AnMate_10_C_2023-11-03 03.11.2023

Teorema lui Fermat

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval, $a \in I$ astfel încât

i) a este punct de extrem local

[i.e. a este punct de maxim local sau punct de minim local

$\Updownarrow$

există $\delta > 0$ a.î. $f(x) \le f(a)$ pt. orice $x \in (a-\delta, a+\delta)$

ii) a este punct interior al lui I

iii) f este derivabilă în a

$\boxed{\text{Atunci } f'(a) = 0}$

Demonstrație

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

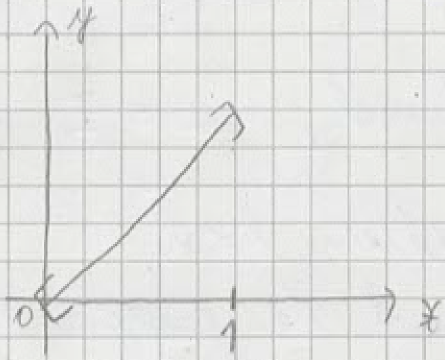
$$\Downarrow \text{ii)}$$

$$0 \le \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0$$

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x \quad (\forall)\ x \in [0,1]$



0 - minim local

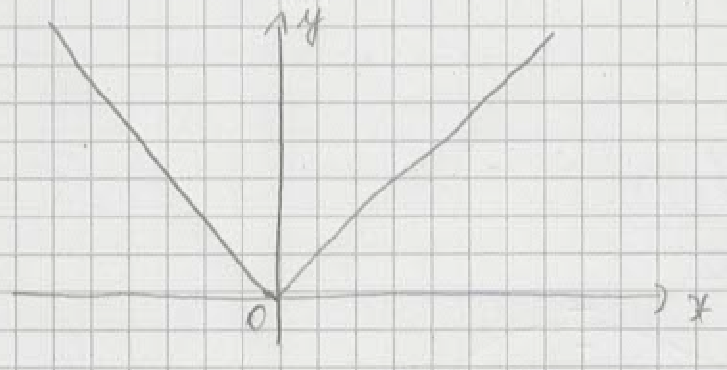
1 - maxim local

$f'(x) = 1 \quad (\forall)\ x \in [0,1]$

$f'(1) = 1 \neq 0$

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = |x| \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$



0 - minim global

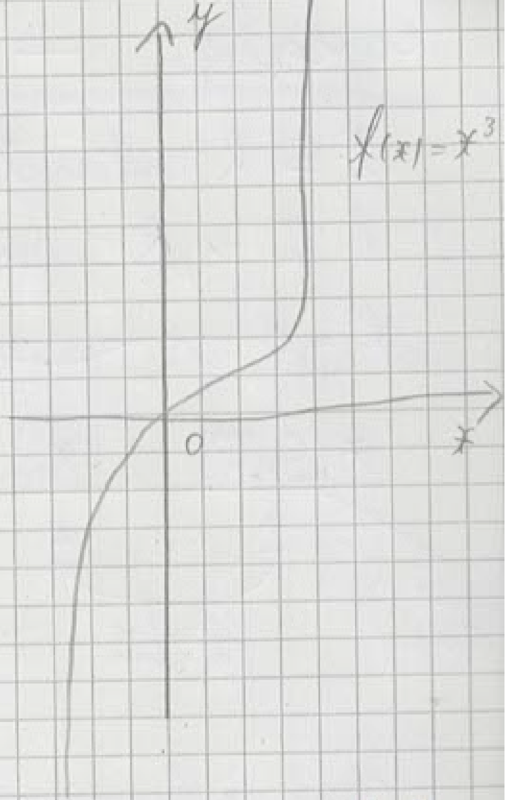
$f'(0)$ - nu există!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

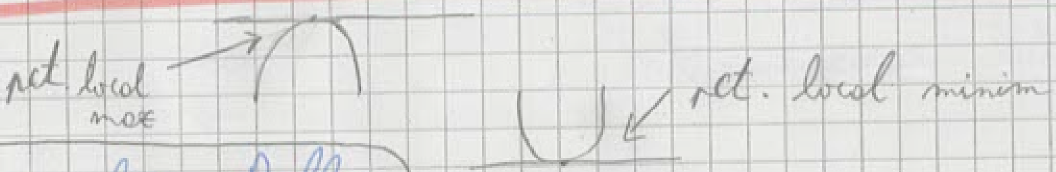
$f'(x) = 3x^2 \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

$f'(0) = 0$



0 – nu este pct. de extrem

* Panta în pct. de extr. este întotdeauna orizontală



Teorema lui Rolle

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât:

i) f continuă pe $[a, b]$

ii) f este derivabilă pe (a, b)

iii) $f(a) = f(b)$

Atunci $(\exists)$ un pct. $c \in (a, b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Consecințe — Șirul lui ROLLE

$I \subseteq \mathbb{R}$ interval

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabilă

$f' = 0 \longrightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n$

(capăt dreapta)

x	$c_s(I)$	x_1	$x_2 \dots$	x_{k-1}	$x_k \dots$	x_n	$c_d(I)$
	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$

(capăt stânga)

schimbare de semn

Orice schimbare de semn indică existența unei soluții a ecuației $f=0$ pe intervalul corespunzător.

EXEMPLU

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^{2x} - 6e^{x} + 4x + 4 \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 6e^{x} + 4 = 2(e^{2x} - 3e^{x} + 2)$

$f'(x) = 0 \iff e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

$e^{x} = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-2)(t-1) = 0$

$\Downarrow$

$t = 1 \Rightarrow e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$t = 2 \Rightarrow e^{x} = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	∞
f	$-$	$-$	$-$	$+$

(schimbare de semn)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = -1$

$f(\ln 2) = -$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Există o unică rădăcină a ecuației care se află în $(\ln 2, \infty)$

$$f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 6e^{\ln 2} + 4\ln 2 + 4 =$$
$$= \left(e^{\ln 2}\right)^2 - 6e^{\ln 2} + 4\ln 2 + 4 =$$
$$= 2^2 - 6 \cdot 2 + 4\ln 2 + 4 = 4\ln 2 - 4 =$$
$$= 4(\ln 2 - 1) < 0$$

$\ln 2 < 1$

$2 < e$

Teorema lui Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât:

i) f continuă pe $[a, b]$

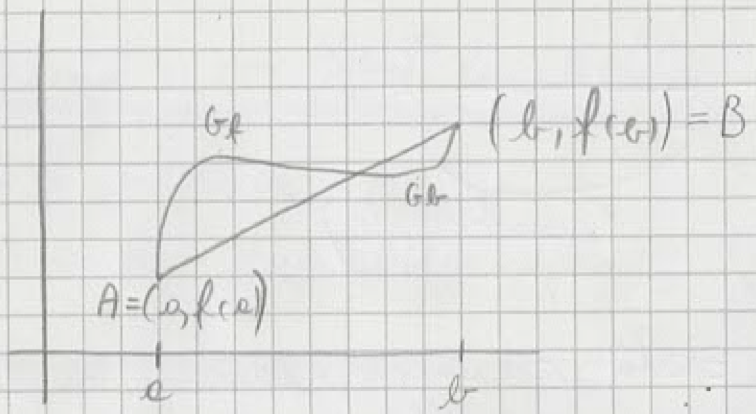
ii) f derivabilă pe (a, b)

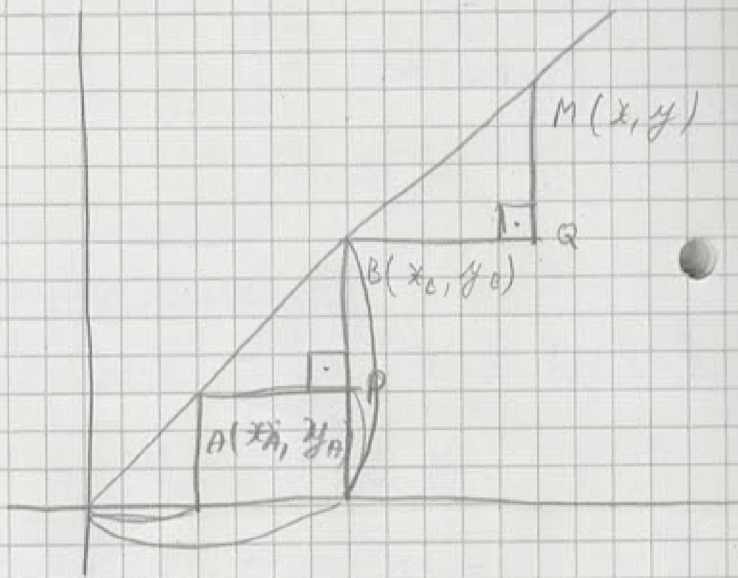
$g = f - h$

$g(a) = f(a) - h(a) = 0$

$g(b) = f(b) - h(b) = 0$

$\overset{\text{ROLLE}}{\Longrightarrow}$ există $c \in (a, b)$ cu $g'(c) = 0$





AB :

$$tg\,\alpha = \frac{BP}{PA} = \frac{MQ}{BQ}$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_B}{x - x_B}$$

$$AB:\ y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b)$$

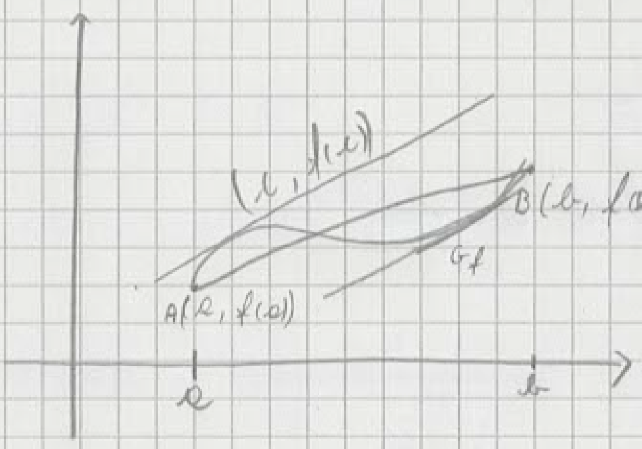
$$\boxed{y = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b)}$$

$$h(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - b)$$

$$g'(x) = (f - h)'(x) = $$
$$= (f'(x) - h'(x) = $$
$$= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



$m_{\text{tangentei lui } G_f \text{ în } (c, f(c))} = m_{AB}$

$f' = v$ $f = d$

C1 (consecință)

$I \subseteq \mathbb{R}$ interval

$f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă

α) $f'(x) \geq 0 \ (\forall)\, x \in I \Rightarrow f \uparrow$

β) $f'(x) \leq 0 \ (\forall)\, x \in I \Rightarrow f \downarrow$

γ) $f'(x) = 0 \ (\forall)\, x \in I \Rightarrow f$ constantă

C2

$I \subseteq \mathbb{R}$ interval
$x_0 \in I$
$f : I \to \mathbb{R}$
f derivabilă pe $I - \{x_0\}$
f continuă în x_0
există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ există $f'(x_0) = l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$

C3 Teorema lui DARBOUX

$I \subseteq \mathbb{R}$ interval
$f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă

$\Rightarrow f'$ are proprietatea lui Darboux!

EXEMPLE

1) $e^x \geq x+1 \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$e^x - x - 1 \geq 0 \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x - x - 1 \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$					0					$+\infty$
f'	$-$ $-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$ $+$	$+$	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$				$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		

$f(x) \geq f(0) \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$e^x - x - 1 \geq 0 \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1} \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$ derivabilă?

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' =$$

pentru $1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 \neq 0$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{(x^2+1)^2 - (2x)^2}}{(x^2+1)^2}} \cdot 2\, \frac{x'(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)}} \cdot 2\, \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+2)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - x^2}{\sqrt{(x+1)^2(x-1)^2}} \cdot \boxed{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - x^2}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \boxed{\frac{1}{x^2+1}} = 2 \cdot \frac{1 - x^2}{|x^2-1|} \cdot \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{x^2-1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Deci:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{1+x^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

f derivabilă în 1?

v1) $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \ldots$$

v2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} -\frac{2}{1+x^2} = -1 = f_d'(1)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2}{1+x^2} = 1 = f_s'(1)$

$\Rightarrow f$ nu este derivabilă în 1

Regula lui l'Hospital

„În anumite condiții” $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dacă există $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

$$\boxed{\text{„} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{”}}$$

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

EXEMPLE: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot e^x + \sin x}$

V1) (redactare completă)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot e^x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

Studiem $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x \cdot e^x + \sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\cos x + e^x + x \cdot e^x} = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2}$

Conform cu regula lui l'Hospital,
există $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot e^x + \sin x} = \frac{1}{2}$

V2) (redactare „uzuală")
nu este OK

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cdot e^x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x\cdot e^x + \sin x)'} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot \ln x = 0\cdot(-\infty) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{-\infty}{\underset{\infty}{=}} 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x = 0$$

Teorema lui TAYLOR

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

f continuă

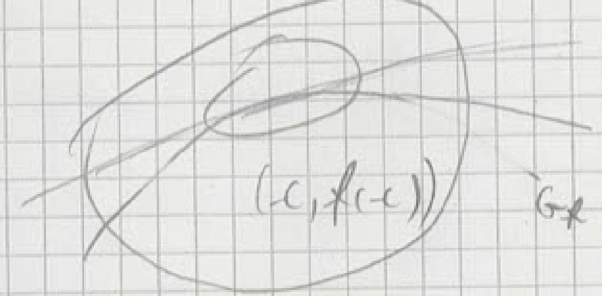
f derivabilă pe (a,b)

$\Rightarrow$ există $c\in(a,b)$

cu $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)}$$

polinom de gr. 1 în b



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$

$f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ există

$f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ continue

Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in [a,b]$ există ξ între α și β a.î.:

$$f(\beta) = \underbrace{f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}}_{\text{Polinomul Taylor de grad } n-1 \text{ al lui } f \text{ în } \alpha} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta-\alpha)^n}_{\text{restul sub forma lui Lagrange}}$$

restul sub forma lui Lagrange

Polinomul Taylor de grad $n-1$ al lui f în α

β – variabila.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = -\cos x \qquad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

$\alpha = 0$

$\beta = x$

$f(x) = -\cos x$

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f''(x) = \sin x$

$f''''(x) = -\cos x$

$f'''''(x) = -\sin x$

$f^{(VI)}(x) = --\cos x$

$f^{(VII)}(x) = \sin x$

$\vdots$

$(\forall)\, x \in \mathbb{R} \quad (\exists)\ c_x$ astfel încât:

$\downarrow$ $\to$ între 0 și x

y^x

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0) - x^n}{n!} +$$

$0 \quad \begin{smallmatrix} x \to 0 \\ n \to \infty \end{smallmatrix}$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$\pm \sin$

$\pm -\cos$

$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

$V_1)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{0}{\underset{0}{=}} ? \quad \frac{1}{2}$

$V_2)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos c_x}{3!}x^3\right)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\cos x_x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{x}{6}}_{\to 0}\underbrace{\cos c_x}_{\to 1}$

$= \frac{1}{2}$