ALGAD - 6_S_ 2023 - 10 - 25 25.10.2023

Spații vectoriale

Def.: $(V ; \oplus ; \odot_K)$ spațiu vectorial peste corpul de scalari $(K, +, \cdot)$

$\Leftrightarrow$ $(V, \oplus)$ operație internă de adunare $\Rightarrow$ grup comutativ

distributivitate

Parte stabilă (P.S, comutativ, Asoc., Elem. Neutru, Elem. sim.)

vectori $v_1, v_2, \ldots$

$\downarrow$

$(V, \oplus, \odot_K)$

$\hookrightarrow$ operație externă: amplif. cu scalari

1. $\alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = \underbrace{\alpha \odot v_1}_{\in V} \oplus \underbrace{\alpha \odot v_2}_{\in V}$ $\forall \alpha, v_1, v_2 \in V$

2. $(\alpha + \beta) \odot v = \underbrace{\alpha \odot v}_{\in V} \oplus \underbrace{\beta \odot v}_{\in V}$ $\forall \alpha, \beta \in K$

3) $\alpha \odot (\beta \odot v) = (\alpha \cdot \beta) \odot v$

4) $1_K \odot v = v$

Ex.: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ - sp. vectorial, cu scalari:

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \\ \alpha(x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{cases}$$

Def. $W \subset V$ este subsp. vect. al lui V

Cond. 1 $w_1 + w_2 = W$, $\forall w_1, w_2 \in W$

Cond. 2 $\alpha w_1 \in W$ $\forall \alpha \in K$ scalar

Not. $W \leq V$

Ex. 1. Stabiliți care din urm. submulțimi sunt subspații vectoriale:

a) $S_1 = \{(x_1, x_2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $S_2 = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

Temă: c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = 0,\ 2x_1 - x_3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

Metoda I :

$S_1 : 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1$

$x_1 = x$

$S_1 = \{(x, 2x)\}$

$C_1 : (x, 2x) + (y, 2y) = (x+y, 2x+2y) =$

$= (x+y, 2(x+y)) \in S_1$

$C_2 : \alpha(x, 2x) = (\alpha x, 2\alpha x) \in S_1$

$\overset{C_1, C_2}{\Longrightarrow} S_1 < \mathbb{R}^2$

Metoda II :

$C_1 (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in S_1 \; \forall (x_1, x_2) \in S_1 :$

$: 2x_1 - x_2 = 0$

$(y_1, y_2) \in S_1 : 2y_1 -$

$- y_2 = 0$

$(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in S_1 \Leftrightarrow 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = 0$

$\underbrace{2x_1 + \overbrace{2y_1 - x_2}^{}}_{0} \overbrace{- y_2}^{0} = 0$ ADEV.

C_2 $\alpha(x_1, x_2) \in S_1, \forall (x_1, x_2) \in S_1$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $2x_1 - x_2 = 0$

$(\alpha x_1, \alpha x_2) \in S_1 \Leftrightarrow 2(\alpha x_1) - \alpha x_2 = 0$

$\alpha(2x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow S_1 \leq \mathbb{R}^2$

$\alpha \cdot 0 = 0$ Adev. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

b) S_2 $2x_1 - x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 + 1$

Not. $x_1 = x \Rightarrow S = \{(x_1, 2x+1)\}$

C_1 $(x, 2x+1) + (y, 2y+1) = (x+y, 2x+1+2y+1) =$

$= (\underbrace{x+y}_{a}, 2(x+y)+2)$

$= (a, 2\underbrace{a}+2) \notin S_2 \Rightarrow \cancel{C_1} \Rightarrow S_2 \not\leq \mathbb{R}^2$

$2 \neq 1 \Rightarrow$

d) S_4

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 + 2x \end{cases} \Bigg| \Rightarrow S_4 = \{(x, -x, 2x-1)\}$

Not. $x_1 = x$

$C_1 : (x, -x, 2x-1) + (y, -y, 2y-1) =$

$= (x+y, -(x+y), 2(x+y) - 2) =$

$= (a, -a, 2a-2) \notin S_4 \rightarrow S_4 \not< \mathbb{R}^3$

$2 \neq 1$

2. Arătați că următoarele submulțimi din $\mathbb{R}^3$ sunt subspații vectoriale și determinați câte o mulțime de generatori pentru fiecare dintre ele.

a) $S_1 = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{Temă}}$ - b) $S_2 = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0, x_1 - 2x_2 = 0\}$

$\boxed{\text{Def.}}$ Mulțimea de elemente $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ e mulțime de generatori pentru spațiul $V \Leftrightarrow$

$$V = \{ \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n}_{\text{-combinație liniară}} \mid \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in K \}$$

Temă

b) $S_2 = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) + (\beta, -\beta, 0)\} = \{\alpha \underbrace{(1,1,2)}_{v_1} + \beta \underbrace{(1,-1,0)}_{v_2}$

a) $C_1: (2\alpha, 3\alpha, \alpha) + (2\beta, 3\beta, \beta) =$

$= (2(\alpha+\beta), 3(\alpha+\beta), \alpha+\beta) \in S_1$

$C_2:$ $\beta \cdot (2\alpha, 3\alpha, \alpha) = (2\alpha\beta, 3\alpha\beta, \alpha\beta)$

$\xRightarrow{C_1, C_2} S_1$ subspațiu $\in \mathbb{R}^3$

$S_1 = \alpha \underbrace{(2, 3, 1)}\}$

$v_1 = (2, 3, 1)$ este generator pt. S_1

c) $S_3(x_1, x_2, x_3)$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

$x_1 = 2x_2$

$x_3 = -x_1 = -2x_2$

Not. $x_2 = x$

$S_3 = (2x, x, -2x)$

$C_1: (2x, x, -2x) + (2y, y; -2y) =$

$= (2(x+y), (x+y), -2(x+y)) \in S_3$

$C_2: \alpha(2x, x, -2x) = (2\alpha x_1, \alpha x, -2\alpha x) \in S_3$

$C_1, C_2 \Rightarrow S_3 \propto \mathbb{R}^3$

$S_3 = x(2, 1, -2) \Rightarrow (2, 1, -2)$ este generator pentru S_3

3. Care din următoarele mulțimi de vectori din $\mathbb{R}^2$ sunt liniar independente (l.i)?

a) $S_1 = \{ v_1 = (1, 2), v_2 = (3, -1) \}$

Temă b) $S_2 = \{ v_1 = (2, 1), v_2 = (4, 2) \}$

c) $S_3 = \{ v_1 = (2, 3), v_2 = (2, -1), v_3 = (4, 2) \}$

Temă d) $S_4 = \{ v_1 = (1, 3), v_2 = (-1, -2), v_3 = (1, 4) \}$

Def.: Mulțimea de elemente $\{ v_1, v_2 \dots v_n \}$ este l.i.

$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_K$

(dacă și numai dacă)

a) S_1 l.i. $\Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 (1, 2) + \alpha_2 (3, -1) = (0, 0)$

$(\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, -\alpha_2) = (0, 0)$

$(\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0, 0)$

– Omogen

$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \end{cases}$

$-6\alpha_2 - \alpha_2 = 0$

$-7\alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

$\Rightarrow S_1$ l.i.

Obs.: Sistemul omogen admite soluția banală (necunoscutele = 0) $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{sol. banală} \Rightarrow S_1 \text{ l.i.}$$

c) $\underset{(2,3)}{v_1} + \underset{(2,-1)}{v_2} = \underset{(4,2)}{v_3} \rightarrow$ relație de dependență

$\Rightarrow \underset{\neq 0}{\alpha_1 = 1}, \underset{\neq 0}{\alpha_2 = 1}, \underset{\neq 0}{\alpha_3 = -1} \neq 0$

$\Rightarrow S_3$ l.d.

4. Stabiliți care dintre urm. sisteme de vectori sunt baze ale spațiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) $S_1 = \{v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,2,3), v_3 = (1,0,0)\}$

b) $S_2 = \{v_1 = (1,0,-1), v_2 = (2,1,-3), v_3 = (1,-1,0)\}$

Temă - c) $S_3 = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,-1,1), v_3 = (1,-1,1)\}$

Def.: 1) $B = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ este bază a spațiului vect. V

$\Leftrightarrow$ B - l.i + sistem de generatori a lui V

2) $\dim V = \operatorname{card} B$

Ex.: $\dim \mathbb{R}^n = n$

(P) $\left.\begin{array}{l} \text{card}\ B = \dim \mathbb{R}^n = n \\ B\text{ - l.i.} \Leftrightarrow \Delta \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow B$ - bază pe $\mathbb{R}^n$

b) $v_1 = (1, 0, -1)$
$v_2 = (2, 1, -3)$
$v_3 = (1, -1, 0)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 + 1 - 3 + 0 = 0$$

$\Rightarrow S_2$ l.d $\Rightarrow S_2$ nu e bază $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow S_2$ l.i.

a) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_1$ l.i.

Card $S_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ $\Big/ \Rightarrow S_1$ bază pe $\mathbb{R}^3$

! Ex.5 Fie $B' = \{e_1' = (1,1,0),\ e_2' = (1,0,1),\ e_3' = (1,0,-1)\}$

$B'' = \{e_1'' = (1,0,0),\ e_2'' = (1,1,0),\ e_3'' = (1,1,1)\}$

și Fie $x = (2,-1,1)$

a) Arătați că B' și B'' baze ale sp. $\mathbb{R}^3$

b) Determinați matricea de trecere de la baza B' la baza B''

$$B' = \{e_1', e_2', \dots, e_n'\} \xrightarrow{M_{B'B''}} \doteq (a_{ij})$$

$$B'' = \{e_1'', e_2'', \dots, e_n''\}$$

$$e_{ij}'' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j'$$

coloana i

c) Determinați coord. vect. x în raport cu fiecare bază B' respectiv B''

$\hookrightarrow x = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3' \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ coord. în B'

d) Găsiți matricele de trecere de la baza canonică $B = \{ e_1 = (1,0,0);\ e_2 (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ din $\mathbb{R}^3$

la fiecare dintre cele 2 baze și verif. identitatea.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_{BB'}"] \arrow[dr, "M_{BB''}"'] & B' \arrow[d, "M_{B'B''}"] \\ & B'' \end{tikzcd}$$

$\Delta_{B'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$\left.\begin{array}{l} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0 \\ \text{card } B' = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B'$ bază în $\mathbb{R}^3$

$\Delta_{B''} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 =$

$= 1 \neq 0$

$\underbrace{\text{card } B'' = \dim \mathbb{R}^3 = 3}$

$\Downarrow$

B'' bază în $\mathbb{R}^3$

b) $e_1'' = a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + a_{31} e_3'$

$(1, 0, 0) = a_{11}(1, 1, 0) + a_{21}(1, 0, 1) + a_{31}(1, 0, -1)$

CONT. SĂPT. VIITOARE DIRECT

* Vezi ALGAD_8_S-2023_11_01