Реализация алгоритмов шифрования и расшифрования для криптосистемы HFE

Параллельные вычисления

ИУ8-112

МГТУ им. Н.Э. Баумана

15 декабря 2025 г.

Что такое HFE?

- **HFE (Hidden Field Equations)** — криптографическая система с открытым ключом
- Предложена Жаком Патарином в 1996 году
- Основана на многочленных уравнениях над конечными полями
- Использует скрытую структуру конечного поля для обеспечения безопасности

Основная идея

Преобразование сложных уравнений над конечным полем в систему квадратичных уравнений над GF(2)

Математические основы

Конечное поле GF(2^n)

- Поле размерности n
- 2^n элементов
- Операции: сложение (XOR), умножение по модулю неприводимого многочлена
- Неприводимый многочлен: $x^n + \ldots + 1$

HFE многочлен

- $P(x) = \sum_{i \le j \le d} a_{ij} \cdot x^{2^i + 2^j}$
- Степень d ограничена
- Коэффициенты $a_{ij} \in \mathrm{GF}(2^n)$

Важно

Для расшифрования необходимо решить уравнение $P(x) = y$, что требует знания секретной структуры

Структура HFE криптосистемы

$$\text{Открытый текст} \to S \to P(x) \to T \to \text{Шифротекст}$$

Открытый текст	S	HFE многочлен	T	Шифротекст

Алгоритм шифрования:

1. Применение секретного аффинного преобразования S: $x' = S_1 \cdot x + S_0$
2. Вычисление HFE многочлена: $y' = P(x')$
3. Применение секретного аффинного преобразования T: $y = T_1 \cdot y' + T_0$

Алгоритм расшифрования

1. **Обратное преобразование** T: $y' = T_1^{-1} \cdot (y - T_0)$
2. **Решение HFE уравнения**: найти x' такой, что $P(x') = y'$
   - Требует перебора или знания структуры многочлена
   - В нашей реализации используется перебор всех возможных значений
3. **Обратное преобразование** S: $x = S_1^{-1} \cdot (x' - S_0)$

Вычислительная сложность

Решение HFE уравнения — самая затратная операция, требует $O(2^n)$ операций в худшем случае

Архитектура обычной реализации

Основные компоненты

- `GF2n` — класс для работы с конечным полем $\mathrm{GF}(2^n)$
- `HFEBase` — базовая реализация HFE
- Последовательная обработка данных

Последовательность операций:

1. Инициализация: генерация ключей (матрицы S_1, S_0, T_1, T_0)
2. Для каждого байта данных:
   - Преобразование байта в вектор бит
   - Применение S, вычисление $P(x)$, применение T
   - Преобразование результата обратно в байт

Что выполняется последовательно?

```python
def encrypt_block(self, data: bytes) -> bytes:
    result = []
    for byte_val in data:  # Sequential processing
        # Convert byte to bit vector
        plaintext = [(byte_val >> i) & 1
                     for i in range(self.n)]

        # Encrypt single byte
        ciphertext = self.encrypt(plaintext)

        # Convert back to byte
        cipher_byte = sum(bit << i
                          for i, bit in enumerate(ciphertext))
        result.append(cipher_byte)

    return bytes(result)
```

Узкое место

Каждый байт обрабатывается независимо, но выполнение происходит последовательно на одном ядре CPU

Вычислительная сложность

Шифрование одного байта:

- Аффинное преобразование S: $O(n^2)$
- HFE многочлен: $O(d)$
- Аффинное преобразование T: $O(n^2)$
- **Итого:** $O(n^2 + d)$

Расшифрование одного байта:

- Обратное T: $O(n^2)$
- Решение HFE: $O(2^n)$ — перебор!
- Обратное S: $O(n^2)$
- **Итого:** $O(2^n)$

Для N байт: $O(N \cdot (n^2 + d))$ для шифрования, $O(N \cdot 2^n)$ для расшифрования

Подход к CPU-параллелизации

Используемая технология

`multiprocessing` — создание нескольких процессов Python для параллельной обработки

Стратегия распараллеливания:

1. Разделение данных на **chunks** (части)
2. Каждый процесс обрабатывает свой chunk независимо
3. Объединение результатов

Процесс 1	Процесс 2	Процесс 3	Процесс 4
Байты 0-255	Байты 256-511	Байты 512-767	Байты 768-1023

Что конкретно распараллелено?

```python
def encrypt_block(self, data: bytes) -> bytes:
    # Convert all bytes to vectors
    plaintexts = [[(byte_val >> i) & 1
                   for i in range(self.n)]
                  for byte_val in data]

    # Split into chunks
    chunk_size = len(plaintexts) // num_processes
    chunks = [plaintexts[i:i + chunk_size]
              for i in range(0, len(plaintexts), chunk_size)]

    # PARALLEL PROCESSING
    with Pool(processes=num_processes) as pool:
        results = pool.map(_encrypt_chunk_worker, chunks)

    # Merge results
    ciphertexts = []
    for chunk_result in results:
        ciphertexts.extend(chunk_result)
```

Детали распараллеливания

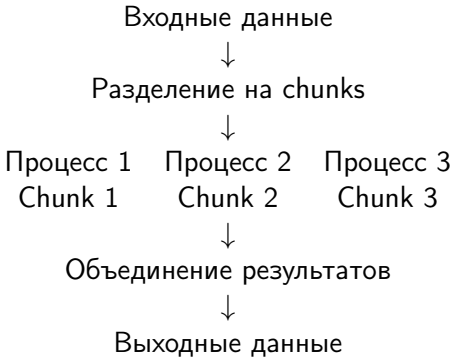
Распараллеленные операции

- **Обработка независимых байтов** — каждый процесс шифрует свой набор байтов
- **Аффинные преобразования** — выполняются параллельно для разных данных
- **Вычисление HFE многочлена** — параллельно для разных входных значений
- **Решение HFE уравнений** — параллельно при расшифровании

Что НЕ распараллелено

- Генерация ключей (выполняется один раз)
- Преобразование данных между форматами (вектор $\leftrightarrow$ байт)
- Объединение результатов (последовательное)

Архитектура CPU-параллельной версии



Преимущества:

- Использование всех ядер CPU
- Линейное ускорение (до количества ядер)
- Независимость процессов (изоляция ошибок)

Оценка производительности CPU-версии

Теоретическое ускорение

Для P процессов: ускорение $\approx P\times$ (с учетом накладных расходов)

Накладные расходы:

- Создание процессов: $\sim 10 - 50$ мс
- Передача данных между процессами
- Синхронизация и объединение результатов

Эффективность:

- Для больших данных (> 1 KB): эффективность $\approx 80 - 95\%$
- Для малых данных (< 100 байт): накладные расходы могут превысить выгоду

Подход к GPU-параллелизации

Используемая технология

`PyTorch` — высокоуровневая библиотека для тензорных вычислений на GPU с автоматической оптимизацией

Архитектура GPU:

- Тысячи потоков (2048-8192+)
- SIMT (Single Instruction Multiple Threads)
- Высокая пропускная способность для параллельных операций
- Пакетная обработка (batch processing) для минимизации накладных расходов

Особенность

GPU оптимален для больших объемов данных и однотипных операций. PyTorch обеспечивает автоматическую оптимизацию доступа к памяти

Что конкретно распараллелено на GPU?

```python
# Batch encryption using PyTorch tensors
def encrypt_batch(self, plaintexts: torch.Tensor) -> torch.Tensor:
    # Step 1: Apply S (matrix multiplication on GPU)
    x = self._affine_transform_gpu(plaintexts, self.S1_gpu, self.S0_gpu)
    x_field = self.gpu_field.vector_to_field(x)

    # Step 2: Apply HFE polynomial (parallel for the whole batch)
    y_field = self._hfe_polynomial_gpu(x_field)
    y = self.gpu_field.field_to_vector(y_field)

    # Step 3: Apply T (matrix multiplication on GPU)
    ciphertexts = self._affine_transform_gpu(y, self.T1_gpu, self.T0_gpu)
    return ciphertexts

# Affine transformation with type optimization
def _affine_transform_gpu(self, x, A, b):
    x_float = x.float()  # Convert for matmul
    y = (x_float @ A.T + b.unsqueeze(0)) % 2
    return (y.long() % 2).long()  # Back to int64
```

Распараллеленные операции на GPU

Полностью распараллелено (оптимизировано):

- **Аффинные преобразования** — матричное умножение через PyTorch (автоматическая оптимизация)
- **Вычисление HFE многочлена** — параллельно для всего батча через тензорные операции
- **Операции над полями GF(2^n)** — битовые операции (XOR, AND, сдвиги) на GPU
- **Преобразования бит<->поле** — векторные операции PyTorch
- **Пакетная обработка** — обработка батчей размером 1024+ элементов одновременно

Распараллеленные операции на GPU

Параллельное решение HFE уравнений:

- **Параллельный перебор** — для малых полей ($n \leq 8$) создается сетка всех возможных значений
- **Векторизованное вычисление** — $P(x)$ вычисляется для всех x одновременно
- **Поиск совпадений** — через тензорные операции сравнения
- Для больших полей используется fallback на CPU

Архитектура GPU-параллельной версии

CPU: Подготовка данных
(байты → векторы бит)

↓

Создание PyTorch тензоров

↓

Передача CPU → GPU `torch.tensor(..., device='cuda')`

↓

GPU: Параллельная обработка батчами
(Тысячи потоков, тензорные операции)

↓

Передача GPU → CPU `tensor.cpu().numpy()`

↓

CPU: Объединение результатов
(векторы бит → байты)

Архитектура GPU-параллельной версии

Этапы обработки:

1. Преобразование данных на CPU (байты $\rightarrow$ векторы бит)
2. Разделение на батчи (размер батча: 1024 по умолчанию)
3. Создание PyTorch тензоров и копирование на GPU
4. Параллельное выполнение тензорных операций на GPU
   - Матричные умножения (float32 для эффективности)
   - Битовые операции над полем GF(2^n) (int64)
   - Векторизованные вычисления HFE многочлена
5. Копирование результатов обратно на CPU
6. Преобразование обратно в байты

Ключевые компоненты GPU-реализации

Основные классы и методы:

- `GF2nGPU` — операции над полем GF(2^n) на GPU
  - `add()` — XOR операция (битовая)
  - `multiply()` — умножение с приведением по модулю
  - `power()` — быстрое возведение в степень
  - `vector_to_field()` / `field_to_vector()` — преобразования
- `HFEGPUParallel` — основная реализация HFE на GPU
  - `encrypt_batch()` — пакетное шифрование
  - `decrypt_batch()` — пакетное расшифрование
  - `_affine_transform_gpu()` — аффинные преобразования
  - `_solve_hfe_gpu()` — параллельное решение HFE уравнений

Оптимизации PyTorch реализации

Примененные оптимизации:

- **Пакетная обработка** — обработка батчей 1024+ элементов для минимизации накладных расходов
- **Оптимизация типов данных** — float32 для матричных операций (CUDA не поддерживает Long для matmul)
- **Автоматическая оптимизация памяти** — PyTorch обеспечивает коалесцированный доступ
- **Векторизованные операции** — все операции выполняются над тензорами параллельно
- **Параллельный перебор** — для решения HFE уравнений создается сетка всех возможных значений

Оптимизации PyTorch реализации

Требования

- Требуется NVIDIA GPU с CUDA и PyTorch с поддержкой CUDA
- Накладные расходы на передачу данных минимизированы пакетной обработкой
- Эффективно для данных > 1 KB благодаря пакетной обработке

Оценка производительности GPU-версии

Теоретическое ускорение

Для больших данных (> 10 MB): ускорение $\approx 15 - 120\times$ по сравнению с CPU

Факторы производительности:

- **Размер батча:** чем больше батч, тем эффективнее использование GPU
- **Пропускная способность памяти:** PyTorch автоматически оптимизирует доступ
- **Вычислительная мощность:** тысячи потоков работают параллельно через тензорные операции
- **Пакетная обработка:** минимизирует накладные расходы на передачу данных

Преимущества PyTorch:

- Автоматическая оптимизация операций
- Эффективное использование памяти GPU
- Простота реализации и отладки
- Гибкость в выборе типов данных (float32 для matmul, int64 для битовых операций)

Сравнение подходов

Характеристика	**Обычная**	**CPU**	**GPU**
Ядра/Потоки	1	4-16	2048-8192+
Накладные расходы	Минимальные	Средние	Высокие
Оптимальный размер данных	Любой	> 1 KB	> 10 MB
Ускорение (теоретическое)	$1\times$	$4\text{-}16\times$	$10\text{-}100\times$
Сложность реализации	Низкая	Средняя	Высокая
Требования	-	Многоядерный CPU	NVIDIA GPU + CUDA

Вывод

Выбор реализации зависит от размера данных и доступного оборудования

Что распараллелено в каждой версии?

Обычная

- Ничего
- Последовательная обработка байтов
- Одно ядро CPU

CPU

- Обработка независимых байтов
- Аффинные преобразования
- HFE многочлен
- Решение HFE уравнений

GPU

- Аффинные преобразования (тензорные операции)
- HFE многочлен (векторизованные вычисления)
- Операции над полями (битовые операции на GPU)
- Решение HFE (параллельный перебор)
- Пакетная обработка, автоматическая оптимизация

Все версии распараллеливают обработку независимых блоков данных

График производительности (теоретический)

Зависимость времени выполнения от размера данных

Размер данных	Обычная	CPU	GPU (PyTorch)
< 1 KB	Быстро	Средне	Средне
1 KB - 10 MB	Медленно	Быстро	Быстро
> 10 MB	Очень медленно	Медленно	Очень быстро

Оптимальная точка перехода

Для данных > 1 KB CPU-версия начинает превосходить обычную
GPU-версия эффективна для данных > 1 KB благодаря пакетной обработке (batch size $= 1024$)

Наблюдения:

- Для малых данных: обычная версия быстрее (нет накладных расходов)
- Для средних данных: CPU-версия оптимальна
- Для больших данных: GPU-версия значительно быстрее благодаря пакетной

Ключевые моменты

HFE криптосистема

- Основана на многочленных уравнениях над $GF(2^n)$
- Использует аффинные преобразования для скрытия структуры
- Расшифрование требует решения HFE уравнений

Распараллеливание

- **CPU:** Распараллелена обработка независимых байтов через multiprocessing
- **GPU:** Распараллелены операции через PyTorch тензорные вычисления
  - Пакетная обработка для минимизации накладных расходов
  - Автоматическая оптимизация доступа к памяти PyTorch
  - Векторизованные операции над полем $GF(2^n)$
  - Параллельное решение HFE уравнений через перебор на GPU
- Обе версии эффективны для больших объемов данных