Capitolul 1: Elemente de teoria funcţiilor complexe

CURS NR. 2

1 Limite şi continuitate

Noţiunile de limită şi continuiatate din cazul real se extind în cazul complex, aşa cum vom vedea în cele ce urmează.

Definiţia 1.1 *Fie* $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, z_0, $l \in \bar{\mathbf{C}}$ *şi* z_0 *punct de acumulare al mulţimii* D. f *are limita* l *în* z_0, ($\lim_{z\to z_0} f(z) = l$), *dacă* $\forall\ V$ *o vecinătate a lui* l, $\exists\ U$ *o vecinătate a lui* z *astfel încât* $\forall\ z \in U\backslash\{z_0\} \cap D$ *rezultă* $f(z) \in V$.

Observaţia 1.1 *Dacă* z_0, $l \in \mathbf{C}$, *atunci*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \ a.\hat{\imath}.\ \forall z \in D \ cu\ |z - z_0| < \delta_\varepsilon,\ |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Teorema 1.1 *Fie* $z_0 = x_0 + jy_0$, $l = a + jb$ *şi* $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. *Are loc*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \ \Leftrightarrow\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = a;\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = b.$$

Definiţia 1.2 *Fie* $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z_0 \in D$. f *este continuă în* z_0 *dacă are limita în* z_0, $l = f(z_0)$, ($\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$).

Limitele şi continuitatea funcţiilor complexe pot fi caracterizate, ca şi în analiza reală, şi prin şiruri.

2 Derivata funcţiilor complexe. Condiţii Cauchy-Riemann

Fie D o mulţime deschisă de numere complexe, $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, $u, v : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

Definiţia 2.1 *Funcţia complexă* f *este derivabilă în* $z_0 \in D$ *(sau monogenă în* $z_0 \in D$*) dacă există şi este finită limita*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{2.1}$$

Numărul complex $f'(z_0)$ se numeşte *derivata funcţiei* f *în* z_0. Dacă f este derivabilă în orice punct $z \in D$, atunci f este derivabilă pe D (sau olomorfă pe D), caz în care se poate forma funcţia $f' : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ numită *derivata* funcţiei f. O funcţie olomorfă pe $\mathbf{C}$ de numeşte funcţie *întreagă*.

Funcţia f se numeşte olomorfă pe o mulţime oarecare dacă aceasta este conţinută într-o mulţime deschisă pe care f este olomorfă.

Deoarece relaţia (2.1) are aceeaşi structură formală ca în analiza reală, se deduc şi pentru funcţii complexe, exact aceleaşi reguli de derivare ca la funcţiile reale, (pentru sumă, produs, raport, etc.).

Un rezultat cunoscut şi în cazul real:

Teorema 2.1 *Dacă f este derivabilă în z_0, atunci f este continuă în z_0.*

Observaţia 2.1 *Funcţiile complexe elementare sunt derivabile pe domeniul lor de definiţie.*

Reamintim noţiunea de diferenţiabilitate, din teoria funcţiilor de două variabile reale.

Definiţia 2.2 *Funcţia $u : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este diferenţiabilă în $(x_0, y_0) \in D$ dacă $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $\gamma : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ astfel încât*

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \gamma(x, y) = 0,\ \forall\ (x, y) \in D$$

Observaţia 2.2 *Dacă $u(x, y)$ este diferenţiabilă în $(x_0, y_0) \in D$, atunci admite derivate parţiale în (x_0, y_0) şi $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, iar $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.*

Teorema 2.2 *Fie $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

i) f este derivabilă în z_0;

ii) u, v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) şi au loc condiţiile Cauchy – Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}. \tag{2.2}$$

În aceste condiţii,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -j\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + j\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right). \tag{2.3}$$

Demonstraţie. Demonstram mai întâi $i) \Rightarrow ii)$. Raportul

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + j[v(x, y) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0 + j(y - y_0)}$$

are sens pentru orice $z \in D$, $z \neq z_0$. Deoarece f este derivabilă în z_0, limita acestui raport există şi este finită, pe orice drum. Presupunem că $z \to z_0$ pe un drum paralel cu axa Ox. Atunci $y = y_0$ şi

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + j \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right],$$

ceea ce implică existenţa derivatelor $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0}$ şi $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}$ şi deci

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + j \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

Presupunem acum că $z \to z_0$ pe un drum paralel cu axa Oy. Deci, $x = x_0$ şi

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{j(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right].$$

Rezultă, că există
$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{j(y - y_0)}$,
$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0}$ şi

$$f'(z_0) = -j \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + j \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right]. \tag{2.5}$$

Din relaţiile (2.4) şi (2.5) rezultă (2.2).

Implicaţia reciprocă *ii)* $\Rightarrow$ *i)*. Deoarece u, v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0), aplicând definiţia 2.2, rezultă că $\exists\ \gamma_k : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $k = 1, 2$, a.î.

$$\begin{array}{c} u(x, y) - u(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ +\gamma_1(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}; \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ +\gamma_2(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}; \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \gamma_k(x, y) = 0,\ (x, y) \in D,\ k = 1, 2. \end{array}$$

Atunci,

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + j[v(x, y) - v(x_0, y_0)] \\ &= (x - x_0) \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + j \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \\ &\quad +(y - y_0) \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + j \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \\ &\quad +(\gamma_1(x, y) + j\gamma_2(x, y))\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

care împreună cu condiţiile (2.2), dă

$$\begin{aligned} f(z)-f(z_0) &= [(x-x_0)+j(y-y_0)]\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right] \\ &\quad +(\gamma_1(x,y)+j\gamma_2(x,y))\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned}$$

sau altfel scris,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha+f_1(z), \tag{2.6}$$

unde $\alpha := \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ şi $f_1(z) := (\gamma_1(x,y)+j\gamma_2(x,y))\frac{|z-z_0|}{z-z_0}$ cu $\lim_{z\to z_0} f_1(z)=0$, deoarece $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\gamma_k(x,y)=0,\ (x,y)\in D,\ k=1,2$. Când $z\to z_0$ în (2.6), rezultă că

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

■

Exemplul 2.1 *Determinăm punctele în care funcţia*

$$f(z)=x^3-2xy+j(xy-2y)$$

este derivabilă.

Din expresia funcţiei date rezultă $u(x,y)=x^3-2xy$ şi $v(x,y)=xy-2y$ care sunt funcţii elementare, deci diferenţiabile. Avem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= 3x_0^2-2y_0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-2x_0; \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) &= y_0,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=x_0-2. \end{aligned}$$

În punctele $z_0=x_0+jy_0$ de derivabilitate, f satisface condiţiile Cauchy-Riemann (2.2). Deci,

$$\begin{cases} 3x_0^2-2y_0=x_0-2 \\ -2x_0=-y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y_0^2-10y_0+2=0 \\ x_0=\frac{y_0}{2} \end{cases},$$

cu soluţiile $x_0=\frac{2}{3}$, $y_0=\frac{4}{3}$ şi $x_0=1$, $y_0=2$. Deci punctele în care funcţia este derivabilă sunt $z_1=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}j$ şi $z_2=1+2j$. Aplicând (2.3), calculăm acum

$$f'(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}j)=\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{2}{3},\frac{4}{3})+j\frac{\partial v}{\partial x}(\frac{2}{3},\frac{4}{3})=\frac{4}{3}j$$

şi

$$f'(1+2j)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)+j\frac{\partial v}{\partial x}(1,2)=-1+2j.$$

Considerăm următorii operatori de derivare:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\right)\ ;\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2.7}$$

pe care îi aplicăm funcţiei $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u + jv) - j\frac{\partial}{\partial y}(u + jv)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + j\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\\
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u + jv) + j\frac{\partial}{\partial y}(u + jv)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].
\end{aligned}$$

De asemenea, din (2.7) rezultă,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ ;\ \frac{\partial}{\partial y} = j(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}). \tag{2.8}$$

Din condiţiile Cauchy-Riemann (2.2) se deduce imediat

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Aşadar, avem demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 2.3 *Condiţiile Cauchy-Riemann (2.2) în* $z_0 = x_0 + jy_0$ *sunt echivalente cu* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. *Dacă* f *este derivabilă în* z_0 *atunci* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ *şi*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0). \tag{2.9}$$

Observaţia 2.3 *Condiţiile Cauchy-Riemann (2.2) sunt doar condiţii necesare de olomorfie pentru funcţia* f*, nu sunt şi suficiente.*

Încheiem această secţiune cu câteva proprietăţi ale funcţiilor olomorfe, consecinţe ale condiţiilor Cauchy-Riemann (2.2).

Definiţia 2.3 *Funcţia* $u : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $u \in C^2(D)$ *se numeşte funcţie armonică dacă*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Teorema 2.4 *Dacă* f *este olomorfă pe domeniul* D *şi* $u, v \in C^2(D)$ *atunci* u *şi* v *sunt armonice pe* D.

Exemplul 2.2 *Funcţia $f(z) = z^3$ este întreagă, (nu depinde de $\bar{z}$). Conform teoremei 2.7, $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ sunt funcţii armonice. Verficăm acest lucru. Determinăm mai întâi pe $u(x,y)$ şi $v(x,y)$.*

$$f(z) = z^3 = (x+jy)^3 = x^3 + 3xy^2 + j(3x^2y - y^3) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^3 + 3xy^2 \\ v(x,y) = 3x^2y - y^3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \end{cases} \Rightarrow \Delta u = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y \end{cases} \Rightarrow \Delta v = 0.$$

Următoarea teoremă ne dă o metodă de construcţie a unei funcţii olomorfe pe un domeniu simplu conex, când se cunoaşte partea sa reală sau imaginară.

Teorema 2.5 *Fie D un domeniu simplu conex şi $u : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ o funcţie armonică pe D. Atunci există funcţia armonică v astfel încât funcţia $f = u + jv$ este olomorfă pe D.*

Exemplul 2.3 *Fie $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ şi determinăm $v(x,y)$ astfel încât $f = u + jv$ şi $f(0) = 3j$.*

Conform teoremei 2.2.8, $u(x,y)$ trebuie să fie armonică. Într-adevăr,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta u = 0.$$

Deci, există $v(x,y)$ a.î. $f = u+jv$ este olomorfă. Rezultă că sunt sa- tisfăcute condiţiile Cauchy-Riemann (2.2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 \end{cases}.$

Atunci, $\begin{cases} v(x,y) = 4x^3z - 4xy^3 + c(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 \end{cases}$ *şi de aici, $c(x) = k$, $k \in$* $\mathbf{R}$.

Am obţinut $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + j(4x^3z - 4xy^3 + k)$. Dar, condiţia $f(0) = 3j$ dă $k = 3$.

Deci, $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + j(4x^3z - 4xy^3 + 3)$.