Capitolul 1 - Elemente de teoria funcţiilor complexe

1 Exerciţii

Exerciţiul 1.1. *Reprezentaţi în planul complex mulţimea punctelor de afix* $z = x + jy$ *definite prin:*
1. $|z-j| \leq 2$; *2.* $|z-2| - |z+2| < 2$; *3.* $|z-1| < |z-2|$;
4. $1 < |2z+3-2j| < 3$; *5.* $|j-z| > 4$; *6.* $\begin{cases} Im\ z = -3 \\ -1 < Re\ z < 2 \end{cases}$;
7. $\left|\frac{1-z}{1+z}\right| < 3$; *8.* $\begin{cases} |z-1| > 3 \\ 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$; *9.* $\begin{cases} |1+2j-z| < 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Exerciţiul 1.2. *Rezolvaţi ecuaţiile:*

1. $z^2 - 2(3+2j)z + 2 + 8j = 0$;

2. $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$.

Exerciţiul 1.3. *Determinaţi modulul si argumentul principal al numărului complex* $\frac{(1-j)^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{(-\sqrt{3}+j)^2\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

Exerciţiul 1.4. *Calculaţi:*
1. $\sqrt{j}$; *2.* $\sqrt[3]{-2-2j}$; *3.* $\sqrt[8]{\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}}$; *4.* $\sqrt[4]{1-j}$; *5.* $\sqrt[6]{\frac{-\sqrt{3}+j}{-2-2j}}$.

Exerciţiul 1.5. *Rezolvaţi ecuaţiile:*
1. $z^{10} + j = 0$; *2.* $z^3 = 1 + j$, *3.* $z^4 + 1 = 0$.

Exerciţiul 1.6. *Scrieţi se scrie sub forma* $u + jv$ *numerele:*
1. $Log(-2j)$; *2.* $Log(-1-j)$; *3.* $e^{2+\frac{\pi}{4}j}$; *4.* $(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})^5$;
5. $\sin(\frac{\pi}{2} - j\ln 2)$; *6.* $\cos(\frac{\pi}{3} - 2j)$; *7.* $ch(1 + j\frac{\pi}{6})$; *8.* $sh(j\frac{\pi}{2})$.

Exerciţiul 1.7. *Rezolvaţi ecuaţiile*
1. $chz - shz = 1 + j$; *2.* $\sin z = 10$; *3.* $tgz = 2$.

Exercițiul 1.8. *Determinați imaginea prin funcția* $f(z) = \frac{1}{z}$ *a mulțimilor* $A = \{z = x + jy \in \mathbf{C}\colon\ x = a,\ a \in \mathbf{R}\}$ *și* $B = \{z = x + jy \in \mathbf{C}\colon\ y = b,\ b \in \mathbf{R}\}$.

Exercițiul 1.9. *Aflați punctele în care următoarele funcții sunt derivabile și calculați derivatele lor în aceste puncte:*

1. $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + j(3xy + 3x - 4y)$;
2. $f(z) = 2xy - y^3 - j(2x + xy)$;
3. $f(z) = x^2 - 4xy - y + j(3x - y^2)$;
4. $f(z) = z^2 + 2z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + z - 2\bar{z}$;
5. $f(z) = 2z^2 - z\bar{z} - \bar{z}^2 - 3z + j\bar{z}$;
6. $f(z) = z^2 + z\bar{z} - \bar{z}^2 + 3z - \bar{z}$;
7. $f(z) = z^3 + 2jz^2\bar{z} - j\bar{z}^3 + 7z + 4jz\bar{z}$;
8. $f(z) = z^3 + 5z\bar{z}^2 - (j + 1)z + 2\bar{z}^3 - 4\bar{z}$.

Exercițiul 1.10. *Aflați constantele, astfel încât următoarele funcții să fie olomorfe pe* $\mathbf{C}$ *(întregi):*

1. $f(z) = ax^2 - 2y^2 + bx + j(cxy - y)$;
2. $f(z) = e^x \cos y + ax + j(e^x \sin y + 2y + bx)$;
3. $f(z) = chx(\cos y + a \sin y) + jshx(\cos y + b \sin y)$;
4. $f(z) = x^2 + axy + by^2 + j(cx^2 + dxy + y^2)$;
5. $f(z) = z^2 + 3(b^2 - 1)z\bar{z} - 2(b^3 - 1)\bar{z}^2 + 2z + (b - 1)\bar{z}$.

Exercițiul 1.11. *Aflați funcțiile olomorfe* $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ *știind că:*

1. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2,\ f(0) = 3j$;
2. $u(x, y) = x^2 - 2x - y^2,\ f(1) = -1$;
3. $u(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2+y^2},\ f(1) = 0$;
4. $v(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y),\ f(0) = 0$;

5. $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $f(e) = 1$;

6. $v(x,y) = arctg\frac{y}{x}$, $f(1) = 0$;

7. $u(x,y) = \varphi(ax+by)$, $f(0) = 0$, $\varphi \in C^2$, $a, b \in \mathbf{R}$;

8. $v(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}+x)$, $\varphi \in C^2$.

Exerciţiul 1.12. *Determinaţi parametrul real a pentru care funcţia* $f(z) = u(x,y)+jv(x,y)$, *cu* $u(x,y) = (a^2-3)e^{2x}\cos 2y+(1-a)x^2+y^2$, *este olomorfă. Ştiind că* $f(0) = 1+j$, *calculaţi* $f'(0)$.

Exerciţiul 1.13. *Calculaţi integralele:*

1. $\int\limits_{C_3} \bar{z}dz$, $C_3 = C_3' \cup C_3''$, $\begin{cases} C_3' : \ z = t, \ t \in [0,1]; \\ C_3'' : \ z = 1+jt, \ t \in [0,1]; \end{cases}$;

2. $\int\limits_{C_1} z^3 dz$, $C_1 : z = 2e^{jt}$, $t \in [0,\pi]$;

3. $\int\limits_{C_2} z^3 dz$, $C_2 : z = t$, $t \in [2,-2]$.

Exerciţiul 1.14. *Folosind teorema lui Cauchy şi formulele integrale ale lui Cauchy, calculaţi integralele:*

1. $\int\limits_{C} (\bar{z} - z^4\cos^2 z)dz$, $C : z = 3e^{jt} - j$, $t \in [0,2\pi]$;

2. $\int\limits_{C} (4\bar{z} - z\sin z + e^{\frac{1}{z}})dz$, $C : z = \frac{1}{2}e^{jt} + j$, $t \in [0,2\pi]$;

3. $\int\limits_{C} (\sin z^2 + \cos\frac{1}{z} - 2\bar{z})dz$, $C : z = e^{jt} + 2j$, $t \in [0,2\pi]$;

4. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z^2-1}dz$; *5.* $\int\limits_{|z|=2} \frac{z}{z^2-1}dz$; *6.* $\int\limits_{|z|=3} \frac{1}{z^2+4}dz$; *7.* $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$;

8. $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{1-z}dz$; *9.* $\int\limits_{|z|=2} \frac{ze^{j\frac{\pi z}{2}}}{z-1}dz$; *10.* $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z}{z^4+1}dz$;

11. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}dz$; *12.* $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$.

Exerciţiul 1.15. *Dezvoltaţi în serie Laurent, în jurul punctului* $z = 0$, *următoarele funcţii.*

1. $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(1-z)^2}$; *2.* $f(z) = \frac{ctgz}{z^3}$; *3.* $f(z) = \frac{arctgz}{z^2}$.

Exerciţiul 1.16. *Folosind teorema reziduurilor, calculaţi integralele:*

1. $\int\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{z^2-2z-8}dz$; *2.* $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z+3)}dz$; *3.* $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+1}dz$;

4. $\int\limits_{|z|=2} z^4 e^{\frac{1}{z}} dz$; *5.* $\int\limits_{|z+2j|=2} \frac{ch\frac{\pi z}{2}}{(z+j)^4} dz$; *6.* $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz$;

7. $\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2-1} dz$; *8.* $\int\limits_{|z-j|=3} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} dz$; *9.* $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{z-j}}}{z^2+1} dz$;

10. $\int\limits_{|z-j|=4} \frac{\cos z}{(z-j)^3} dz$; *11.* $\int\limits_{|z-1-2j|=2} \frac{1}{z^3+8} dz$; *12.* $\int\limits_{|z-1-j|=2} \frac{z-1}{(z^2+4)(z-j)} dz$.

Exerciţiul 1.17. *Calculaţi integralele reale:*

1. $\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{2+\sin x} dx$; *2.* $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5-4\cos x} dx$; *3.* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos x+a^2} dx$, $a \notin \{0, \pm 1\}$.