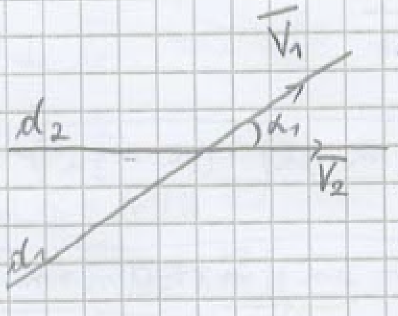
ALGAD_C_13_2023_11_17 17.11.2023

Unghiuri și distanțe

I) Unghiuri

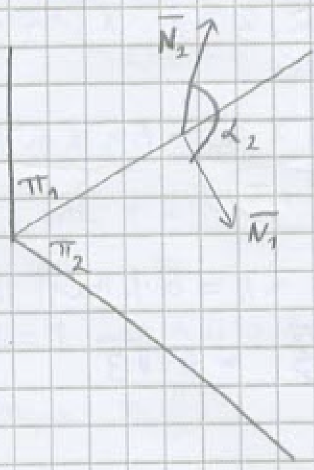
1) Unghiul la două drepte



$$\alpha_1 = \sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle(\overline{V_1}, \overline{V_2})$$

$$\boxed{\cos\alpha_1 = \frac{\overline{V_1}\cdot\overline{V_2}}{\|\overline{V_1}\|\,\|\overline{V_2}\|}}$$

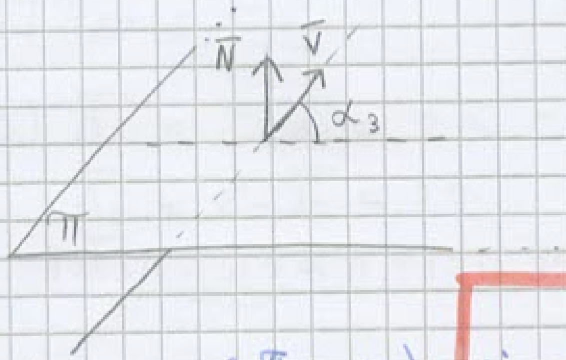
2) Unghiul la două plane



$$\alpha_2 = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \sphericalangle(\overline{N_1}, \overline{N_2})$$

$$\boxed{\cos\alpha_2 = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\|\overline{N_1}\|\,\|\overline{N_2}\|}}$$

3) Unghiul dintre o dreaptă și un plan



$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha_3 = \sphericalangle(\overline{V}, \overline{N})$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right) = \boxed{\sin\alpha_3 = \frac{\overline{V}\cdot\overline{N}}{\|\overline{V}\|\,\|\overline{N}\|}}$$

II) Distanțe

1) Distanța dintre două puncte

$$dist(A,B) = \|\overline{AB}\| = \boxed{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

2) Distanța de la un punct la un plan

$A(x_A, y_A, z_A)$, $(\pi): ax + by + cz + d = 0$

$$\Rightarrow dist(A,\pi) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$(d)\ ax + by + c = 0$

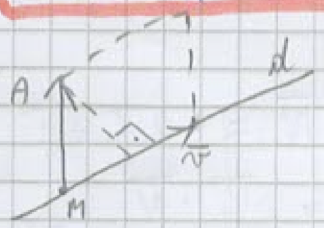
$$\boxed{dist(A,d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

3) Distanța de la un punct la o dreaptă

$A(x_A, y_A, z_A)$, $(d): \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k} \\ M(x_0, y_0, z_0) \in d \end{cases}$$

$$\boxed{dist(A,d) = \frac{\|\overline{MA} \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}}$$

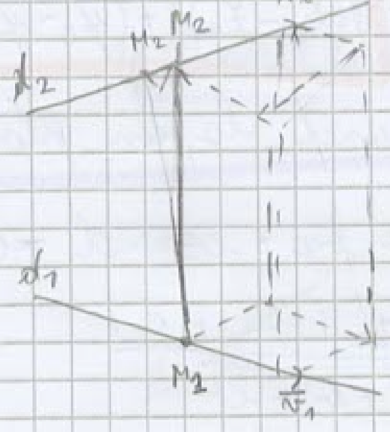


4) Distanța dintre două drepte necoplanare

$$(d_1): \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 \\ M_1 \in d \end{cases}$$

$$(d_2): \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_2 \\ M_2 \in d_2 \end{cases}$$

$$\boxed{dist(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \overline{v_1}, \overline{v_2})|}{\|\overline{v_1} \times \overline{v_2}\|}}$$



Ex: Fie $M(-1, 2, -3)$ un pct,

(d_1): $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-2}$

(d_2): $\frac{x+1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-1}$ două

drepte și (π): $-2x + y + 1 = 0$ un plan. Calculați

$\measuredangle(d, \pi)$, $\measuredangle(d_1, d_2)$, $dist(M, d_2)$, $dist(M, \pi)$, $dist(d_1, d_2)$

Sol. (d_1): $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v_1} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k} \\ M_1(1, -2, -3) \end{cases}$

(π): $-2x + y + 1 = 0 \Rightarrow \overline{N} = -2\overline{i} + \overline{j}$

$\alpha_1 = \measuredangle(d_1, \pi) \Rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{\overline{V_1} \cdot \overline{N}}{\|V_1\| \|N\|} = 0$

$\overline{V_1} \cdot \overline{N} = 0$ $\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

$\alpha_2 = \measuredangle(d_1, d_2) = \measuredangle(\overline{v_1}, \overline{v_2})$ Temă

(d_2) $\frac{x+1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v_2} = \overline{j} - \overline{k} \\ M_2(-1, 3, -2) \in d_2 \end{cases}$

$$dist(M, d_2) = \frac{\|\overline{M_2M} \times \overline{v_2}\|}{\|\overline{v_2}\|}$$

$$\overline{M_2M} = \overline{j} + \overline{k} = (0, 1, 1)$$

$$\overline{M_2M} \times \overline{v_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\overline{M_2M} \times \overline{v_2}\| = 2$$

$$\|\overline{v_2}\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow dist(M, d_2) = \sqrt{2}$$

$$dist(M, \pi) = \dots \quad \text{Temă}$$

$$dist(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \overline{v_1}, \overline{v_2})|}{\|\overline{v_1} \times \overline{v_2}\|}$$

$$\overline{M_1M_2} = -2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}$$

$$(\overline{M_1M_2}, \overline{v_1}, \overline{v_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\overline{v_1} \times \overline{v_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \overline{j} + \overline{k} \Rightarrow \|\overline{v_1} \times \overline{v_2}\| = \sqrt{2}$$

Schimbări de repere. Transformări geometrice (partea I)

I) Schimbări de repere în plan

Fie, în planul xOy, două repere carteziene $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ și $\mathcal{R}' = \{O', \bar{i}', \bar{j}'\}$.

Orice trecere de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$ se poate descompune în 2 tipuri de transformări

i) O translație (schimbarea originii reperului)

$$\{O, \bar{i}, \bar{j}\} \to \{O', \bar{i}, \bar{j}\}$$

ii) O schimbare de baze: $\{O, \bar{i}, \bar{j}\} \to \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$

1) Translație

Fie, în reperul $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$, punctul $O'(x_0, y_0)$.

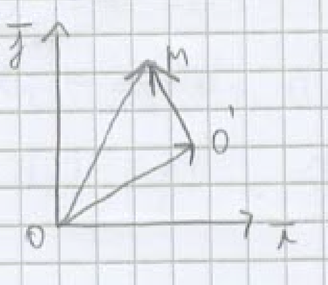
mutând originea O a reperului în O' un punct arbitrar M din plan are coordonatele

- $M(x, y)$ în reperul „vechi" $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$
- $M(x', y')$ în reperul „nou" $\mathcal{R}' = \{O', \bar{i}, \bar{j}\}$

Avem:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$$
$$\overline{O'M} = x'\bar{i} + y'\bar{j}$$

Cum $\overline{OO'} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}$, iar $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$,



obținem în coordonatele ecuației translației ca schimbare de reper:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

În formă matriceală, cu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ matricele coloană ale coordonatelor lui M și $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, ecuațiile translației se scriu

$$\boxed{X = X' + X_0}$$

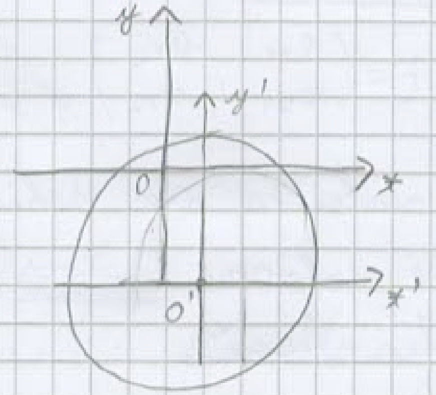
Ex: Determinați ecuația curbei $(\Gamma): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ $\quad O'(1,-2)$

Sol: $X = X' + X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

$$(\Gamma): (x'+1)^2 + (y'-2)^2 - 2(x'+1) + 4(y'-2) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + \cancel{2x'} + 1 + y'^2 - \cancel{4y'} + 4 - \cancel{2x'} - 2 + \cancel{4y'} - 8 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma): x'^2 + y'^2 = 9$$



2) Schimbări de baze

2.1. Generalități

$$\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\} \to \mathcal{R}' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$$

Pentru un punct arbitrar M avem:

- $M(x, y)$ în reperul $\mathcal{R}$: $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$
- $M(x', y')$ în reperul $\mathcal{R}'$: $\overline{OM} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}'$

Avem $\begin{cases} \bar{i}' = a_{11}\bar{i} + a_{21}\bar{j} \\ \bar{j}' = a_{12}\bar{i} + a_{22}\bar{j} \end{cases}$, prin urmare:

$$\overline{OM} = x'(a_{11}\bar{i} + a_{21}\bar{j}) + y'(a_{12}\bar{i} + a_{22}\bar{j}) =$$
$$= (x'a_{11} + y'a_{12})\bar{i} + (x'a_{21} + y'a_{22})\bar{j}$$

iar $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$, deci obținem prin identificare ecuațiile schimbării de reper:

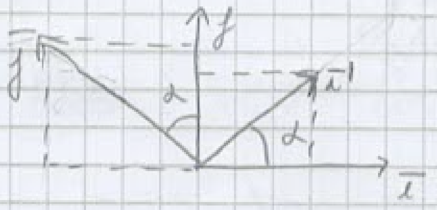
$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases}$$

În formă matriceală:

$X = AX'$, unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

unde A este matricea de schimbare a bazelor care conține pe coloane coordonatele noilor vectori în vechea bază.

2.2. Rotație



$$\begin{cases} \bar{i}' = -\cos\alpha \ \bar{i} + \sin\alpha \ \bar{j} \\ \bar{j}' = -\sin\alpha \ \bar{i} + -\cos\alpha \ \bar{j} \end{cases}$$

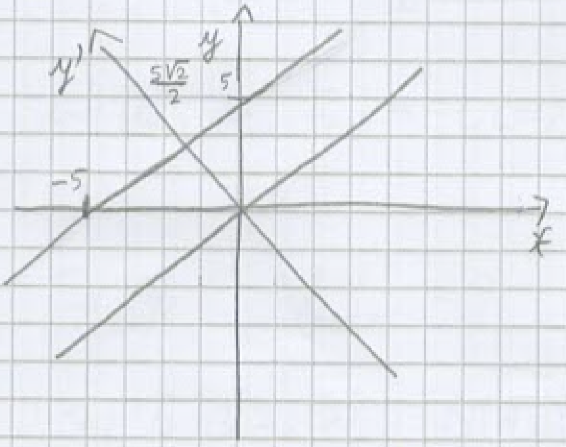
$$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

Ex: $d: y = x + 5$ din xOy după o rotație de unghi $\alpha = 45^\circ$ al reperului

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

Ec. dreptei : $\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') + 5$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\, y' = 5 \Rightarrow y' = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



2.3. Simetrii

i) Simetria față de Ox : $\{\bar{i}, \bar{j}\} \to \{\bar{i}, -\bar{j}\}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

ii) Simetria față de Oy : $\{\bar{i}, \bar{j}\} \to \{-\bar{i}, \bar{j}\}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

iii) Simetria față de O: $\{\bar{i}, \bar{j}\} \to \{-\bar{i}, -\bar{j}\}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Ex.: Determinați ecuația graficului $y = f(x)$ știind că f este fct. pară după o simetrie a graficului față de Oy.

Sol.: $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow y' = f(-x') \Rightarrow y' = f(x')$

Obs: Graficul unei fct. pare este simetric față de axa Oy