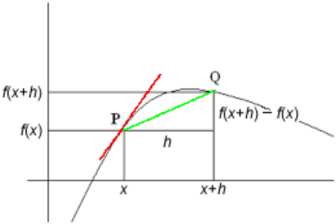
# Curs 4 Analiză Matematică

Radu MICULESCU

octomber 2023


f(x+h)
f(x)
P
Q
f(x+h) − f(x)
h
x
x+h

## Noțiunea de derivată

Problema tangentei la o curbă (care a fost considerată de Leibniz) și problema vitezei instantanee a unui mobil (care a fost considerată de Newton) au condus la următoarea:

**Definiție**. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D^{'}$ *și* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
*Dacă există (în* $\overline{\mathbb{R}}$*), limita*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*se numește derivata lui* $f$ *în* $x_0$ *și se notează* $f^{'}(x_0)$.
*Spunem în acest caz că* $f$ *are derivată în* $x_0$.
*Dacă* $f^{'}(x_0)$ *este finită, spunem că* $f$ *este derivabilă în* $x_0$.
*Dacă* $f$ *este derivabilă în toate punctele unei mulțimi* $E \subseteq D \cap D^{'}$, *atunci spunem că* $f$ *este derivabilă pe* $E$.

## Exemplu

Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \ln x,$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$ și $x_0 \in (0, \infty)$.
Avem

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{\frac{x - x_0}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

## Derivatele uzuale

**1.**

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

*pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *și pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*

**2.**

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

*pentru orice* $x \in (0, \infty)$ *și pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

**3.**

$$(\sin x)' = \cos x \text{ și } (\cos x)' = -\sin x$$

*pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*;*

**4.**

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

*pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *și pentru orice* $a \in (0, \infty)$*;*

**5.**
$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$
*pentru orice* $x \in (0, \infty)$;

**6.**
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$
*pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

**7.**
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$
*pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

**8.**
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$
*pentru orice* $x \in (-1, 1)$;

**9.**
$$(arc \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$
*pentru orice* $x \in (-1, 1)$;

**10.**

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2},$$

*pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*;*

**11.**

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

*pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

## Legătura dintre derivabilitate și continuitate

*Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ *și* $f : D \to \mathbb{R}$.
*Dacă* $f$ *este derivabilă în* $x_0$, *atunci* $f$ *este continuă în* $x_0$.

*Demonstrație.* Avem

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \left( f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right) =$$

$$= f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

deci $f$ este continuă în $x_0$. □

## Observație extrem de importantă

*Reciproca teoremei anterioare nu este validă,* așa cum ne arată funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dată de

$$f(x)=|x|,$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Într-adevăr, $f$ este continuă în 0 deoarece

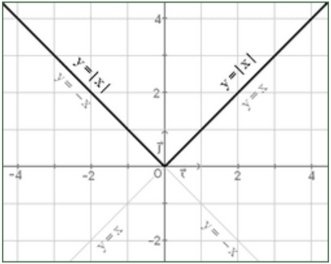
$$\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x<0}}(-x)=0=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x>0}} x=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x>0}} f(x)=f(0),$$

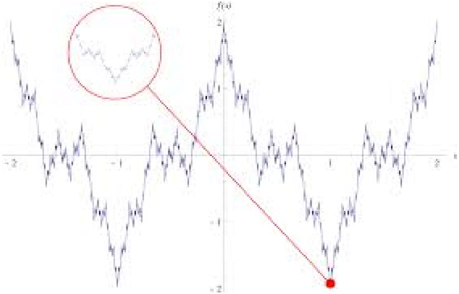
dar nu este derivabilă în 0 deoarece

$$\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1$$

și

$$\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\ x<0}}\frac{x}{x}=1.$$


y = |x|
y = |x|
y = −x
y = x
y = x
y = −x
4
2
-2
-4
-2
0
2
4



f(x)

# Derivate laterale

**Definiție**. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ un punct de acumulare la stânga al lui $D$ și $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Spunem în acest caz că $f$ are derivată la stânga în $x_0$ dacă există (în $\overline{\mathbb{R}}$), limita*

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*care se notează $f_s^{'}(x_0)$ și care se numește derivata la stânga în $x_0$ a lui $f$. Dacă $f_s^{'}(x_0)$ este finită, spunem că $f$ este derivabilă la stânga în $x_0$.*

*Analog se definește derivata la dreapta în $x_0$ a lui $f$ care se notează $f_d^{'}(x_0)$.*

*Derivatele la dreapta și la stânga în $x_0$ ale lui $f$ se numesc derivatele laterale ale lui $f$ în $x_0$.*

## Criteriul de derivabilitate cu ajutorul derivatelor laterale

*Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D^{'}$ *și* $f : D \to \mathbb{R}$.

$\alpha$) *Următoarele afirmații sunt echivalente:*
*i)* $f$ *are derivată în* $x_0$*;*
*ii)* $f$ *are derivată la stânga în* $x_0$, $f$ *are derivată la dreapta în* $x_0$ *(cele care au sens) și*

$$f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0).$$

$\beta$) *Următoarele afirmații sunt echivalente:*
*i)* $f$ *este derivabilă în* $x_0$*;*
*ii)* $f$ *este derivabilă la stânga în* $x_0$, $f$ *este derivabilă la dreapta în* $x_0$ *(atunci când au sens aceste cerințe) și*

$$f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0).$$

## Exemplu

Să se studieze derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ ax + b, & x < 1 \end{cases},$$

unde $a$ și $b$ sunt parametrii reali.

Avem

$$f^{'}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ a, & x < 1 \end{array} \right. .$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (ax + b) = a + b$$

și

$$f(1) = a + b,$$

deducem că $f$ este continuă în 1 dacă și numai dacă

$$b = -a,$$

ceea ce reprezintă o condiție necesară (dar nu și suficientă) pentru derivabilitatea lui $f$ în 1.

Avem

$$f_d^{'}(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

și

$$f_s^{'}(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{ax - a}{x - 1} = a,$$

deci $f$ este derivabilă în 1 dacă și numai dacă

$$b = -a = -1,$$

caz în care

$$f^{'}(1) = 1.$$

## Teorema privind derivabilitatea sumei, produsului și câtului

*Fie $I$ este un interval nedegenerat al axei reale, $x_0 \in I$ și $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabile în punctul $x_0$. Atunci:*
*i) funcția $f+g$ este derivabilă în $x_0$ și*

$$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0);$$

*ii) funcția $fg$ este derivabilă în $x_0$ și*

$$(fg)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0);$$

*iii) dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate $V$ a lui $x_0$ astfel încât funcția $\frac{f}{g}$, definită cel puțin pe $V \cap I$, este derivabilă în $x_0$ și*

$$(\frac{f}{g})^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)g(x_0) - f(x_0)g^{'}(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

## Teorema privind derivabilitatea compunerii

*Fie $I$ și $J$ intervale nedegenerate ale axei reale, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow J$ și $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:*
*i) $f$ este derivabilă în $x_0$;*
*ii) $g$ este derivabilă în $f(x_0)$.*
*Atunci:*
*$\alpha$) $g \circ f$ este derivabilă în $x_0$;*
*$\beta$)*

$$(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0).$$

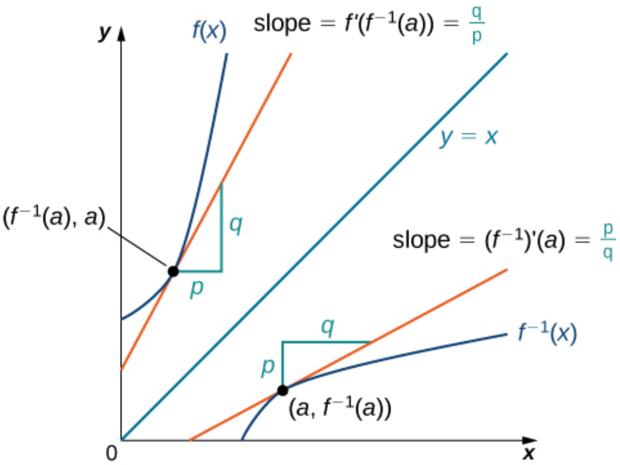
## Teorema privind derivabilitatea inversei

*Fie* $f : I \to J = f(I)$ *și* $x_0 \in I$ *având următoarele proprietăți:*
*i)* $I$ *și* $J$ *sunt intervale nedegenerate ale axei reale;*
*ii)* $f$ *este strict monotonă;*
*iii)* $f$ *este derivabilă în* $x_0 \in I$;
*iv)*

$$f^{'}(x_0) \neq 0.$$

*Atunci:*
$\alpha$) *funcția* $f^{-1} : J \to I$ *este derivabilă în* $f(x_0)$;
$\beta$)

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$


y
f(x)
slope = f′(f⁻¹(a)) = q/p
y = x
(f⁻¹(a), a)
q
p
slope = (f⁻¹)′(a) = p/q
q
p
f⁻¹(x)
(a, f⁻¹(a))
0
x

## Exemplu

Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Avem

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(x + \sqrt{x^2 + 1})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

## Exemplu

Să se calculeze derivata funcției $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = (1+x)^{\cos x},$$

pentru orice $x \in (-1, \infty)$.
Avem

$$f'(x) = \left(e^{\ln\left((1+x)^{\cos x}\right)}\right)' = \left(e^{\cos x \ln(1+x)}\right)' =$$

$$= e^{\cos x \ln(1+x)}\left((\cos x)\ln(1+x)\right)' =$$

$$= (1+x)^{\cos x}\left((-\sin x)\ln(1+x) + \frac{\cos x}{1+x}\right),$$

pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

## Exemplu

Să se calculeze $(f^{-1})'(2)$, unde $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este dată

$$f(x) = 2^x + 3^x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Avem

$$(f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)}, \text{ i.e. } (f^{-1})'(2) = \frac{1}{\ln 6}.$$

## Interpretarea geometrică a derivatei

*Fie* $I$ *un interval nedegenerat al axei reale,* $x_0 \in I$ *și* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție derivabilă în* $x_0$*.*
*Atunci:*

$\alpha$*) Panta tangentei la graficul funcției* $f$ *în punctul de abscisă* $x_0$ *este* $f'(x_0)$*.*

$\beta$*) Ecuația tangentei la graficul funcției* $f$ *în punctul de abscisă* $x_0$ *este*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

## Exemplu

Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă 1 dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de

$$f(x) = e^{x^2 - x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Deoarece

$$f'(x) = (2x - 1)e^{x^2 - x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f'(1) = 1$$

și deci ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă 1 este

$$y = x.$$

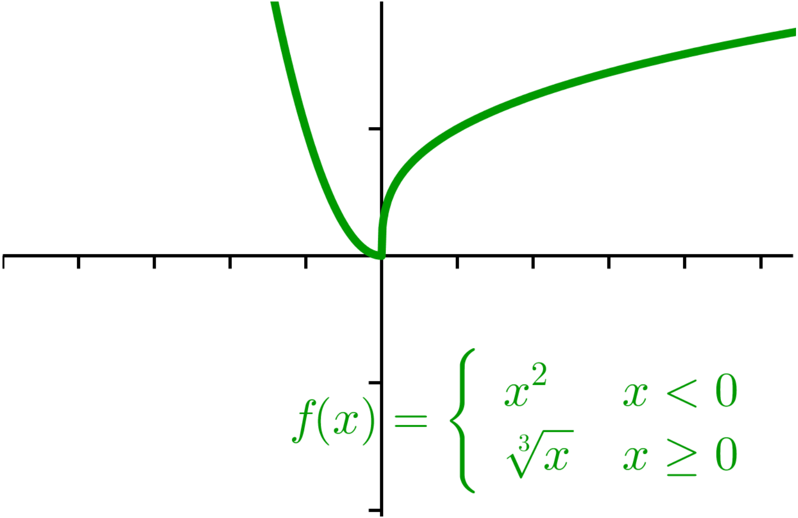
## Puncte unghiulare, de inflexiune și de întoarcere

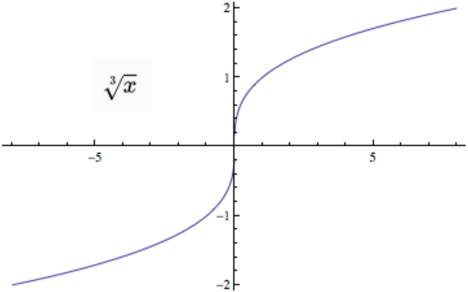
**Definiție**. *Fie $I$ un interval nedegenarat al axei reale, $x_0 \in I$ și $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă în $x_0$, care nu este derivabilă în $x_0$, dar pentru care există derivatele laterale.*
*Atunci:*

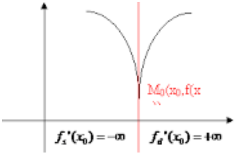
*i) $x_0$ se numește punct unghiular dacă cel puțin una dintre derivatele laterale este finită;*

*ii) $x_0$ se numește punct de inflexiune dacă derivatele laterale sunt infinite și egale;*

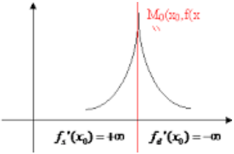
*iii) $x_0$ se numește punct de întoarcere dacă derivatele laterale sunt infinite și distincte.*


$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \end{cases}$$


$\sqrt[3]{x}$
2
1
–1
–2
–5
5



$M_0(x_0, f(x$
$f_s'(x_0) = -\infty$
$f_d'(x_0) = +\infty$

$M_0(x_0, f(x$
$f_s'(x_0) = +\infty$
$f_d'(x_0) = -\infty$

## Exemplu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x<0 \\ \sqrt[3]{x}, & x\geq 0 \end{cases}.$$

Deoarece

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=-\infty$$

și

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$$

concluzionăm că 0 este punct de întoarcere.

## Derivate de ordin superior

**Definiție**. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $D_1 = \{x \in D \cap D^{'} \mid f$ *este derivabilă în* $x\}$, $x_0 \in D_1 \cap D_1^{'}$ *și* $f^{'} : D_1 \to \mathbb{R}$.
*Dacă* $f^{'}$ *este derivabilă în* $x_0$, *atunci spunem că* $f$ *este derivabilă de două ori în* $x_0$ *și notăm* $(f^{'})^{'}(x_0)$ *cu* $f^{''}(x_0)$.
*Funcția* $f^{''} : D_2 \to \mathbb{R}$, *unde* $D_2 = \{x \in D_1 \cap D_1^{'} \mid f^{'}$ *este derivabilă în* $x\}$, *se numește derivata de ordin doi (sau derivata a doua) a lui* $f$.

Analog se definește derivata de ordin $n$ a unei funcții $f$, unde $n \in \mathbb{N}$, notată cu $f^{(n)}$.

## Derivata de ordin $n$ a produsului

*Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ *derivabile de ordin* $n$, *unde* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)},$$

*unde*

$$f^{(0)} = f \text{ și } g^{(0)} = g.$$

## Exemple

Să se determine derivata de ordin $n$ a funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Deoarece

$$f(x) = \frac{1}{2}((x-1)^{-1} - (x+1)^{-1}),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, obținem

$$f'(x) = \frac{1}{2}((-1)(x-1)^{-2} - (-1)(x+1)^{-2})$$

și

$$f''(x) = \frac{1}{2}((-1)(-2)(x-1)^{-3} - (-1)(-2)(x+1)^{-3}),$$

ceea ce ne face să intuim că

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n!((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și orice $n \in \mathbb{N}$.
Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ arbitrar, dar fixat.
Fie $P(n)$ propoziția:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n!((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}).$$

$P(1)$ este adevărată.
Vom arăta că dacă $P(n)$ este adevărată, atunci $P(n+1)$ este adevărată.

Într-adevăr, avem

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' \overset{P(n) \text{ adevărată}}{=}$$

$$= (\frac{1}{2}(-1)^n n!((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}))' =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n n!(-n-1)((x-1)^{-n-2} - (x+1)^{-n-2})) =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)!((x-1)^{-n-2} - (x+1)^{-n-2})),$$

i.e. $P(n+1)$.
Conform metodei inducției matematice, concluzionăm că

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n!((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

## Exemple

Să se determine derivata de ordin $n$ a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \frac{x^3}{e^x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Avem

$$f = gh,$$

unde

$$g(x) = x^3 \text{ și } h(x) = e^{-x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Prin urmare

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)} h^{(k)} =$$

$$= C_n^0 g^{(0)} h^{(n)} + C_n^1 g^{(1)} h^{(n-1)} + C_n^2 g^{(2)} h^{(n-2)} + C_n^3 g^{(3)} h^{(n-3)},$$

deoarece

$$g^{(k)} = 0,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$.
În final obținem

$$f^{(n)}(x) = e^{-x}[(-1)^n x^3 + (-1)^{n-1} 3nx^2 +$$

$$+(-1)^{n-2} 3n(n-1)x + (-1)^{n-3} n(n-1)(n-2)],$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, deoarece

$$h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $k \in \mathbb{N}$.