

# Capitolul 1: Elemente de teoria funcțiilor complexe

## CURS NR. 1

### 1 Numere complexe

Plecând de la premiza că din punctul de vedere al analizei matematice, planul este mulțimea perechilor ordonate de numere reale, numerele complexe se identifică cu punctele planului euclidian, numit **planul complex**. Această interpretare geometrică a numerelor complexe permite formarea unor modele intuitive și ajută la demonstrarea multor rezultate din teoria funcțiilor complexe. Se compactifică mulțimea numerelor complexe cu un număr impropriu notat  $\infty$ , iar pentru elementele de topologie ale acesteia se folosesc vecinătăți reprezentate de discuri, centrate în diverse puncte.

Numerele complexe se folosesc în analiza **circuitelor electrice liniare**, i.e., au la intrare și la ieșire aceeași frecvență.

#### 1.1 Forma algebrică a unui număr complex

În matematică, numerele complexe au apărut din necesitatea de a atribui o soluție unei ecuații de gradul al doilea cu discriminantul negativ. Spre exemplu, rezolvăm ecuația  $x^2 + x + 1 = 0$ . Avem  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ , ceea ce înseamnă că ecuația nu are rădăcini reale. Dar notând  $j := \sqrt{-1}$ , ( $j^2 = -1$ ), obținem  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$ , rădăcinile ecuației în mulțimea numerelor complexe, notată

$$\mathbf{C} := \{z = x + jy, x, y \in \mathbf{R}, j := \sqrt{-1}\}. \quad (1.1)$$

**Observația 1.1** În matematică  $\sqrt{-1}$  se notează cu  $i$ . Dar în circuitele electrice se folosește notația  $j$  pentru  $\sqrt{-1}$ , notațiile cu  $i$  sau  $I$  fiind folosite pentru curenți complecși sau curenți sinusoidali.

**Definiția 1.1** Expresia  $z := x + jy$ , unde  $x, y \in \mathbf{R}$ , se numește forma algebrică a numărului complex  $z$ .

În expresia  $z := x + jy$ ,  $x$  este partea reală a lui  $z$ , notată  $x := \operatorname{Rez}$ , iar  $y$  este partea imaginară a lui  $z$ , notată  $y := \operatorname{Im}z$ . Orice număr real este un număr complex cu  $\operatorname{Im}z = 0$ , deci  $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ . Un număr complex se numește *imaginar* dacă  $\operatorname{Rez} = 0$ . Numărul complex

$\bar{z} = x - jy$  se numește *conjugatul* lui  $z$ , iar numărul real  $\rho := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  este *modulul* lui  $z$ .

Fie  $z_1 := x_1 + jy_1$  și  $z_2 := x_2 + jy_2$ . Prin definiție,  $z_1 = z_2$  dacă  $x_1 = x_2$  și  $y_1 = y_2$ .

Pe  $\mathbf{C}$  se definesc operațiile de adunare și înmulțire prin

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &: = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2); \\ z_1 z_2 &: = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Teorema 1.1** *Operațiile (1.2) definesc pe  $\mathbf{C}$  o structură algebrică de corp comutativ.*

De asemenea, pe mulțimea numerelor complexe putem vorbi și despre:

- produsul unui număr real cu un număr complex  $\lambda z = \lambda x + j\lambda y$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ;

- câtul a două numere complexe  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2 z_1}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_2 z_1}{|z_2|^2}$ ,  $z_2 \neq 0$ .

Principalele proprietăți ale operațiilor cu numere complexe sunt cuprinse în următoarea propoziție:

**Propoziția 1.1** *Oricare ar fi  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2 \in \mathbf{C}$ , au loc*

- i)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ;  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ;  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ;  $\bar{\bar{z}} = z$ ;
- ii)  $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ;
- iii)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ;  $|z| = |\bar{z}|$ ;
- iv)  $\operatorname{Re} z \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;  $\operatorname{Im} z \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;
- v)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ;  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ .

**Exemplul 1.1** *Determinăm  $\operatorname{Re} z$  și  $\operatorname{Im} z$  pentru  $z = \frac{14j}{2+3j} + \frac{4j-7}{3-2j}$ .*

$$z = \frac{14j}{2+3j} + \frac{4j-7}{3-2j} = \frac{14j(2-3j)}{|2+3j|^2} + \frac{(4j-7)(3+2j)}{|3-2j|^2} = \frac{13+26j}{13} = 1+2j. \text{ Rezultă, } \operatorname{Re} z = 1 \text{ și } \operatorname{Im} z = 2.$$

**Exemplul 1.2** *Rezolvăm ecuația  $z^2 + 4(1-j)z - 1 - 8j = 0$ .*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16(1-j)^2 + 4(1+8j) = 4.$$

$$\text{Atunci, } z_{1,2} = \frac{-4(1-j) \pm 2}{2} = -2(1-j) \pm 1 \Rightarrow z_1 = -1 + 2j \text{ și } z_2 = -3 + 2j.$$

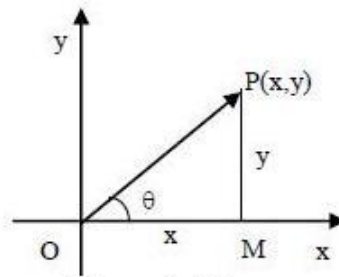
## 1.2 Forma trigonometrică/exponențială a unui număr complex

Fie  $\varepsilon_2 := \{P(x, y), x, y \in \mathbf{R}\}$  planul euclidian și reperul cartezian ortonormat  $xOy$ . Între mulțimea numerelor complexe  $\mathbf{C}$  și planul euclidian  $\varepsilon_2$  există o corespondență bijectivă și anume, oricărui număr complex  $z = x + jy$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ , îi corespunde un punct  $P(x, y)$  în planul euclidian, numit *imaginea* lui  $z$  în  $\varepsilon_2$  și invers, oricărui punct  $P(x, y) \in \varepsilon_2$  îi corespunde un număr complex  $z = x + jy$ , numit *afixul* punctului  $P$ . Această corespondență bijectivă permite identificarea lui  $\mathbf{C}$  cu  $\varepsilon_2$ .

**Definiția 1.2** *Mulțimea  $\mathbf{C}$  identificată bijectiv cu  $\varepsilon_2$  se numește plan complex și se notează cu  $(z)$ .*

Fie triunghiul dreptunghic  $OPM$ , (Figura 2.1.1). Avem,  $OP = \rho = |z|$ ,  $\sin \theta = \frac{y}{\rho}$  și  $\cos \theta = \frac{x}{\rho}$ . Rezultă

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta). \quad (1.3)$$



(Figura 2.1.1)

**Definiția 1.3** Unghiul  $\theta \in [0, 2\pi)$ , cuprins între direcția pozitivă a axei  $Ox$  și direcția vectorului  $\vec{OP}$ , și determinat în mod unic ca soluție a sistemului (1.3), se numește argumentul principal al lui  $z$ , notat  $\theta := \arg z$ .

**Observația 1.2** În funcție de imaginea lui  $z$  în reperul cartezian ortonormat  $xOy$ , avem:

- i)  $P \in \text{cadran I} \Rightarrow \theta = \arctg \frac{y}{x}$ ;
- ii)  $P \in \text{cadran II, III} \Rightarrow \theta = \pi + \arctg \frac{y}{x}$ ;
- iii)  $P \in \text{cadran IV} \Rightarrow \theta = 2\pi + \arctg \frac{y}{x}$ ;

Argumentul numărului complex 0 este considerat nedeterminat, iar pentru numerele reale sau imaginare avem:

- iv) dacă  $z \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} z = x > 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ z = x < 0 \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$  ;
- v) dacă  $z = jy \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ y < 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$  .

**Definiția 1.4** Pentru orice  $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$  expresia  $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$  se numește **forma trigonometrică** a numărului complex  $z$ .

Formula lui Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

conduce la **forma exponențială** a numărului complex  $z$ . Aceasta este  $z = \rho e^{j\theta}$ .

**Observația 1.3** În circuitele electrice, numărul complex  $z = \rho e^{j\theta}$  (notat cu  $I$  sau  $\underline{I}$ ) se numește **curentul complex**;  $\theta$  este unghiul de fază, iar  $\rho$  este amplitudinea.

**Exemplul 1.3** Scriem sub formă trigonometrică numărul complex  $z = 1 - j\sqrt{3}$ . Avem,  $\rho = |z| = \sqrt{1+3} = 2$ . Imaginea lui  $z$  este în cadranul IV, deci  $\theta = 2\pi + \arctg \frac{y}{x} = 2\pi + \arctg \sqrt{3} = \frac{5\pi}{3}$ . Rezultă

$$z = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}).$$

**Observația 1.4** Circuitele electrice sunt parcurse de **curenți sinusoidali**, adică funcții de forma

$$i = \rho \sin(\omega t + \theta),$$

Rotind vectorul  $\overrightarrow{OP}$  din Figura 2.1.1. în jurul originii  $O$  cu o viteză unghiulară  $\omega$  (numită pulsație), se obțin în planul complex numerele complexe

$$\rho [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)] = \rho e^{j(\omega t + \theta)} = \rho e^{j\theta} e^{j\omega t} = I e^{j\omega t}.$$

Așadar, curentul complex  $I$  reprezintă vectorul fix  $\overrightarrow{OP}$  (când  $t = 0$ ), iar curentul sinusoidal  $i$  reprezintă ordonata lui  $P$ , în orice poziție a vectorului mobil  $\overrightarrow{OP}$ . În circuitele electrice  $\omega = 2\pi f$ , unde  $f$  este frecvența.

**Exemplul 1.4** Numărul complex  $1 - j\sqrt{3}$  reprezintă curentul complex

$$I = 1 - j\sqrt{3} = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}) = 2e^{j\frac{5\pi}{3}},$$

iar  $i = 2 \sin(\omega t + \frac{5\pi}{3})$  este curentul sinusoidal atașat. Spre exemplu dacă frecvența  $f = 50\text{Hz}$ , atunci  $i = 2 \sin(314t + \frac{5\pi}{3})$ , ( $\pi = 3,14$ ).

Regulile de calcul cu numere complexe, scrise sub formă trigonometrică, sunt conținute în următoarea propoziție:

**Propoziția 1.2** Fie  $z, z_k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ,  $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$  și  $z_k = \rho_k(\cos \theta_k + j \sin \theta_k)$ ,  $k = 1, 2$ . Atunci

- i)  $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ ;
- ii)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ;
- iii)  $z^n = \rho^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$ ;
- iv)  $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} [\cos(-\theta) + j \sin(-\theta)]$ ;
- v)  $\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{\rho} (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n})$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ .

Proprietatea v) din propoziția de mai sus permite găsirea rădăcinilor de ordinul  $n$  ale unui număr complex  $z$ , notate cu  $w_k$ . Acestea au imaginile pe cercul cu centrul în origine și rază  $\sqrt[n]{\rho}$  și, reprezintă vârfurile unui poligon regulat înscris în acest cerc.

În continuare vom exemplifica proprietățile din propoziția 1.2.

**Exemplul 1.5** Fie  $z = \frac{(1+j)^2(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})^3}{(-1-j\sqrt{3})^3(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2})^2}$ . Determinăm  $\arg z$  și  $|z|$ .

Rescriem numărul dat  $z$  sub forma  $z = \frac{z_1^2 z_2^3}{z_3^3 z_4^2}$ , unde  $z_1 := 1 + j$ ,  $z_2 := \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_3 := -1 - j\sqrt{3}$  și  $z_4 := -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$ . Reprezentăm numerele  $z_1, z_2, z_3$  și  $z_4$  sub formă trigonometrică, iar apoi utilizăm propoziția 2.1.2.:

$$z_1 = 1 + j \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) \Rightarrow z_1^2 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2});$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_2^3 = \cos 5\pi + j \sin 5\pi;$$

$$z_3 = -1 - j\sqrt{3} \Rightarrow z_3 = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3}) \Rightarrow z_3^3 = 8(\cos 4\pi + j \sin 4\pi);$$

$$z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \Rightarrow z_4 = \cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6} \Rightarrow z_4^2 = \cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}.$$

Atunci,  $z = \frac{2(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})(\cos 5\pi + j \sin 5\pi)}{8(\cos 4\pi + j \sin 4\pi)(\cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3})} = \frac{1}{4}(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3})$ . Rezultă,  $\arg z = \frac{2\pi}{3}$  și  $|z| = \frac{1}{4}$ .

**Exemplul 1.6** Determinăm  $\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$ . Fie  $z = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Atunci,  $\arg z = \frac{4\pi}{3}$  și  $|z| = 1$ . Utilizând proprietatea v) din propoziția 2.1.2, rezultă:

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = w_k = \cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{3} + j \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Deci,  $w_0 = \cos \frac{4\pi}{9} + j \sin \frac{4\pi}{9}$ ,  $w_1 = \cos \frac{10\pi}{9} + j \sin \frac{10\pi}{9}$  și  $w_2 = \cos \frac{13\pi}{9} + j \sin \frac{13\pi}{9}$  și reprezintă vârfurile unui triunghi echilateral, înscris în cercul cu centrul în origine și rază 1.

### 1.3 Elemente din topologia lui $\mathbf{C}$

Pentru un studiu complet al funcțiilor complexe, este necesară introducerea pe mulțimea  $\mathbf{C}$  nu numai a unei structuri algebrice, ci și a unei structuri topologice care să permită definirea unor noțiuni precum limită, continuitate, derivabilitate, integrabilitate, etc. Vom prezenta în continuare câteva din noțiunile fundamentale, necesare înțelegerii secțiunilor următoare.

**Propoziția 1.3** Aplicația  $d : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \forall z_1 = x_1 + jy_1, z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbf{C}, \quad (1.4)$$

definește o distanță pe  $\mathbf{C}$ .

Mulțimea  $\mathbf{C}$  cu distanța (1.4) este un spațiu metric și se notează prin  $(\mathbf{C}, d)$ . Ținând cont de definiția modulului, avem

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ceea ce arată că (1.4) este distanța euclidiană pe  $\varepsilon_2$ . Mai mult, corespondența bijectivă dintre  $\mathbf{C}$  și  $\varepsilon_2$ , care permite identificarea lui  $\mathbf{C}$  cu  $\varepsilon_2$ , face ca între spațiile metrice  $(\mathbf{C}, d)$  și  $(\varepsilon_2, d)$  să nu existe nicio deosebire.

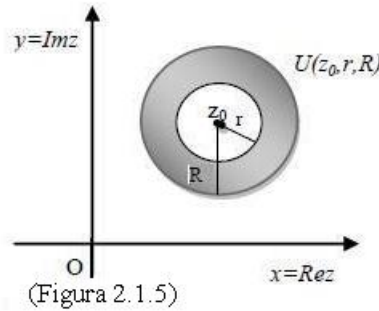
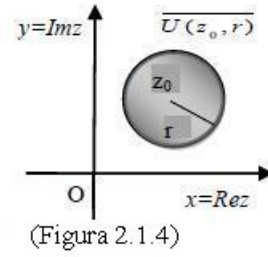
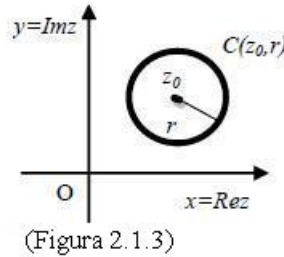
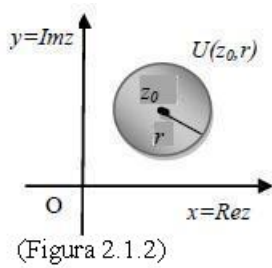
Mulțimea  $\mathbf{C}$  nefiind o mulțime ordonată, trebuie adăugat un singur număr impropriu, notat  $\infty$  pentru a obține mulțimea numerelor complexe închisă,  $\bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ .

**Definiția 1.5** Fie  $z_0 \in \mathbf{C}$  și  $r, R > 0$ . Se numește

- i) disc cu centrul în  $z_0$  și rază  $r$ , mulțimea  $U(z_0, r) := \{z \in \mathbf{C}, |z - z_0| < r\}$ , (Figura 2.1.2);
- ii) cerc cu centrul în  $z_0$  și rază  $r$ , mulțimea  $C(z_0, r) := \{z \in \mathbf{C}, |z - z_0| = r\}$ , (Figura 2.1.3);
- iii) disc închis cu centrul în  $z_0$  și rază  $r$ , mulțimea  $\overline{U(z_0, r)} := \{z \in \mathbf{C}, |z - z_0| \leq r\}$ , (Figura 2.1.4);
- iv) coroana circulară cu centrul în  $z_0$  și raze  $r$  și  $R$ , mulțimea  $U(z_0, r, R) := \{z \in \mathbf{C}, r < |z - z_0| < R\}$ , (Figura 2.1.5);
- v) vecinătate a lui  $z_0$ , o mulțime  $V \subset \mathbf{C}$  pentru care  $\exists U(z_0, r)$  astfel încât  $U(z_0, r) \subset V$ ;
- vi) vecinătate a lui  $\infty$ , exteriorul oricărui cerc,  $V_\infty := \{z \in \mathbf{C}, |z| > r\}$ ;
- vii) mulțime deschisă o mulțime care este vecinătate pentru toate punctele sale;
- viii) punct de acumulare pentru mulțimea  $E \subset \mathbf{C}$ , un punct  $a \in \bar{\mathbf{C}}$  cu proprietatea că  $\exists V$  o vecinătate a sa, astfel încât  $V \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset$ ;
- ix) mulțime conexă, o mulțime  $E \subset \mathbf{C}$  cu proprietatea că oricare ar fi descompunerea

$$E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 \neq \emptyset, E_1, E_2 \neq \emptyset,$$

cel puțin una dintre mulțimile  $E_1, E_2$  are punct de acumulare în cealaltă.



Ca exemple de vecinătăți ale lui  $z_0$  avem  $U(z_0, r)$  și  $\overline{U(z_0, r)}$ . Exemple de mulțimi conexe sunt: planul, planul din care s-a scos un număr finit de puncte,  $U(z_0, r)$ . Mulțimi neconexe sunt: un segment din care s-a scos un punct, reuniunea a două discuri disjuncte.

**Definiția 1.6** O mulțime  $D \subset \mathbf{C}$ , deschisă și conexă, se numește domeniu.

**Teorema 1.2** *Mulțimea  $D \subset \mathbf{C}$  este conexă dacă oricare două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în  $D$ .*

În limbaj obișnuit, o mulțime conexă „este formată dintr-o singură bucată”.

Fie  $(C)$  o curbă în planul complex  $(z)$  dată prin ecuațiile parametrice reale  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $t \in [a, b]$ , sau prin ecuația parametrică complexă  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , unde  $z(t) = x(t) + jy(t)$ .

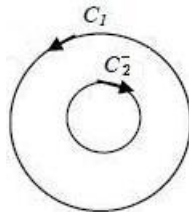
**Definiția 1.7** *i) Curba  $(C)$  se numește simplă dacă nu se autointersectează, adică  $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$ ,  $t_1 \neq t_2$ ,  $z(t_1) \neq z(t_2)$ .*

*ii) Curba  $(C)$  se numește închisă dacă extremitățile sale coincid, adică  $z(a) = z(b)$ .*

**Observația 1.5** *Se face următoarea convenție. Fie curba  $(C)$  simplă și închisă. Dacă este parcursă în sens trigonometric se notează tot  $(C)$ , iar dacă este parcursă în sens invers trigonometric se notează cu  $(C^-)$ , (Figura 2.1.6).*

**Definiția 1.8** *Domeniul  $D \subset \mathbf{C}$  se numește simplu conex dacă frontiera sa, notată  $FrD$ , este alcătuită dintr-o singură curbă  $(C)$  simplă și închisă.*

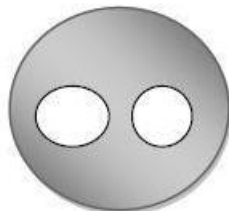
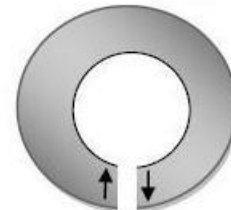
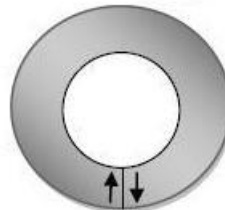
Orice domeniu care nu este simplu conex se numește *multiplu conex*. Un domeniu multiplu conex poate fi transformat într-un domeniu simplu conex prin introducerea unor frontiere suplimentare, numite *tăieturi*. Ordinul de conexiune al unui domeniu multiplu conex este numărul minim de tăieturi necesare pentru a-l transforma într-un domeniu simplu conex, plus o unitate, (Figura 2.1.7), (Figura 2.1.8).



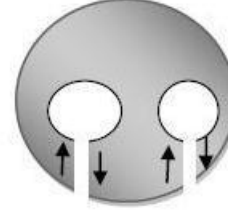
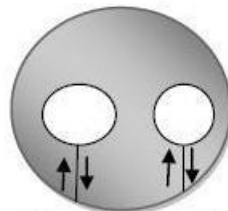
(Figura 2.1.6)



(Figura 2.1.7 - domeniu 2 - conex)



(Figura 2.1.8 - domeniu 3 - conex)



**Exemplul 1.7** *i) Discul  $U(z_0, r)$  este un domeniu simplu conex, frontiera sa este cercul  $C(z_0, r)$ .*

ii) Coroana circulară  $U(z_0, r, R)$  este un domeniu 2 - conex. Printr-o singură tăietură se transformă într-un domeniu simplu conex. Frontiera sa este formată din cercurile  $C^-(z_0, r)$  și  $C(z_0, R)$ ,

$$FrU(z_0, r, R) = C(z_0, r) \cup C^-(z_0, r).$$

iii) Un domeniu  $n$  - conex  $D$  se transformă într-un domeniu simplu conex prin  $(n - 1)$  tăieturi și are frontiera formată din  $n$  curbe simple și închise,

$$FrD = (C) \cup (C_1^-) \cup \dots \cup (C_{n-1}^-).$$

## 1.4 Șiruri și serii de numere complexe

Se numește *șir de numere complexe* o aplicație

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{N} \rightarrow f(n) =: z_n \in \mathbf{C}.$$

Vom folosi notația  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Definiția 1.9** i) Fie  $z \in \mathbf{C}$ . Șirul  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge la  $z$ ,  $(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z)$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $z_n \in U(z, \varepsilon)$ .

ii) Fie  $z = \infty$ . Șirul  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge la  $\infty$ ,  $(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty)$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $z_n \in V_\infty$ .

Deoarece  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}$ , există șirurile de numere reale  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}$  astfel încât  $z_n = x_n + jy_n$ . Așadar, studiul șirurilor de numere complexe  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  se reduce la studiul șirurilor de numere reale  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Are loc următoarea propoziție:

**Propoziția 1.4** Șirul  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}$ ,  $z_n = x_n + jy_n$  converge la  $z = x + jy$  dacă și numai dacă șirurile de numere reale  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converg la  $x$  respectiv,  $y$ .

**Definiția 1.10** Se numește *serie de numere complexe* o expresie de forma

$$z_0 + z_1 + \dots + z_n + \dots,$$

notată  $\sum_{n \in \mathbf{N}} z_n$ .

Fie  $S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$  șirul sumelor parțiale.

**Definiția 1.11** Seria  $\sum_{n \in \mathbf{N}} z_n$  este convergentă dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , unde  $S \in \mathbf{C}$  și  $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} z_n$ .

**Propoziția 1.5** Seria  $\sum_{n \in \mathbf{N}} z_n$ ,  $(z_n = x_n + jy_n)$ , este convergentă și are suma  $S = x + jy$  dacă seriile numerice reale  $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n$  și  $\sum_{n \in \mathbf{N}} y_n$  sunt convergente și au sumele  $x$  respectiv,  $y$ .



În baza ultimei propoziții studiul convergenței seriilor de numere complexe se reduce la studiul convergenței a două serii de numere reale.

**Exemplul 1.8** Calculăm limita șirului  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $z_n = \left(\frac{1}{6} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n$

Îl scriem mai întâi pe  $z_n$  sub formă trigonometrică:

$$z_n = \left[\frac{1}{9}\left(\cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}\right)\right]^n = \frac{1}{9^n}\left(\cos \frac{5n\pi}{3} + j \sin \frac{5n\pi}{3}\right).$$

Dar  $z_n = x_n + jy_n$  și obținem șirurile reale

$$x_n = \frac{1}{9^n} \cos \frac{5n\pi}{3} \text{ și } y_n = \frac{1}{9^n} \sin \frac{5n\pi}{3} \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

deoarece fiecare dintre ele conține produsul a două șiruri, unul convergent la 0, ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9^n} = 0$ ), iar celălalt mărginit, ( $|\cos \frac{5n\pi}{3}| \leq 1$  și  $|\sin \frac{5n\pi}{3}| \leq 1$ ). Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Exemplul 1.9** Calculăm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right)^n$ . Avem  $z_n = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right)^n$  care, scris sub formă trigonometrică este  $z_n = \cos \frac{5n\pi}{6} + j \sin \frac{5n\pi}{6}$ . Rezultă  $x_n = \cos \frac{5n\pi}{6}$  și  $y_n = \sin \frac{5n\pi}{6}$ . Dar,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  nu există.

Deci,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right)^n$  nu există.

## 2 Noțiunea de funcție complexă

Fie  $D \subset \mathbf{C}$  o mulțime oarecare de numere complexe.

**Definiția 2.1** Se numește funcție complexă orice aplicație  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  care face ca fiecărui  $z \in D$  să-i corespundă  $f(z) = w \in \mathbf{C}$ .

Privite geometric, funcțiile complexe sunt transformări punctuale ale unei mulțimi din planul complex  $(z)$ , în planul complex  $(w)$ .

Dacă  $z := x + jy$  și  $w := u + jv$ , cu  $x, y, u, v \in \mathbf{R}$ , atunci  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ . Așadar,  $f$  este cunoscută când se cunosc funcțiile reale  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$ , unde  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  și  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ .

**Exemplul 2.1** i)  $f(z) = z \Rightarrow f(z) = x + jy \Rightarrow u(x, y) = x$  și  $v(x, y) = y$ .

ii)  $f(z) = 2z^2 - z\bar{z} - \bar{z}^2 + 3z + j\bar{z}$ . Avem

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x + jy)^2 - (x + jy)(x - jy) - (x - jy)^2 + 3(x + jy) + j(x - jy) \\ &= -2y^2 - 3x + y + j(6xy + x - 3y). \end{aligned}$$

Deci,  $u(x, y) = -2y^2 - 3x + y$  și  $v(x, y) = 6xy + x - 3y$ .

**Observația 2.1** Invers, atunci când se cunosc  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$ , construim  $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + jv(x, y)$  luând  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  și  $y = \frac{z-\bar{z}}{2j}$ .

**Exemplul 2.2** Având  $u(x, y) = -4x^2 - 2y$  și  $v(x, y) = 4x - 2y$ , construim pe  $f(z, \bar{z})$ .

$$\begin{aligned} f(z, \bar{z}) &= u(x, y) + jv(x, y) = -4\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - 2\frac{z-\bar{z}}{2j} + 4j\frac{z+\bar{z}}{2} - 2j\frac{z-\bar{z}}{2j} \\ &= -z^2 - 2z\bar{z} - \bar{z}^2 + 3jz + j\bar{z} - z + \bar{z}. \end{aligned}$$

Fie  $\mathcal{P}(\mathbf{C})$  mulțimea părților (submulțimilor) lui  $\mathbf{C}$ .

**Definiția 2.2** *i) Funcția  $f : D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{C})$  se numește **multiformă** dacă face să-i corespundă lui  $z$  cel puțin două valori distincte, numite ramurile funcției.*

*ii) Funcția  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  se numește **uniformă** dacă face să-i corespundă lui  $z$  o singură valoare, bine determinată.*

În continuare, vom exemplifica funcțiile multiforme și uniforme prin câteva funcții elementare.

**I. Funcția polinomială** (de grad  $n$ ),  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

unde  $a_k \in \mathbf{C}$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $a_n \neq 0$ , este o funcție uniformă.

**II. Funcția rațională**  $f : \mathbf{C} \setminus D \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , unde  $P(z)$ ,  $Q(z)$  sunt funcții polinomiale și  $D := \{z \in \mathbf{C} : Q(z) = 0\}$  este o funcție uniformă. Ca exemple de funcții raționale menționăm:

*i) funcția lui Jukowski  $J : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,*

$$J(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right);$$

*ii) funcția omografică  $h : \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

unde  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ , cu  $c \neq 0$  și  $ad - bc \neq 0$ .

**Exemplul 2.3** Vom determina imaginea prin funcția  $f(z) = z^2$  a mulțimilor  $A = \{z = x + jy \in \mathbf{C} : x = a, y, a \in \mathbf{R}\}$  și  $B = \{z = x + jy \in \mathbf{C} : y = b, x, b \in \mathbf{R}\}$ .

$$w = f(z) = z^2 \Rightarrow f(z) = (x + jy)^2 \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ și } v(x, y) = 2xy.$$

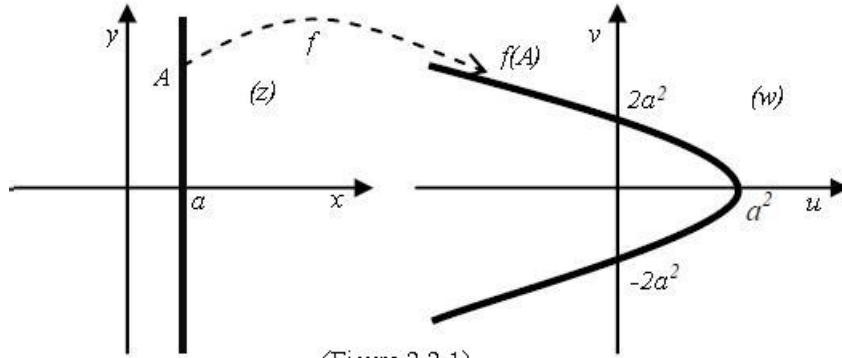
Imaginea mulțimii  $A$ ,  $(f(A))$ , se obține luând  $x = a$  ceea ce implică  $u = a^2 - y^2$  și  $v = 2ay$ .

a) Dacă  $a \neq 0$ , eliminăm pe  $y$  între cele două ecuații și rezultă  $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$ . Deci, imaginea prin funcția  $f(z) = z^2$  a unei drepte paralele cu axa  $Oy$  din planul  $(z)$  este o parabolă în planul  $(w)$ , cu vârful în  $(a^2, 0)$ , (Figura 2.2.1).

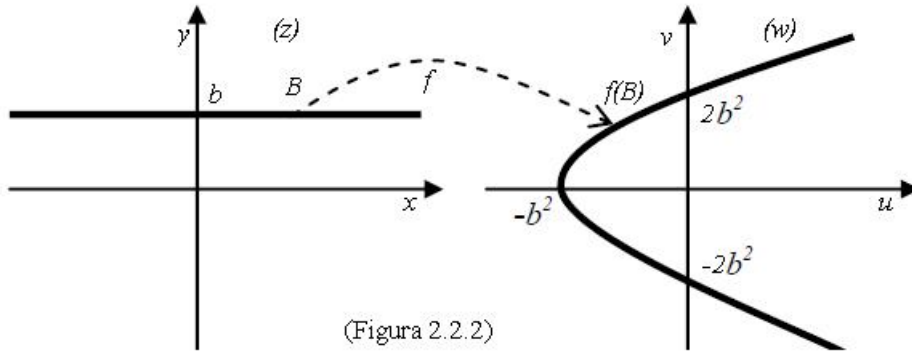
b) Dacă  $a = 0$  atunci,  $u = -y^2$  și  $v = 0$ , adică imaginea prin funcția  $f(z) = z^2$  a axei  $Oy$  este semiaxa negativă  $Ou$  din planul  $(w)$ .

Pentru determinarea imaginii mulțimii  $B$ ,  $(f(B))$ , luăm  $y = b$  și obținem  $u = x^2 - b^2$  și  $v = 2xb$ .

a) Dacă  $b \neq 0$  atunci,  $u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2$ . Am obținut că imaginea prin funcția  $f(z) = z^2$  a unei drepte paralele cu axa  $Ox$  din planul  $(z)$  este o parabolă în planul  $(w)$ , cu vârful în  $(-b^2, 0)$ , (Figura 2.2.2).



(Figura 2.2.1)



(Figura 2.2.2)

b) Dacă  $b = 0$  atunci  $u = x^2$  și  $v = 0$ , adică imaginea prin funcția  $f(z) = z^2$  a axei  $Ox$  este semiaxa pozitivă  $Ou$  din planul  $(w)$ .

$f(z) = z^2$  este o funcție conformă (păstrează unghiurile). Într-adevăr, dreptele reprezentate prin mulțimile  $A$  și  $B$  ( $a, b \neq 0$ ), sunt perpendiculare, iar tangentele în punctele de intersecție al parabolilor  $f(A)$  și  $f(B)$ ,  $(f(A) \cap f(B) = \{(a^2 - b^2, \pm 2ab)\})$ , sunt de asemenea perpendiculare.

### III. Funcția radical $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{C})$ , $f(z) = \sqrt[n]{z}$ .

Ținând cont de formula care dă rădăcinile de ordinul  $n$  ale unui număr complex, (propoziția 2.1.2.,  $v$ )), avem

$$f(z) = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{\rho} e^{j \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

deci este o funcție multiformă, cu  $n$  ramuri

$$f_k(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{j \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

### IV. Funcția exponențială $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , $f(z) = e^z$ .

Deoarece  $z = x + jy \Rightarrow f(z) = e^x (\cos y + j \sin y)$ .

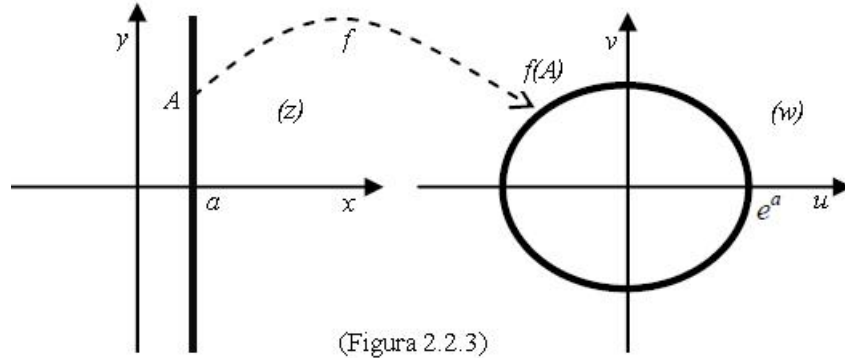
Funcția exponențială este o funcție uniformă și periodică de perioadă principală  $2\pi j$ ,  $(f(z + 2\pi j) = f(z))$ . Într-adevăr,  $f(z + 2\pi j) = f(x + j(y + 2\pi)) = e^x (\cos(y + 2\pi) + j \sin(y + 2\pi)) = f(z)$ .

**Exemplul 2.4** Determinăm imaginea mulțimilor  $A = \{z = x + jy \in \mathbf{C}: x = a, y, a \in \mathbf{R}\}$  și  $B = \{z = x + jy \in \mathbf{C}: y = b, x, b \in \mathbf{R}\}$  prin funcția  $f(z) = e^z$ .

Avem,  $u(x, y) = e^x \cos y$  și  $v(x, y) = e^x \sin y$ .

Imaginea mulțimii  $A$ :

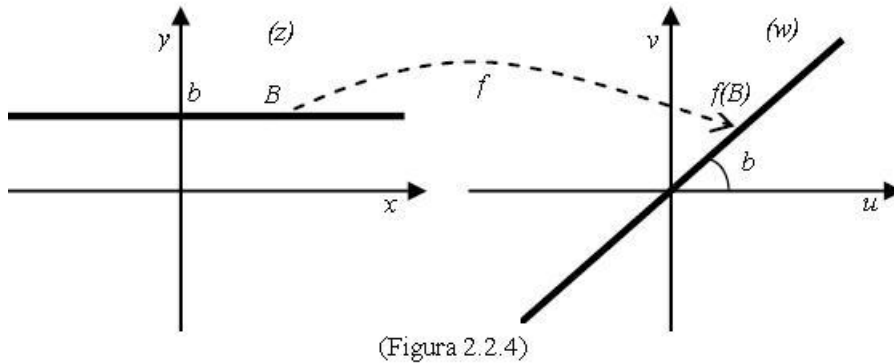
Fie  $x = a$ , ceea ce implică  $u = e^a \cos y$  și  $v = e^a \sin y$  și eliminând pe  $y$ , rezultă  $u^2 + v^2 = e^{2a}$ , adică un cerc cu centrul în origine și de rază  $e^a$ , (Figura 2.2.3).



Imaginea mulțimii  $B$ :

Luăm  $y = b$  și obținem  $u = e^x \cos b$  și  $v = e^x \sin b$ .

a) Dacă  $b \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , atunci  $\frac{v}{u} = \operatorname{tg} b$ , ceea ce reprezintă în planul  $(w)$  drepte care trec prin origine, de pantă  $b$ , (Figura 2.2.4).



b) Dacă  $b = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , atunci  $u = 0$  și  $v = \pm e^x$ , adică imaginea este semiaxa pozitivă sau negativă  $Ov$ , din planul  $(w)$ .

**V. Funcția logaritm**  $f: \mathbf{C}^* \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{C})$ ,  $f(z) = \log z$ .

Mulțimea tuturor soluțiilor ecuației  $e^w = z$  definește o aplicație multiformă numită *logritmul complex*, notată  $\log z$ .

Înlocuind  $w = u + jv$  și  $z = \rho e^{j\theta}$  în ecuația  $e^w = z$  obținem

$$e^{u+jv} = \rho e^{j\theta} \Leftrightarrow e^u e^{jv} = \rho e^{j\theta}.$$

Rezultă,

$$\begin{cases} \rho = e^u \\ v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \ln \rho \\ v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases}.$$

Deci,

$$f(z) = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

având ramurile  $f_k(z) = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}$ .

**Exemplul 2.5** Calculăm  $\log(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})$ . Avem  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |z| = 1$  și  $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ .

Deci,  $\log(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = j(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}$ .

## VI. Funcțiile trigonometrice $\cos, \sin : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$

Aplicând formula lui Euler avem,  $\begin{cases} e^{jz} = \cos z + j \sin z \\ e^{-jz} = \cos z - j \sin z \end{cases}$  care conduc la funcțiile trigonometrice complexe  $\begin{cases} \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \end{cases}$ . Acestea sunt funcții uniforme și periodice de perioadă principală  $2\pi$ .