Capitolul 2 - Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale

1 Exerciţii

Exerciţiul 1.1. *Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale, separând variabilele:*

1. $y' = (y^2+1)(x^2+1)$, $x, y \in \mathbf{R}$;
2. $y' = \frac{(y+1)}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x,y) \in (-1,1) \times (-1,+\infty)$;
3. $x^2y' + xy^2 = 4y^2; (x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbf{R}^*$;
4. $t^2\dot{x} - \cos x = 1$.

Exerciţiul 1.2. *Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale, omogene sau reductibile la omogene:*

1. $y' = \frac{x+y}{x-y}$;
2. $xy' = y + xtg\frac{y}{x}$; $\frac{y}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
3. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$;
4. $(2ye^{\frac{y}{x}} - x)y' + 2x + y = 0$;
5. $(2x+y+1)dx + (x+2y-1)dy = 0$;
6. $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$.

Exerciţiul 1.3. *Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale, liniare sau Bernoulli:*

1. $y' = y\ ctgx + 2x\sin x$;
2. $y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$;

3. $(1+x^2)y' + y = arctgx$;
4. $xy' - 4y = x\sqrt{y}$;
5. $y' + ytgx = y^2$;
6. $xy' + 2y + xy^2 \ln x = 0,\ x > 0$.

Exerciţiul 1.4. *Determinaţi curbele integrale, soluţii ale ecuaţiilor date, care trec prin punctele A specificate:*

1. $x(1+y^6)dx + y^2(1+x^4)dy = 0;\ A(0,1)$;
2. $y' = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}};\ A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$;
3. $3xyy' = x^2 + y^2,\ A(1,1)$;
4. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2;\ A(1,2)$;
5. $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2+y^2)dy = 0$;
6. $y'\cos^2 x + y = tgx;\ A(0,0)$.

Exerciţiul 1.5. *Arătaţi că următoarele ecuaţii sunt sau diferenţiale totale exacte sau, pot fi făcute diferenţiale totale exacte, (căutând un factor integrant de forma specificată), şi rezolvaţi-le:*

1. $y(2x^2y^2+1)y' + x(y^4+1) = 0$;
2. $y' = \frac{x^3 - 3y^2x}{3x^2y - y^3}$;
3. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx,\ \alpha = \alpha(x)$;
4. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0,\ \alpha = \alpha(x^2+y^2)$;
5. $(y + x^3y^2)dx + (x + y^3x^2)dy = 0,\ \alpha = \alpha(xy)$;
6. $ydx - (x+y^2)dy = 0,\ \alpha = \alpha(y)$;
7. $2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3 + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)y' = 0,\ \alpha = \alpha(x+y)$.

Exerciţiul 1.6. *Găsiţi soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi variabili, reducând ordinul ecuaţiei cu o unitate, ştiind că y_1 precizat este soluţie.*

1. $xy'' - xy' + y = 0,\ y_1 = x$;

2. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$;

3. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$, $x \neq 0$, $y_1 = x$.

Exercițiul 1.7. *Găsiți soluția generală a ecuației diferențiale*

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x,$$

folosind metoda variației constantelor știind că $y_1 = \frac{1}{x}$ *și* $y_2 = \frac{1}{x^2}$ *sunt soluții particulare ale ecuației omogene atașate.*

Exercițiul 1.8. *Găsiți soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți:*

1. $y''' - 5y'' + 4y' = 0$;

2. $y''' - 3y' - 2y = 0$;

3. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$;

4. $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$;

5. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Exercițiul 1.9. *Prin metoda variației constantelor, găsiți soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți:*

1. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$;

2. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x\sqrt{1-x^2}}$;

3. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

Exercițiul 1.10. *Prin metoda coeficienților nedeterminați, găsiți soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți:*

1. $3y''' - 2y' - y = x^2$;

2. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$;

3. $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$;

4. $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$;

5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = xe^x$;

6. $2y'' - y' - y = 3\cos 2x - \sin 2x$;

7. $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$;

8. $y^{(4)} - 16y = 4e^{-2x}\cos 2x$;

9. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 4xe^x \sin x$;

10. $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$.

Exerciţiul 1.11. *Rezolvaţi problemele Cauchy:*

1. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;

2. $y'' + y = ch2x$; $y(0) = y'(0) = 0$.

Exerciţiul 1.12. *Găsiţi soluţia generală a sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienti constanţi:*

1. $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x' = 4y + 6z \\ y' = 2y + 3z + t \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x' = -y + e^t \\ y' = x + e^{-t} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x' = 6x - 12y - z \\ y' = x - y - z \\ z' = -4x + 12y + 3z \end{cases}$; 5. $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x \\ z' = x - y \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = y + z \end{cases}$; 7. $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$.

Exerciţiul 1.13. *Rezolvaţi problemele Cauchy*

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 1$; $y(0) = 3$;

2. $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + e^x \end{cases}$, $x(0) = 1$; $y(0) = 0$;

3. $\begin{cases} tx' - y = 0 \\ ty' + x = 0 \end{cases}$, $t \neq 0$, $x(1) = 2$, $y(1) = 1$.