ALGAD_4_C_2023_10_13 13.10.2023

ALGEBRĂ LINIARĂ

Spaţii vectoriale

Def.: Fie $(K, +, \cdot)$ un corp

$(K; +)$; $(K^*; \cdot)$ grupuri comutative/abeliene

Def.: O mulţime de elemente V se numeşte spaţiu vectorial peste K dacă pe V sunt următoarele două operaţii:

1) $+ : V \times V \to V$; $\forall\, u, v \in V$;
$(u; v) \to u + v \in V$ (adunarea - operaţie internă pe V)

2) $\cdot_K : K \times V \to V$; $\forall\, \alpha \in K$; $\forall\, u \in V$,
$(\alpha; u) \to \alpha \cdot u \in V$ (amplificarea cu scalari - operaţie externă pe V)

Prop.: $(V; +; k)$ se numeşte spaţiu vectorial dacă sunt satisfăcute condiţiile:

I. $(V, +)$ este grup comutativ:
1) V este stabilă; $\forall\, u, v \in V$; $u + v \in V$
2) adunarea este asociativă
$\forall\, u, v, w \in V$; $(u+v)+w =$
$= u + (v + w)$

3) Comutativitatea

$\forall\ u, v, w \in V;\ u + v = v + u$

4) orice elem $u \in V$ admite opusul $u \in V$

5) există elem. neutru $\bar{0} \in V$:

$u + \bar{0} = \bar{0} + u = u,\ (\forall)\ u \in V$

II.

2) $\cdot k$ este distributivă față de adunarea din V:

$\forall \alpha \in k, \forall\ u, v \in V,\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$

3. $\cdot k$ este de distributivă față de adunarea din k: $\forall \alpha;\ \beta \in k;\ \forall\ u \in V$

4. $\cdot k$ este compatibilă cu înmulțirea scalarilor
$\forall \alpha;\ \beta \in k;\ \forall\ u \in V$
$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

5. elem. neutru $1 \in k$ de la înmulțirea scalarilor este element neutru și la amplificarea cu scalari: $1 \cdot u = u,\ \forall\ u \in V$

Elementele din V sunt vectori, iar cele din K scalari.

Obs.: Pentru $K = \mathbb{R}$, $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ se numește spațiu

Exemple: 1) $\mathcal{E}_3$ - mulțimea vectorilor liberi din spațiu

$+ \to$ regula paralelogramului, $\cdot_{\mathbb{R}}$ - amplificarea cu scalari reali $\Rightarrow (\mathcal{E}_3, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ - spațiu vectorial real

2) $(K^n, +, \cdot_K)$ - spațiul vectorial aritmetic unde K este un corp, iar $K^n = \{x = (x_1, x_2 \dots x_n) \mid x_i \in K, i = \overline{1, n}\}$

$$\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \\ y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n \end{cases}$$

$$\alpha \in K,\ x \in K^n \to \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in K^n$$

În particular pentru $K = R$ și $n = 2$ sau $n = 3$

se obține cadrul geometriei analitice, adică $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$.

De asemenea, pentru $K = \mathbb{Z}_2$, obt. $(\mathbb{Z}_2^n, +, \cdot \mathbb{Z}_2)$ cu aplicații în teoria termenilor.

3. $(\mathcal{M}_{m\cdot n}(K), +, \cdot_K)$ – mulțimea matricelor de dimensiune $m \times n$ cu elemente dintr-un corp K.

4. $(K[X], +, \cdot_K)$ – mulțimea polinoamelor cu coeficienți dintr-un corp K

5. $(\mathcal{F}(I), +, \cdot_{\mathbb{R}})$ mulțimea funcțiilor definite pe un interval $I \subset \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \ \forall f, g \in \mathcal{F}[I], \ \forall x \in I$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall \alpha \in K, \ \forall f \in \mathcal{F}[I], \ \forall x \in I.$$

Subspații vectoriale

Def.: Fie V un spațiu vectorial (s.v.) și $U \in V$ o submulțime

U se numește subspațiu vectorial al lui V dacă împreună cu restricțiile operațiilor din V la U este un spațiu vectorial.

În practică pentru a verifica dacă o submulțime a unui s.v. este subspațiu, Folosim următorul criteriu:

criteriu de subspațiu:

$\mathcal{U} \subset V$ = subspațiu a lui V dacă:

1) $u \in V \in \mathcal{U}$ $\forall$ $u + v \in \mathcal{M}$

2) $\alpha u \in m$, $\forall \alpha \in K$, $\forall u \in V$

Notație: U - subspațiu vectorial în V se notează

not $U \leq V$. $\boxed{\leq}$ (subspațiu)

Ex.: 1) $\{\bar{0}\} \leq V$, $V \leq V$.

2) Soluțiile oricărui sistem de ecuații să fie liniar și omogen formează subspațiu.

Într-adevăr, fie sistemul:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{m_n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a \end{cases}$$

Mulțimea soluțiilor $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

$$X\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Fie X, Y matricele asociate a două soluții ale sistemului. Atunci $AX = 0$ și $AY = 0$, de unde $A(X+Y) = 0$, deci $X+Y$ este soluție. Similar, $A(\alpha X) = \alpha AX = 0$ deci αX este de asemenea soluție.

De exemplu mulțimea de soluții ale sistemului

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

formează subspațiu în $\mathbb{R}^2$

Temă: arătați că mulțimea soluțiilor sistemului $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ nu este spațiu în $\mathbb{R}^2$.

3

Subspațiul generat de o mulțime

Fie V un s.v. și $U \subseteq V$ o submulțime

Def.: S.n. subspațiul generat de U, notat $[U]$ (sau $\langle U \rangle$), mulțimea tuturor combinațiilor liniare de elemente din U:

$$[U] = \{ \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_n u_n}_{\text{combinații liniare de elem. din } U} \mid \alpha_i \in K,\ u_i \in U,\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}^* \}$$

U poartă numele de <u>mulțime de generatori</u> pentru $[U]$.

Ex.: 1). $U = \{u\} \Rightarrow [U] = \{\alpha u \mid \alpha \in K\}$

2). $U = \{u_1 = (1,2),\ u_2 = (0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow [U] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,-1) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(\alpha_1, 2\alpha_1) + (0, -\alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(\alpha_1, 2\alpha_1 - \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

! $U \not\leq V$, $[U] \leq V$!

3) Pentru $[U] = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$, avem $U = \{u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,-1,0)\}$

deoarece $(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha) = \alpha(1,1,2) + \beta(1,-1,0)$

LINIAR INDEPENDENȚĂ

Def.: Un sistem de vectori $U \subseteq V$ se numește:

i) Liniar dependentă ($\boxed{l.d.}$) dacă există cel puțin un vector din U care se poate scrie ca o combinație liniară a altor vectori din U.

ii) Liniar independentă ($\boxed{l.i.}$) dacă niciun vector din U nu poate fi obținut ca o combinație liniară a celorlalți.

Ex.: $U = \{u_1(2,-1), u_2 = (1,1), u_3 = (1,-2)\}$ este l.d. deoarece $u_1 = u_2 + u_3$ (de ex.)

În practică este incomod și adesea dificil să verificăm dacă (și care) dintre vectorii lui U se poate exprima ca o comb. liniară.

Criteriu (de liniar independență):

Mulțimea de vectori $U = \{u_1, u_2 \ldots u_n\}$ este l.i. dacă ecuația vectorială $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$

cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$

are ca unică soluție $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_n = 0$

Ex.: $U = \{u_1 = (2,-1),\ u_2 = (1,1)\}$

Fie α_1 și $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1(2,-1) + \alpha_2(1,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Delta \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \ \underset{\text{unică}}{\text{sol.}} \Rightarrow U \text{ l.i.}$$

Bază și Dimensiune într-un spațiu vectorial

Def.: O mulțime de vectori $B = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ $\subseteq V$ se numește
bază a spațiului vectorial V dacă:

i) B este l.i.

ii) B generează pe V: $([B] = V)$, adică orice vector din V se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor din B

[?] sau <?> înseamnă subspațiu

Ex.: Baza canonică sau standard din $\mathbb{R}^n$:

$B_0 = \{ e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots 0), \dots$
$\dots, e_n = (0, 0, \dots 1) \}$

Arătăm că B_0 este bază:

1). B_0 l.i.: fie $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î.

a.î. $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\alpha_1 (1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 (0, 1 \dots 0) + \dots + \alpha_2 (0, 0 \dots 1) =$
$= (0, 0 \dots 0)$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots) = (0, 0, \dots 0) = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

ii) B_0 generează $\mathbb{R}^n$: $\forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \in$
$\in \mathbb{R}^n$, $\exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

a.î. $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_i = x_i, \ i = \overline{1,n}$

Def.: Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ din scrierea lui x într-o bază se numesc coordonatele lui x în baza B.

Teoremă: Scrierea unui vector într-o bază este unică.

Dem.: Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V și fie $x \in V$.

Presupunem că $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in K$ și $\exists \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n \in K$ a.î.

$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \alpha_n e_n$ și $X = \beta_1 e_1 + \dots$
$\dots + \beta_n e_n$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0 \Rightarrow$

B l.i.
$\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0, \ i = \overline{1,n} \Rightarrow \alpha_i = \beta_i, \ i = \overline{1,n}$

Obs: Coordonatele unui vector $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ în baza canonică din $\mathbb{R}^n$ sunt egale cu componentele sale.

Teoremă: Într-un spațiu vectorial, toate bazele au același nr. de vectori numit dimensiunea spațiului vectorial.

Ex: Cardinalul $(B_0) = n$, $B_0 < \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$

Schimbarea bazei

Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n și fie

$B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ și $B'' = \{e_1'', e_2'', \ldots, e_n''\}$ *

* două baze în V. Un vector $x \in V$ admite descompunerile

$$X = x_1' e_1' + x_2' e_2' + \ldots + x_n' e_n' = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$$

și

$$X = x_1'' e_1'' + x_2'' e_2'' + \ldots + x_n'' e_n'' = \sum_{j=1}^{n} x_j'' e_j''$$

Pentru a determina legătura dintre cele 2 seturi de coordonate ale lui x, descompunem mai întâi vectorii din a doua bază B'' (B secund) în funcție de cei din prima bază B' (B prim).

$$\begin{cases} e_1'' = a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + \dots a_{n1} e_n' \\ e_2'' = a_{12} \quad + a_{22} e_2' + \dots a_{n2} e_n' \\ \vdots \\ e_n'' = a_{1n} e_1' + a_{2n} e_2' + \dots a_{nn} e_n' \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow e_j'' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i'$$

Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ se numește matricea de trecere (matricea de schimbare) de la baza B' la baza B'',

notată $A = M_{B'B''}$

Pentru vectorul X avem:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j'' e_j'' = \sum_{j=1}^{n} x_j'' \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i' \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'' e_i'$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j'' \cdot e_j'' = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i' \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'' \right) e_i'$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$ și din unicitatea scrierii într-o bază obținem

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j''}$$

Matriceal aceasta se scrie $\boxed{X' = AX''}$, unde

$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$ sunt matricele coloana ale coordonatelor vectorului x în raport cu cele două baze.

<u>Obs.:</u> Matricea A   schimbare a bazei se obț. așezând pe coloane componentele vectorilor din a doua bază în raport cu prima.

COMPLETEAZĂ POZĂ