ALGAD_10_S-2023_11_08 08.11.2023

Algoritmul de diagonalizare a endomorfismelor

1) Scriem matricea A asociată endomorfismului T în baza B (baza canonică)
2) Identificăm valorile proprii λ_i rezolvând ecuația caracteristică $\det(A-\lambda I_n)=0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \dots, m_p$ (Obs.: $m_1+m_2+\dots m_p = n = \dim V$)
3) Verificăm dacă $\lambda_i \in K$. În caz contrar STOP.
4) Pentru fiecare λ_i, det. subspațiul propriu corespunzător:
$$V_i = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda_i v \}$$
   $\Rightarrow$ det o bază B_i a lui V_i și $d_i = \dim B_i$
5) Verificăm $d_i = m_i$. În caz contrar STOP.
6) Scriem matr. diag.
$$\Delta = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}\right\}\text{de } m_1 \text{ ori} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left.\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}\right\}\text{de } m_2 \text{ ori} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left.\begin{matrix}\lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p\end{matrix}\right\}\text{de } m_p \text{ ori} \end{pmatrix}$$

obț. în baza
$$B' = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$$

7) Verificare: $\Delta = M_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot M_{BB'}$

sau $M_{BB'} \cdot \Delta = A \cdot M_{BB'}$

Ex. 1.: Stabiliți care dintre următoarele endomorfisme admit formă diagonală și, în caz afirmativ, det. forma diag. și baza în care se obține.:

a) $T(x,y,z) = (x-y+z,\ y,\ x+z)$

b) $T(x,y,z) = (4x+z,\ -x+y-z,\ -4x)$

Temă c) $T(x,y,z) = (2x+2y+z,\ 2y,\ 3x-y)$

a) Transcrie poză

Vezi foaie $\boxed{\#\ 02}$

#02

ALGAD_10_S_2023_11_08

(continuare ex. 1-a))

a)

P_1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

P_2 $\det(A - \lambda \cdot I_3) = 0$

$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - (1-\lambda) - 0 - 0 = 0$

$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0$

$(1-\lambda)(\cancel{1} - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{1}) = 0$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$

$(1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2) = 0$

$\Rightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow m_1 = 1$

$\lambda_2 = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow m_2 = 1$

sau

$\lambda - 2 = 0$

$\lambda_3 = 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m_3 = 1$

m_a - reprezintă de câte ori apare ecuație,

$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = \lambda_1 \cdot v \}$

Fie $v = (x, y, z)$ a.î. $T(x, y, z) = \overset{* \lambda_1}{1} \cdot (x, y, z)$

$(x - y + z, y, x + z) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x - y + z = x \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = y} \\ y = y \quad \text{Adev.} \\ x + z = z \Rightarrow \boxed{x = 0} \end{cases}$$

$\Rightarrow V_1 = \{(0, y, y)\} = \{y \underbrace{(0, 1, 1)}_{e_1'}\}$ * descompunem y

$\Rightarrow B_1 = \{e_1' = (0, 1, 1)\}$

$\Rightarrow d_1 = \dim B_1 = 1$
$m_1 = 1$ $\Bigg| \Rightarrow d_1 = m_1$

$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = \lambda_2 \cdot v \}$

Fie $v = (x, y, z)$ a.î. $T(x, y, z) = \overset{* \lambda_2}{0} \cdot (x, y, z)$

$(x - y + z, y, x + z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \Rightarrow -z - 0 + z = 0 \quad \text{Adev} \\ \boxed{y = 0} \\ x + z = 0 \Rightarrow x = -z \end{cases}$$

$V_2 = \{(-z, 0, z)\} = \{-z \underbrace{(1, 0, -1)}_{e_2'}\}$

$B_2 = \{e_2' = (1, 0, -1)\}$

$d_2 = \dim B_2 = 1 = m_2$

$V_3 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = \lambda_3 \cdot v \}$

$v = (x, y, z)$ a. î. $T(x, y, z) = \overset{\lambda_3}{2} \cdot (x, y, z)$

$(x - y + z, y, x + z) = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} x - y + z = 2x \Rightarrow z - 0 + z = 2z \quad \text{Adev.} \\ y = 2y \Rightarrow \boxed{y = 0} \\ x + z = 2z \Rightarrow \boxed{x = z} \end{cases}$$

$V_3 = \{(x, 0, x)\} = \{x(1, 0, 1)\}$

$B_3 = \{ e_3' = (1, 0, 1) \}$

$d_3 = \dim B_3 = 1 = m_3$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ în baza } B' = \begin{cases} e_1' = (0, 1, 1) \\ e_2' = (1, 0, -1) \\ e_3' = (1, 0, 1) \end{cases}$$

Verificăm $\qquad V = \mathbb{R}^3, \quad K = \mathbb{R}$

$$M_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot M_{BB'} \ \ldots \quad D = A \cdot M_{BB'}, \quad M_{BB'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \end{array}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda(4-\lambda)(1-\lambda)+0+0+4(1-\lambda)-0-0-$$
$$-0 \iff$$

$$\iff (1-\lambda)[-\lambda(4-\lambda)+4] = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=0$$

$(1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$

$\lambda_1 = \overset{\in \mathbb{R}}{1} \Rightarrow m_1 = 1$

$\lambda_2 = \overset{\in \mathbb{R}}{2} \Rightarrow m_2 = 2$

$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = \lambda_1 v \}$

$v = (x, y, z)$ a.î. $T(x, y, z) = 1(x, y, z)$

$(4x + z, -x + y - z, -4x) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} 4x + z = x \\ -x + y - z = y \\ -4x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \\ y = y \end{matrix}$$

$S_1 = \{(0, y, 0)\} \Rightarrow V_1 = \{ y(0, 1, 0) \}$

$B_1 = \{ e_1' = (0, 1, 0) \}$

$\Rightarrow d_1 = \dim B_1 = 1 = m_1$

$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = \lambda_2 \cdot v \}$

$v = (x, y, z)$ a.î. $T(x, y, z) = 2(x, y, z)$

$$\begin{cases} 4x + z = 2x \Rightarrow 4x - 2x = 2x & x = x \\ -x + y - z = 2y \Rightarrow -x + 2x = y \Rightarrow y = x \\ -4x = 2z \mid :2 \Rightarrow -2x = z \end{cases}$$

$V_2 = \{(x, x, -2x)\}$

$V_2 = \{x(1, 1, -2)\}$

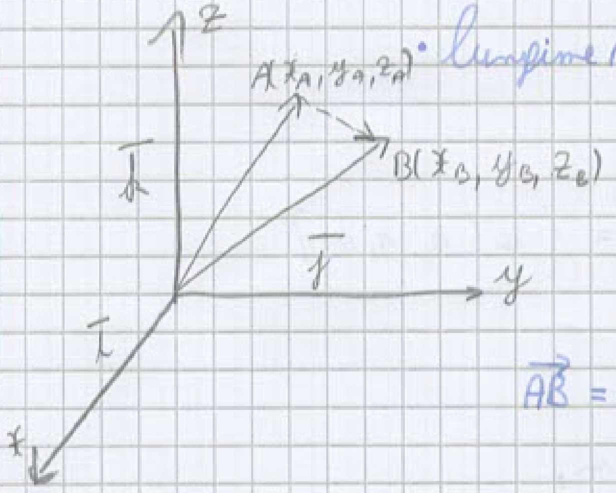
$B_2 = \{e_2'(1, 1, -2)\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d_2 = \dim B_2 = 1 \\ m_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow d_2 \neq m_2 \Rightarrow T \text{ nu este diag.}$$

Spațiul vectorilor liberi

vector = este un concept matematic determinat de:

- direcție = dreapta suport pe care se află vectorul
- sens = sensul de parcurgere al dreptei
- lungime / normă / mărime ($\|\bar{v}\|$)



$A(x_A, y_A, z_A) \to$ vectorul de poziție $\vec{OA}(x_A, y_A, z_A)$

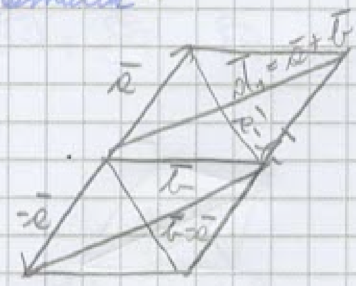
$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) =$

$= (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}$

Operații cu vectori

1) Adunarea • regula Δ-ului: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

• regula paralelogramului:



$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$

$\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$

2) Amplificarea cu scalari

$\alpha \bar{v}$ • direcția = aceeași sau $\parallel$ cu $\bar{v}$

• sensul • $\alpha > 0 \Rightarrow$ sensul același cu $\bar{v}$

• $\alpha < 0 \Rightarrow$ sensul opus cu $\bar{v}$

• $\alpha = 0 \Rightarrow \bar{0}$ (vectorul nul)

• $\|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \, \|\bar{v}\|$

vectori legați

$\vec{AB}$

vectori liberi

$\overline{AB} = \{ \vec{v} = \vec{AB}$, direcția aceeași sau direcții $\parallel \}$

Ex. 1 Fie Δ ABC

M - mij BC

G - centrul de greutate al Δ ABC

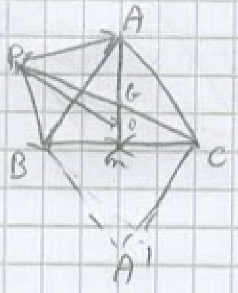
(∩ medianelor, pe mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{2}{3}$ bază)

Dem. că:

a) $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

b) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

c) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PG}$, $\forall$ P un punct arbitrar în plan

a) 

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AA'} = 2\vec{AM}$

cu A' a.î. $ACA'B$ – paralelogram

sau

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$$
$$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} \quad (+)$$
$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \underbrace{\vec{BM} + \vec{CM}}_{\vec{0}}$$

b) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} + \vec{GA} + \vec{AC} =$

$= 3\vec{GA} + 2\vec{AM}$

$= \cancel{3}\frac{2}{\cancel{3}}\vec{MA} + 2\vec{AM} = \vec{0}$

c) $\vec{PA} = \vec{PG} + \vec{GA}$

$\vec{PB} = \vec{PG} + \vec{GB}$

$\vec{PC} = \vec{PG} + \vec{GC}$

$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PG} + \vec{GA} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$