TPSM_1_C-2024_02_19 19.02.2024

T.P.S.M. – Teoria Probabilităţii şi Statistică Matematică

• Studiază fenomenele aleatoare cu metode matematice

Istoric

1. Sec. 8-13 – matematica arabă – criptografie
2. 1564 „Libero de ludo aleae" Gerolamo Cardano
3. 1654 Blaise Pascal – chevalier de Méré
4. 1657 „De raciniis in ludo aleae" Christian Huygens
5. 1713 „Ars conjectandi" – Jacob Bernoulli
6. 1718 „The doctrine of chanses" Abraham de Moivre
7. 1812 „Thérie analitique des probabilitées" Pierre Simon Laplace
8. 1956 „Foundations of the Theory of Probability" Andrei Kolmogorov

Principiile de bază ale teoriei

EXPERIENȚĂ $\longrightarrow$ evenimente -

Principiul 1:

Fiecărui eveniment care se poate produce în urma unei experiențe i se atribuie o probabilitate de realizare în intervalul $[0, 1]$. ($\mathbb{P}(A) \in [0,1], \forall A$ - - eveniment)

Principiul 2:

Probabilitatea realizării evenimentului ponderat unui eveniment dat este 1 - probabilitatea evenimentului.

$$\left(\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \forall A - \text{eveniment}\right)$$

Principiul 3

ev. A și B este egală cu produsul dintre probabilitatea realizării lui A și prob. realiz. lui B condiționată de prob. realiz lui A

$$\left(\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B|A)}_{\text{B condiționată de A}}, \forall A, B - \text{evenimente}\right)$$

Dualitate de limbaj

Limbajul probabilistic	Limbajul mulțimilor
1) eveniment A	mulțime A
2) eveniment sigur Ω	mulțime totală Ω
3) eveniment imposibil ϕ	mulțimea vidă ϕ
4) implicația evenimentelor $A \Rightarrow B$	incluziunea $A \subset B$
5) eveniment contrar lui A: A^c	complementara mulțimii A: $A^c = C_{\Omega} A = \Omega \setminus A$
6) disjuncția evenimentelor: $A \vee B$	reuniunea: $A \cup B$
7) conjuncția evenimentelor: $A \wedge B$	intersecția $A \cap B$

Spațiul de probabilitate

• Modelul matematic universal pentru studiul fenomenelor aleatoare.

Def.:

Spațiul de probabilitate este un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unde:

1) Ω este o mulțime ne-vidă
2) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F} \neq \phi$ rep. $\mathcal{P}(\Omega) = \{X, X \subset \Omega\}$
3) $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{F} \xrightarrow{P} \mathbb{P}(A) \in \mathbb{R}$ — funcția de probabilitate (probabilitatea)

σ – corpuri

Def.: Fie $\Omega \neq \emptyset$ și $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{F}$ – σ corp peste Ω dacă $\mathcal{F} \neq \emptyset$ și:

$\sigma_1)$ $A^c \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{F}$

$\sigma_2)$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \forall \{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$

Proprietăți

$\sigma_3)$ $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}, \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

Demonstrație

Fie $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 2)$

Definim $A_k = A_n, \forall k \in \mathbb{N}, k > n$ $\{A_k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{F}$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \ (\text{cf } \sigma_2)$$

$\sigma_4)$

i) $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}, \forall A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 2)$

ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \forall \{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$

Dem.:

i) Fie $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 2)$

$A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{F}$ (cf σ_1)

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \in \mathcal{F}$ (cf. σ_3) (*) rel. de Morgan

$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c \in \mathcal{F}$ (cf. σ_1)

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \overset{(*)}{=} \bigcap_{k=1}^{n} \left(A_k^c\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

Deci $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$

σ_6) i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) $\phi \in \mathcal{F}$

Dem. $\mathcal{F} \neq \phi$

i) Fie $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{F} \\ A^c \in \mathcal{F} \text{ (cf. } \sigma_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega = A \cup A^c \in \mathcal{F}$ (cf. σ_3)

ii) $\phi = \Omega = \mathcal{F}$

σ_6) $A \setminus B \in \mathcal{F}$, $\forall A, B \in \mathcal{F}$

Dem.: Fie $A, B \in \mathcal{F}$. $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ (cf. σ_1) și σ_4) i))

Teoremă

$\Omega \neq \phi$

$\mathcal{F}_i$, $i \in I$ — familie de σ-corpuri peste Ω

Atunci $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ este de σ-corpuri peste Ω

Dem.: Notăm $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in I \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{F} \neq \phi$ deoarece $\Omega \in \mathcal{F}_i$, $\forall i \in I$ (cf. σ_5)) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

Verificăm σ_1)

Fie $A \in \mathcal{F}$. Atunci $A \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$

Verificăm σ_2)

Fie $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$. Atunci : $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}_i$,
$\forall i \in I \overset{\text{in } \sigma_2)}{\Longrightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i$, $\forall i \in I$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Definiție (σ-corpul generat de o mulțime nevidă)

Ω – mulțime nevidă
$\phi \neq \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
$\mathcal{F}(\mathcal{M}) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\ \sigma\text{-corp peste } \Omega \\ \mathcal{M} \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}$ – σ – corpul generat de $\mathcal{M}$

Comentarii

1) corectitudinea (definiția are sens)
Intersecție conține măcar termenul : $\mathcal{P}(\Omega)$ deoarece
a) $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
b) $\mathcal{P}(\Omega)$ – σ – corp peste Ω

2) $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{P}(\Omega)$

3) $\begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{M}) \neq \emptyset \quad (\Omega \in \mathcal{F}(\mathcal{M})) \\ \mathcal{F}(\mathcal{M}) - \sigma\text{-corp peste } \Omega \quad (\text{cf Teoremei}) \end{cases}$

4) Dacă $\mathcal{F}$ – σ-corp peste Ω

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ atunci $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$

Interpretarea

$\mathcal{F}(\mathcal{M})$ este cel mai mic σ-corp peste Ω care include mulțimea lui.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$