Curs 2 Analiză Matematică

Radu MICULESCU

Transilvania University of Brașov

octomber 2023

Limita unui șir de numere reale

Definiție. *Un element* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numește o limită a șirului* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *dacă în afara oricărei vecinătăți* V *a lui* l *se află un număr finit de termeni ai șirului (deci, în interiorul lui* V *se găsesc toți termenii șirului de la un rang încolo), i.e pentru orice* $V \in \mathcal{V}_l$ existǎ $n_V \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$x_n \in V,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$.

Remarcă. *Pentru un șir* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *există cel mult un element* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *care satisface cerințele definiției de mai sus. În cazul existenței acestuia, el se va nota cu* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Șiruri convergente / divergente

Definiție. *Un șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numește:*

- *convergent dacă există* $l \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$;

- *divergent dacă nu este convergent (i.e. fie nu există există* $l \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, *fie* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *fie* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$*).*

Caracterizarea cu ε a limitei unui șir I

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *și* $l \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

i)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|x_n - l| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Caracterizarea cu ε a limitei unui șir II

Propoziție. *Pentru* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*

i)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$x_n > \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Caracterizarea cu ε a limitei unui șir III

Propoziție. *Pentru* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*

i)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$x_n < -\varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Exemplu

Folosind definiția, vom arăta că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Inegalitatea $\left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon$ este echivalentă cu

$$\frac{1}{n-1} < \varepsilon,$$

i.e. cu

$$n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Prin urmare, putem alege $n_\varepsilon = [1 + \frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

Subșiruri

Definiție. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de elemente din* M*, iar* $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ *este un șir strict crescător de numere naturale, atunci șirul, din* M*, dat de* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, se numește un subșir al său.*

Exemple.
1. Pentru $n_k = 2k$ obținem subșirul $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Pentru $n_k = 2k+1$ obținem subșirul $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Pentru $n_k = k+m-1$, unde $m \in \mathbb{N}$, obținem subșirul $(x_{k+m-1})_{k\in\mathbb{N}}$, i.e. șirul $(x_k)_{k\geq m}$.

Despre subșirurile unui șir care are limită

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *și* $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ *și* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *este un subșir al lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *atunci*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

O condiție suficientă ca un șir să nu aibă limită

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. *Dacă există*

$$l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}, l_1 \neq l_2$$

și subșirurile $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *și* $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ *ale lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încât*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l_1 \text{ și } \lim_{l\to\infty} x_{n_l} = l_2,$$

atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu are limită.*

Exemplu

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de

$$x_n = (-1)^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, nu are limită deoarece:

- subșirul $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1 fiind constant egal cu 1

- subșirul $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ are limita -1 fiind constant egal cu -1.

Exemple fundamentale de șiruri care au limită I

1. *Fie* $a \in \mathbb{R}$ *și*

$$x_n = a^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

α) *Dacă* $a \leq -1$, *atunci* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu are limită.*

β) *Dacă* $-1 < a < 1$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

γ) *Dacă* $a = 1$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

δ) *Dacă* $a > 1$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Exemple fundamentale de șiruri care au limită II

2. *Fie* $a \in \mathbb{R}$ *și*

$$x_n = n^a,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

α) *Dacă* $a < 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

β) *Dacă* $a = 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

γ) *Dacă* $a > 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty.$$

Operații cu șiruri care au limită I

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *și* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1 \text{ și } \lim_{n\to\infty} y_n = l_2.$$

Atunci:

α)

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = l_1 + l_2 = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

β)

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = l_1 l_2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

În particular, avem

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha l_1 = \alpha(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ *și*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = l_1 - l_2 = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Operații cu șiruri care au limită II

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *și* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1, \lim_{n\to\infty} y_n = l_2, l_2 \neq 0 \text{ și } y_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri care au limită III

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *și* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1,\ \lim_{n\to\infty} y_n = l_2,\ l_1 > 0 \text{ și } x_n > 0 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = l_1^{l_2} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Operații cu șiruri care au limită IV

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *și* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1, \lim_{n\to\infty} y_n = l_2, l_1, l_2 > 0 \ \& \ l_1 \neq 1$$

și

$$x_n, y_n > 0 \ \& \ x_n \neq 1 \textit{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \log_{x_n}(y_n) = \log_{l_1}(l_2) = \log_{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

Remarcă

Propozițiile anterioare se extind în cazul în care $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, ținând cont de următoarele relații:

-
$$\infty + a = a + \infty = \infty,$$
pentru orice $a \in (-\infty, \infty]$

-
$$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty,$$
pentru orice $a \in [-\infty, \infty)$

-
$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty,$$
pentru orice $a \in (0, \infty]$

-
$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty \text{ pentru orice } a \in [-\infty, 0)$$

-

$$(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty,$$

pentru orice $a \in (0, \infty]$

-

$$(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = \infty,$$

pentru orice $a \in [-\infty, 0)$

-

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0,$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}$

-

$$a^{\infty} = 0,$$

pentru orice $a \in (-1, 1)$

-
$$a^{\infty} = \infty,$$

pentru orice $a \in (1, \infty]$

-
$$a^{-\infty} = 0,$$

pentru orice $a \in (1, \infty]$

-
$$\infty^{a} = \infty,$$

pentru orice $a \in (0, \infty]$

-
$$\infty^{a} = 0,$$

pentru orice $a \in [-\infty, 0)$

NU SUNT DEFINITE următoarele operații:

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$1^{\infty}$$

$$\infty^{0}$$

$$0^{0}.$$

Exemplu

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$.

Avem

$$\sqrt{n^2+2n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(\sqrt{n^2+2n}+n)}=$$

$$=\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

Mărginirea șirurilor convergente

Propoziție. *Orice șir convergent de numere reale este mărginit.*

Limita șirurilor monotone nemărginite

Propoziție.

α) *Orice șir de numere reale care este crescător și nemărginit are limita* ∞.

β) *Orice șir de numere reale care este descrescător și nemărginit are limita* $-\infty$.

Teorema convergenței monotone (Weierstrass)

α) *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *un șir crescător și mărginit. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

β) *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *un șir descrescător și mărginit. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Propoziție

α) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *convergente astfel încât*

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

β) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. *Avem:*

β1) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;

β2) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Lema cleștelui

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ *și*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n \overset{not}{=} l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l.$$

Exemplu

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n\pi]}{n}.$$

Conform inegalității părții întregi avem

$$n\pi - 1 < [n\pi] \leq n\pi,$$

de unde

$$\pi - \frac{1}{n} < \frac{[n\pi]}{n} \leq \pi, \qquad (*)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} (\pi - \frac{1}{n}) = \pi,$$

conform lemei cleștelui, având în vedere $(*)$, concluzionăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n\pi]}{n} = \pi.$$

Numărul e

Propoziție. *Șirul* $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este crescător și mărginit, iar limita sa se notează cu* e.

Așadar

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Observație. *Pentru orice șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *avem:*

i)

$$\lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e;$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1;$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a,$$

pentru orice $a > 0$;

iv)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^{\alpha}-1}{x_n} = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}.$$

Avem

$$(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = \left[(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}\right]^{-\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} =$$

$$= \left[(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}\right]^{-\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

găsim că

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}\right] = e.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2},$$

conchidem că

$$\lim_{n\to\infty} (1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. Să se calculeze

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n(\sqrt[n]{2}-1).$$

Deoarece

$$n(\sqrt[n]{2}-1)=\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}=0$, concluzionăm că

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)=\ln 2.$$

Metode complementare de aflare a limitei unui șir

Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

α) *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

β) *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exemplu. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, unde $\alpha > 0$ și $a > 1$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{1}{a} < 1$, conform propoziției de mai sus, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

Lema lui Stolz-Cesàro. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *astfel încât:*
i) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este strict crescător;*
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$*;*
iii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Atunci:
α) *există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$;
β)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Corolar. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci:

α*) există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$;

β*)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Exemple

1. Să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n})}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})}{3n^2+3n+1} = \frac{2}{3},$$

conform lemei lui Stolz-Cesàro, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

2. Să calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e,$$

conform corolarului lemei lui Stolz-Cesàro, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$