AnMate_3_S_2023_10_10

10.10.2023

Mulțimea nr. reale

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime

Def.: Spunem că A este mărginită dacă:

$(\exists)$ $m, M \in \mathbb{R}$ a. î.:

$$\underbrace{m}_{\substack{\text{margine inferioară} \\ \text{(minorant)}}} \leq a \leq \underbrace{M}_{\substack{\text{margine superioară} \\ \text{(majorant)}}}, \forall a \in A$$

inf. A = cel mai mare minorant

sup. A = cea mai mică margine superioară

min A = inf A, dacă inf A $\in$ A

max A = sup A, dacă sup A $\in$ A

1.) Determinați inf. A, sup A, min A, max A ș.a.!

a) $A = (0, 1)$

inf. $A = 0 \notin A$

sup. $A = 1 \notin A$

min A = nu există

max A = nu există

b) $A = (-1, 1] \cup \{2\}$

inf. $A = -1$

sup. $A = 2$

min A = nu există

max $A = 2$

c) $A = (-\infty, 0]$

inf $A = -\infty$

sup $A = 0$

min A = nu există

max $A = 0$

* Imaginea funcției ?!?

d) $A = \{x^2 - 2x + 5 \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Im } f = [y_v, \infty) = [4, \infty)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - 2x + 5$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$; $\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow y_v = \frac{16}{4} = 4$

sup. $A = \infty$

inf $A = 4$

min $A = 4$

max A = nu $\exists$

e) $A = \{-x^2 + 2x - 1 \mid x \in \mathbb{R}\} =$

$= \text{Im } f = \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$

$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Im } f = (-\infty, 0]$

inf $A = -\infty$ min A = nu există

sup $A = 0$ max $A = 0$

f) $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 + 3x - 1 > 0 \}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 4x^2 + 3x + 1$

$f(x) = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{8} \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		∞
$f(x)$	+	+	0	− −	0	+	+

$A = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$

$\inf A = -\infty$

$\sup A = \infty$

2. Care din următoarele mulțimi este mărginită?

e) $A = \{ \frac{1}{x} \mid x \in (0, \infty) \} = (0, \infty) \Rightarrow$ $\inf A = 0$ – mărg. $\sup A = \infty$ – nu mărg.

$0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \infty$

$\frac{1}{0} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\infty}$

$\hookrightarrow \infty \qquad \hookrightarrow 0$

b) $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$0 < \dfrac{n+1}{n+2} < 1 \Rightarrow A$ - mărginită

c) $A = \{ \sin n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$= [-1, 1) \Rightarrow A$ - mărginită

d) $A = \left\{ \dfrac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\dfrac{n^2}{n+1} > 0$

$\dfrac{n^2}{n+1} < \dfrac{n^2}{n} = n$

$n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ - nemărginită

$\Rightarrow A$ - nu e mărginită

3. $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A, B - mărg.

Arătați că:

$$\min\{\inf A, \inf B\} = \operatorname{Inf}(A \cup B) \leq$$

$$\leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

Presupunem $\operatorname{Inf} A \leq \inf B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min\{\inf A, \inf B\} = \inf A$$

$$\left.\begin{array}{l} \inf A \leq a, \forall a \in A \\ \inf B \leq b, \forall b \in B \\ \inf A \leq B \end{array}\right\} \Rightarrow \inf A \leq b, \forall b \in B$$

$$\inf(A \cup B) = \inf A$$

Def.: Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Spunem că mulțimea V este o vecinătate a lui x_0 dacă:

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$$

V_{x_0} = mulțimea tuturor vecinătăților lui x_0.

4. Precizați care din următoarele mulțimi sunt vecinătăți pentru x_0

a) $(-1, \infty)\ V_0$

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset (-1, \infty)$$

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow (-1, 1) \subset (-1, \infty)$$

b) $(10, 11) \in V_{10}$

$$(\underbrace{10 - \varepsilon}_{<10}, 10 + \varepsilon) \not\subset (10, 11)$$

c) $\{0, 1, 2\} \in V_1$ (NU)

d) $\overline{\mathbb{R}} \in V_{-\infty}$ (DA)

$$(-\infty, \infty) < \underbrace{[-\infty, \infty]}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

e) $\mathbb{Q} \in V_0$ (NU)

Şiruri de numere reale

Def.: Un şir de nr. reale este o funcţie

$f: \mathbb{N} \to M, \quad M \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \ni n \to f(n) = x_n \in M$

↳ termenul general al şirului

Ex: 1) $x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$

2) $x_n = 2 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}$ (subşir al şirului - nr. naturale)

3) $x_n = 2n+1, \forall n \in \mathbb{N}$ (— " —)

Notaţie: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - şir de nr. naturale

Def.: Spunem că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton dacă:

a) x_n - crescător, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots \ \forall n \in \mathbb{N}$

sau

b) x_n descrescător, $\forall n \in \mathbb{N}$

$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Criteriu: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este:

a) crescător dacă:

$$x_{n+1} - x_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) descrescător dacă:

$$x_{n+1} - x_n \leq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ex: 1) Studiați monotonia șirurilor:

a) $x_n = \dfrac{2n+1}{4n+3}, \ n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)+3} = \frac{2n+3}{4n+7}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{^{4n+3)}2n+3}{4n+7} - \frac{^{4n+7)}2n+1}{4n+3} =$$

$$= \frac{(2n+3)(4n+3) - (2n+1)(4n+7)}{(4n+3)(4n+7)} =$$

$$= \frac{\cancel{8n^2} + \cancel{18n} + 9 - \cancel{8n^2} - \cancel{18n} - 7}{(4n+3)(4n+7)} =$$

$$= \frac{2}{(4n+7)(4n+3)} > 0$$

$\left.\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ 2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0$, x_n monoton crescător

b) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{^{2/}1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \Rightarrow$$

x_n monoton crescător

c) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

$n = 1 \Rightarrow x_1 = -1 + 1 = 0$

$n = 2 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$n = 3 \Rightarrow x_3 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_2 > x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \text{ - nu e monoton}$$

d) $x_n = -\cos(\pi \cdot n), \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 0 \Rightarrow x_0 = -\cos 0 = 1$

$n = 1 \Rightarrow x_1 = -\cos \pi = -1$

$n = 2 \Rightarrow x_2 = -\cos 2\pi = 1$

$x_n = (-1)^2$ - nu e monoton

e) $x_n = \frac{1 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n(n+3)}{(n+2)^2}$

$x_{n+1} = \frac{1 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)^2}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n(n+3)(n+1)(n+4)}{3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (n+2)^2 \cdot (n+3)^2} \cdot$

$\cdot \frac{3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (n+2)^2}{1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n(n+3)} =$

$= \frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)^2} = \frac{n^2+5n+4}{n^2+6n+9} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton desc.