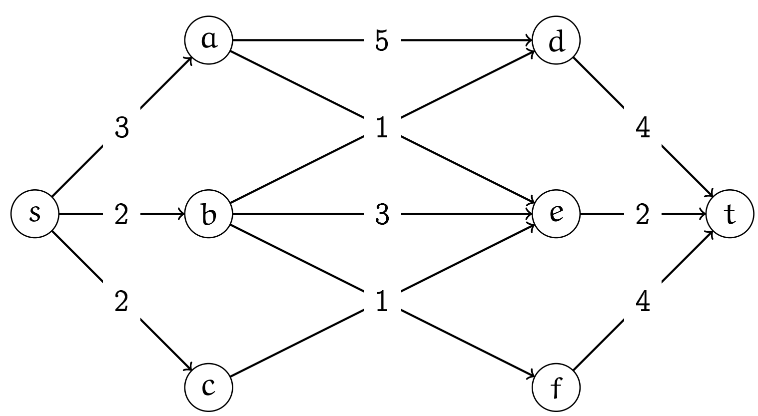
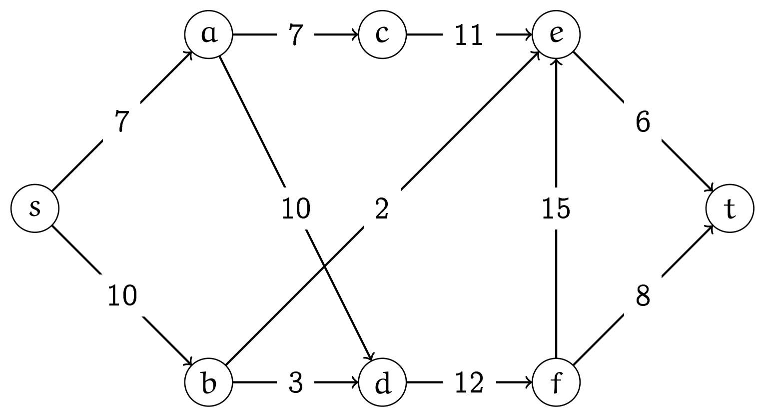
TD 1 Recherche Opérationnelle
Licence III Informatique
Flots dans les réseaux

Serigne A. Gueye

20 janvier 2019

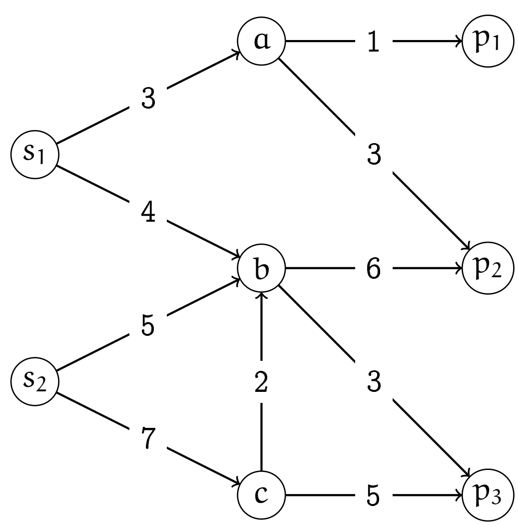
Exercice 1. Donner les itérations de l'algorithme de Ford et Fulkerson sur les deux graphes ci-dessous. Vous partirez d'un flot initial nul sur chaque arc.



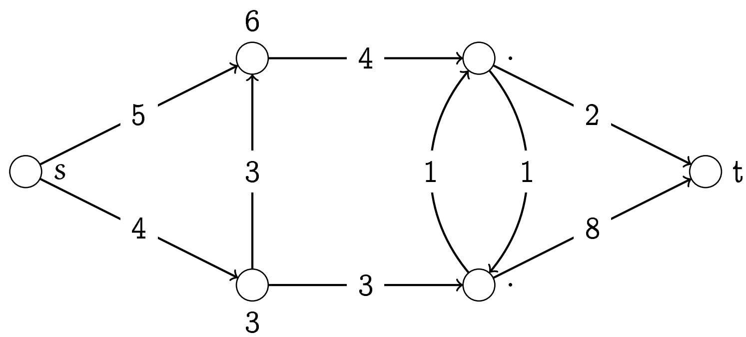


Exercice 2.

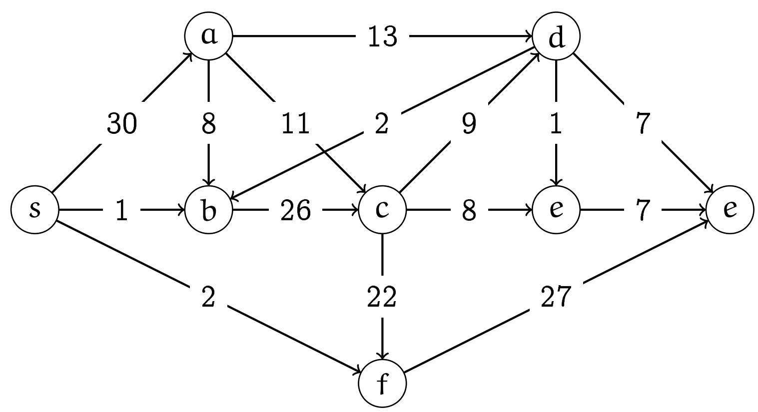
1) On désire connaitre le flot maximal sur deux sources s_1 et s_2 du graphe ci-dessous. Transformer le problème en un problème classique d'une source et une destination, puis déterminer les flots maximums.



2) Supposons, qu'en plus des capacités sur les arcs, certains noeuds du réseau ci-dessous ont des capacités maximales. Transformer le problème en un problème classique sans capacité sur les noeuds et déterminer le flot maximum.



Exercice 3. La figure ci-dessous représente un réseau.



(a) Trouver le flot maximum de s à t, en utilisant à chaque étape un chemin améliorant.

(b) Exhiber une coupe minimum.

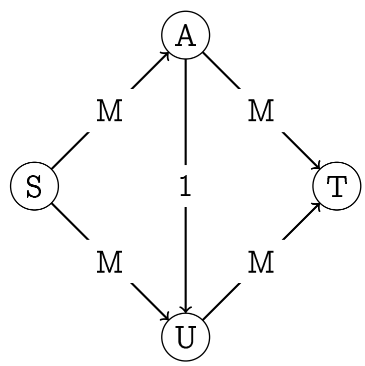
(c) Le réseau subit des changements indiqués plus bas. Essayer de trouver, dans chaque cas, le flot maximum sans recommencer l'algorithme depuis le début.

1. La capacité de l'arc $a \to c$ diminue jusqu'à 8.
2. La capacité de l'arc $c \to d$ augmente jusqu'à 10.

3. La capacité de l'arc $a \rightarrow c$ augmente jusqu'à 12, celle de l'arc $a \rightarrow d$, jusqu'à 16, et l'arc $d \rightarrow e$ disparaît.

Indication : la connaissance de la coupe minimum peut être utile.

__Exercice 4__. On considère le réseau ci-dessous dont les capacités des arcs sont indiquées sur ces derniers. On cherche à déterminer le flot maximum de S à T avec l'algorithme de Ford et Fulkerson. On a $M = 10^6$.

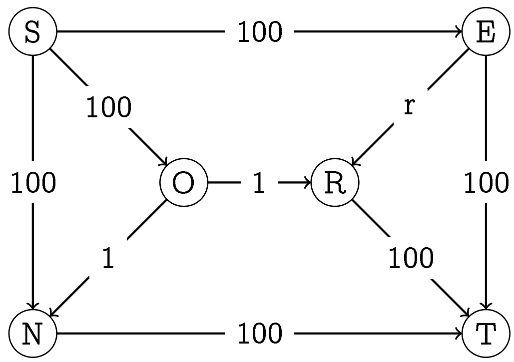


1/ Combien, **au minimum**, de chaines augmentantes peuvent être générées pour terminer les itérations de l'algorithme ? Ecrire ces chaines en indiquant la suite des sommets utilisés.

2/ Combien, **au maximum**, de chaines augmentantes peuvent être générées pour terminer les itérations de l'algorithme ? Ecrire ces chaines en indiquant la suite des sommets utilisés.

__Exercice 5__. On considère le réseau ci-dessous dont les capacités des arcs sont indiquées sur ces derniers. On a $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On remarquera que $r^2 = 1 - r$[1], et que $r < 1$. On cherche à déterminer le flot maximum de S à T.

1. De même, remarquez que $r^3 = r - r^2$, $r^4 = r^2 - r^3$, etc.



1/ Montrer que ce flot maximum est égal à 201 en exploitant le théorème d'équivalence entre la valeur du flot maximum, et celle de la capacité minimale d'une coupe. Exhiber la coupe minimale.

2/ On applique sur ce réseau l'algorithme de Ford et Fulkerson en partant d'un flot nul. Pour les 5 premières itérations de l'algorithme, on utilise les chaînes suivantes données en indiquant, dans l'ordre, la suite des sommets les composant :

- Itération 1. S - O - R - T
- Itération 2. S - E - R - O - N - T
- Itération 3. S - O - R - E - T
- Itération 4. S - E - R - O - N - T
- Itération 5. S - N - O - R - T

2.1/ Montrer que chacune de ces chaînes est augmentante, et indiquer pour chaque chaîne de combien le flot sortant de S augmente successivement.

2.2/ Indiquer sur un dessin les valeurs des flots sur tous les arcs après les itérations 1 et 5.

2.3/ Montrer qu'après l'itération 5, la somme des flots sortants de S est égale à $1 + 2r + 2r^2$.

2.4/ On utilise pour les 4 prochaines itérations **les mêmes chaines** utilisées aux itérations 2 à 5 :

– Itération 6. S - E - R - O - N - T
– Itération 7. S - O - R - E - T
– Itération 8. S - E - R - O - N - T
– Itération 9. S - N - O - R - T

Montrer, qu'après l'itération 9, la somme des flots sortants de S est

$$1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + 2r^4.$$

3.5/ Montrer que

$$1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} r^i < 5.$$

3.6/ Par induction, on admet que si on utilise encore la même série de 4 chaînes, aux 4 prochaines itérations, alors la somme des flots sortants de S après l'itération 13 sera :

$$1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + 2r^4 + 2r^5 + 2r^6.$$

Et en général, si on utilise la même série de 4 chaînes k fois alors la somme des flots sortants après l'itération $1 + 4k$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ est

$$1 + 2r + 2r^2 + ... + 2r^{2k}.$$

Déduire de la question précédente que :

$$1 + 2r + 2r^2 + ... + 2r^{2k} < 5.$$

3.7/ L'algorithme de Ford et Fulkerson convergera-t-il donc vers le flot maximum ?