

## C U R S U L 1 5

### 4. CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV (2)

#### 4.5. CALCULUL CIRCUITELOR DE CURENT ALTERNATIV

##### 4.5.1. Calculul rețelelor de curent alternativ prin metode simbolice.

La calculul circuitelor electrice de c.a. sinusoidal, apar sisteme de ecuații integro-diferențiale de forma (4.29):

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u,$$

ale căror soluții se deduc foarte greu prin metode matematice uzuale. Pentru simplificarea rezolvării acestor sisteme de ecuații, s-au elaborat diferite metode de reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale.

Fiecărei mărimi sinusoidale  $i$  se asociază biunivoc, după o anumită regulă, un simbol denumit **imagea mărimii respective**. În loc de a rezolva ecuațiile integro-diferențiale cu mărimile sinusoidale se vor rezolva ecuații mai simple cu simboluri. Folosind apoi metoda de reprezentare în sens invers, se determină mărimile sinusoidale din simbolurile lor determinate anterior. Pentru ca o metodă simbolică să fie avantajoasă este necesar ca:

- reprezentarea să fie biunivocă;
- transformarea directă și inversă să se facă fără dificultate;
- fiecărei operații cu mărimi sinusoidale să-i corespundă biunivoc o operație cu simboluri, la care calculul să fie mai simplu.

##### 4.5.1.1. Reprezentarea în complex simplificat a funcțiilor sinusoidale de timp.

Un număr complex  $\underline{z}$  (se notează cu bară dedesupt) poate fi scris sub trei forme diferite:

- forma algebrică:  $\underline{z} = a + j b$ ; (4.60)

- forma trigonometrică :  $\underline{z} = \rho (\cos \alpha + j \sin \alpha)$ ; (4.61)

- forma exponențială :  $\underline{z} = \rho e^{j\alpha}$ . (4.62)

În relația (4.60)  $a$  și  $b$  sunt numere reale,  $a$  fiind partea reală a numărului complex, iar  $b$  partea imaginară. Notăția unității imaginare se face cu  $j = \sqrt{-1}$  nu cu  $i$ , pentru a nu se confunda cu intensitatea curentului.

În relațiile (4.61) și (4.62),  $\rho$  reprezintă modulul numărului complex și este un număr real pozitiv,  $\alpha$  - argumentul numărului complex. Între  $a$ ,  $b$ ,  $\rho$  și  $\alpha$  există următoarele relații:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \alpha = a / \rho, \sin \alpha = b / \rho, \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (4.63a,b,c)$$

Un număr complex scris sub formă exponențială sau trigonometrică este determinat dacă i se cunosc modulul și argumentul său. O funcție sinusoidală de timp, de frecvență dată, este univoc determinată dacă i se cunoaște valoarea efectivă și faza inițială. Deci, putem asocia fiecărei mărimi sinusoidale un număr complex, asocierea fiind biunivocă.

Considerăm mărimea sinusoidală:

$$a(t) = \sqrt{2} A \sin (\omega t + \tau) . \quad (4.64)$$

**Imaginea sa în complex simplificat numită mărime complexă, notată cu  $\underline{A}$  (cu literă mare și cu bară dedesupt) este un număr complex având modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și argumentul egal cu faza inițială a mărimii sinusoidale:**

$$a \Leftrightarrow \underline{A} = A e^{j\tau} . \quad (4.65)$$

Dacă se amplifică imaginea în complex cu  $\sqrt{2} e^{j\omega t}$  rezultă:

$$\underline{A}\sqrt{2} e^{j\omega t} = A\sqrt{2} e^{j(\omega t + \tau)} = \sqrt{2} A [\cos(\omega t + \tau) + j \sin(\omega t + \tau)] \quad (4.66)$$

Din relația (4.66) se observă că partea imaginară este tocmai valoarea instantanee a mărimii sinusoidale, deci pentru trecerea inversă de la imagine la valoarea sinusoidală se va folosi relația:

$$a(t) = \operatorname{Im} \left[ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{A} \right]. \quad (4.67a)$$

Se poate face și o reprezentare în complex nesimplificat, când modulul numărului complex este valoarea maximă, iar argumentul este faza mărimii. Această reprezentare se notează cu literă mică și bară dedesupt.

$$a \Leftrightarrow \underline{a} = \sqrt{2} A e^{j(\omega t + \tau)}. \quad (4.67b)$$

În planul complex (planul lui Gauss), mărimea sinusoidală (în complex simplificat), se reprezintă printr-un vector fix, numit **fazor**, având modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și argumentul egal cu faza inițială a mărimii sinusoidale. În (fig.4.10) se prezintă reprezentarea fazorială a unor mărimi în complex simplificat.

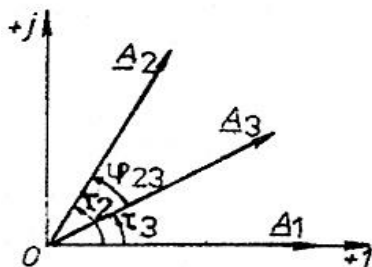
Mărimile sinusoidale cu faza inițială zero ( $\tau = 0$ ) se numesc **mărimi sinusoidale origine de fază** și au fazorii suprapuși axei reale (fazorul  $\underline{A}_1$  din figura 4.10). Defazajul dintre două mărimi sinusoidale  $a_2$  și  $a_3$

$$a_2 = \sqrt{2} A_2 \sin(\omega t + \tau_2) \text{ și } a_3 = \sqrt{2} A_3 \sin(\omega t + \tau_3)$$

este:

$$\varphi_{23} = \tau_2 - \tau_3 \quad (4.68a)$$

și este egal cu diferența argumentelor imaginilor în complex, adică, argumentul raportului lor:



$$\varphi_{23} = \tau_2 - \tau_3 = \arg \left( \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_3} \right). \quad (4.68b)$$

Fig.4.10 - Reprezentarea fazorială a trei mărimi sinusoidale.

În prezentul curs, se lucrează numai cu reprezentarea în complex simplificat, chiar dacă nu se precizează acest lucru.

Fazorii corespunzători reprezentării în complex

nesimplificat sunt niște fazori rotitori.

#### 4.5.1.2. Corespondența operațiilor cu mărimi sinusoidale în timp și operațiile cu imaginile lor în complex.

a) Sumei a două mărimi sinusoidale îi corespunde suma imaginilor în complex a mărimilor:

$$a_1 + a_2 \Leftrightarrow \underline{A}_1 + \underline{A}_2 . \quad (4.69)$$

b) Amplificării cu un scalar  $\lambda$  a unei mărimi sinusoidale îi corespunde amplificarea cu un scalar a imaginii în complex a mărimii:

$$\lambda a \Leftrightarrow \lambda \underline{A} . \quad (4.70)$$

c) Derivării în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde înmulțirea imaginii în complex a mărimii cu  $j\omega$ .

Dacă mărimea sinusoidală este  $a = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \tau)$ , derivata sa este:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{2} \omega A \cos(\omega t + \tau) = \sqrt{2} \omega A \sin\left(\omega t + \tau + \frac{\pi}{2}\right).$$

Reprezentarea în complex va fi:

$$\omega A e^{j(\tau + \pi/2)} = \omega A e^{j\tau} e^{j\pi/2} = j \omega \underline{A} .$$

Deci prin derivare se obține un fazor amplificat cu  $\omega$  și rotit în planul complex în sens trigonometric cu  $\pi/2$  (fig.4.11).

$$\frac{da}{dt} \Leftrightarrow j \omega \underline{A} . \quad (4.71)$$

d) Integrării în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde împărțirea imaginii ei în complex cu  $j\omega$ .

Integrând mărimea  $a$ , se obține:

$$\begin{aligned} \int a \, dt &= \int \sqrt{2} A \sin(\omega t + \tau) \, dt = -\sqrt{2} \frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \tau) = \\ &= \sqrt{2} \frac{A}{\omega} \sin\left(\omega t + \tau - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Trecând în complex valoarea integralei se obține:

$$\frac{A}{\omega} e^{j(\tau - \frac{\pi}{2})} = \frac{A}{j\omega}.$$

Deci rezultă corespondența integrării:

$$\int a \, dt \Leftrightarrow \frac{A}{j\omega}. \quad (4.73)$$

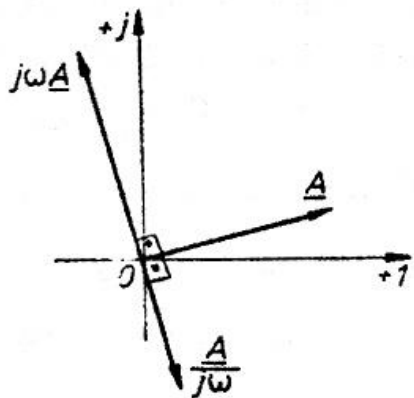


Fig.4.11 - Reprezentarea fazorială a unei mărimi sinusoidale, a derivatei și a integralei sale.

Prin integrare se obține un fazor cu modulul de  $\omega$  ori mai mic și rotit în planul complex în sens invers trigonometric cu  $\pi/2$  (fig.4.11).

Metoda reprezentării mărimilor sinusoidale în complex simplificat prezintă avantajul transformării ecuațiilor integro-diferențiale în ecuații algebrice liniare ale imaginilor în complex ale tensiunilor și curenților.

#### 4.5.1.3. Metodologia de rezolvare a circuitelor de c.a. folosind reprezentarea în complex simplificat.

Metodologia de rezolvare a circuitelor de c.a., folosind reprezentarea în complex, este următoarea:

- a) - se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitelor, în valori instantanee;

b) - se determină imaginile în complex ale mărimilor sinusoidale date și ale relațiilor integro-diferențiale, înlocuind derivarea prin înmulțirea cu  $j\omega$ , iar integrările prin împărțirea cu  $j\omega$  a imaginilor în complex ale mărimilor derivate respectiv integrate;

c) - se rezolvă ecuațiile liniare obținute, în raport cu imaginile funcțiilor necunoscute;

d) - se reprezintă în planul complex fazorii corespunzători mărimilor cunoscute și necunoscute, obținându-se așa numitele "**diagrame de fazori**", care dau o imagine sugestivă a mărimilor și defazajelor dintre mărimi;

e) - se determină valorile instantanee sinusoidale ale mărimilor necunoscute cu ajutorul relației (4.67).

### Aplicație.

Să se calculeze valoarea instantanee a intensității curentului ce trece printr-un circuit serie  $R, L, C$  (fig.4.12), alimentat la borne cu o tensiune sinusoidală:

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha),$$

prin metoda reprezentării în complex simplificat. Să se reprezinte diagrama de fazori.

a) - Ecuația integro-diferențială a circuitului este (4.29):

$$u_R + u_L + u_C = u,$$

$$R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha).$$

Se trec în complex simplificat mărimile și operatorii. Se obține:

$$R \underline{I} + j\omega L \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \underline{U}.$$

b) - Se determină imaginea în complex  $\underline{I}$  a curentului:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U e^{j\alpha}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

c) - Diagrama de fazori se reprezintă în figura 4.12b. Deoarece prezintă importanță numai defazajele dintre diferitele mărimi, se poate lua curentul ca origine de fază și se obține diagrama de fazori din figura 4.12c.

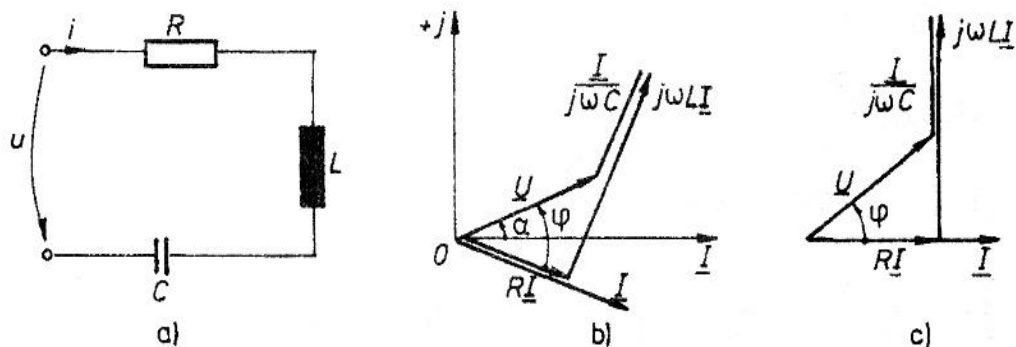


Fig.4.12 - a) Circuit serie **R,L,C**; b) diagrama de fazori; c) diagrama de fazori luând curentul ca origine de fază.

d) - Se determină valoarea instantanee a curentului:

$$i = I m \left[ \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] = I m \left[ \frac{\sqrt{2} U e^{j\alpha} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}} \right],$$

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin \left( \omega t + \alpha - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right).$$

S-a regăsit mult mai ușor relația (4.35).

#### 4.5.1.4. Caracterizarea în complex a circuitelor electrice liniare de curent alternativ

Circuitele electrice liniare de c.a. au fost caracterizate în paragraful 4.3. prin doi parametri reali ( $Z, \varphi$ ;  $Y, \varphi$ ; etc.), iar regimul lor energetic în paragraful 4.4. prin puterile activă  $P$ , reactivă  $Q$  și aparentă  $S$ .

Pentru caracterizarea circuitelor la a căror rezolvare se utilizează metoda reprezentării în complex, se folosesc parametrii complecși (**impedanța și admitanța complexă**) și **puterea complexă**.

**4.5.1.4.1. Impedanța complexă  $\underline{Z}$  a unei porțiuni de circuit pasive cu două borne** se definește ca **raportul dintre tensiunea complexă aplicată la borne și intensitatea complexă** . Dacă tensiunea și curentul au valorile instantanee:

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha) \text{ și } i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$$

rezultă impedanța complexă  $\underline{Z}$ :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha - \beta)} = \\ &= Z e^{j\varphi} = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi) = R + jX . \end{aligned} \quad (4.74)$$

**Impedanța complexă este un număr complex având modulul egal cu impedanța circuitului și argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală este rezistența circuitului iar partea imaginară reactanța circuitului** (fig.4.13a).

Impedanța complexă este un parametru complex de calcul care permite determinarea tuturor parametrilor reali ai circuitului și deci valoarea instantanee a curentului când se cunoaște tensiunea de alimentare și elementele componente ale circuitului.

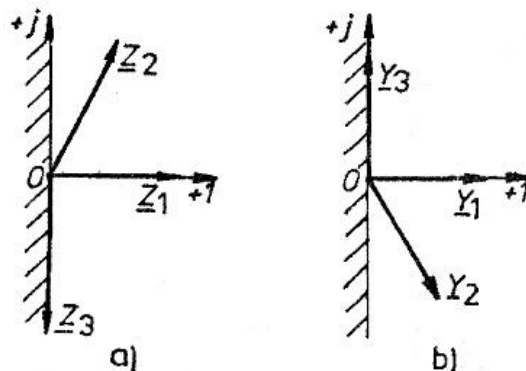


Fig.4.13 - a) Planul complex al impedanțelor; b) planul complex al admitanțelor.

**4.5.1.4.2. Admitanța complexă  $\underline{Y}$  a unei porțiuni de circuit pasive cu două borne** se definește ca **raportul dintre curentul complex din circuit și tensiunea complexă aplicată la borne**:



$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I e^{j\beta}}{U e^{j\alpha}} = \frac{I^{-j(\alpha-\beta)}}{U} = \\ &= Y e^{-j\varphi} = Y(\cos\varphi - j\sin\varphi) = G - jB.\end{aligned}\quad (4.75)$$

**Admitanța complexă este un număr complex având modulul egal cu admitanța circuitului și argumentul egal cu defazajul circuitului cu semn schimbat, partea reală egală cu conductanța circuitului iar partea imaginară egală cu susceptanța circuitului cu semn schimbat.**

Impedanța și admitanța complexă se pot reprezenta grafic în planul complex al impedanțelor, respectiv al admitanțelor. Deoarece  $R$  și  $G$  sunt întotdeauna pozitive, rezultă că nu se folosesc decât cadranele **I** și **IV**.

**4.5.1.4.3. Puterea complexă  $\underline{S}$**  absorbită de o porțiune de circuit cu două borne, se definește ca **produsul dintre tensiunea complexă aplicată la borne și curentul complex conjugat** din circuit ( s-a adoptat convenția de asociere pentru tensiune și curent de la receptoare ):

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\alpha} \cdot I e^{-j\beta} = UI e^{j(\alpha-\beta)} = \\ &= S e^{j\varphi} = S(\cos\varphi + j\sin\varphi) = P + jQ.\end{aligned}\quad (4.76)$$

**Puterea complexă este un număr complex al cărui modul este egal cu puterea aparentă și argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală este puterea activă, iar partea imaginară puterea reactivă.** Dacă valorile sunt pozitive înseamnă că puterile sunt absorbite de circuit iar dacă sunt negative puterile sunt cedate de circuit. Ea are în funcție de parametrii circuitului expresiile:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = \underline{U} \underline{Y} \underline{U}^* = \underline{Y} U^2 = \\ &= (R + jX) I^2 = [G - jB] U^2.\end{aligned}\quad (4.77)$$

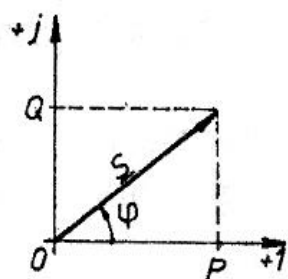


Fig.4.14 - Puterea complexă.

Puterea complexă  $\underline{S}$  se poate reprezenta în planul complex al puterilor (fig.4.14). În cazul circuitului pasiv, puterea activă  $P$  este pozitivă, deci fazorul  $\underline{S}$  se află în cadranele **I** sau **IV**. Pentru circuitele ce conțin surse de t.e.m., fazorul  $\underline{S}$  poate fi în orice cadran.

#### 4.5.1.5. Teorema lui Joubert.

În regim sinusoidal, datorită faptului că apar t.e.m. induse și datorită prezenței condensatoarelor, relațiile 2.25 și 2.26 din electrocinetică:

$$u_b = R i, \quad u_e \pm u_b = R i,$$

nu mai sunt valabile în valori instantanee.

Din relația de definiție a impedanței complexe pentru dipoli liniari și pasivi (4.74), rezultă:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \quad (4.78)$$

relație analogă cu legea lui Ohm stabilită pentru circuite de c.c. și se numește **forma complexă a legii lui Ohm** pentru circuite liniare și pasive.

Se consideră o latură activă a unui circuit electric (fig.4.15) care conține un rezistor cu rezistența  $R$ , o bobină ideală cu inductanța  $L$ , un condensator cu capacitatea  $C$  și un generator având t.e.m. instantanee  $u_{eG}$  cu sensul același cu al curentului prin latură. Tensiunea instantanee la bornele laturii este  $u_b$  (se consideră convenția de semne de asociere a tensiunii și a curentului de la receptoare)

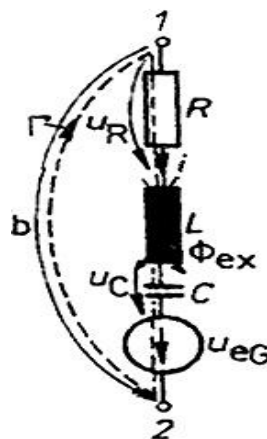


Fig.4.15 - Explicativă la demonstrarea teoremei lui Joubert.

Aplicând legea inducției electromagnetice conturului  $\Gamma$  format de latură și linia tensiunii la borne, având sensul același cu al curentului prin latură și sens contrar sensului tensiunii la borne, rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} + u_{eG}, \quad u_{eG} - \frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} = R i + \frac{1}{C} \int i dt - u_b. \quad (4.79)$$

Fluxul magnetic  $\Phi_{S\Gamma}$  este fluxul care străbate orice suprafață ce se sprijină pe conturul  $\Gamma$  și este compus din fluxul propriu al bobinei ( $L i$ ) și din fluxul magnetic exterior  $\Phi_{ext}$  produs de alți curenți din circuit:

$$\Phi_{S\Gamma} = L i + \Phi_{ext} . \quad (4.80)$$

Înlocuind relația (4.80) în relația (4.79), rezultă:

$$u_{eG} - \frac{d\Phi_{ext}}{dt} + u_b = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt . \quad (4.81)$$

Trecând relația de mai sus în complex simplificat, se obține:

$$\underline{U}_{eG} - j\omega\Phi_{ext} + \underline{U}_b = \left[ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \underline{I} = \underline{Z} \underline{I} . \quad (4.82)$$

Relațiile (4.81) și (4.82) reprezintă teorema lui Joubert sub formă instantanee și respectiv sub formă complexă (forma complexă generalizată a legii lui Ohm).

Dacă latura nu este cuplată inductiv cu alte laturi,  $\Phi_{ext} = 0$  și deci:

$$\underline{U}_{eG} + \underline{U}_b = \underline{Z} \underline{I} . \quad (4.83)$$

Relația (4.83) este analogă formal cu relația (2.25). În cazul în care convenția de semne adoptată nu este cea de la receptoare ci cea de la generatoare, relațiile (4.81), (4.82) și (4.83) sunt valabile prin înlocuirea lui  $u_b$  respectiv  $\underline{U}_b$  cu  $-u_b$ , și  $-\underline{U}_b$ .

#### 4.5.1.6. Forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff

**4.5.1.6.1. Prima teoremă a lui Kirchhoff.** Se consideră un nod oarecare de rețea  $N$  (fig.4.16) și o suprafață  $\Sigma$  care înconjoară acest nod. Aplicând legea conservării sarcinii electrice pentru regim cvasistaționar, se obține în valori instantanee și în complex:

$$\sum_{k \in N} i_k = 0, \Leftrightarrow \sum_{k \in N} \underline{I}_k = 0. \quad (4.84)$$

**Suma algebrică a imaginilor în complex ale curenților din laturile unei rețele ce converg într-un nod de rețea este nulă.**

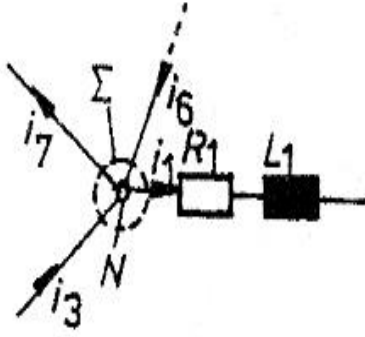


Fig.4.16 - Explicativă la demonstrarea primei teoreme a lui Kirchhoff.

Observație. Relația nu este valabilă pentru modulele sau valorile efective ale curenților. Ea se va aplica la N - S noduri, unde S este numărul de subrețele (rețele care nu au o continuitate galvanică, dar au între ele o cuplare magnetică).

**4.5.1.6.2. Teorema a doua a lui Kirchhoff.** Aplicând teorema lui Joubert laturii  $j$  a ochiului  $O_p$  (fig.4.17) se obține în complex:

$$\underline{U}_{ej} + \underline{U}_{bj} = R_j \underline{I}_j + j \left( \omega L_{jj} - \frac{1}{\omega C_j} \right) \underline{I}_j + j \omega \Phi_{extj}. \quad (4.85)$$

Fluxul magnetic  $\Phi_{extj}$  este produs de cuplajele magnetice ce există între bobinele din această latură și celelalte laturi ale rețelei, deci:

$$j \omega \Phi_{extj} = j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L L_{jk} \underline{I}_k. \quad (4.86)$$

Procedând analog pentru toate laturile ochiului  $O_p$  și însumând membru cu membru, rezultă:

$$\sum_{j \in O_p} \underline{U}_{ej} + \sum_{j \in O_p} \underline{U}_{bj} = \sum_{j \in O_p} \left[ \underline{Z}_j \underline{I}_j + j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L \underline{L}_{jk} \underline{I}_k \right],$$

$$\text{unde: } \underline{Z}_j = R_j + j \left( \omega L_{jj} - \frac{1}{\omega C_j} \right),$$

reprezintă impedanța complexă a laturii  $j$ . Din teorema potențialului electric rezultă că suma tensiunilor de pe o curbă închisă este zero și deci relația de mai sus devine:

$$\sum_{j \in O_p} \underline{U}_{ej} = \sum_{j \in O_p} \left[ \underline{Z}_j \underline{I}_j + j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L \underline{L}_{jk} \underline{I}_k \right]. \quad (4.87a)$$

Relația (4.87a) reprezintă forma complexă a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff: **suma algebrică a imaginilor în complex ale t.e.m. ale generatoarelor din laturile aparținând unui ochi de rețea, este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune complexe din laturile respective.**

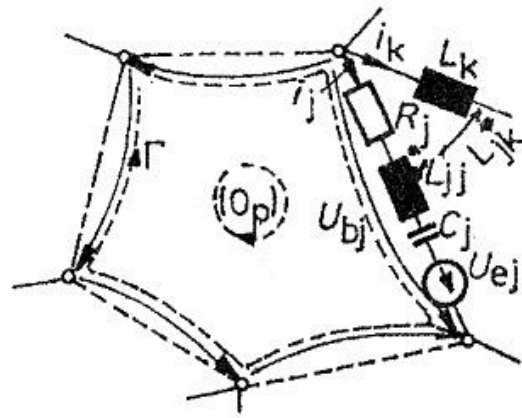


Fig.4.17 - Explicativă la demonstrarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff.

Dacă pe laturile ochiului există și surse de curent, atunci în relația (4.87a) din membrul drept mai apar și tensiunile de la bornele sursele de curent, luate cu plus dacă au sensul parcurgerii ochiului și cu minus în caz contrar:

$$\sum_{j \in O_p} \underline{U}_{ej} = \sum_{j \in O_p} \left[ \underline{Z}_j \underline{I}_j + j \omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L \underline{L}_{jk} \underline{I}_k + \sum_{j \in O_p} \underline{U}_{bj} \right]. \quad (4.87b)$$

T.e.m. se ia ca semnul plus dacă există concordanță între sensul t.e.m. și sensul de parcurgere al ochiului și cu semnul minus în caz contrar. Căderea de tensiune  $\underline{Z}_j \underline{I}_j$

se ia cu plus dacă sensul de parcurgere al ochiului coincide prin latură cu sensul curentului. Căderea de tensiune pe inductanțele mutuale se iau cu plus dacă curenții  $\underline{I}_j$  și  $\underline{I}_k$  au același sens față de bornele polarizate și dacă sensul lui  $\underline{I}_j$  prin latură coincide cu sensul de parcurgere al laturii. Orice schimbare modifică semnul, deci două schimbări păstrează semnul plus (vezi aplicația de mai jos).

#### 4.5.2. Metoda de rezolvare a rețelelor de curent alternativ folosind toremele lui Kirchhoff în complex.

##### Terminologie

**Nodul** unei rețele electrice este un punct unde concură cel puțin trei elemente de circuit (generator de t.e.m, generator de curent, rezistor, bobină sau condensator). Numărul de noduri se notează cu **N**

**Latura** unui circuit electric este o porțiune dintre două noduri vecine. Latura este o porțiune dintr-un circuit în care intensitatea curentului electric de conducție este constantă. Ea se găsește între două noduri vecine (care marchează și capetele laturii) și nu poate conține trei noduri. Numărul de laturi se notează cu **L**.

**Ochiul** este o succesiune de laturi ce formează o curbă închisă. Fiecare latură fiind parcursă o singură dată. Numărul de ochiuri independente se notează cu **O**. Un sistem de ochiuri formează un sistem independent, dacă fiecare ochi conține cel puțin o latură ce nu aparține celorlalte ochiuri și în final sistemul trebuie să conțină **toate laturile** rețelei.

Numărul de ochiuri independente **O** în circuitele de curent continuu este dat de relația lui Euler:

$$O = L - N + 1 . \quad (4.88)$$

Pentru rețelele de curent alternativ mai apar noțiunile de rețele **conexe** și rețele **neconexe**.

O rețea se numește **conexă** dacă oricare două noduri ale ei pot fi unite printr-o curbă închisă dusă numai prin laturi (au o legătură galvanică). Rețelele **neconexe** sunt acele rețele ale căror părți (subrețele) conexe, izolate unele de altele, pot interacționa însă prin inducție electromagnetică (cuplaj inductiv sau magnetic).

Dacă se notează cu **L** numărul de laturi, cu **N** numărul de noduri, cu **O** numărul de ochiuri și cu **S** numărul de subrețele conexe, relația dintre ele este:

$$O = L - N + S.$$

Pentru rezolvarea circuitelor de curent alternativ prin metoda teoremelor lui Kirchhoff se procedează astfel:

- 1 - Se stabilește numărul  $S$  de subrețele;
- 2 - Se stabilește numărul  $N$  de noduri ale rețelei;
- 3 - Se stabilește numărul  $L$  de laturi ale rețelei;
- 4 - Se stabilesc cele  $O$  ochiuri independente;
- 5 - Se trec în complex simplificat t.e.m ale rețelei, curenții surselor de curent și se stabilesc impedanțele complexe ale laturilor;
- 6 - Pe fiecare latură a rețelei se figurează un curent complex cu sensul arbitrar ales. Dacă există o sursă de curent, curentul din latură este chiar curentul sursei;
- 7 - Se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff pentru  $N - S$  noduri;
- 8 - Se scrie cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru cele  $O$  ochiuri independente ale rețelei ( se numește ochi independent față un sistem de ochiuri dat, ochiul de rețea a cărui existență nu poate fi dedusă din cunoașterea ochiurilor sistemului dat, sau altfel spus, ochiul independent conține cel puțin o latură de rețea care nu a fost conținută de celelalte ochiuri ale sistemului de ochiuri ale rețelei, iar în final cele  $O$  ochiuri vor conține toate laturile rețelei). Pentru scrierea celei de a doua teoreme se va parcurge ochiul de trei ori: o dată pentru a scrie căderile de tensiune pe impedanțele ochiului  $\underline{Z}_k \underline{I}_k$  cu semnul plus dacă sensul de parcurgere coincide cu sensul curentului și cu semnul minus în caz contrar și tensiunile de la bornele surselor de curent, a doua oară pentru căderile de tensiune pe inductanțele mutuale  $j\omega L_{kj} \underline{I}_j$  luate cu plus dacă sensul de parcurgere al ochiului prin bobina  $k$  și sensul curentului prin bobina  $j$  au același sens față de bornele polarizate ale bobinelor  $k$  și  $j$  și cu semnul minus în caz contrar, iar a treia oară se iau t.e.m  $\underline{U}_{ek}$  cu semnul plus dacă au același sens cu sensul de parcurgere al ochiului și cu semnul minus în caz contrar;
- 9 - Se rezolvă sistemul de  $L$  ecuații cu  $L$  necunoscute complexe, rezultând valorile complexe ale curenților din laturi;
- 10 - Se desenează diagrama de fazori ai curenților și ai t.e.m. Pe diagramă se poate vedea dacă prima teoremă a lui Kirchhoff este verificată;
- 11 - Se verifică rezultatele calculelor prin bilanțul puterilor:

$$\sum_{k=1}^L \underline{U}_{ek} \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^L \underline{U}_{bk} \underline{J}_k^* = \sum_{k=1}^L \underline{Z}_k \underline{I}_k^2 + j\omega \sum_{k=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^L L_{kj} \underline{I}_k \underline{I}_j \cos(\alpha_k - \alpha_j) = P + jQ,$$

unde  $L_{kj}$  se ia cu plus dacă curenții prin cele două bobine  $k$  și  $j$  au același sens față de bornele polarizate. Puterea activă și puterea reactivă absorbite de rețea se pot calcula și cu alte relații :

- puterea activă absorbită de receptoare este:

$$P = \sum R_k I_k^2,$$

- puterea reactivă absorbită de receptoare este:

$$Q = \sum_{k=1}^L (\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}) I_k^2 + 2\omega \sum_{k=1}^L \sum_{j>k}^L L_{kj} I_k I_j (\cos \alpha_k - \cos \alpha_j);$$

12 – Se trec valorile complexe ale curenților în valori instantanee.

### Aplicație.

Să se rezolve rețeaua electrică din figura 4.18. Se consideră că se cunosc valorile t.e.m., impedanțelor laturilor și inductanțelor mutuale.

Rețeaua are trei noduri (N=3, A,B,C), două subrețele (S=2), și patru laturi (L=4). Pe cele patru laturi ale rețelei se figurează curenții  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  și  $\underline{I}_4$  cu sensurile arbitrare alese. Prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată nodului A și cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff ochiurilor 1,2 și 4, dau sistemul de patru ecuații cu patru necunoscute în valori complexe:

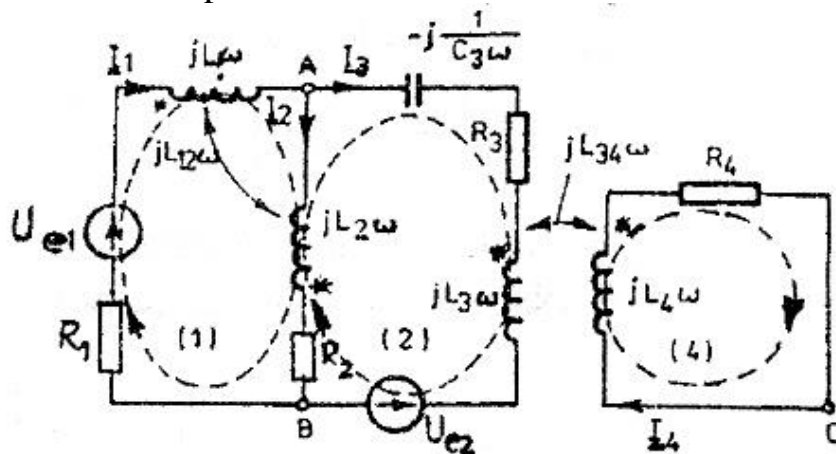


Fig.4.18 - Schema electrică rezolvată la aplicație.

Pentru nodul A prima teoremă a lui Kirchhoff va fi:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0;$$

Pentru ochiurile 1,2 și 4 teorema a doua a lui Kirchhoff va da ecuațiile:



$$\begin{aligned}\underline{U}_{e1} &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega L_{12}\underline{I}_2 - j\omega L_{21}\underline{I}_1; \\ -\underline{U}_{e3} &= -(R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 + \left(R_3 + j\omega L_3 - j\frac{1}{\omega C_3}\right)\underline{I}_3 + j\omega L_{21}\underline{I}_1 - j\omega L_{34}\underline{I}_4; \\ 0 &= \underline{I}_4(R_4 + j\omega L_4) - j\omega L_{43}\underline{I}_3.\end{aligned}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se determină imaginile în complex ale curenților din laturi. Se va face verificarea rezultatelor prin bilanțul puterilor. Dacă rezultatele sunt corecte, cu ajutorul regulii de trecere inverse (4.67) se obțin valorile instantanee ale curenților.

### 4.5.3. Metoda impedanțelor și a admitanțelor complexe echivalente.

Se consideră un circuit dipolar la bornele căruia se aplică tensiunea  $u$ , având imaginea în complex  $\underline{U}$ :

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j\alpha}.$$

Prin acest circuit va circula un curent de intensitate  $i$  având imaginea în complex  $\underline{I}$ :

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow \underline{I} = Ie^{j\gamma},$$

intensitatea și tensiunea fiind asociate după regula de la receptoare.

**4.5.3.1. Impedanța complexă echivalentă** este egală cu raportul dintre imaginea în complex a tensiunii aplicate și imaginea în complex a intensității curentului din circuit:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\gamma}} = Ze^{j(\alpha-\gamma)} = Ze^{j\varphi} = R_e + jX_e \quad (4.89)$$

unde  $R_e$  reprezintă rezistența echivalentă a circuitului, iar  $X_e$  reactanța echivalentă a circuitului.  $R_e$  este întotdeauna pozitivă, iar  $X_e$  poate fi pozitivă, negativă sau nulă.

**4.5.3.2. Admitanța complexă echivalentă** este egală cu raportul dintre imaginea în complex a intensității curentului din circuit și imaginea în complex a tensiunii aplicate:

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\gamma}}{U e^{j\alpha}} = Y e^{j(\gamma-\alpha)} = Y e^{-j\varphi} = G_e + jB_e, \quad (4.90)$$

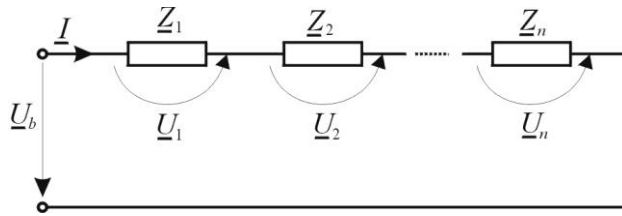
unde  $G_e$  reprezintă conductanța echivalentă și este întotdeauna pozitivă, iar  $B_e$  reprezintă susceptanța echivalentă și poate fi pozitivă, negativă sau nulă.

Din relațiile (4.89) și (4.90) de definiție ale impedanței și admitanței complexe echivalente se observă că există relația:

$$\underline{Z}_e \underline{Y}_e = 1.$$

#### 4.5.3.3. Impedanța echivalentă a circuitului format din impedanțe complexe necuplate magnetic legate în serie.

Se consideră un circuit format din impedanțele  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$  conectate în serie alimentate pe la borne cu tensiunea  $\underline{U}$  (figura (4.19)).



Fiind conectate în serie, impedanțele sunt parcurse de același curent complex  $\underline{I}$ . Aplicând pentru acest circuit teorema a II-a a lui Kirchhoff în complex, obținem:

Fig.4.19 - Conexiunea serie a impedanțelor.

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \dots + \underline{U}_n - \underline{U} = 0.$$

Ținând seama de relația tensiunii  $\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k$  și de faptul că impedanțele fiind conectate în serie (intensitatea curentului este aceeași),

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \dots = \underline{I}_n = \underline{I}$$

rezultă:

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_n \underline{I}_n = \underline{I} \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

Utilizând relația (4.89) a impedanței echivalente rezultă:

$$\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k, \quad R_e = \sum_{k=1}^n R_k, \quad X_e = \sum_{k=1}^n X_k, \quad (4.91 \text{ a,b,c})$$

deci:

**Impedanța complexă echivalentă la legarea în serie a dipolilor pasivi, necuplați inductiv, este egală cu suma impedanțelor complexe a dipolilor, rezistența echivalentă este egală cu suma rezistențelor, iar reactanța echivalentă este egală cu suma reactanțelor dipolilor.**

Relațiile (4.91a) este adevărată numai pentru impedanțe complexe și nu este corectă pentru modulele lor.

#### 4.5.3.4. Impedanța echivalentă a circuitului format din impedanțe complexe necuplate magnetic, legate în paralel.

Considerăm un circuit format din  $n$  impedanțe conectate în paralel (figura 4.20) alimentate pe la borne cu tensiunea  $\underline{U}$ . Intensitatea curentului care trece prin impedanța  $\underline{Z}_k$  se notează cu  $\underline{I}_k$  iar intensitatea curentului total cu  $\underline{I}$ . Conform primei teoreme a lui Kirchhoff aplicată nodului 1 rezultă relația:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \dots$$

$$\dots + \underline{I}_n = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k \quad (4.92)$$

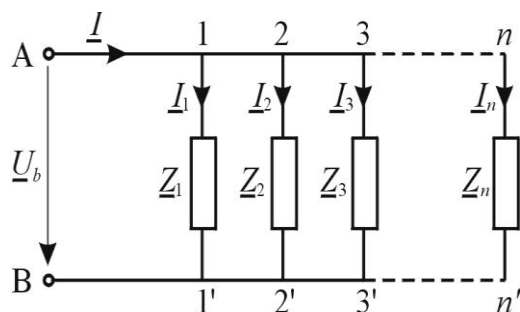


Fig.4.20 - Conexiunea paralel a impedanțelor.

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru ochiurile A11`B, A22`B, A33`B, ..., Ann`B obținem:

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{U} ; \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{U} ; \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = \underline{U} ; \underline{Z}_n \underline{I}_n = \underline{U} .$$

Din relațiile de mai sus rezultă expresiile intensităților curenților  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3 \dots \underline{I}_n$  care permit calculul curentului total:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \dots + \underline{I}_n = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} + \dots + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_n} = \underline{U} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k},$$

de unde rezultă expresia impedanței echivalente:

$$\underline{Z}_{ep} = \frac{U}{\underline{I}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}} \quad ; \quad \frac{1}{\underline{Z}_{ep}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k},$$

sau:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ep}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}, \quad \underline{Y}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k, \quad G_e = \sum_{k=1}^n G_k, \quad B_e = \sum_{k=1}^n B_k. \quad \text{(4.93a,b,c, d)}$$

Deci: **Admitanța complexă echivalentă la legarea în paralel a dipolilor pasivi, necuplați inductiv, este egală cu suma admitanțelor complexe a dipolilor, conductanța echivalentă este egală cu suma conductanțelor, iar susceptanța echivalentă este egală cu suma susceptanțelor dipolilor.**

Relațiile (4.93 a și b) nu sunt adevărate decât pentru mărimi complexe, pentru modulele lor nu sunt adevărate.

## TEME DE STUDIU

Test 1.

Cum se poate trece în complex simplificat o mărime sinusoidală ?.

Test 2.

Care este regula de trecere de la imaginea în complex simplificat a unei mărimi la valoarea instantanee ?.

Test 3.

Care este corespondența dintre operațiile cu mărimi sinusoidale și operațiile cu imaginile lor în complex simplificat ?.

Test 4.

Care este corespondența operațiilor cu mărimi sinusoidale și operațiile cu mărimile respective în complex simplificat ?.

Test 5.

Care este expresia impedanței complexe ?. Ce reprezintă partea reală dar cea imaginară a impedanței complexe?.

Test 6.

Ce reprezintă modulul respective argumentul impedanței complexe ?.

Test 7.

Care este expresia admitanței complexe ?. Ce reprezintă partea reală dar cea imaginară a admitanței complexe?.

Test 8.

Ce reprezintă modulul respective argumentul admitanței complexe ?.

Test 9.

Care este expresia puterii complexe ?. Ce reprezintă partea reală dar cea imaginară a puterii complexe?.

Test 10.

Ce reprezintă modulul respective argumentul puterii complexe ?.

Test 11.

Care este expresia teoremei lui Joule, în valori instantanee și în valori complexe?.

Test 12.

De câte ori se parcurge un ochi de rețea la aplicarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff în complex ?. Cum se iau semnele pentru căderile de tensiune și pentru t.e.m. ?

Test 13.

Care este relația lui Euler pentru circuitele de curent alternativ?.

Test 14.

Care este valoarea impedanței echivalente complexe la conexiunea serie a impedanțelor fără inductivități mutuale ?.

Test 15.

Care este valoarea impedanței echivalente complexe la conexiunea paralel a impedanțelor fără inductivități mutuale ?.

Test 16.

Ce este o rețea conexă ? . Ce este o rețea neconexă ?.

Test 17.

Puterea activă absorbită de bobine este:

- a- zero;
- b- mereu pozitivă;
- c- mereu negativă.

Test 18.

Puterea activă absorbită de condensatoare este:

- a- zero;
- b- mereu pozitivă;
- c- mereu negativă.

Testul 19.

Care sunt corespondențele operațiilor cu mărimi instantanee și cele complexe ?.

Test 20.

Care este unitatea de măsură a impedanței ?.

- a- C;
- b- V;
- c-  $\Omega$ .

Test 21.

Care este unitatea de măsură a defazajului?.

- a- C;
- b- rad;
- c- V.

Test 22.

Care este unitatea de măsură a puterii active ?.

- a- W;
- b- VA;
- c- VAr.

Test 23.

Care este unitatea de măsură a puterii reactive ?.

- a- W;
- b- VA;
- c- VAr.

Test 24.

Care este unitatea de măsură a puterii aparente ?.

- a- W;
- b- VA;
- c- VAr.

Test 25.

Care este unitatea de măsură a factorului de putere ?.

- a- A;
- b- V;
- c- Nu are unitate.