Curs nr. 6: Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

O ecuaţie diferenţială de ordinul n se numeşte *liniară* dacă este liniară în $y(x)$ şi derivatele sale $y^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$. Aşadar, *forma generală* a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n este

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \qquad (0.1)$$

unde a_i, $(i = \overline{0,n})$, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue pe $[a,b]$ şi $a_n(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. a_i, $i = \overline{0,n}$, sunt coeficienţii ecuaţiei, iar f este termenul liber al acesteia.

Ecuaţia diferenţială

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \qquad (0.2)$$

se numeşte ecuaţie *liniară de ordinul n omogenă*, iar dacă există cel puţin un $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) \neq 0$, (0.1) se numeşte ecuaţie *liniară de ordinul n neomogenă.*

Problema Cauchy relativă la ecuaţia (0.1) este

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \qquad (0.3)$$

unde x_0, y_j, $j = \overline{0, n-1}$, sunt numere date. Continuitatea impusă funcţiilor f şi a_i, $i = \overline{0,n}$, asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy (0.3).

Pentru a da o formă simplificată membrului stâng al ecuaţiei (0.1), (sau (0.2)), se introduce operatorul diferenţial $L_n : C^n[a,b] \to C^0[a,b]$ definit ca

$$L_n := a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x), \qquad (0.4)$$

unde $C^n[a,b] := \{y : [a,b] \to \mathbf{R},\ y^{(k)}$ continue pe $[a,b]$, $k = \overline{0,n},\}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Prin intermediul operatorului (0.4), ecuaţiile (0.1) respectiv, (0.2) se scriu

$$L_n(y(x)) = f(x); \qquad (0.5)$$

$$L_n(y(x)) = 0. \tag{0.6}$$

În continuare vom evidenţia câteva proprietăţi ale operatorului diferenţial L_n, proprietăţi utile în caracterizarea soluţiilor ecuaţiilor (0.5) şi (0.6).

Propoziţia 0.1 *L_n este un operator liniar pe $\boldsymbol{R}$, i.e.*

$$L_n(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L_n(y_1) + \beta L_n(y_2),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ y_1, y_2 \in C^n[a,b].$$

Demonstraţie. Folosind regulile de derivare,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \frac{d^n y_1}{dx^n} + \beta \frac{d^n y_2}{dx^n},\ \forall n \in \mathbf{N},$$

avem

$$\begin{aligned}
L_n(\alpha y_1 + \beta y_2) &= a_n(x)\tfrac{d^n}{dx^n}(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_{n-1}(x)\tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\alpha y_1 + \beta y_2) \\
&+ \ldots + a_1(x)\tfrac{d}{dx}(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_0(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) \\
&= \alpha a_n(x)\tfrac{d^n y_1}{dx^n} + \beta a_n(x)\tfrac{d^n y_2}{dx^n} + \alpha a_{n-1}(x)\tfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \beta a_{n-1}(x)\tfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \\
&+ \ldots + \alpha a_1(x)\tfrac{dy_1}{dx} + \beta a_1(x)\tfrac{dy_2}{dx} + \alpha a_0(x) y_1 + \beta a_0(x) y_2 \\
&= \alpha \left(a_n(x)\tfrac{d^n y_1}{dx^n} + a_{n-1}(x)\tfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\tfrac{dy_1}{dx} + a_0(x) y_1 \right) \\
&+ \beta \left(a_n(x)\tfrac{d^n y_2}{dx^n} + a_{n-1}(x)\tfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\tfrac{dy_2}{dx} + a_0(x) y_2 \right) \\
&= \alpha L_n(y_1) + \beta L_n(y_2).\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Definiţia 0.1 *Funcţiile $y_k : [a,b] \to \mathbf{R}$, $k = \overline{1,n}$, se numesc liniar dependente pe $[a,b]$ dacă există numerele reale λ_k, $k = \overline{1,n}$, nu toate nule, astfel încât*

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0,\ \forall x \in [a,b].$$

În caz contrar, funcţiile $y_k : [a,b] \to \mathbf{R}$, $k = \overline{1,n}$, se numesc *liniar idependente* pe $[a,b]$, adică $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$ are loc numai pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, $\forall\ x \in [a,b]$.

Exemplul 0.1 *i) Funcţiile 1, x, e^x sunt liniar independente pe $\boldsymbol{R}$ deoarece din $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x = 0$ rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Într-adevăr, luând pe rând x egal cu 0, 1 şi -1, obţinem sistemul liniar omogen*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 e = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 x + \lambda_3 e^{-1} = 0 \end{cases}$$

cu determinantul matricei asociate nenul. Deci, sistemul admite doar soluţia banală $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

ii) Funcţiile $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos 2x$ sunt liniar dependente deoarece are loc identitatea

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \cos 2x = 0,$$

cu $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ şi $\lambda_2 = -1$.

Definiţia 0.2 *Determinantul*

$$W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{0.7}$$

se numeşte determinantul Wronski al funcţiilor $y_k \in C^{n-1}[a,b]$, $k = \overline{1,n}$.

Prin intermediul determinantului Wronski se poate formula un criteriu care stabileşte dacă un sistem de funcţii este sau nu liniar dependent. Mai exact, are loc următoare teoremă:

Teorema 0.1 *Dacă funcţiile* $y_k \in C^{n-1}[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, *sunt liniar dependente pe* $[a,b]$, *atunci* $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = 0$, $\forall\ x \in [a,b]$.

Demonstraţie. Deoarece funcţiile $y_k \in C^{n-1}[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, sunt liniar dependente, există λ_k, $k = \overline{1,n}$, nu toate nule a.î. $\forall x \in [a,b]$, $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$. Aceasta, împreună cu derivatele succesive ale ei până la ordinul $(n-1)$ formează sistemul liniar omogen de n ecuaţii în necunoscutele λ_1, λ_2 ,. . . , λ_n,

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \ldots + \lambda_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases} \tag{0.8}$$

Dar constantele λ_k, $k = \overline{1,n}$, nefiind toate nule, sistemul (0.8) admite şi soluţii nebanale, $\forall x \in [a,b]$. Rezultă că determinantul sistemului este nul, adică $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = 0$, $\forall x \in [a,b]$. ■

Reciproca teoremei precedente nu este adevărată, adică este posibil ca pe $[a,b]$,

$$W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = 0,$$

fără ca funcţiile y_k, $k = \overline{1,n}$, să fie liniar dependente. Însă, dacă $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ nu este identic nul pe $[a,b]$, atunci funcţiile y_k, $k = \overline{1,n}$, sunt liniar independente pe $[a,b]$.

Exemplul 0.2 *Deoarece*

$$W(e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}) = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)e^{(a+b+c)x} \neq 0,$$

dacă $a \neq b \neq c$, *rezultă că funcţiile* e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} *sunt liniar independente.*

1 Soluţia generală a ecuaţiei $L_n(y(x)) = 0$

Propoziţia 1.1 *Dacă funcţiile $y_k \in C^n[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, sunt n soluţii ale ecuaţiei omogene (0.6), atunci funcţia*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{1.1}$$

este soluţie a ecuaţiei (0.6), unde $c_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$, sunt constante arbitrare.

Demonstraţie. y_k, $k = \overline{1,n}$, fiind soluţii ale ecuaţiei (0.6), verifică identic ecuaţia

$$L_n(y_i(x)) = 0, \ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Aplicând operatorul L_n funcţiei $y(x)$ din (1.1) şi utilizând proprietatea de liniaritate a acestuia, avem

$$\begin{aligned} L_n(y(x)) &= L_n(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)) \\ &= c_1 L_n(y_1(x) + c_2 Ln(y_2(x)) + \ldots + c_n L_n(y_n(x)) = 0, \end{aligned}$$

adică $y(x)$ din (1.1) este soluţie a ecuaţiei (0.6). ■

Ţinând cont de faptul că soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n depinde de n constante arbitrare, se pune în mod firesc întrebarea, *ce condiţii trebuie să îndeplinească soluţiile y_k , $k = \overline{1,n}$, ale ecuaţiei omogene (0.6) astfel încât $y(x)$ din (1.1) să fie soluţie generală a ecuaţiei omogene (0.6)?*

Definiţia 1.1 *Orice mulţime formată din n soluţii $y_k \in C^n[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, ale ecuaţiei (0.6), liniar indepentente (i.e. $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \neq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$), se numeşte sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene (0.6).*

Teorema 1.1 *Dacă $y_k \in C^n[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene (0.6), atunci*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

este soluţie generală a ecuaţiei (0.6), unde $c_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1,n}$, sunt constante arbitrare.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in [a,b]$, numerele reale z_j, $j = \overline{0, n-1}$, şi problema Cauchy

$$\begin{cases} L_n(y(x)) = 0 \\ y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1} \end{cases} \tag{1.2}$$

care admite soluţie unică.

Pentru a arăta că $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$, (cu $y_k \in C^n[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, un sistem fundamental de soluţii) este soluţia generală a ecuaţiei omogene (0.6) trebuie să arătăm că pot fi determinate constantele $c_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1,n}$, astfel încât condiţiile iniţiale din problema Cauchy (1.2) să fie îndeplinite. Într-adevăr, impunând aceste condiţii obţinem sistemul liniar în necunoscutele c_k, $k = \overline{1,n}$,

$$\left\{\begin{array}{c} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \ldots + c_ny_n(x_0) = z_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \ldots + c_ny_n'(x_0) = z_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1} \end{array}\right. \tag{1.3}$$

al cărui determinant este $W(y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0)) \neq 0$. Rezultă că sistemul (1.3) admite soluţie unică. ■

Aşadar, această teoremă dă răspunsul la întrebarea formulată mai sus.

Exemplul 1.1 *Arătăm că ecuaţia $x^2y'' + 2x(x-1)y' + (x^2 - 2x + 2)y = 0$, $x \neq 0$, admite soluţiile $y_1 = xe^{-x}$ şi $y_2 = x^2e^{-x}$ şi determinăm apoi soluţia generală a acesteia.*

Mai întâi, verificăm dacă y_1 şi y_2 sunt soluţii. Într-adevăr, $y_1 = xe^{-x}$, $y_1' = e^{-x}(-x+1)$ şi $y_1'' = e^{-x}(x-2)$, respectiv $y_2 = x^2e^{-x}$, $y_2' = e^{-x}(2x-x^2)$ şi $y_2'' = e^{-x}(x^2-4x+2)$ înlocuite în ecuaţia dată, o verifică identic. Fiind o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, y_1 şi y_2 pot compune soluţia generală a ecuaţiei date, dacă formează un sistem fundamental de soluţii, adică dacă $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$. Prin calcul obţinem,

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \left| \begin{array}{cc} xe^{-x} & x^2e^{-x} \\ e^{-x}(-x+1) & e^{-x}(2x-x^2) \end{array} \right| = x^2e^{-x} \neq 0.$$

Atunci soluţia generală a ecuaţiei este $y(x) = c_1xe^{-x} + c_2x^2e^{-x}$.

Observaţia 1.1 *Dacă se cunoşte o soluţie $y_1(x) \neq 0$ a ecuaţiei (0.6), prin schimbare de variabilă*

$$y = y_1 \int u(x)dx,$$

ordinul ecuaţiei (0.6) se reduce cu o unitate.

Exemplul 1.2 *Determinăm soluţia generală a ecuaţiei $y'' \sin^2 x = 2y$, ştiind că $y_1(x) = ctgx$ este o soluţie a acesteia.*

Prin schimbarea de variabilă $y = y_1 \int u(x)dx$ obţinem,
$y = ctgx \int u(x)dx$,
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \int u(x)dx + ctgx\ u$ *şi*
$y'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} \int u(x)dx - \frac{2}{\sin^2 x}u + ctgx\ u'$,
care înlocuite în ecuaţia dată implică:
$\cos x \sin x\ u' = 2u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2dx}{\cos x \sin x} \Rightarrow u = k\ tg^2x.$
Atunci, $y = k\ ctgx \int tg^2xdx = k\ ctgx \int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx$
$= -k\ ctgx(\int dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx) = -k(x\ ctgx - 1) + c.$

Putem alege $y_2(x) = 1 - x\ ctgx$, care împreună cu $y_1(x) = ctgx$ formează un sistem fundamental de soluţii,

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} ctgx & 1 - xctgx \\ -\frac{1}{\sin^2 x} & -ctgx + \frac{x}{\sin^2 x} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Deci, soluţia generală a ecuaţiei date este $y(x) = c_1\ ctgx + c_2(1 - x\ ctgx)$.

2 Soluţia generală a ecuaţiei $L_n(y(x)) = f(x)$

Aşa cum vom vedea în continuare, aflarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene (0.5) este strâns legată de cunoaşterea soluţiei generale a ecuaţiei omogene (0.6). De aceea, notăm cu $y_o(x)$ soluţia generală a ecuaţiei omogene (0.6). Aceasta este

$$y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x).$$

Teorema 2.1 *Soluţia generală a ecuaţiei neomogene (0.5) este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene (0.6) şi o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei neomogene (0.5), notată $y_p(x)$, adică*

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x). \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Deoarece $y_o(x)$ şi $y_p(x)$ verifică ecuaţiile $L_n(y_o(x)) = 0$ respectiv, $L_n(y_p(x)) = f(x)$, aplicând operatorul L_n funcţiei $y(x)$ din (2.1) şi folosind liniaritatea acestuia, avem

$L_n(y(x)) = L_n(y_o(x) + y_p(x)) = L_n(y_o(x)) + L_n(y_p(x)) = f(x)$, adică $y(x)$ din (2.1) este soluţie a ecuaţiei neomogene (0.5). Aşadar, $y(x)$ din (2.1) este soluţie generală. ■

Aflarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene (0.5) este în general, o problemă dificilă. Totuşi, în anumite cazuri se poate găsi cu uşurinţă, aşa cum vom vedea în cazul particular al ecuaţiilor liniare cu coeficienţi constanţi. Dar, când nu se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (0.5), soluţia generală a acesteia se determină prin *metoda variaţiei constantelor*. Prezentăm acestă metodă sub forma unui algoritm în mai mulţi paşi:

Pasul 1. Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene (0.6)

$$y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x).$$

Pasul 2. Pentru ecuaţia neomogenă (0.5) se caută soluţii de aceeaşi formă cu $y_o(x)$, în care constantele $c_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, se înlocuiesc cu funcţiile derivabile care depind de x, $c_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, adică

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x). \tag{2.2}$$

Pasul 3. În (2.2) se calculează derivatele $y^{(j)}(x)$, $j = \overline{1, n-1}$, în care, se anulează expresiile care conţin pe $c_i'(x), i = \overline{1, n}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + \ldots + c_n(x)y_n'(x) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x)}_{=0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + \ldots + c_n(x)y_n''(x) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x);}_{=0} \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x) &= c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)}_{=0}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

În continuare, se calculează şi

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) \\ &\quad + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

care, împreună cu $y^{(j)}(x)$, $j = \overline{1, n-1}$, se înlocuiesc în ecuaţia neomogenă (0.5). Se obţine,

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{2.4}$$

Relaţiile (2.3) şi (2.4) conduc la sistemul liniar în necunoscutele $c_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{2.5}$$

care admite soluţia unică $c_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$, deoarece determinantul matricei asociate sistemului este $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \neq 0$.

Pasul 4. Integrând soluţiile $c_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$, obţinute mai sus, se determină funcţiile $c_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, şi anume,

$$c_i(x) = \int c_i'(x)dx + k_i,$$

care înlocuite apoi în (2.2), conduc la determinarea completă a soluţiei generale a ecuaţiei neomogene (0.5).

Exemplul 2.1 *Determinăm soluţia generală a ecuaţiei*

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{ctgx}{x},\ x \neq 0,$$

ştiind că $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ şi $y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$ sunt soluţii ale ecuaţiei omogene ataşate $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.

Vom aplica metoda variaţiei constantelor descrisă mai sus.

Pasul 1. *Verificăm dacă soluţiile* $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ *şi* $y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$ *formează un sistem fundamental de soluţii:*

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} \frac{\sin x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2} \neq 0.$$

Deci, soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y_o(x) = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\frac{\cos x}{x}$.
Pasul 2. *Căutăm soluţia generală a ecuaţiei neomogene date sub forma*

$$y(x) = c_1(x)\frac{\sin x}{x} + c_2(x)\frac{\cos x}{x}. \tag{2.6}$$

Pasul 3. *Fiind o ecuaţie diferenţială de ordinul 2, sistemul (2.5) se scrie*

$$\begin{cases} c_1'(x)\frac{\sin x}{x} + c_2'(x)\frac{\cos x}{x} = 0 \\ c_1'(x)\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} - c_2'(x)\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} = \frac{ctgx}{x} \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul, obţinem $c_1'(x) = \cos x\ ctgx$ *şi* $c_2'(x) = -\cos x$.
Pasul 4. $c_1(x) = \int c_1'(x)dx + k_1 = \int \cos x\ ctgxdx + k_1$ *şi integrând prin părţi avem*
$c_1(x) = \int (\sin x)' ctgxdx + k_1 = ctgx \sin x - \int (ctgx)' \sin xdx + k_1$
$= \cos x + \int \frac{1}{\sin x}dx + k_1 = \cos x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}dx + k_1$
$= \cos x + \frac{1}{2}\int ctg\frac{x}{2}dx + \frac{1}{2}\int tg\frac{x}{2}dx + k_1$
$= \cos x + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + k_1$.
Analog, $c_2(x) = \int c_2'(x)dx + k_2 = \int -\cos xdx + k_2 = -\sin x + k_2$.
Înlocuind $c_1(x)$ *şi* $c_2(x)$ *în (2.6), obţinem soluţia generală*

$$y(x) = k_1\frac{\sin x}{x} + k_2\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}(\cos x + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|) - \frac{\cos x}{x}\sin x \tag{2.7}$$

$$y(x) = k_1\frac{\sin x}{x} + k_2\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|. \tag{2.8}$$

Încheim acest exemplu cu observaţia că, din soluţia generală obţinută, partea

$$k_1\frac{\sin x}{x} + k_2\frac{\cos x}{x}$$

reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene, iar termenul

$$\frac{\sin x}{x}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Observaţia 2.1 *Prin metoda variaţiei constantelor nu se determină doar soluţia generală a ecuaţiei neomogene (0.5) ci, şi o soluţie particulară a acesteia.*

Exemplul 2.2 *Aflăm soluţia problemei Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{c} y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{ctgx}{x},\ x \neq 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array} \right. .$$

Soluţia generală a ecuaţiei este determinată în exemplul precedent. Trebuie doar să impunem condiţiile iniţiale ca să aflăm valorile constantelor k_1 *şi* k_2. *Avem*

$y'(x) = k_1(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}) - k_2(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}) + (\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}) \ln \left| tg\frac{x}{2} \right| + \frac{\sin x}{x} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2} \left| tg\frac{x}{2} \right|}$.

$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2k_1}{\pi} = 0$, *dă* $k_1 = 0$, *iar* $y'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2k_2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = 0$ *conduce la* $k_2 = 1$. *Deci, soluţia problemei Cauchy este* $y(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \ln \left| tg\frac{x}{2} \right|$.