ALGAD - 9 _ C _ 2023 _ 11 _ 03 03.11.2023

GEOMETRIE ANALITICĂ

Vectori liberi

1) Definiții

Fie A și B două puncte în spațiu.

i) Def: S.N. vector legat (segment orientat) un segment $\overrightarrow{AB}$ pentru care facem distincție între parcurgerea de la A la B și cea de la B la A. (orientarea)

Notăm: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, numit opusul vectorului legat $\overrightarrow{AB}$.

Vectorul null este definit de $\vec{0}_{(zero)} = \overrightarrow{AA}$

Lungimea vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ este definită de lungimea segmentului AB:

$$\| \overrightarrow{AB} \| = AB$$

Direcția vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ este definită ca mulțimea tuturor ~~vectorilor~~ dreptelor paralele cu dreapta AB.

ii) Def: S.N. vector liber mulțimea tuturor segmentelor orientate (a tuturor vectorilor legați) care au aceeași direcție, aceeași orientare și aceeași lungime cu un vector legat fixat.

Obs: Dacă $\vec{AB}$ și $\vec{CD}$ sunt 2 segmente orientate cu aceeași direcție, orientare și lungime, ca vectori liberi aceștia coincid, dar ca vectori legați diferă.

Notăm: vectorii liberi cu o bară deasupra:

$$\boxed{\bar{a} = \overline{AB}}$$

$$\boxed{\vec{AB} \neq \vec{CD} \ ; \ \overline{AB} = \overline{CD}} \ !$$

2) Operații cu vectori

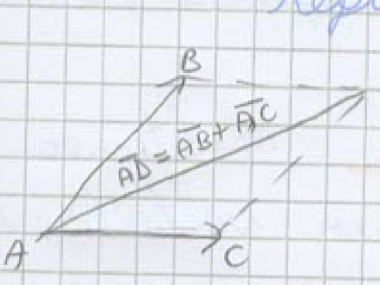
Notații: $\mathcal{E}_1$ - mulțimea vectorilor liberi de pe dreaptă

$\mathcal{E}_2$ - — " — " — " — din plan

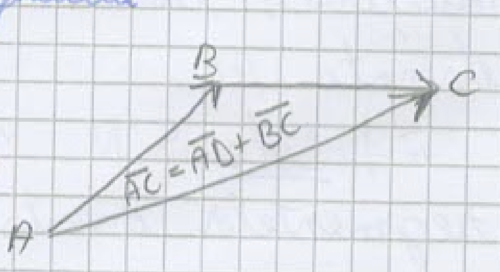
$\mathcal{E}_3$ - — " — " — " — din spațiu

Pe mulțimea $\mathcal{E}_3$ a vectorilor liberi din spațiu definim operațiile:

i) Adunarea vectorilor: $+ : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$: prin regula paralelogramului sau regula triunghiului



sau



Proprietăți:

a) Stabilitate: $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3, \bar{a}+\bar{b} \in \mathcal{E}_3$

b) Asociativitate: $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3, (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$

c) Comutativitate:

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3, \bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$;

d) Element neutru: $\bar{0} \in \mathcal{E}_3 : \bar{a}+\bar{0} = \bar{0}+\bar{a} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3$;

e) Toate elementele sunt simetrizabile:

$\forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3, \exists (-\bar{a}) \in \mathcal{E}_3$:

$\bar{a}+(-\bar{a}) = (-\bar{a})+\bar{a} = \bar{0}$

ii) Amplificarea cu scalari reali: $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$:

$(\alpha, \bar{a}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \longmapsto \alpha \bar{a}$ - dat de:

- direcția: aceeași cu a lui $\bar{a}$
- orientarea:
  - aceeași cu a lui $\bar{a}$, dacă $\alpha > 0$
  - opusă lui $\bar{a}$, dacă $\alpha < 0$
- lungimea: $\|\alpha \bar{a}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{a}\|$

Proprietăți:

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3, \alpha \bar{a} \in \mathcal{E}_3$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3, \alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$;

c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3, (\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$;

d) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3, (\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$;

e) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3$

Concluzie: $(\mathcal{E}_3, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ este un spațiu vectorial real.

3) Liniar dependență și independență

a) Pentru 2 vectori liberi, $\bar{a}$ și $\bar{b}$ avem:

$\bar{a}, \bar{b}$ l.d. $\Leftrightarrow$ $\bar{a}, \bar{b}$ coliniari

$* \ \bar{a} = \lambda \bar{b}$

b) Pentru 3 vectori liberi $\bar{a}, \bar{b}$ și $\bar{c}$ avem:

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - liniar dependenți $\Leftrightarrow$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ coplanari

$* \ \bar{c} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$

c) Pentru 4 vectori liberi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, putem scrie întotdeauna

$$\bar{d} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c}$$

, deci aceștia sunt l.d.

Remarcăm astfel că:

a) Pe dreaptă (în $\mathcal{E}_1$) o bază este formată dintr-un simplu vector, iar orice 2 vectori sunt l.d.

b) În plan ($\mathcal{E}_2$) o bază este formată cu 2 vectori necoliniari (l.i) și orice 3 vectori sunt l.d.

c) În spațiu ($\mathcal{E}_3$) o bază este formată cu 3 vectori necoplanari și orice 4 vectori sunt l.d.

4) Reper cartezian în $\mathcal{E}_3$

Def.: S.N. reper cartezian (reper ortonormat) al spațiului $\mathcal{E}_3$ al vectorilor liberi perechea

$$\mathcal{R} = \{O, \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}\}$$

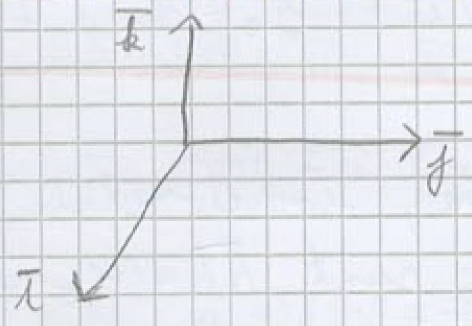
formată dintr-un punct fixat O (numit origine) și o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ (o bază formată din 3 vectori normați (de lungime 1) și perpendiculari (ortogonali) 2 câte 2:

$$\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = \|\bar{k}\| = 1, \ \bar{i} \perp \bar{j}, \ \bar{j} \perp \bar{k}, \ \bar{k} \perp \bar{i} \ )$$

Obs: Prin convenție, baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se construiește a.î. reperul să fie unul drept orientat:

- vectorul $\bar{j}$ se obține din $\bar{i}$ printr-o rotație de $90°$ în sens trigonometric
- vectorul $\bar{k}$ se obține conform regulii mâinii drepte:

Dacă degetul arătător al mâinii drepte indică sensul lui $\bar{i}$, iar degetul mijlociu indică sensul lui $\bar{j}$, atunci sensul lui $\bar{k}$ este dat de degetul mare.



Pentru un vector arbitrar $\bar{a} \in \mathcal{E}_3$, sistemul de vectori $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{a}\}$ este l.d.:

$$\exists\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \text{ a.î. } \bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$

Def: Numerele a_1, a_2, a_3 s.n. coordonatele carteziene ale vectorului liber $\bar{a}$:

$$\bar{a} \overset{\text{not.}}{=} (a_1, a_2, a_3)$$

Dacă $\bar{a}$ repr. vectorul legat $\vec{OA}$,

$$\bar{a} = \overline{OA},$$

atunci spunem că:

- punctul A are coord. carteziene $A(a_1, a_2, a_3)$
- vectorul legat $\overline{OA}$ s.n. vectorul de poziție al pct. A.

Pentru 2 pct. $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$ avem:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OA} = x_A\bar{i} + y_A\bar{j} + z_A\bar{k} \\ \overline{OB} = x_B\bar{i} + y_B\bar{j} + z_B\bar{k} \\ \\ \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}}$$

Prin urmare, coordonatele carteziene ale vectorului $\overline{AB}$ sunt $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

5) Produse de vectori

I) Produsul scalar (P.S.)

Def.: P.S. al vectorilor liberi $\bar{a}, \bar{b} \in E_3$ este scalarul $\bar{a}\cdot\bar{b}$ dat de

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos\alpha$$

unde α este unghiul cel mai mic dintre direcțiile lui $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Proprietăți:

1) Comutativitate:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$$

2) Distributivitate față de adunare:

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$$

! 3) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$ sunt ortogonali $(\bar{a}\perp\bar{b})$

4) $\alpha(\bar{a}\cdot\bar{b}) = (\alpha\bar{a})\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot(\alpha\bar{b})$

Expresie carteziană: $\left\{\begin{array}{l}\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)\\ \bar{b}=(b_1, b_2, b_3)\end{array}\right| \Rightarrow$

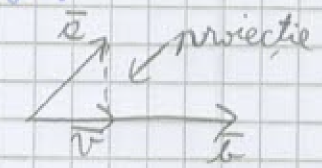
$$\Rightarrow \boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Aplicații:

1) Lungimea (norma) unui vector:

$$\|\bar{a}\| \stackrel{def.}{=} \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2) Lungimea proiecției lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$:



$$\bar{v} = pr_{\bar{b}}\,\bar{a} \Rightarrow \|\bar{v}\| = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{b}\|}$$

3) Unghiul dintre 2 vectori:

(unghi) $\rightarrow \widehat{\ }$

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|}$$

II Produsul vectorial

Def:

* Continuare curs următor