Curs 6 Analiză Matematică

Radu MICULESCU

Noiembrie 2023

Partiția unui interval

Se numește partiție a intervalului închis și mărginit $[a, b]$, *din* $\mathbb{R}$, *un sistem de puncte*

$$P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

din $[a, b]$ *astfel încât*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ *se numește norma partiției* P *și se notează cu* $\|P\|$.

Așadar

$$\|P\| = \max_{i \in \{1,2,...,n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Sistem de puncte intermediare asociat unei partiții

Fie $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ *o partiție a intervalului* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

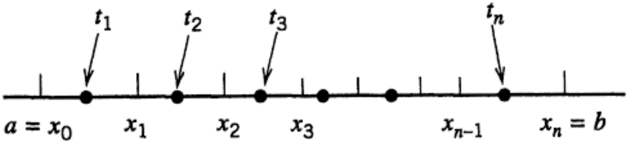
Un sistem de n *puncte*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n),$$

cu proprietatea că

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, *se numește sistem de puncte intermediare asociat partiției* P.


t_1
t_2
t_3
t_n
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_{n-1}
$x_n = b$

Sume Riemann

Fie

$$P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

o partiție a lui $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

un sistem de puncte intermediare asociat partiției P *și o funcție*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

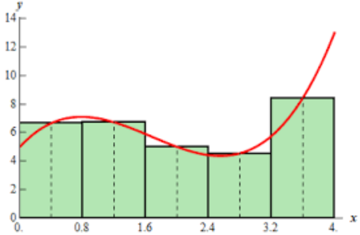
Numărul real

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

care va fi notat prin

$$\sigma_P(f, \xi),$$

se numește suma Riemann asociată funcției f, *partiției* P *și sistemului de puncte intermediare* ξ.


y
14
12
10
8
6
4
2
0
0.
0.8
1.6
2.4
3.2
4.
x

Propoziție. *Pentru orice funcție* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) Există un număr real I_f *cu proprietatea că*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{P_n}(f, \xi^n) = I_f,$$

pentru orice șir de partiții $(P_n)_n$ *ale intervalului* $[a, b]$, *cu* $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$, *și pentru orice sisteme de puncte intermediare* ξ^n *asociate partițiilor* P_n.

ii) Există un număr real I_f *cu proprietatea că pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$|\sigma_P(f, \xi) - I_f| < \varepsilon,$$

pentru orice partiție P *a intervalului* $[a, b]$ *cu* $\|P\| < \delta_\varepsilon$ *și orice* ξ *sistem de puncte intermediare asociat partiției* P.

Funcții integrabile Riemann

O funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se numește integrabilă Riemann dacă satisface condițiile echivalente din teorema precedentă.*

În acest caz, I_f *se numește integrala Riemann sau integrala definită a funcției* f *pe intervalul* $[a, b]$ *și se notează*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Modificarea valorilor unei funcţii integrabile într-un număr finit de puncte

Modificarea valorilor unei funcţii integrabile într-un număr finit de puncte nu afectează integrabilitatea acesteia şi nici valoarea integralei.

Mărginirea funcțiilor integrabile Riemann

Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann, atunci* f *este mărginită.*

Prin urmare, în studiul integrabilității Riemann, restrângerea la clasa funcțiilor mărginite este naturală.

Sume Darboux

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *o funcție mărginită și* $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ *o partiție a intervalului* $[a, b]$.
Pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *considerăm*

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

și

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

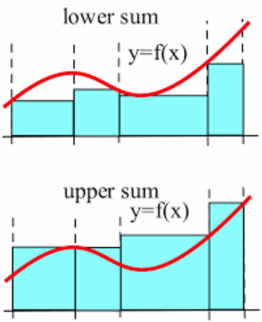
Sumele

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

și

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

se numesc sumele Darboux ale funcției f *corespunzătoare partiției* P.
Mai precis, $U(f, P)$ *se numește suma Darboux superioară, iar* $L(f, P)$ *se numește suma Darboux inferioară.*


lower sum
y=f(x)
upper sum
y=f(x)

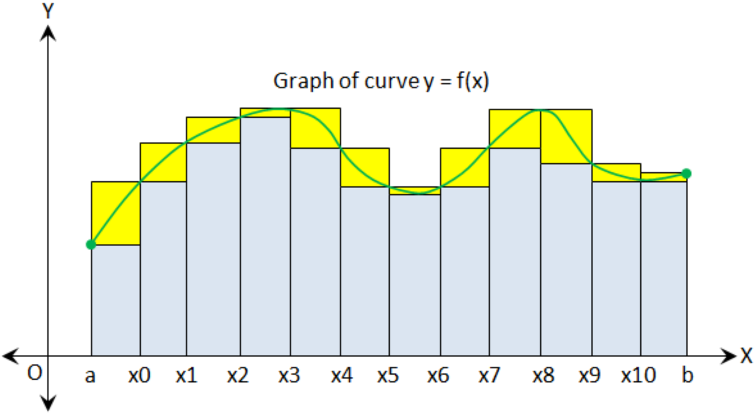
Teorema de caracterizare a integrabilității Riemann cu ajutorul sumelor Darboux

Pentru orice funcție mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:

i) f este integrabilă;

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiție P_ε a lui $[a, b]$ cu proprietatea că

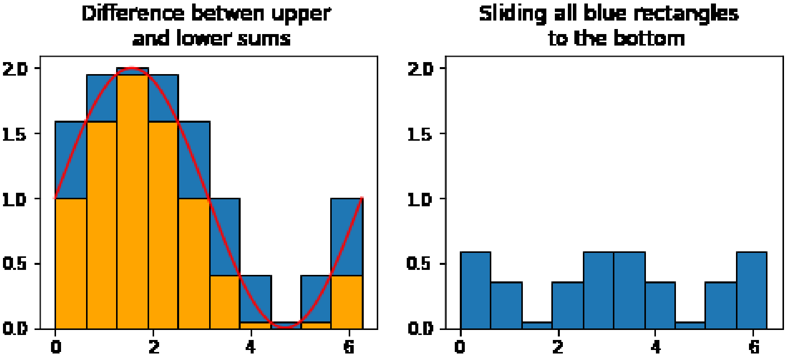
$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

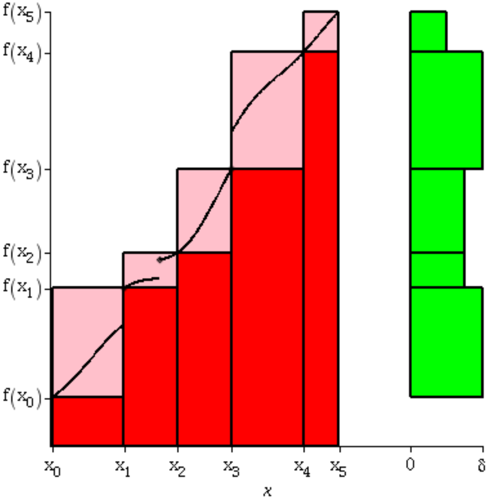

Graph of curve y = f(x)
Y
X
O
a
x0
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8
x9
x10
b

Consecințe extrem de importante ale Teoremei anterioare

Orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann.*

Orice funcție monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann.*


Difference betwen upper
and lower sums
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
2
4
6
Sliding all blue rectangles
to the bottom
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
2
4
6


f(x5)
f(x4)
f(x3)
f(x2)
f(x1)
f(x0)
x0
x1
x2
x3
x4
x5
x
0
δ

Exemplu

Funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

nu este integrabilă Riemann.

Pentru $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ o partiție arbitrară a intervalu-lui $[0,1]$, avem

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$$

și

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1,$$

deci

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=1$$

și

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=0.$$

Prin urmare

$$U(f,P)-L(f,P)=1,$$

pentru orice partiție P a lui $[0,1]$, ceea ce, în acord cu teorema anterioară, dovedeșste faptul că f nu este integrabilă.

Noțiunea de primitivă

Vom spune că funcția $f : I \to \mathbb{R}$*, unde* I *este un interval nedegenerat al axei reale, admite primitive dacă există o funcție derivabilă* $F : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$F^{'} = f.$$

Funcția F *se numește o primitivă a lui* f*.*
Mulțimea tuturor primitivelor lui f *se notează cu*

$$\int f$$

sau cu

$$\int f(x)dx.$$

Primitivele funcțiilor uzuale

1. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x^n$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

2. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x^\alpha$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq (0, \infty)$ este un interval și $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, avem

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

3. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = a^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, avem

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

4. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este un interval, avem

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

5. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ este un interval și $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avem

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

6. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avem

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

7. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \sin x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

8. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \cos x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

9. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

10. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

11. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = tgx$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

12. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = ctgx$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

13. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avem

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

14. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ pentru orice $x \in J$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $J \subseteq (-\infty, -a)$ sau $J \subseteq (a, \infty)$ este un interval, avem

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

15. Pentru funcția $f : J \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ pentru orice $x \in J$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $J \subseteq (-a, a)$ este un interval, avem

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

Formula Leibniz-Newton

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *o funcție care satisface următoarele două proprietăți:*
i) f *este integrabilă Riemann;*
ii) f *admite primitive.*
Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

unde F *este o primitivă arbitrară a lui* f.

Demonstrație

Fie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de partiții ale intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0,$$

unde

$$P_n=(x_0^n,x_1^n,...,x_{m_n-1}^n,x_{m_n}^n).$$

Având în vedere Teorema lui Lagrange, deducem că, pentru orice $i\in\{1,2,...,m_n\}$, există

$$\xi_i^n\in(x_{i-1}^n,x_i^n)$$

astfel încât

$$F(x_i^n)-F(x_{i-1}^n)=F^{'}(\xi_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n),$$

i.e.

$$F(x_i^n)-F(x_{i-1}^n)=f(\xi_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n).$$

Dacă vom considera sistemul de puncte intermediare

$$\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{m_n-1}^n, \xi_{m_n}^n)$$

asociat partiției P_n a intervalului $[a, b]$, atunci

$$\sigma_{P_n}(f, \xi^n) = \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{m_n}(F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)) =$$

$$= F(x_{m_n}^n) - F(x_0^n) = F(b) - F(a),$$

i.e.

$$\sigma_{P_n}(f, \xi^n) = F(b) - F(a), \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Deoarece f este integrabilă și

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0,$$

conform Teoremei anterioare,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{P_n}(f, \xi^n) = \int_a^b f(x)dx,$$

de unde, conform cu (1), obținem

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \ \square$$

Observații

1. *Orice funcție continuă satisface condițiile i) și ii) din Teorema Leibniz-Newton.*

2. *Următoarele două exemplele arată că cele două ipoteze din cadrul Formulei Leibniz-Newton sunt independente.*

Funcția $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases},$$

este integrabilă Riemann, dar nu există nici o funcție a cărei derivată să fie f.

Într-adevăr, f este monotonă, deci este integrabilă.

Dacă, prin absurd, ar exista o funcție derivabilă $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$F^{'} = f,$$

atunci, conform Teoremei lui Darboux, f ar avea proprietatea lui Darboux, ceea ce contrazice faptul că

$$f([0,2]) = \{0,1\}.$$

Funcția $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

este derivabilă, dar F' nu este integrabilă.

Pentru orice $x \neq 0$ avem

$$F^{'}(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Deoarece

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

(căci $-x \leq x \sin \frac{1}{x^2} \leq x$ pentru orice $x \in [0, 1] - \{0\}$), deducem că F este derivabilă și, mai precis, avem

$$F^{'}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 2x \sin \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{array} \right. .$$

Cum

$$F^{'}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -2\sqrt{2n\pi},$$

deducem că

$$\lim_{n \to \infty} F^{'}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -\infty,$$

deci $F^{'}$ nu este mărginită și, drept urmare, nu este integrabilă.

Exemplu

Să se calculeze

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx.$$

Avem

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx = \ln(x+\sqrt{2+x^2}) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Exemplu

Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}dx.$$

Avem

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2} arctg 2x \mid_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Teorema de liniaritate a integralei Riemann

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile Riemann și* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci* $f + g$ *și* αf *sunt integrabile Riemann,*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

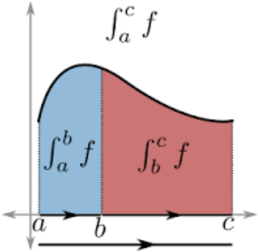
și

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann

Pentru $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *și* $c\in(a,b)$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*
i) f *este integrabilă Riemann;*
ii) f *este integrabilă Riemann pe* $[a,c]$ *și pe* $[c,b]$.
În acest caz, avem

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$


$\int_a^c f$
$\int_a^b f$
$\int_b^c f$
a
b
c

Convenție

Fie I un interval nedegenerat al axei reale și $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe orice $[a, b] \subseteq I$.

Pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, adoptăm următoarea convenție:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Exemplu

Să se calculeze

$$\int_{-1}^{1} |x| \, dx.$$

Avem

$$\int_{-1}^{1} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} (-x) dx + \int_{0}^{1} x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{1} = 1.$$

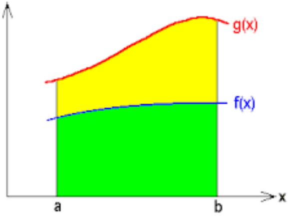
Teorema de "monotonie" a integralei Riemann

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile Riemann astfel încât*

$$f(x) \leq g(x),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.
Atunci

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$


g(x)
f(x)
a
b
x

Exemplu

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx.$$

Deoarece

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n,$$

pentru orice $x \in [0,1]$ și orice $n \in \mathbb{N}$, utilizând Teorema de "monotonie" a integralei Riemann, obținem că

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde, cu ajutorul lemei cleștelui, concluzionăm că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 0.$$