7_S_2023_10_24 24.10.2024

Limite de funcții

Def.: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $a \in \mathbb{R}$ este un punct de acumulare a lui A dacă $(\exists)$ ~~$(x_n$~~ ... $(x_n)_{n \geq 1}$; $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

$A' = \{a \in A \mid (\exists)(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a\}$ - mulțimea pct. de acumulare ale lui A

$a' \in A$ a.î. $a' \in A' \Rightarrow a'$ - pct. izolat; $A \setminus A'$ - mulțimea pct. izolate

Ex.:

1) $A = (-1, 1)$

$x_n \subset (-1, 1), \forall n \in \mathbb{N}$

$|x_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$x_n = \frac{n}{n+1}$

$x_n = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow A' = [-1, 1]$

$a = 1$

$A \setminus A' = \emptyset$

2) $A = (-1, 1) \cup \{\pm 2\}$

$A' = [-1, 1]$

$A \setminus A' = \{\pm 2\}$

3) $A = \mathbb{Q}$

$A' = \mathbb{R}$!

$\mathbb{Q}$ - densă în $\mathbb{R}$, adică

$(\exists)(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{Q}$ a.î.

$\lim_{n \to \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$

$A' = \mathbb{R}$

~~A~~ ~~In ori~~ Între orice două numere $\mathbb{R}$ se află un $\mathbb{Q}$

4) $P_n = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ~~$(x \in \mathbb{R};\ a_1, a_2 \dots$~~ $(x \in [a, b];\ a_1, a_2 \dots$

$\dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

$A' = C[a, b] = \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f$ - cont. pe $[a, b]$

P_n - densă în $C[a, b]$, adică $\forall p \in P_n$ avem că: $\lim_{x \to a} f(x) = p(x)$

Def: Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

spunem că fct. f admite limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă $(\exists)(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ cu $\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n = a}$, $a \in A'$ a.î.:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

$l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\;{}^{n\to\infty}$ și l - limita funcției f, l - unic

f - admite limita l dacă

$\forall\, \varepsilon > 0, (\exists)\, \delta > 0$ a.î. $|x_n - a| < \delta$ și

(delta) (delta)

Ex: 1. Calculați următoarele limite:

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5 + 9x^3 + 12^x + 1}{16x^5 + 8x + 3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \dfrac{4}{16}$

1.2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ - polinom} \\ x_1 \text{ - răd. a lui } f \end{array}\right\} \Rightarrow f \,\vdots\, x - x_1$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-3} = -1$

1.3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \dfrac{0}{0}$ $*$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+6)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+6} = \dfrac{3}{7}$

1.4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$ $*$

Limite remarcabile:

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} e^{f(\cdot)}$

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln e$, dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{tg\, f(x)}{f(x)} =$

$= \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\arcsin f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{arctg\, f(x)}{f(x)} = 1,$

dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0$

3) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$, dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$

$$* = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} +$$

$$+ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \ln e - \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \dots$$

$1-\cos x = \cos 0 - \cos x$

$\cos(+) = \cos\cdot\cos - \sin\cdot\sin$

$\cos(-) = \cos\cdot\cos + \sin\cdot\sin$ $(-)$

$\cos 0 - \cos x = -2\sin\frac{0+x}{2}\cdot\sin\frac{0-x}{2} = -\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \sin^2\frac{x}{2}$

$$\dots = \ln e - \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}2\right)} = \ln e - \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\overbrace{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln e$$

1.5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} =$

TODO: AFLĂ CE ARE E ASTA

$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+3^x+4^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2^x+3^x+4^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{2^x+3^x+4^x-3}}\right]^{\frac{2^x+3^x+4^x-3}{3x}} =$

$= e^{\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x+4^x-3}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$e^{\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}\right)} =$

$= e^{\frac{1}{3}(\ln 2+\ln 3+\ln 4)}$

1.6) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+tg(x-1))}{arcsin 3(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

* APLIC lim remarcabile

$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln(1+tg(x-1))}{tg(x-1)}\cdot tg(x-1)}{\underbrace{\frac{arcsin 3(x-1)}{3(x-1)}}_{\to 1}\cdot 3(x-1)} =$

$= \lim_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{3(x-1)} =$

$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{3}\cdot\frac{tg(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

1.7) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^3-1}\right)^{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x^2+x-1)}\right) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{x^2+x+1}\right) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{3}{1} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{0\cdot x} = \infty$

1.8) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2-4}}} = e^{\frac{1}{0-}} = \frac{1}{e^{-\infty}} = e^{\infty} = \infty$

~~1.9)~~

Lemă

Dacă ~~există~~ $(\exists)(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1} \subseteq A$;

a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

și $f: A\to\mathbb{R}$ funcție a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

, atunci f nu admite limită.

Ex.: Arătați că $(\nexists) \lim_{x \to \infty} \cos x$.

$$x_n = 2n\pi \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

$$y_n = (2n+1)\cdot\pi \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} \cos(2n\pi) = 1 \\ \lim_{n \to \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{array}\right| \Rightarrow (\nexists) \lim_{x \to \infty} \cos x \;;$$

$$\lim_{x \to \infty} \left\{\frac{x}{3}\right\}$$

$$x_n = 3n \Rightarrow x_n \to \infty$$

$$y_n = 4n \Rightarrow y_n \to \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) \neq 0$$

Funcții continue

Def.: $f: A \to \mathbb{R}$ este continuă în A dacă:

$(\exists)(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Criteriul de comutativitate:

$f: A \to \mathbb{R}$ este continuă în $a \in A$ dacă:

$l_s(a) = l_d(a) = f(a)$

Ex.: 1.) Studiați continuitatea funcției

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|}$

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 - x}{-x}, & x < 0 \end{cases}$

Caz I $x \geq 0 \Rightarrow f$ - elementară $\Rightarrow f$ - cont.

Caz II $x < 0 \Rightarrow f$ - elementară $\Rightarrow f$ - cont.

Caz III $x = 0$; f - cont $\Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0)$

$l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - x^1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x\,(1-x)}{-x} = 1$

$$ld(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

$$f(0) = \cancel{\lim_{x \to 0}} \frac{x^2 + x}{x} = 1 \quad (\nexists) \quad \Rightarrow$$

f - nu cont în $x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ - pct. de disc. de speța a II-a

- a fost rezultat eronat (aceasta e rez. adv)