



IEL – protokol k projektu

Dominik, Huml
xhumld00

10. února 2023

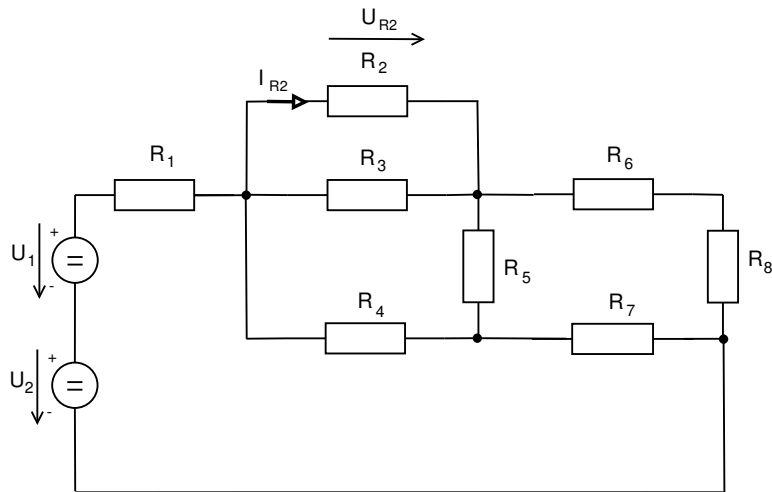
Obsah

1	Příklad 1	2
1.1	Výpočet odporu R_{ekv}	2
1.2	Výpočet U_{R2} a I_{R2}	4
1.3	Dosazení	5
2	Příklad 2	6
2.1	Výpočet R_i	6
2.2	Výpočet U_i	6
2.3	Výpočet proudu a napětí na R_5	7
2.4	Dosazení	7
3	Příklad 3	8
3.1	Převod napětového zdroje na zdroj proudový	8
3.2	Převod odporů na vodivost	8
3.3	Sestavení rovnic a výpočet proudu a napětí	9
3.4	Dosazení	10
4	Příklad 4	11
4.1	Zvolení smyček	11
4.2	Výpočet impedancí	11
4.3	Výpočet proudů	12
4.4	Výpočet napětí a fázového posunu	12
4.5	Dosazení	13
5	Příklad 5	14
5.1	Výpočet	14
6	Shrnutí výsledků	16

Příklad 1

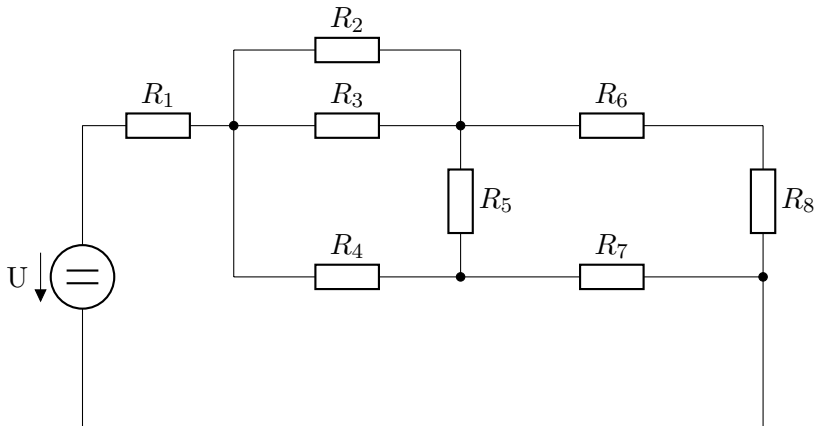
Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
E	115	55	485	660	100	340	575	815	255	225

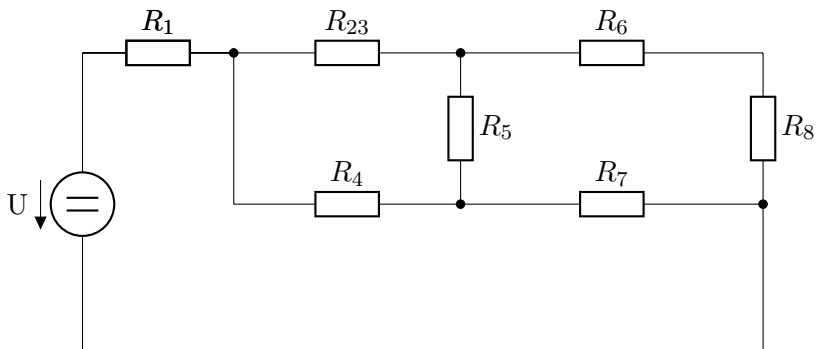


Výpočet odporu R_{ekv}

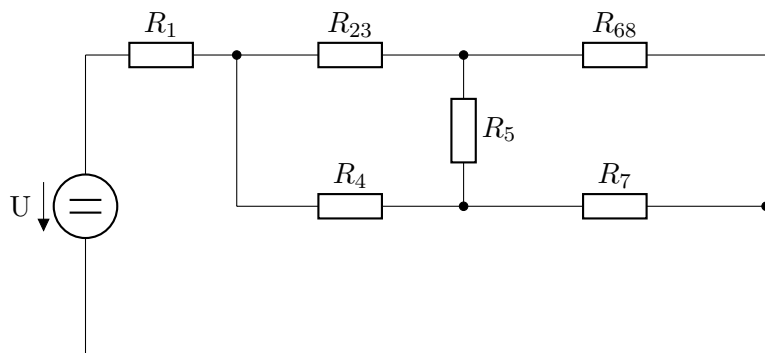
Zjednodušení sériově zapojených zdrojů: $U = U_1 + U_2$



Zjednodušení paralelně zapojených rezistorů: $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$



Zjednodušení sériově zapojených rezistorů: $R_{68} = R_6 + R_8$

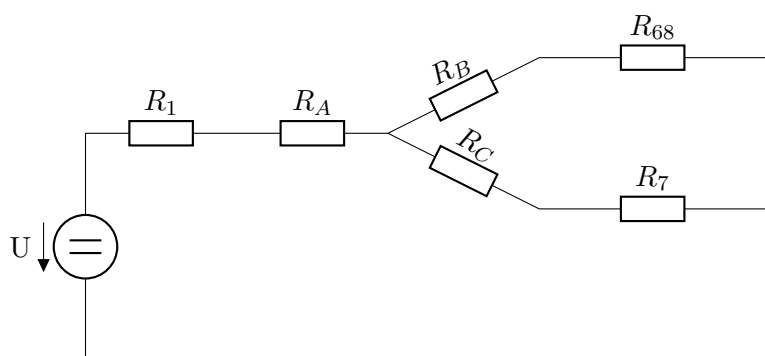


Transfigurace trojúhelníku na hvězdu

$$R_A = \frac{R_{23} \cdot R_4}{R_{23} + R_4 + R_5}$$

$$R_B = \frac{R_{23} \cdot R_5}{R_{23} + R_4 + R_5}$$

$$R_C = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_{23} + R_4 + R_5}$$

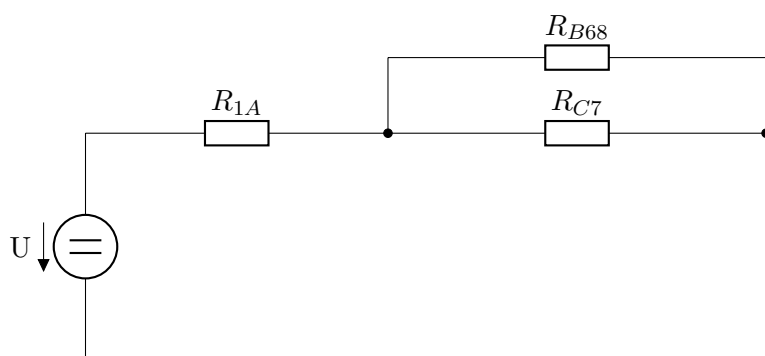


Zjednodušení sériově zapojených rezistorů

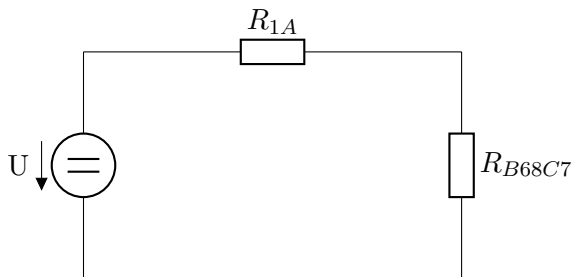
$$R_{1A} = R_1 + R_A$$

$$R_{B68} = R_B + R_{68}$$

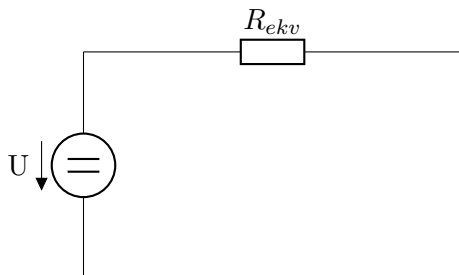
$$R_{C7} = R_C + R_7$$



Zjednodušení paralelně zapojených rezistorů: $R_{B68C7} = \frac{R_{B68} \cdot R_{C7}}{R_{B68} + R_{C7}}$



Zjednodušení sériově zapojených rezistorů: $R_{ekv} = R_{1A} + R_{B68C7}$



Výpočet U_{R2} a I_{R2}

Celkový proud v obvodu: $I = \frac{U}{R_{ekv}}$

Pro spočítání U_{R2} můžeme použít rovnici: $U_{R1} + U_{R2} + U_{R68} - U = 0$

Napětí na rezistoru R_{B68} bude stejné jako na rezistoru R_{B68C7} . Z toho určíme I_{RB68} , a vypočítáme U_{R68}

$$U_{R1} = I \cdot R_1$$

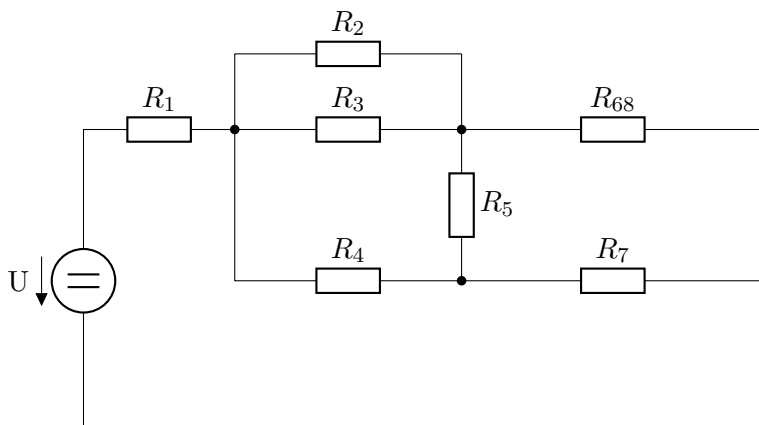
$$U_{RB68C7} = I \cdot R_{B68C7}$$

$$I_{RB68} = \frac{U_{RB68C7}}{R_{B68}}$$

$$U_{R68} = I_{RB68} \cdot R_{68}$$

$$U_{R2} = U - U_{R1} - U_{R68}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$



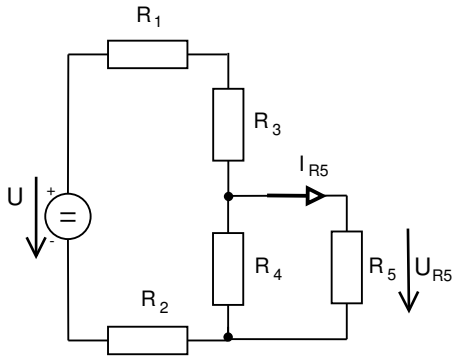
Dosazení

$$\begin{aligned}
U &= U_1 + U_2 = 115 + 55 = 170V \\
R_{23} &= \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{660 \cdot 100}{660 + 100} = 86.8421\Omega \\
R_{68} &= R_6 + R_8 = 815 + 225 = 1040\Omega \\
R_A &= \frac{R_{23} \cdot R_4}{R_{23} + R_4 + R_5} = \frac{\frac{1650}{19} \cdot 340}{\frac{1650}{19} + 340 + 575} = 29.472\Omega \\
R_B &= \frac{R_{23} \cdot R_5}{R_{23} + R_4 + R_5} = \frac{\frac{1650}{19} \cdot 575}{\frac{1650}{19} + 340 + 575} = 49.8424\Omega \\
R_C &= \frac{R_4 \cdot R_5}{R_{23} + R_4 + R_5} = \frac{340 \cdot 575}{\frac{1650}{19} + 340 + 575} = 195.1405\Omega \\
R_{1A} &= R_1 + R_A = 485 + 29.472 = 514.472\Omega \\
R_{B68} &= R_B + R_{68} = 49.8424 + 1040 = 1089.8424\Omega \\
R_{C7} &= R_C + R_7 = 195.1405 + 255 = 450.1405\Omega \\
R_{B68C7} &= \frac{R_{B68} \cdot R_{C7}}{R_{B68} + R_{C7}} = \frac{1089.8424 \cdot 450.1405}{1089.8424 + 450.1405} = 318.5634\Omega \\
R_{ekv} &= R_{1A} + R_{B68C7} = 514.472 + 318.5634 = 833.0354\Omega \\
I &= \frac{U}{R_{ekv}} = \frac{170}{833.0354} = 0.20407A \\
U_{R1} &= I \cdot R_1 = 0.20407 \cdot 485 = 98.97395V \\
U_{RB68C7} &= I \cdot R_{B68C7} = 0.20407 \cdot 318.5634 = 65.0092V \\
I_{RB68} &= \frac{U_{RB68C7}}{R_{B68}} = \frac{65.0092}{1089.8424} = 0.05965A \\
U_{R68} &= I_{RB68} \cdot R_{68} = 0.05965 \cdot 1040 = 62.036V \\
U_{R2} &= U - U_1 - U_{R68} = 170 - 98.97395 - 62.036 = 8.9876V \\
I_{R2} &= \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{8.9876}{600} = 0.0136A
\end{aligned}$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	220	190	360	580	205	560

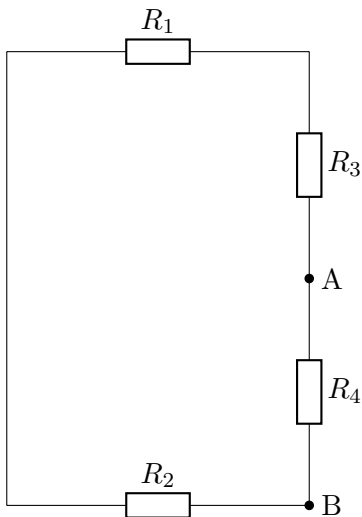


Výpočet R_i

Z obvodu odstraníme rezistor R_5 , vyzkratujeme zdroje napětí, a dopočítáme náhradní odpor R_i .

$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_i = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4}$$



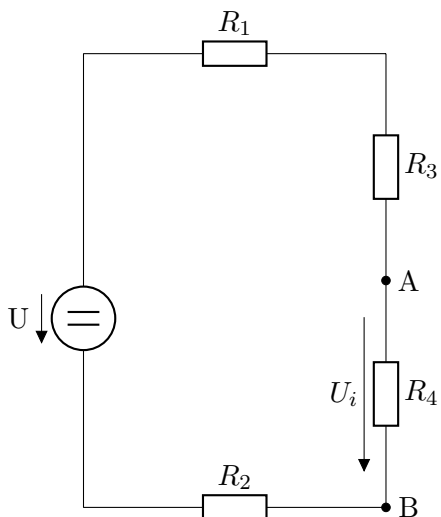
Výpočet U_i

V obvodu bez rezistoru R_5 spočítáme proud I_x napětí U_i

$$R_{ekv} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

$$I_x = \frac{U}{R_{ekv}}$$

$$U_i = I_x \cdot R_4$$

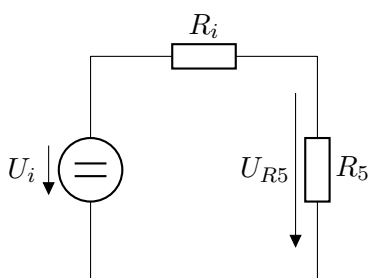


Výpočet proudu a napětí na R_5

V náhradním obvodu dopočítáme napětí a proud na rezistoru R_5

$$I_{R5} = \frac{U_i}{R_i + R_5}$$

$$U_{R5} = R_5 \cdot I_{R5}$$



Dosazení

$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 = 190 + 360 + 580 = 1130\Omega$$

$$R_i = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{1130 \cdot 205}{1130 + 205} = 173.5206\Omega$$

$$R_{ekv} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 190 + 360 + 580 + 205 = 1335\Omega$$

$$I_x = \frac{U}{R_{ekv}} = \frac{220}{1335} = 0.1648A$$

$$U_i = I_x \cdot R_4 = 0.1648 \cdot 205 = 33.7828V$$

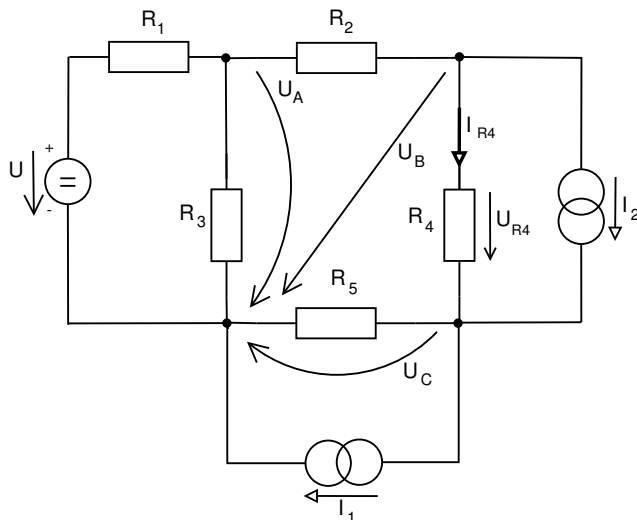
$$I_{R5} = \frac{U_i}{R_i + R_5} = \frac{33.7828}{173.5206 + 560} = 0.0461A$$

$$U_{R5} = R_5 \cdot I_{R5} = 560 \cdot 0.0461 = 25.7912V$$

Příklad 3

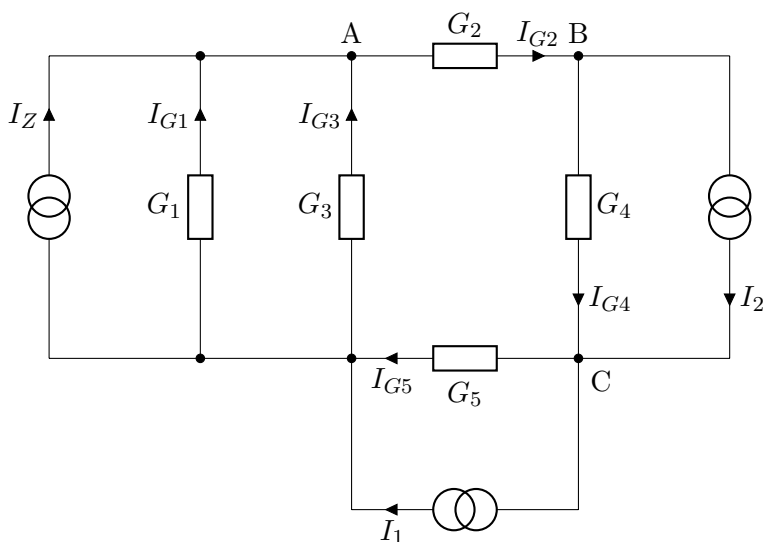
Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
D	115	0.6	0.9	50	38	48	37	28



Převod napětového zdroje na zdroj proudový

Převědeme napětový zdroj U na zdroj napětový tak, že ho připojíme paralelně k rezistoru R_1 . Jeho proud vypočítáme pomocí vzorce: $I_Z = \frac{U}{R_1}$



Převod odporů na vodivost

Převědeme všechny proudy na vodivosti, pro ulehčení práce se zlomky

$$G_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3}$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4}$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5}$$

Sestavení rovnic a výpočet proudu a napětí

Sestavení rovnic uzlů pomocí 1. Kirchhoffova zákona

$$I_Z + I_{G1} + I_{G3} - I_{G2} = 0$$

$$I_{G2} - I_{G4} - I_{I2} = 0$$

$$I_{G4} + I_2 - I_{G5} - I_1 = 0$$

$$-G_1 U_A - G_3 U_A - G_2 (U_A - U_B) = -I_Z$$

$$G_2 (U_A - U_B) - G_4 (U_B - U_C) = I_2$$

$$G_4 (U_B - U_C) - G_5 U_C = I_1 - I_2$$

$$U_A (-G_1 - G_2 - G_3) + U_B (G_2) = -I_Z$$

$$U_A (G_2) + U_B (-G_2 - G_4) + U_C (G_4) = I_2$$

$$U_B (G_4) + U_C (-G_4 - G_5) = I_1 - I_2$$

$$\begin{pmatrix} -G_1 - G_2 - G_3 & G_2 & 0 \\ G_2 & -G_2 - G_4 & G_4 \\ 0 & G_4 & -G_4 - G_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_Z \\ I_2 \\ I_1 - I_2 \end{pmatrix}$$

Výpočet proudu U_{R4} a napětí I_{R4}

$$U_{R4} = U_B - U_C$$

$$I_{R4} = G_4 \cdot U_{R4}$$

Dosazení

$$I_Z = \frac{U}{R_1} = \frac{115}{50} = 2.3A$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{50} = 0.02S$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{38} = 0.0263S$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{48} = 0.0208S$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{37} = 0.027S$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{28} = 0.0357S$$

$$\begin{pmatrix} -0.0671 & 0.0263 & 0 \\ 0.0263 & -0.0533 & 0.027 \\ 0 & 0.027 & -0.0627 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.3 \\ 0.9 \\ -0.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.8828 \\ 4.161 \\ 6.574 \end{pmatrix}$$

$$U_{R4} = U_B - U_C = 4.161 - 6.574 = -2.413V$$

$$I_{R4} = G_4 \cdot U_{R4} = 0.027 \cdot (-2.413) = -0.0652A$$

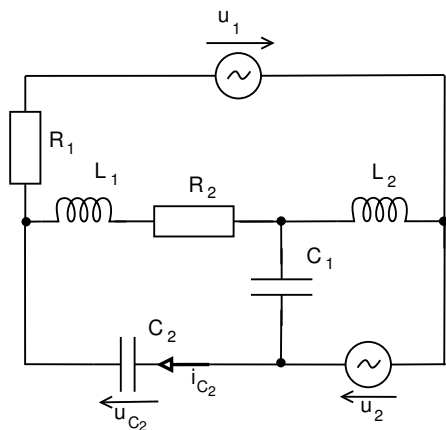
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

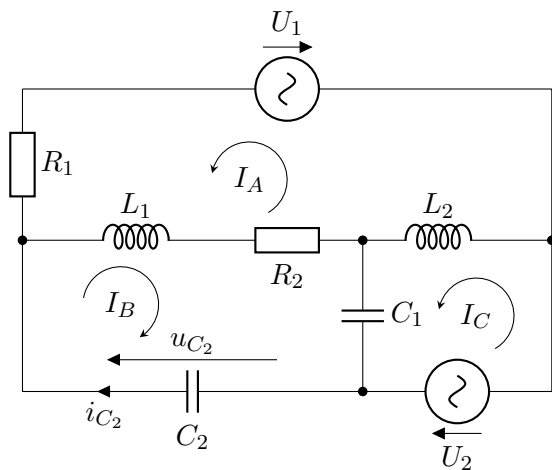
Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
E	5	3	14	13	130	60	100	65	90



Zvolení smyček



Výpočet impedancí

Vyjádření úhlové frekvence: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Výpočet impedance jednotlivých součástí

$$Z_{L1} = j \cdot L_1 \cdot \omega$$

$$Z_{L2} = j \cdot L_2 \cdot \omega$$

$$Z_{C1} = -j \cdot \frac{1}{C_1 \cdot \omega}$$

$$Z_{C2} = -j \cdot \frac{1}{C_2 \cdot \omega}$$

Výpočet proudů

Sestavení rovnic pro smyčky

$$-U_1 + I_A \cdot R_1 + Z_{L1} \cdot (I_A + I_B) + R_2 \cdot (I_A + I_B) + Z_{L2} \cdot (I_A - I_C) = 0$$

$$Z_{L1} \cdot (I_B + I_A) + R_2 \cdot (I_A + I_B) + Z_{C1} \cdot (I_B + I_C) + Z_{C2} \cdot I_B = 0$$

$$-U_2 + Z_{C1} \cdot (I_B + I_C) + Z_{L2} \cdot (I_C - I_A) = 0$$

$$I_A \cdot (R_1 + Z_{L1} + R_2 + Z_{L2}) + I_B \cdot (Z_{L1} + R_2) + I_C \cdot (-Z_{L2}) = U_1$$

$$I_A \cdot (Z_{L1} + R_2) + I_B \cdot (Z_{L1} + R_2 + Z_{C1} + Z_{C2}) + I_C \cdot (Z_{C1}) = 0$$

$$I_A \cdot (-Z_{L2}) + I_B \cdot (Z_{C1}) + I_C \cdot (Z_{C1} + Z_{L2}) = U_2$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + Z_{L1} + R_2 + Z_{L2} & Z_{L1} + R_2 & -Z_{L2} \\ Z_{L1} + R_2 & Z_{L1} + R_2 + Z_{C1} + Z_{C2} & Z_{C1} \\ -Z_{L2} & Z_{C1} & Z_{C1} + Z_{L2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Výpočet napětí a fázového posunu

Proud U_{C2} se rovná proudu v smyčce I_B : $I_{C2} = I_B$

Výpočet napětí $|U_{C2}|$

$$U_{C2} = Z_{C2} \cdot I_{C2}$$

$$|U_{C2}| = \sqrt{Re(U_{C2})^2 + Im(U_{C2})^2}$$

Výpočet fázového posunu φ_{C2}

$$\varphi_{C2} = tg^{-1} \left(\frac{Im(U_{C2})}{Re(U_{C2})} \right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

Dosazení

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 90 = 565.4867 \text{ rad/s}$$

$$Z_{L1} = j \cdot L_1 \cdot \omega = 73.5134j \, \Omega$$

$$Z_{L2} = j \cdot L_2 \cdot \omega = 33.9292j \, \Omega$$

$$Z_{C1} = -j \cdot \frac{1}{C_1 \cdot \omega} = -17.6839j \, \Omega$$

$$Z_{C2} = -j \cdot \frac{1}{C_2 \cdot \omega} = -27.206j \, \Omega$$

$$\begin{pmatrix} 27 + 107.4425j & 13 + 73.5133j & -33.9292j \\ 13 + 73.5133j & 13 + 28.6234j & -17.6839j \\ -33.9292j & -17.6839j & 16.2453j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08745 + 0.0048j \\ -0.0024 - 0.2491j \\ 0.18 - 0.4458j \end{pmatrix}$$

$$I_{C2} = I_B = (-0.0024 - 0.2491j)A$$

$$U_{C2} = Z_{C2} \cdot I_{C2} = (-27.206j) \cdot (-0.0024 - 0.2491j) = (-6.7757 + 0.0666j)V$$

$$|U_{C2}| = \sqrt{\text{Re}(U_{C2})^2 + \text{Im}(U_{C2})^2} = \sqrt{-6.7757^2 + 0.0666^2} = 6.7761V$$

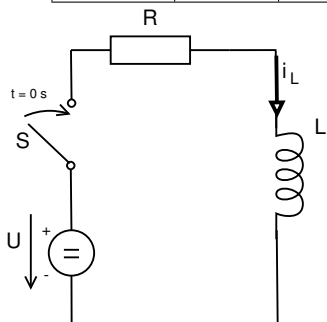
$$\varphi_{C2} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}(U_{C2})}{\text{Re}(U_{C2})} \right) \cdot \frac{180}{\pi} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0.0666}{-6.7757} \right) \cdot \frac{180}{\pi} + 180^\circ = 179.4373^\circ$$

Fázový posun je v 2. kvadrantu, proto k němu přičteme 180° .

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
H	8	50	40	4



Výpočet

Vypíšeme si tři rovnice, které platí pro tento obvod:

$$i = \frac{u_R}{R}$$

$$u_R + u_L = U$$

$$i'_L = \frac{u_L}{L}$$

Dosadíme druhou rovnici do třetí rovnice

$$i'_L = \frac{u_L}{L} = \frac{U - u_R}{L}$$

$$i'_L = \frac{U - i_L \cdot R}{L} = \frac{U}{L} - \frac{i_L \cdot R}{L}$$

$$i'_L + \frac{i_L \cdot R}{L} = \frac{U}{L}$$

$$L \cdot i'_L + i_L \cdot R = U$$

Vyřešíme charakteristickou rovnici

$$L \cdot \lambda + R = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

Dosadíme do očekávaného řešení

$$i_L = K \cdot e^{\lambda t}$$

$$i_L = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Zderivujeme i_L :

$$i'_L = K' \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + (K \cdot -\frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t})$$

Dosadíme do původní diferenciální rovnice:

$$L \cdot i'_L + i_L \cdot R = U$$

$$L \cdot (K' \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + (K \cdot -\frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t})) + K \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot R = U$$

$$50 \cdot (K' \cdot e^{-\frac{4}{5}t} + (K \cdot -\frac{4}{5} \cdot e^{-\frac{4}{5}t})) + K \cdot e^{-\frac{4}{5}t} \cdot 40 = 8$$

$$50 \cdot K' \cdot e^{-\frac{4}{5}t} = 8$$

$$K' \cdot e^{-\frac{4}{5}t} = \frac{4}{25}$$

$$K' = \frac{4}{25} \cdot e^{\frac{4}{5}t}$$

$$K = \int \frac{4}{25} \cdot e^{\frac{4}{5}t} \cdot dt$$

$$K = \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{4}{5}t} + C$$

Dosadíme do očekávaného řešení

$$i_L = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = (\frac{1}{5} \cdot e^{\frac{4}{5}t} + C) \cdot e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$i_L = \frac{1}{5} + C \cdot e^{-\frac{4}{5}t}$$

Pomocí počáteční podmínky $i_L(0) = 4A$ dopočítáme hodnotu C :

$$4 = \frac{1}{5} + C$$

$$C = \frac{19}{5}$$

Výsledné analytické řešení diferenciální rovnice:

$$i_L = \frac{1}{5} + \frac{19}{5} \cdot e^{-\frac{4}{5}t}$$

Kontrola podle počáteční podmínky:

$$i_L = \frac{1}{5} + \frac{19}{5} \cdot e^{-\frac{4}{5} \cdot 0}$$

$$i_L = 4A$$

Kontrola dosazením do diferenciální rovnice:

$$L \cdot i_L' + i_L \cdot R = U$$

$$50 \cdot (-\frac{76}{25} \cdot e^{-\frac{4}{5}t}) + (\frac{1}{5} + \frac{19}{5} \cdot e^{-\frac{4}{5}t}) \cdot 40 = 8$$

$$-152 \cdot e^{-\frac{4}{5}t} + 8 + 152 \cdot e^{-\frac{4}{5}t} = 8$$

$$8 = 8$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	E	$U_{R2} = 8.9876V$ $I_{R2} = 0.0136A$
2	H	$U_{R5} = 25.7912V$ $I_{R5} = 0.0461A$
3	D	$U_{R4} = -2.413V$ $I_{R4} = -0.0652A$
4	E	$ U_{C2} = 6.7761V$ $\varphi_{C2} = 179.4373^\circ$
5	H	$i_L = \frac{1}{5} + \frac{19}{5} \cdot e^{-\frac{4}{5}t}$