypuśćmy, że $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Rozważmy rodzinę zbiorów domkniętych:

$$F_n = \overline{\{x_m | m \geq n\}} \qquad\qquad \exists_x : x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Wówczas punkt x jest granicą ciągu, gdyż z [Tw.4.15] wynika, że każde otoczenie x przecina $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Definicja 4.53. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $\Omega \subseteq X$ jest* ***gęsty*** *w $S \subseteq X$ jeśli $S \subseteq \overline{\Omega}$.*

Definicja 4.54. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $\Omega \subseteq X$ jest* ***nigdziegęsty*** *jeśli nie jest gęsty w żadnym $\tau \in \mathcal{T}$.*

Twierdzenie 4.55 (*Baire*)**.** *Zupełna przestrzeń metryczna $\mathcal{S}$ nie może być sumą przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych.*

Dowód. Dążąc do sprzeczności przyjmijmy, że $\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gdzie $\forall_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest zbiorem nigdziegęstym w $\mathcal{S}$. Niech ponadto $\overline{B_1} \subseteq \mathcal{S}$ będzie dowolną zamkniętą kulą o promieniu $1/2$. Wówczas ponieważ A_1 jest nigdzie gęsty, istnieje punkt $x_1 \in \overline{B_1} \setminus \overline{A_1}$. Postępując w sposób rekurencyjny, możemy wybrać dowolną kulę $\underline{B_{n+1}} \subseteq \underline{B_n}$ o promieniu mniejszym niż $(1/2)^{n+1}$. Zawsze istnieje $x_{n+1} \in \overline{B_{n+1}} \setminus \overline{A_{n+1}}$. Z zupełności $\mathcal{S}$ oraz [Tw.4.52] wynika, iż wybrany ciąg ma granicę $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\overline{B_i} \setminus \overline{A_i}\right)$, ponadto jest on ciągiem Cauchy'ego. Zatem musiałaby zachodzić zależność $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathcal{S}$ co przeczyłoby założeniu o zwartości $\mathcal{S}$. □

4.8 Zbiory spójne

Definicja 4.56. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $S \subseteq X$ jest* ***spójny*** *jeśli nie można rozłożyć go na sumę dwóch rozłącznych, niepustych i domkniętych podzbiorów X.*

Rozdział 5

Przestrzenie unormowane

5.1 Przestrzenie z normą

Definicja 5.1. *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$ wówczas odwzorowanie $\|\bullet\| : V \to [0, \infty]$ nazywamy **normą** jeśli spełnia warunki:*

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Definicja 5.2. *Niech V będzie przestrzenią wektorową rzeczywistą albo zespoloną, natomiast $\|\bullet\|$ metryką. Wówczas parę $(\mathcal{V}, \|\bullet\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.*

Twierdzenie 5.3. *Niech V będzie przestrzenią unormowana. Wówczas odwzorowanie zdefiniowane wzorem $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ jest metryką.*

Dowód.

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$
$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |-1|\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$
$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

□

Definicja 5.4. *Dwie normy $d_1 = \|\bullet\|_1$ i $d_2 = \|\bullet\|_2$ na przestrzeni V są równoważne jeśli istnieją liczby $a, b > 0$ dla których $d_1 < a \cdot d_2$ oraz $d_2 < b \cdot d_1$.*

Twierdzenie 5.5. *Wszystkie normy na skończenie wymiarowej przestrzeni V są równoważne.*

Dowód. Możemy wybrać skończoną bazę $\mathcal{V}$, równą:

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

Więc dowolny element $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ma postać:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

(1): Zacznijmy od zdefiniowania relacji dla dowolnych norm niech $\|\bullet\|_\alpha \sim \|\bullet\|_\beta$ oznacza, że są równoważne.

$$\begin{aligned}
&\|\bullet\|_\alpha \sim \|\bullet\|_\delta \wedge \|\bullet\|_\beta \sim \|\bullet\|_\delta \implies A_1\|\mathbf{x}\|_\delta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq A_2\|\mathbf{x}\|_\delta \\
&B_1\|\mathbf{x}\|_\delta \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq B_2\|\mathbf{x}\|_\delta \implies \\
&\quad \implies \frac{B_1}{A_2}\|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \frac{B_2}{A_1}\|\mathbf{x}\|_\alpha \implies \|\bullet\|_\alpha \sim \|\bullet\|_\beta
\end{aligned}$$

To znaczy relacja jest tranzytywna. Jej symetria i zwrotność wynikają wprost z [Def.5.4]. Jest to relacja równoważności.

(2): Biorąc konkretną normę $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i\in\overline{1,n}} |x_i|$ oraz dowolną inną $\|\mathbf{x}\|$ wykażemy, że $\|\bullet\| \sim \|\mathbf{x}\|_\infty$:

$$\|\mathbf{x}\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|x_i\mathbf{e}_i\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\|\mathbf{e}_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{e}_i\|\right)\cdot\|\mathbf{x}\|_\infty = C\cdot\|\mathbf{x}\|_\infty$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i\in\overline{1,n}}|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|\frac{\|\mathbf{e}_i\|}{\|\mathbf{e}_i\|} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\|\mathbf{e}_i\|}\right)\cdot\|\mathbf{x}\| \leq D\cdot\|\mathbf{x}\|$$

(3): Skoro dowolna norma jest równoważna z $\|\bullet\|_\infty$ to na podstawie (1) wszystkie normy są równoważne. □

Twierdzenie 5.6. *Jeśli dwie normy są równoważne to generują identyczne topologie.*

Dowód. Na mocy [Def.5.4] każda kula w jednej normie zawiera kulę w drugiej normie i odwrotnie. □

Wniosek 5.7. Jeśli jakiś ciąg w skończenie-wymiarowej przestrzeni z normą zbiega do jakiegoś $\mathbf{x}$ to ma tę własność w każdej normie.

Definicja 5.8. *Przestrzeń wektorowa zupełna, unormowana to **przestrzeń Banacha**.*

5.2 Norma homomorfizmu

Twierdzenie 5.9. *Niech $A : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym między przestrzeniami wektorowymi unormowanymi. Następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest ciągłe w pewnym $\mathbf{a} \in V$.*
2. *A jest ciągłe na V.*
3. *Istnieje $C > 0$, że $\|A\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|$*

Dowód. (2) $\Longrightarrow$ (3): W szczególności A jest ciągła w $\mathbf{0}$. Dążąc do zaprzeczenia przypuśćmy, że C nie istnieje, wówczas:

$$\begin{aligned}
&\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{\mathbf{x_n}\in V}: \|A\mathbf{x_n}\| > n\|\mathbf{x_n}\| \implies \\
&\implies n\|\mathbf{x_n}\| < \|A\mathbf{x_n}\| = \|\mathbf{x_n}\|\cdot\|A\frac{\mathbf{x_n}}{\|\mathbf{x_n}\|}\| \implies 1 < \|A\frac{\mathbf{x_n}}{n\|\mathbf{x_n}\|}\| \implies \\
&\implies \mathbf{c_n} = \frac{\mathbf{x_n}}{n\|\mathbf{x_n}\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0} \wedge A\mathbf{c_n} \nrightarrow \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Co przeczy ciągłości.

(3) $\Longrightarrow$ (1): A musi być ciągła w $\mathbf{0}$ z trywialnych powodów.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Wybierzmy dowolny $\mathbf{b} \in V$ oraz ciąg taki, że $\|\mathbf{x_n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}$, wtedy:

$$A(\mathbf{b}+\mathbf{x_n}) = A(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + A(\mathbf{a}+\mathbf{x_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + A(\mathbf{a}) = A(\mathbf{b})$$

□

Definicja 5.10. *Odwzorowanie liniowe ciągłe $A : V \to W$ między dwoma przestrzeniami unormowanymi nazywamy **homomorfizmem**.*

Definicja 5.11. *Homomorfizm który jest odwracalny nazywa się **izomorfizmem**.*

Definicja 5.12. *Standardową **normą operatora** liniowego w nazywamy:*

$$\|A\| = \inf\{C > 0 : \forall_{\mathbf{x}}\|A\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|\}$$

Definicja 5.13. *Operator między przestrzeniami topologicznymi nazywamy **otwartym** jeśli obrazem każdego zbioru otwartego jest zbiór otwarty.*

Lemat 5.14. *Niech przestrzenie X, Y będą unormowane, a $T : X \to Y$ będzie operatorem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Operator T jest otwarty.*
2. *Obraz $\mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1)$ zawiera pewną kulę $\mathcal{B}(\mathbf{0_Y}, r)$.*

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2): Obraz $\mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1)$ jest zbiorem otwartym oraz zawiera $\mathbf{0_Y}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Wybierzmy dowolny zbiór otwarty $\mathcal{O}$ w X.

$$\forall_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}}\exists_{\varepsilon>0} : \mathcal{B}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon\cdot\mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1) \subseteq \mathcal{O}$$

zatem:

$$T(\mathcal{B}(\mathbf{x}, \varepsilon)) = T(\mathbf{x}) + \varepsilon\cdot T(\mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1)) \supseteq T(\mathbf{x}) + \varepsilon\cdot B(\mathbf{0_Y}, r)$$

□

Lemat 5.15. *Niech $T : X \to Y$ będzie ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha w przestrzeń unormowaną. Jeśli domknięcie $\overline{C}$ zbioru $C = T(\mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1))$ zawiera pewną kulę $\mathcal{B}(\mathbf{0_Y}, r)$ to operator T jest otwarty.*

Dowód. Zgodnie z [Lem.5.14] wystarczy pokazać, że C zawiera kulę $\mathcal{B}(\mathbf{0_Y}, \frac{r}{3})$.
Istnieje $\mathbf{y} \in \overline{C}$, że $\|\mathbf{y}\| \leq \frac{r}{3}$ oraz $\mathbf{y_1} \in C$ dla którego $\|3\mathbf{y} - \mathbf{y_1}\| \leq \frac{r}{3}$
Podobnie ponieważ $3\mathbf{y} - \mathbf{y_1} \in \overline{C}$ możemy wybrać $\mathbf{y_2} \in C$, że:

$$\|3^2\mathbf{y} - 3\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}\| \leq \frac{r}{3}$$

I tak dalej cały ciąg $\{\mathbf{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie:

$$\|3^n\mathbf{y} - 3^{n-1}\mathbf{y_1} - \ldots - 3^0\mathbf{y_n}\| \leq \frac{r}{3}$$

Tak więc $\|\mathbf{y} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i}\| \leq \frac{r}{3^{n+1}}$. Istnieje ciąg $\{\mathbf{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $T\mathbf{x_n} = \mathbf{y_n}$ oraz $\sum_{i=1}^{n} \|3^{-i}\mathbf{x_i}\| \leq \frac{1}{2}$, zatem szereg zbiega do $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1)$
Ponadto:

$$T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} T\mathbf{x_i} = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i}\mathbf{y_i} = \mathbf{y} \in C$$

□

Lemat 5.16. *Niech* $T : X \to Y$ *będzie epimorfizmem z przestrzeni unormowanej w przestrzeń Banacha. Istnieją liczby* $r, s > 0$ *oraz* $\mathbf{y_0} \in Y$*, że domknięcie* $\overline{C}$ *zbioru* $C = \{T\mathbf{x} : x \in \mathcal{B}(\mathbf{0_X}, s)\}$ *zawiera kulę* $\mathcal{B}(\mathbf{y_0}, r)$*.*

Dowód. Weźmy ciąg zbiorów:

$$C_n = \{T\mathbf{x} : x \in \mathcal{B}(\mathbf{0_X}, n)\}$$

Ma mocy twierdzenia Baire'a[Tw.4.55] któryś ze zbiorów C_n nie jest nigdziegęsty. □

Twierdzenie 5.17. ***(O operatorze otwartym)*** *Ograniczony epimorfizm między przestrzeniami Banacha* $T : X \to Y$ *jest otwarty.*

Dowód. Wybierzmy liczby s, r oraz $\mathbf{y_0} \in Y$ jak w treści [Lem.5.16]. Z liniowości T wynika, że $\mathcal{B}(\mathbf{y_0}, s^{-1}r) \subseteq \overline{\{T\mathbf{x} : x \in \mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1)\}}$
Dla dowolnego $y \in \mathcal{B}(\mathbf{0_Y}, s^{-1}r)$:

$$y = \frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{y_0} + \mathbf{y}) - (\mathbf{y_0} - \mathbf{y})] = \frac{1}{2} \cdot [T(\mathbf{x_0} + \mathbf{x}) - T(\mathbf{x_0} - \mathbf{x})] \in \overline{\{T\mathbf{x} : x \in \mathcal{B}(\mathbf{0_X}, 1)\}}$$

Co pozwala nam z [Lem.5.15] wywnioskować, że T jest otwarty. □

Twierdzenie 5.18. ***(Banacha o operatorze odwrotnym)*** *Każdy ciągły operator liniowy* $A : V \to W$ *między przestrzeniami Banacha, będący bijekcją ma ciągłą odwrotność* A^{-1}*.*

Dowód. Przeciwobraz zbioru otwartego $\mathcal{U} \subseteq X$ pod działaniem T^{-1} jest równy $T\mathcal{U}$ zatem z [Tw.5.17] jest otwarty. □

Twierdzenie 5.19. *Zbiór epimorfizmów między przestrzeniami Banacha* V *i* W *jest otwarty w* $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Dowód. Niech $\mathbf{y} \in W$, chcemy pokazać, że dla dowolnej surjekcji $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ istnieje kula, że dla $S \in \mathcal{B}(T, \varepsilon)$ mamy $\mathbf{x} \in V : S\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Naturalnie jest taki $\mathbf{x_0}$, że $T\mathbf{x_0} = \mathbf{y}$, oznaczmy $\mathbf{y_0} = S\mathbf{x_0}$.
Niech $\mathbf{y_1} = (T - S)\mathbf{x_0}$, $\|\mathbf{y_1}\| \leq \varepsilon\|\mathbf{x_0}\|$, oraz $T\mathbf{x_1} = \mathbf{y_1}$
$\mathbf{y_2} = (T - S)\mathbf{x_1}$, $\|\mathbf{y_2}\| \leq \varepsilon\|\mathbf{x_1}\| \leq \varepsilon^2\|T\|\|\mathbf{x_0}\|$, oraz $T\mathbf{x_2} = \mathbf{y_2}$
Indukcyjnie definiujemy dwa ciągi $\{\mathbf{x_n}\}$ i $\{\mathbf{y_n}\}$, że $\|\mathbf{y_n}\| \leq \varepsilon^n\|T\|^{n-1}\|\mathbf{x_0}\|$
$\|\mathbf{x_n}\| \leq \varepsilon\|T\|\|\mathbf{x_0}\|$
$S\left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x_i}\right] = T\mathbf{x_0} - \mathbf{y_1} + T\mathbf{x_1} - \mathbf{y_2} \ldots = T\mathbf{x_0} - \mathbf{y_1} + \mathbf{y_1} - \mathbf{y_2} + \mathbf{y_2} - \ldots = T\mathbf{x_0} = \mathbf{y}$ □

5.3 Norma iloczynu przestrzeni

Definicja 5.20. *Niech* $\{(X_i, \|\bullet\|_i)\}_{i \in \overline{1,n}}$ *będzie skończoną rodziną przestrzeni unormowanych. Wówczas każdą normę postaci:*

$$\|(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})\| = \|(\|\mathbf{x_1}\|_1, \ldots, \|\mathbf{x_n}\|_n)\|_{\mathbb{R}^n}$$

Gdzie $\|\bullet\|_{\mathbb{R}^n}$ *jest dowolną normą na* $\mathbb{R}^n$, *nazywamy* ***normą iloczynu*** *przestrzeni.*

Lemat 5.21. *Powyższa konstrukcja spełnia definicję normy.*

Dowód. Z tego, że $\|\bullet\|_{\mathbb{R}^n}$ jest normą wynika niezdegenerowanie:

$$\|(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})\| = 0 \iff \|(\|\mathbf{x_1}\|_1, \ldots, \|\mathbf{x_n}\|_n)\|_{\mathbb{R}^n} = 0 \iff \forall_{i \in \overline{1,n}} = \mathbf{x_i} = 0$$

Dodatnia jednorodność:

$$\begin{aligned}\|\alpha(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})\| = \|(\alpha\mathbf{x_1}, \ldots, \alpha\mathbf{x_n})\| = \|(\|\alpha\mathbf{x_1}\|_1, \ldots, \|\alpha\mathbf{x_n}\|_n)\|_{\mathbb{R}^n} = \\ = |\alpha| \cdot \|(\|\mathbf{x_1}\|_1, \ldots, \|\mathbf{x_n}\|_n)\|_{\mathbb{R}^n} = |\alpha| \cdot \|(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})\|\end{aligned}$$

Nierówność trójkąta:

$$\begin{aligned}\|(x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)\| &= \|\|\mathbf{x_1} + \mathbf{y_1}\|_1, \ldots, \|\mathbf{x_n} + \mathbf{y_n}\|_n\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq \|\|\mathbf{x_1}\|_1, \ldots, \|\mathbf{x_n}\|_n\|_{\mathbb{R}^n} + \|\|\mathbf{y_1}\|_1, \ldots, \|\mathbf{y_n}\|_n\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq \|(x_1, \ldots, x_m)\| + \|(y_1, \ldots, y_m)\|\end{aligned}$$

□

Definicja 5.22. ***Iloczynem*** $\prod_{i=1}^{n} X_i$ *skończonej rodziny przestrzeni unormowanych będziemy nazywać jej iloczyn kartezjański wraz z normą klasy zdefiniowanej w [Def.5.20].*

Twierdzenie 5.23. *Iloczyn* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *przestrzeni Banacha jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $\{\mathbf{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w X, a π_i rzutem na i-tą składową iloczynu. Ponieważ wszystkie normy są równoważne, możemy rozważać sytuację w $\|\bullet\|_\infty = \max_i \|\bullet\|_i$. Zachodzi:

$$\|\pi_i(\mathbf{x_m} - \mathbf{x_n})\|_i \leq \|\mathbf{x_m} - \mathbf{x_n}\|_\infty.$$

Ponieważ składowe iloczynu są przestrzeniami zupełnymi, ciąg $\{\pi_i(\mathbf{x_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę $\mathbf{y_i} \in X_i$. Wobec tego, element $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) \in X$ jest granicą $\{\mathbf{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Rozdział 6

Liczby rzeczywiste

6.1 Aksjomatyka liczb rzeczywistych

Aksjomat 6.1. *Liczby rzeczywiste są ciałem.*

Aksjomat 6.2. *Przestrzeń metryczna liczb rzeczywistych* $(\mathbb{R}, \rho)$*, gdzie* $\rho(x, y) = |x - y|$ *jest zupełna.*

Aksjomat 6.3. *Porządek* $(\mathbb{R}, \leq)$ *liczb rzeczywistych jest liniowy.*

Lemat 6.4. *Przedział* $\mathbb{R} \supseteq [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ *jest domknięty.*

Dowód. Nie wchodząc w szczegóły: nietrudno pokazać iż:

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[,$$

jest zbiorem otwartym. □

Lemat 6.5. *Przedział domknięty* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ będzie ciągiem. Oznaczmy $[a, b] = [a_0, b_0]$ i wybierzmy ciąg odcinków $\{[a_n, b_n]\}$ taki, że:

1. $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$.
2. $|b_n - a_n| = (1/2)^n \cdot |b - a|$.
3. $[a_n, b_n]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów wybranego ciągu.

Istnieje podciąg $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $x_{n_m} \in [a_m, b_m]$. Jest on ciągiem Cauchy'ego. Zgodnie z [Aks.6.2] ma granicę $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ z [Lem.6.4] przedział jest domknięty, $x \in [a, b]$. □

Lemat 6.6. *Kostka* $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Wybierzmy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zawarty w kostce. Niech dla dowolnego $i \in \{1,\ldots,n\}$ funkcja:

$$\pi_i : [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \ni (x_1, \ldots, x_n) \to x_i \in [a_i, b_i]$$

będzie rzutem. Zgodnie z [Lem.6.4] z ciągu można wybrać podciąg y_n taki, że $\pi_1(y_n)$ jest zbieżny. Z kolei dla podciągu y_n można wybrać kolejny z_n dla którego $\pi_2(z_n)$ jest zbieżny... Po wykonaniu tej operacji n razy dochodzimy do podciągu zbieżnego w kostce. □

Lemat 6.7. *Niech* X *będzie podzbiorem przestrzeni euklidesowej* $(\mathbb{R}^n, d_e)$*. Następujące warunki są równoważne:*

1. X *jest zwarty.*
2. X *jest domknięty i ograniczony.*

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2): Z [Tw.**??**.3] wynika, że zbiór musi być domknięty. Żeby wykazać ograniczoność wystarczy zauważyć, że rodzina kul $\{\mathcal{B}(\mathbf{0}, n) : n \in \mathbb{N}\}$ pokrywa X, więc można z niej wybrać podpokrycie skończone.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Każdy zbiór ograniczony A leży w pewnej domkniętej kostce $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ która jest zbiorem zwartym. Na mocy [Lem.6.4] z domkniętości A wynika zwartość. □

Twierdzenie 6.8. ***(Bolzano-Weierstraß)*** *Niech* $f : X \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą, określoną na zwartym podzbiorze przestrzeni metrycznej* $X \subseteq \mathcal{M}$
Istnieją punkty $a, b \in X$*, że:*

$$f(a) = \sup_X f \qquad\qquad f(b) = \inf_X f$$

Dowód. Zastosujmy [Tw.**??**] i zastanówmy się jak wygląda zwarty podzbiór $\mathbb{R}$. Zgodnie z [Lem.6.7] jest on domknięty i ograniczony co jest równoznaczne tezie. □

6.2 Ciągi rzeczywiste

Twierdzenie 6.9. *Niech* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będą ciągami w* $\mathbb{R}$ *oraz* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ *oraz* $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$*, wówczas:*

1. $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$.
2. $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.
3. $\{a_n / b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a/b$ *jeśli tylko* $b_n, b \neq 0$.

Dowód. Trywialny. □

6.3 Szeregi rzeczywiste

Rozdział 7

Różniczka funkcji

7.1 Małe wyższego rzędu

Lemat 7.1. *Niech* V*,* W *będą unormowane, weźmy funkcję* $f : V \supseteq \mathrm{dom}(f) \to W$ *zdefiniowaną na pewnym otoczeniu* $\mathbf{0_V}$*. Przez* $o(V, W)$ *oznaczmy rodzinę takich funkcji, że:*

$$\frac{f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow[\|\mathbf{h}\| \to 0]{} 0$$

Na rodzinie $o(V, W)$ *wprowadźmy następującą relację równoważności:*

$$u \sim g \iff \exists_{U_0 \in \mathcal{T}} \forall_{x \in U_0} : u(x) = g(x)$$

Zbiór klas tej równoważności jest przestrzenią wektorową którą tradycyjnie oznaczamy $o(\mathbf{h})$*. Funkcję* $h \in o(\mathbf{h})$ *nazywamy* ***małą wyższego rzędu*** *niż* f*.*

Dowód. (1): Pokażmy, że liniowa kombinacja $\alpha u + \beta g \in o(\mathbf{h})$:

$$\frac{\alpha u + \beta g}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\alpha u}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\beta h}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow[\|\mathbf{h}\| \to 0]{} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

(2): Zerem będzie funkcja zerująca się na dowolnym otoczeniu 0_V
(3): Funkcją odwrotną do h będzie funkcja odwrotna na pewnym otoczeniu 0_V. □

7.2 Definicja i algebraiczne własności różniczki

Definicja 7.2. *Niech* V *i* W *będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcja* $f : V \supseteq A \to W$ *zdefiniowana na pewnym otoczeniu* $\mathbf{x} \in A$ *jest w tym punkcie* ***różniczkowalna*** *jeśli istnieje odwzorowanie* $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *takie, że:*

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L\mathbf{h} \in o(\mathbf{h})$$

Takie L oznaczamy przez $Df(\mathbf{x})$ *i nazywamy* ***różniczką*** f *w punkcie* $\mathbf{x}$*. Funkcja jest różniczkowalna jeśli posiada* $Df(\mathbf{x})$ *w każdym punkcie dziedziny.*

Uwaga 7.3. Różniczka jest najlepszym afinicznym przybliżeniem funkcji w danym punkcie.

Twierdzenie 7.4. *Powyższa definicja* $Df(\mathbf{x})$ *określa różniczkę jednoznacznie.*

Dowód. Chcemy pokazać, że jeśli różniczka w punkcie istnieje to tylko jedno przekształcenie liniowe spełnia jej definicję. Przeprowadźmy dowód przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że istnieją dwa różne operatory liniowe L_1 i L_2 takie, że:

$$F_1 = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L_1\mathbf{h} \in o(\mathbf{h})$$
$$F_2 = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L_2\mathbf{h} \in o(\mathbf{h})$$

Jak wynika z Lem.7.1

$$F_1 - F_2 = (L_2 - L_1)\mathbf{h} \in o(\mathbf{h})$$

Co można zapisać w postaci granicy:

$$(L_2 - L_1)\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow[\|\mathbf{h}\|\to 0]{} \mathbf{0}$$

Czyli $L_2 = L_1$ □

Twierdzenie 7.5. *Funkcja różniczkowalna w punkcie* $\mathbf{x}$ *jest w nim również ciągła.*

Dowód. Wprost z definicji ciągłości:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = L\mathbf{h} + (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L\mathbf{h}) \xrightarrow[\|\mathbf{h}\|\to 0]{} \mathbf{0}$$

Przypominamy, że L z definicji jest ciągła jako element $\mathrm{Hom}(V, W)$. □

Twierdzenie 7.6. *Niech* V, W *będą przestrzeniami unormowanymi, natomiast funkcje* $f, g : V \supseteq \Omega \to W$ *różniczkowalne w punkcie* $\mathbf{x} \in \Omega$. *Wówczas funkcja* $\alpha f + \beta g$ *jest różniczkowalna w tym punkcie, oraz:*

$$D(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha Df(\mathbf{x}) + \beta Dg(\mathbf{x})$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy po prostu wstawiając prawą część powyższej równości do definicji różniczki funkcji $\alpha f + \beta g$ w punkcie $\mathbf{x}$ i przekonamy się, że warunki Def.7.2 są spełnione.

$$(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) - \alpha Df(\mathbf{x}) + \beta Dg(\mathbf{x}) =$$
$$= (\alpha f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \alpha f(\mathbf{x}) - \alpha Df(\mathbf{x})) + (\beta g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \beta g(\mathbf{x}) - \beta Dg(\mathbf{x})) \in o(\mathbf{h})$$

□

Twierdzenie 7.7. *Niech przestrzenie* V, W, Z *będą unormowane, a funkcja* $f : V \supseteq \Omega_1 \to W$ *będzie różniczkowalna w* $\mathbf{x}$, *natomiast funkcja* $g : W \supseteq \Omega_2 \to Z$ *w* $f(\mathbf{x})$. *Zakładamy, że oba* Ω_1, Ω_2 *są otwarte oraz* $f(\mathbf{x}) \in \Omega_2$. *Wówczas złożenie* $g \circ f$ *jest funkcją różniczkowalną w* $\mathbf{x}$, *a także:*

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x})$$

Dowód. Podobnie jak w poprzednim dowodzie podstawimy naszą postulowaną formę różniczki $g \circ f$ do Def.7.2 i sprawdzimy się, że jest to odpowiadania forma.

$$\begin{aligned}
&F = g \circ f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - g \circ f(\mathbf{x}) - Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \\
&= g \circ (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) - g \circ f(\mathbf{x}) - Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \\
&= g \circ (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) - g \circ f(\mathbf{x}) - Dg(f(\mathbf{x})) \circ (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) + \\
&+ Dg(f(\mathbf{x})) \circ (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x})\mathbf{h})
\end{aligned}$$

Rozważmy oba składniki tej sumy i podzielmy przez $\|\mathbf{h}\|$:

$$\frac{g \circ (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) - g \circ f(\mathbf{x}) - Dg(f(\mathbf{x})) \circ (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow[\|\mathbf{h}\| \to 0]{} \mathbf{0}$$

$$\frac{Dg(f(\mathbf{x})) \circ (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x})\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow[\|\mathbf{h}\| \to 0]{} Dg(f(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Co pokazuje, że $F \in o(\mathbf{h})$. □

7.3 Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie 7.8. ***(O wartości średniej)*** *Niech V i W będą przestrzeniami unormowanymi, a funkcja $f : V \supseteq \Omega \to W$ będzie różniczkowalna na wypukłym zbiorze otwartym Ω. Wybierzmy dwa dowolne punkty $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$, wówczas:*

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq \sup_{t \in [0,1]} Df(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję:

$$\gamma(t) = f(a + t(b - a))$$

Z otwartości i wypukłości Ω wynika, iż jest ona określona na przedziale $[-r, 1 + r]$ dla pewnego $r > 0$. Skorzystajmy z faktu, że norma jest odwzorowaniem ciągłym oraz twierdzenia Bolzano-Weierstrassa i ustalimy:

$$C = \sup_{t \in [0,1]} Df(a + t(b - a))$$

Korzystając z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa(żeby uzasadnić istnienie sup) możemy policzyć różniczkę:

$$\gamma'(t) = D\gamma(t) = Df(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

Z definicji różniczki:

$$\begin{aligned}
&\forall_{t \in [0,1]} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta_t > 0} : \|\mathbf{z}\| < \delta_t \implies \\
&\implies \|f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{z}) - f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) - Df(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\mathbf{z}\| < \frac{\epsilon}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|} \|\mathbf{z}\|
\end{aligned}$$

Wybierzmy jakiekolwiek $t_1, t_2 \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\| &\leq \|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)-\gamma'(t)(t_2-t_1)\| + \|\gamma'(t)(t_2-t_1)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}\cdot|t_2-t_1| + C\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\cdot|t_2-t_1| = \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|} + C\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\right)\cdot|t_2-t_1|\end{aligned}$$

Gdzie biorąc odpowiednio mały przedział $|t_2-t_1|$ można uczynić składnik $\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}$ dowolnie małym.
Rodzina zbiorów otwartych:

$$\{]t-\delta_t, t+\delta_t[: t \in [0,1]\}$$

Gdzie $\delta_t < r$, tworzy otwarte pokrycie zbioru zwartego $[0,1]$ z którego możemy zgodnie z [Def.4.37] wybrać skończone pokrycie otwarte:

$$\{]t_i-\delta_{t_i}, t_i+\delta_{t_i}[\}_{i\in\overline{1,n}}$$

Zakładając bez straty ogólności, że $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$. Wybierzmy punkty:

$$x_i \in]t_i-\delta_{t_i}, t_i+\delta_{t_i}[\cap]t_i, t_{i+1}[$$

W taki sposób by $x_0 = 0$ oraz $x_n = 1$. Nareszcie jesteśmy gotowi zakończyć dowód ostatnim ciągiem nierówności:

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| = \|\gamma(1)-\gamma(0)\| &\leq \sum_{i=1}^{n}\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\|\gamma(x_i)-\gamma(t_i)\| + \sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(x_{i-1})\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|} + C\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\right)|x_i-t_i| + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|} + C\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\right)|t_i-x_{i-1}| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|} + C\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\right) \leq C\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| = \\ &= \sup_{t\in[0,1]} Df(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\end{aligned}$$

□

7.4 Pochodne cząstkowe

Definicja 7.9. *Rozważmy iloczyn przestrzeni unormowanych* $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ *oraz przestrzeń z normą* Y. *Dla funkcji* $f : X \supseteq \Omega \to Y$ *zdefiniowanej w* $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}) \in$

Ω^o *zdefiniujmy pomocniczą funkcję:*

$$f_j^a(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_{j-1}}, \mathbf{x}, \mathbf{a_{j+1}}, \dots, \mathbf{a_n})$$

Jeśli różniczka $Df_j^a(\mathbf{a_j})$ *istnieje to oznaczamy ją dla wygody przez* $D_j f(\mathbf{a})$ *i nazywamy j-tą* ***pochodną cząstkową*** f.

Twierdzenie 7.10. *Niech* $X = \prod_{i=1}^n X_i$ *będzie iloczynem przestrzeni z normą. Wówczas jeśli* $f : X \supseteq \Omega \to Y$ *jest funkcją różniczkowalną w* $\mathbf{a} \in \Omega$ *to istnieją wszystkie pochodne cząstkowe oraz dla dowolnego* $\mathbf{h} = (\mathbf{h_1}, \dots, \mathbf{h_n}) \in X$ *zachodzą równości:*

$$D_j f(\mathbf{a})\mathbf{h_j} = Df(\mathbf{a}) \circ \theta_j \circ \pi_j \mathbf{h} \tag{7.1}$$

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = \sum_{j=1}^n D_j f(\mathbf{a})\mathbf{h_j} \tag{7.2}$$

Dowód. Najpierw zauważmy, że (7.1) $\Longrightarrow$ (7.2):

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = Df(\mathbf{a})\mathbb{1}\mathbf{h} = Df(\mathbf{a}) \sum_{j=1}^n \left(\theta_j \circ \pi_j\right) \mathbf{h} = \sum_{j=1}^n D_j f(\mathbf{a})\mathbf{h_j}$$

A następnie udowodnimy równanie (7.1).

$$\begin{aligned} F &= f_j^a(\mathbf{a_j} + \mathbf{h_j}) - f_j^a(\mathbf{a_j}) - Df(\mathbf{a}) \circ \theta_j \circ \pi_j \mathbf{h} = \\ &= f_j^a(\mathbf{a_j} + \mathbf{h_j}) - f_j^a(\mathbf{a_j}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{h_j}, \dots, \mathbf{0}) = \\ &= f(\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_j} + \mathbf{h_j}, \dots, \mathbf{a_n}) - f(\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_j}, \dots, \mathbf{a_n}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{h_j}, \dots, \mathbf{0}) \end{aligned}$$

Co pokazuje prawdziwość równania (7.1) wprost z definicji różniczki. □

Twierdzenie 7.11. *Niech* X *będzie przestrzenią z normą, natomiast* $Y = \prod_{i=1}^n Y_i$ *iloczynem przestrzeni unormowanych. Wówczas dla rodziny funkcji* $\left\{f_i : X \to Y_i : i \in \overline{1, n}\right\}$ *funkcja* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje* f_i *są różniczkowalne. Wówczas zachodzi:*

$$Df(\mathbf{x}) = (Df_1(\mathbf{x}), \dots, Df_n(\mathbf{x}))$$

Dowód. Skorzystajmy z Tw.7.7 i zapiszmy naszą funkcję poprzez $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\theta_i \circ \pi_i) \circ f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{x}) &= D(\sum_{i=1}^n \theta_i \circ \pi_i \circ f)(\mathbf{x}) = D(\sum_{i=1}^n \theta_i \circ f_i)(\mathbf{x}) = \\ &= \sum_{i=1}^n D(\theta_i \circ f_i)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n D(\theta_i)(f_i(\mathbf{x})) \circ Df_i(\mathbf{x}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i \circ Df_i(\mathbf{x}) = (Df_1(\mathbf{x}), \dots, Df_n(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

□

Uwaga 7.12. Korzystam bez dowodu z faktu, że pochodna funkcji liniowej w każdym punkcie to ta funkcja. (dla θ_i)

Twierdzenie 7.13. *Niech* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *będzie iloczynem przestrzeni z normą, a* Y *przestrzenią z normą. Weźmy funkcję* $f : X \supseteq \Omega \to Y$ *oraz ustalmy* $\mathbf{a} \in \Omega$*. Wówczas jeśli istnieją wszystkie pochodne cząstkowe* f *oraz każda z funkcji* $\mathbf{x} \mapsto Df_i(\mathbf{x})$ *jest ciągła w sensie metryki zbieżności jednostajnej to* f *jest różniczkowalna w* $\mathbf{a}$*.*

Dowód. Przyjmijmy notację: $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})$, $\mathbf{h} = (\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{h_n})$.
Dowód jest nieco bardziej zawiły niż kilka poprzednich, jednak zaczniemy postępując podobnie jak zwykle. Dążymy do wykazania, że wskazana funkcja spełnia warunki stawiane różniczce:

$$
\begin{aligned}
&\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{a})\mathbf{h_j}\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_i}+\mathbf{h_i}, \ldots, \mathbf{a_n}) - f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n}) - D_i f(\mathbf{a})\mathbf{h_i}\| = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_i}+\mathbf{h_i}, \ldots, \mathbf{a_n}) - f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n}) - \\
&- D_i f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n})\mathbf{h_i} + D_i f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n})\mathbf{h_i} - D_i f(\mathbf{a})\mathbf{h_i}\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_i}+\mathbf{h_i}, \ldots, \mathbf{a_n}) - f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n}) - \\
&- D_i f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n})\mathbf{h_i}\| + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \|D_i f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n})\mathbf{h_i} - D_i f(\mathbf{a})\mathbf{h_i}\|
\end{aligned}
$$

Powyższa suma składa się z dwóch składników po n elementów. Połowa z nich jest postaci:

$$
\begin{aligned}
F_i =& \|f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_i}+\mathbf{h_i}, \ldots, \mathbf{a_n}) - f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n}) - \\
&- D_i f(\mathbf{a_1}+\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}}+\mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n})\mathbf{h_i}\|
\end{aligned}
$$

Ale przecież wprost z definicji różniczki $F_i \in o(\mathbf{h})$. Aby oszacować kolejne n składników użyjemy wprost Def.5.20. Ponieważ wszystkie metryki na $\mathbb{R}^n$ są równoważne możemy badając zbieżność użyć konkretnej metryki:

$$\|\bullet\|_\infty = \max\left\{\|x_i\|_i : i \in \overline{1,n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i f(\mathbf{a_1} + \mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}} + \mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n})\mathbf{h_i} - D_i f(\mathbf{a})\mathbf{h_i}\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{h_i}\|_i \|D_i f(\mathbf{a_1} + \mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}} + \mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n}) \frac{\mathbf{h_i}}{\|\mathbf{h_i}\|_i} - D_i f(\mathbf{a}) \frac{\mathbf{h_i}}{\|\mathbf{h_i}\|_i}\| \leq$$

$$\leq n \cdot \|\mathbf{h}\|_\infty \cdot \max_{i \in \overline{1,n}} \{\|D_i f(\mathbf{a_1} + \mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{a_{i-1}} + \mathbf{h_{i-1}}, \ldots, \mathbf{a_n}) - D_i f(\mathbf{a})\|\} \in o(\mathbf{h})$$

□

Twierdzenie 7.14. *Niech* $B : X \times X \to Y$ *będzie ograniczonym funkcjonałem między dwoma przestrzeniami Banacha, wówczas:*

$$DB(\alpha, \beta)(x, y) = B(\alpha, y) + B(x, \beta)$$

Dowód. Jest to prosta konsekwencja [Tw.7.13]. □

7.5 Twierdzenie u funkcji uwikłanej

Definicja 7.15. *Funkcjami klasy* $C^k(X, Y)$, *gdzie* X *oraz* Y *są przestrzeniami Banacha, nazywamy funkcje postaci* $f : X \to Y$ *posiadające ciągłe pochodne do stopnia k włącznie.*

Funkcję klasy $C^\infty(X, Y)$ *nazywamy* ***gładką****.*

Twierdzenie 7.16. ***(O funkcji uwikłanej)*** *Niech* X, Y, Z *będą przestrzeniami Banacha. Dla otwartego podzbioru* $\Omega \subseteq X \times Y$ *i funkcji* $f \in C^1(\Omega, Z)$ *niech dla pewnego* $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) \in \Omega$ *zachodzi* $f(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) = \mathbf{0}$ *oraz* $D_2 f(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) : Y \to Z$ *będzie homeomorfizmem (ciągłą bijekcją).*
Wówczas istnieje takie otoczenie $\mathcal{N}_{\mathbf{x_0}} \subseteq X$ *punktu* $\mathbf{x_0}$ *oraz jednoznacznie określona funkcja* $g \in C^1(\mathcal{N}_{\mathbf{x_0}}, Z)$ *taka, że:*

$$g(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0} \qquad\qquad f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

A jej pochodna jest dana równością:

$$Dg(\mathbf{x}) = -\left(D_2 f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right)^{-1} \circ D_1 f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$$

Dowód. (Istnienie): Dla wygody oznaczmy:

$$L := D_2 f(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) \qquad\qquad h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y} - L^{-1}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$$

Możemy wybrać liczbę $\delta > 0$ taką, że:

1. $\mathcal{B}((\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}), \delta) \subseteq \Omega$
2. Operator $D_2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest odwracalny na $\mathcal{B}((\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}), \delta)$.
3. $\forall_{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{B}((\mathbf{x_0},\mathbf{y_0}),\delta)} \|D_2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_2 f(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})\| \leq \frac{1}{2\|L^{-1}\|}$

Dla punktów takich, że $(\mathbf{x}, \mathbf{y_i}) \in \mathcal{B}((\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}), \delta)$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
\|h(\mathbf{x}, \mathbf{y_2}) - h(\mathbf{x}, \mathbf{y_1})\| &= \|\mathbf{y_2} - L^{-1}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y_2})] - \mathbf{y_1} + L^{-1}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y_1})]\| = \\
&= \|L^{-1}\left[L[\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}] - (f(\mathbf{x}, \mathbf{y_2}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y_1}))\right]\| \leq \\
&\leq \|L^{-1}\| \cdot \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y_2}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y_1}) - D_2 f(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})[\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}]\| \leq \\
&\leq \|L^{-1}\| \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|D_2(\mathbf{x}, \mathbf{y_1} + t(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})) - D_2 f(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})\| \|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}\| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}\|
\end{aligned}$$

Dla dowolnego $\mathbf{x} \in \pi_1 \circ \mathcal{B}((\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}), \delta) = \mathcal{N}_{\mathbf{x_0}}$ funkcja $h(\mathbf{x}, \bullet) : \pi_2 \circ \mathcal{B}((\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}), \delta) \to \pi_2 \circ \mathcal{B}((\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}), \delta)$ ma zgodnie z twierdzeniem kontrakcji unikalny punkt stały, który oznaczymy $g(\mathbf{x})$. Zachodzi:

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - L^{-1}[f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))] \iff f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

(Ciągłość): Weźmy $\mathbf{z_0} \in Z$, oznaczmy $g_0(\mathbf{x}) = \mathbf{z_0}$ i zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg funkcji $g_n(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, g_{n-1}(\mathbf{x}))$. Ciąg ten zbiega do g jednostajnie, więc na mocy [Tw.4.34] g jest ciągłe.

(Różniczkowalność): Skorzystamy z [Tw.7.13] i tw. o różniczce złożenia funkcji:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x} + \mathbf{h}, g(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) - Df_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\mathbf{h} - Df_2(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))[g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})] \in \\
\in o(\mathbf{h}, g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

W pewnym otoczeniu w którym $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}, g(\mathbf{x} + \mathbf{h})) = f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$, mamy(można je wybrać z ciągłości g):

$$Df_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\mathbf{h} + Df_2(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))[g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})] \in o(\mathbf{h}, g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}))$$

Można przyłożyć po obu stronach L^{-1}

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}) - [-Df_2(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))]^{-1} \circ Df_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\mathbf{h} \in o(\mathbf{h}, g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})) \tag{7.3}$$

Teraz pokażmy, że $o(\mathbf{h}, g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})) = o(\mathbf{h})$ Z równania (4.3):

$$\|g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{x})\| \leq \epsilon(\|g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{h}\|) + \|[-Df_2(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))]^{-1} \circ Df_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\mathbf{h}\|$$

Zatem istnieje stała $C > 0$:

$$\|g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})\| \leq A\|\mathbf{h}\|$$

zatem:

$$\frac{\|g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}\|}{\|g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{h}\|} \xrightarrow[\mathbf{h} \to \mathbf{0}]{} \mathbf{0}$$

□

Uwaga 7.17. Dopisać w kolejnym rozdziale że dla k-krotnie różniczkowalnej f, funkcja g też jest k-krotnie różniczkowalna.

Twierdzenie 7.18. ***(O funkcji odwrotnej)*** *Niech V, W będą przestrzeniami Banacha, natomiast $f \in C^1(\Omega, W)$ funkcją określoną na otwartym podzbiorze $\Omega \subseteq V$ taką, że dla pewnego $\mathbf{x} \in \Omega$ różniczka $Df(\mathbf{x})$ jest odwracalna.*
Wówczas istnieje otoczenie $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ na którym funkcja f jest odwracalna, oraz:

$$Df^{-1}\left(f(\mathbf{x})\right) = \left(Df(\mathbf{x})\right)^{-1}.$$

Dowód. Jest to szczególny przypadek [Tw.7.16]. Ustalmy $g : W \times V \to W$ wzorem:

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y} - f(\mathbf{x}).$$

Wówczas $h(\mathbf{y})$ jest unikalnym rozwiązaniem równania $g\left(\mathbf{y}, h\left(\mathbf{y}\right)\right) = 0$, a także:

$$Dh\left(f(\mathbf{x})\right) = -(D_2 g(\mathbf{y}, \mathbf{x}))^{-1} \circ D_1 g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -(D_2 g(\mathbf{y}, \mathbf{x}))^{-1} = \left(Df(\mathbf{x})\right)^{-1},$$

na otoczeniu $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$. □

7.6 Wyższe pochodne

Definicja 7.19. *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **k-krotnie różniczkowalną** jeśli jest k-1 krotnie różniczkowalna, oraz istnieje różniczka funkcji $D^{k-1}f : X^{k-1} \to Y$.*

Rozdział 8

Teoria miary

Definicja 8.1. *σ-**algebrą** na zbiorze X nazywamy rodzinę $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ spełniającą następujące warunki:*

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^\complement \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{A}$

Twierdzenie 8.2. *Niech $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ będzie σ-algebrą. Wówczas:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{A}$

Dowód. □

Twierdzenie 8.3. *Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ istnieje minimalna σ-algebra $\mathcal{A}$ taka, że $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$*

Dowód. □

Definicja 8.4. *Niech $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Minimalna σ-algebra taka, że $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ nazywana jest σ-algebrą Borelowską.*