Curs nr. 3: Integrala complexă. Serii Laurent.

1 Noţiunea de integrală complexă. Proprietăţi

Fie curba (C) în planul complex (z) dată prin ecuaţia parametrică complexă $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, unde $z(t) = x(t) + jy(t)$.

Definiţia 1.1 *i) Curba (C) se numeşte netedă dacă $x(t)$, $y(t) \in C^1[a, b]$.*
ii) Curba (C) se numeşte netedă pe porţiuni dacă $x(t)$, $y(t) \in C^0[a, b]$, iar $x'(t)$, $y'(t)$ au un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi.

Observaţia 1.1 *O curbă netedă pe porţiuni este reuniunea unui număr finit de curbe netede.*

Utilizăm notaţiile: (C^+) este curba (C) parcursă în sensul de creştere al parametrului $t \in [a, b]$, iar (C^-) este curba (C) parcursă în sens invers, adică $t \in [b, a]$. În cazul unei curbe simple şi închise, (C^+), notat (C), este sensul trigonometric, iar (C^-) este sensul invers trigonometric.

Fie $(C) \subset D$ o curbă netedă pe porţiuni, unde D este un domeniu din planul complex (z) şi $f : D \to \mathbf{C}$, continuă pe curba (C), ($f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, $u, v : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$).

Pentru funcţia f şi curba (C) se construieşte o integrală în complex, în acelaşi mod ca în cazul real.

Se consideră o diviziune d a intervalului $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

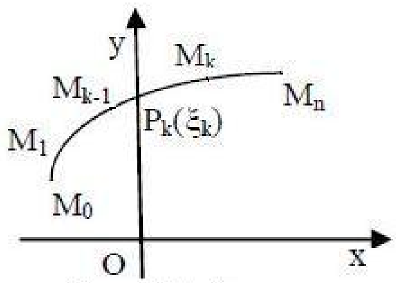
cu norma

$$v(d) = \max_{1 \le k \le n} (t_k - t_{k-1}).$$

Acestei diviziuni îi corespund pe curba (C) punctele M_k de afixe $z_k = z(t_k)$, $k = \overline{0, n}$, (Figura 2.3.1).

În fiecare subinterval se alege un punct arbitrar τ_k căruia îi corespunde pe arcul $M_{k-1}M_k$ punctul P_k de afix ξ_k. Asociem curbei (C) şi diviziunii d suma Riemann

$$\sigma_d(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$



(Figura 2.3.1)

Definiţia 1.2 *Funcţia f se numeşte integrabilă pe curba (C) dacă există numărul complex $\mathbf{J}$ cu proprietatea*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \eta(\varepsilon) > 0 \ \ a.î.\ \forall\, d,\ v(d) < \eta(\varepsilon),\ \forall\, \tau_k,\ \ |\sigma_d(f) - \mathbf{J}| < \varepsilon.$$

Numărul $\mathbf{J}$ se numeşte *integrala (curbilinie) complexă* a funcţiei f pe curba (C) şi se notează $\mathbf{J} := \int_{(C)} f(z)dz$. Dacă (C) este o curbă închisă, atunci $\mathbf{J} := \oint\limits_{(C)} f(z)dz$.

Propoziţia 1.1 *Dacă $f : D \to \mathbf{C}$ este continuă pe curba netedă $(C) : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, atunci integrala funcţiei f pe curba (C) există şi este dată de*

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C)} u(x, y)dx - v(x, y)dy + j \int_{(C)} v(x, y)dx + u(x, y)dy. \tag{1.1}$$

Formula (1.1) conţine două integrale curbilinii de speţa a doua. Acest fapt motivează denumirea integralei complexe ca integrală curbilinie complexă.

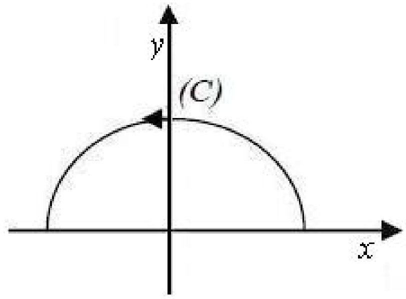
Ţinînd cont de formula de calcul a unei integrale curbilinii de speţa a doua şi de (1.1), se obţine:

Propoziţia 1.2 *Dacă $f : D \to \mathbf{C}$ este continuă pe curba netedă $(C) : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, atunci*

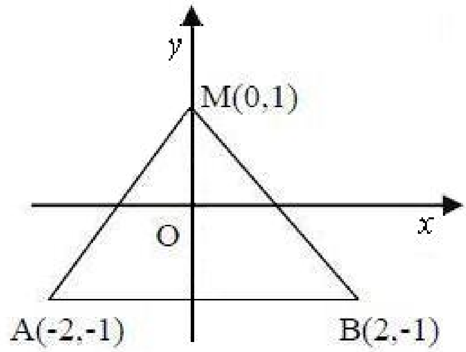
$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{1.2}$$

Exemplul 1.1 *Calculăm $\int_{(c)} \frac{z}{\bar{z}}dz$, unde $(C) : z(t) = e^{jt}$, $t \in [0, \pi]$. Deoarece $t \in [0, \pi]$ şi $|z| = 1$, curba (C) este semicercul cu centrul în O şi rază egală cu 1, (Figura 2.3.2). Aplicăm formula (1.2):*
$\int_{(C)} \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_0^\pi \frac{e^{jt}}{e^{-jt}} je^{jt}dt = j\int_0^\pi e^{3jt}dt = j\frac{e^{3jt}}{3j}|_0^\pi = \frac{1}{3}(e^{3\pi j} - 1) = -\frac{2}{3}$.

Exemplul 1.2 *Calculăm $\oint\limits_{(C)} (z - a)^n dz$, unde $(C) : |z - a| = r$ şi $n \in \mathbf{Z}$. Curba (C) este cercul cu centrul în a şi rază r. Ecuaţia parametrică complexă a cercului (C) este*



(Figura 2.3.2)



(Figura 2.3.3)

$z(t) = a + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\oint_{(C)} (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{jnt} jre^{jt} dt = jr^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)jt} dt \\
&= \begin{cases} jr^{n+1} \frac{e^{(n+1)jt}}{(n+1)j}\Big|_0^{2\pi}, & \text{dacă} \quad n \neq -1 \\ jt|_0^{2\pi}, & \text{dacă} \quad n = -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n \neq -1 \\ 2\pi j, & \text{dacă} \quad n = -1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

În continuare, enunţăm câteva proprietăţi ale integralei complexe:

Propoziţia 1.3 *i)* $\int_{(C+)} f(z)dz = -\int_{(C^-)} f(z)dz$;

ii) $\int_{(C)} [\alpha f(z) + \beta g(z)]dz = \alpha \int_{(C)} f(z)dz + \beta \int_{(C)} g(z)dz$, *unde* f, $g : D \to \mathbf{C}$ *sunt continue pe curba netedă* $(C) : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, $\forall\, \alpha$, $\beta \in \mathbf{C}$;

iii) $\int_{(C_1 \cup C_2)} f(z)dz = \int_{(C_1)} f(z)dz + \int_{(C_2)} f(z)dz$, *unde* $f : D \to \mathbf{C}$ *este continuă pe curbele netede* $(C_k) \subset D$, $k = 1, 2$;

iv) $\left| \int_{(C)} f(z)dz \right| \leq ML$, *unde* $M := \sup_{z \in (C)} |f(z)|$, *iar* L *este lungimea curbei netede* $(C) \subset D$.

2 Formulele integrale ale lui Cauchy

În această subsecţiune vom vedea ce aduce nou integrala complexă şi, posibilitatea de a reduce considerabil calculele integalelor complexe.

Teorema 2.1 *(Teorema lui Cauchy pentru domeniu simplu conex) Fie* $D \subset \mathbf{C}$ *un domeniu simplu conex,* $(C) \subset D$ *o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni şi* $f : D \to \mathbf{C}$*. Dacă* f *este olomorfă pe* D *atunci*

$$\oint_{(C)} f(z)dz = 0.$$

Exemplul 2.1 *i) Calculăm* $\oint\limits_{(C)}(e^z - z^4\cos^2 z)dz$, *unde* $(C): |z| = 2$. *Curba* (C) *este cercul cu centrul în* O *şi rază egală cu 2, iar* $f(z) = e^z - z^4\cos^2 z$ *este olomorfă în interiorul acestui cerc, adică în discul* $U(0, 2)$. *Aplicând teorema 2.1 rezultă* $\oint\limits_{(C)}(e^z - z^4\cos^2 z)dz = 0$.

ii) Calculăm $\oint\limits_{(C)}(2\bar{z} - z\sin z + \cos\frac{1}{z})dz$, *unde* $z(t) = \frac{1}{3}e^{jt} - j$, $t \in [0, 2\pi]$. *Curba* (C) *este cercul cu centrul în punctul de afix* $-j$ *şi rază egală cu* $\frac{1}{3}$, *iar*
$\oint\limits_{(C)}(2\bar{z} - z\sin z + \cos\frac{1}{z})dz) = 2\oint\limits_{(C)}\bar{z}dz - \oint\limits_{(C)}(z\sin z - \cos\frac{1}{z})dz$.

Conform teoremei de mai sus, $\oint\limits_{(C)}(z\sin z - \cos\frac{1}{z})dz = 0$, *deoarece funcţia* $z\sin z - \cos\frac{1}{z}$ *este olomorfă în* $U(-j, \frac{1}{3})$, *(*$z = 0$ *nu se găseşte în* $U(-j, \frac{1}{3})$*). Deci,*
$\oint\limits_{(C)}(2\bar{z} - z\sin z + \cos\frac{1}{z})dz = 2\oint\limits_{(C)}\bar{z}dz = 3\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3}e^{-jt} + j)\frac{1}{3}je^{jt}dt$
$= j\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3} + je^{jt})dt = \frac{4\pi j}{9}$

iii) Calculăm $\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{3e^{jz}}{z(z+4)}dz$. *Curba de integrare este cercul cu centrul în* $z_0 = 2$ *şi rază* $r = 1$. *Numitorul funcţiei se anulează în* $z = 0$ *şi* $z = -4$, *dar aceste puncte nu se găsesc în* $U(2, 1)$. *Deci* f *este olomorfă în* $U(2, 1)$ *şi în baza teoremei 2.1 rezultă* $\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{3e^{jz}}{z(z+4)}dz = 0$.

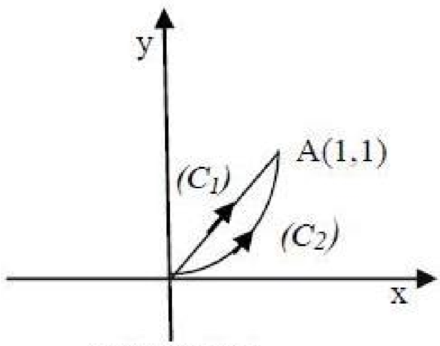
iv) Calculăm $\oint\limits_{(C)}\frac{z^3+\sin 2z}{(z+2)(z^2+4)}dz$, *unde* (C) *este* ΔMAB, $M(0, 1)$, $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$. *Numitorul funcţiei* $f(z) = \frac{z^3+\sin 2z}{(z+2)(z^2+4)}$ *se anulează în* $z = -2$ *şi* $z = \pm 2j$, *dar aceste puncte nu se găsesc în interiorul* ΔMAB, *(Figura 2.3.3). Deci* f *este olomorfă în interiorul* ΔMAB. *În baza teoremei lui Cauchy pentru domeniu simplu conex, rezultă* $\oint\limits_{(C)}\frac{z^3+\sin 2z}{(z+2)(z^2+4)}dz = 0$.

Propoziţia 2.1 *Fie* $D \subset \mathbf{C}$ *un domeniu simplu conex,* (AMB) *şi* $(ANB) \subset D$ *două arce de curbă şi* $f : D \to \mathbf{C}$. *Dacă* f *este olomorfă pe* D *atunci*

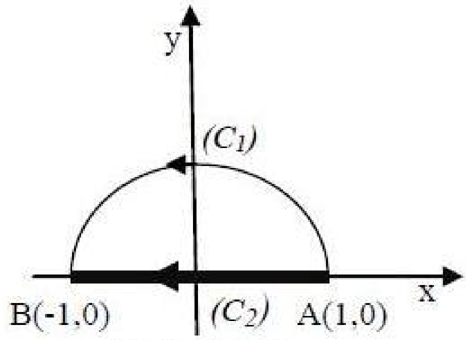
$$\int_{(AMB)} f(z)dz = \int_{(ANB)} f(z)dz. \qquad (2.1)$$

Relaţia (2.1) arată că integrala unei funcţii olomorfe într-un domeniu simplu conex D, calculată pe orice curbe deschise (care nu sunt închise), cu aceleaşi extremităţi, conţinute în D, dă o singură valoare. Vom vedea concret acest lucru pe câteva exemple.

Exemplul 2.2 *i) Calculăm* $\int_{(C_1)}\bar{z}dz$ *şi* $\int_{(C_2)}\bar{z}dz$, *unde* $(C_1) : z = t + jt$, $t \in [0, 1]$, *şi* $(C_2) : z = t + jt^2$, $t \in [0, 1]$. *Curbele* (C_1) *şi* (C_2) *au aceleaşi extremităţi, originea şi punctul* $A(1, 1)$, *(Figura 2.3.4).*
$\int_{(C_1)}\bar{z}dz = \int_0^1(t - jt)(1 + j)dt = 1$ *şi*
$\int_{(C_2)}\bar{z}dz = \int_0^1(t - jt^2)(1 + 2jt)dt = \int_0^1(t + jt^2 - 2t^3)dt = \frac{j}{3}$.
Deci am obţinut valori diferite, lucru care este justificat de faptul că funcţia $f(z) = \bar{z}$ *nu este olomorfă.*



(Figura 2.3.4)



(Figura 2.3.5)

Exemplul 2.3 *ii) Calculăm* $\int_{(C_1)} z^2 dz$ *şi* $\int_{(C_2)} z^2 dz$ *, unde* $(C_1) : z = e^{jt}$*,* $t \in [0, \pi]$*, şi* $(C_2) : z = t$*,* $t \in [1, -1]$*. Curbele* (C_1) *şi* (C_2) *au aceleaşi extremităţi, punctele* $A(1, 0)$ *şi* $B(-1, 0)$*, (Figura 2.3.5). Deoarece funcţia* $f(z) = z^2$ *este olomorfă, trebuie să obţinem aceeaşi valoare pentru ambele integrale. Într-adevăr,*

$\int_{(C_1)} z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{2jt} j e^{jt} dt = -\frac{2}{3}$ *şi* $\int_{(C_2)} z^2 dz = \int_1^{-1} t^2 dt = -\frac{2}{3}$.

Teorema 2.2 *(Teorema lui Cauchy pentru domeniu n - conex) Fie* $D \subset \mathbf{C}$ *un domeniu n - conex cu frontiera* $FrD := (C) \cup (C_1^-) \cup ... \cup (C_{n-1}^-)$ *şi* $f : D \to \mathbf{C}$*. Dacă f este olomorfă pe D atunci*

$$\oint_{(C)} f(z)dz = \oint_{(C_1)} f(z)dz + ... + \oint_{(C_{n-1})} f(z)dz. \tag{2.2}$$

Exemplul 2.4 *Calculăm* $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-2} dz$*. Cercul* $(C) : |z| = 3$ *conţine în interior punctul* $z = 2$*, (Figura 2.3.6).*

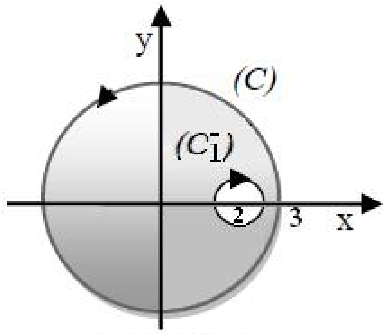
Înconjurăm punctul $z = 2$ *cu un cerc de rază foarte mică,* $(C_1) : |z - 2| = \varepsilon$ *astfel încât să fie complet conţinut în discul* $U(0, 3)$*. Obţinem un domeniu dublu conex în care funcţia* $f(z) = \frac{1}{z-2}$ *este olomorfă. Deci putem aplica (2.2) pentru* $n = 2$*:*

$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C_1)} f(z)dz \Leftrightarrow \oint_{|z|=3} \frac{1}{z-2} dz = \oint_{|z-2|=\varepsilon} \frac{1}{z-2} dz = 2\pi j$*, conform exemplului 2.3.2.*

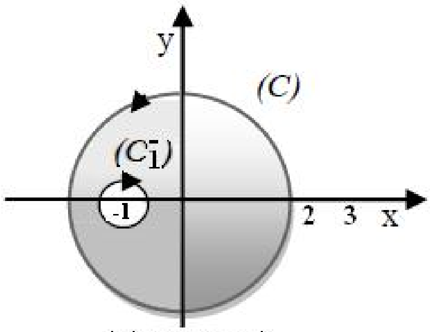
Prezentăm în continuare câteva consecinţe ale teoremei lui Cauchy pentru domenii simplu conexe.

Teorema 2.3 *(Formula integrală a lui Cauchy) Fie* $D \subset \mathbf{C}$ *un domeniu simplu conex,* $(C) \subset D$ *o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni astfel încât* $(C) = Fr\Delta$*, unde* $\Delta \subset D$ *este un domeniu şi* $f : D \to \mathbf{C}$*. Dacă f este olomorfă pe D atunci*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(C)} \frac{f(z)}{z-a} dz, \ \ \forall \, a \in \Delta. \tag{2.3}$$



(Figura 2.3.6)



(Figura 2.3.7)

Exemplul 2.5 *Calculăm* $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}dz$. $z=-3$ *şi* $z=-1$ *sunt punctele în care numitorul funcţiei* $f(z)=\frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}$ *se anulează. Doar* $z=-1$ *este în interiorul cercului* $(C):|z|=2$. *Înconjurăm pe* $z=-1$ *cu un cerc de rază foarte mică,* $(C_1):|z+1|=\varepsilon$ *astfel încât să fie complet conţinut în discul* $U(0,2)$. *Obţinem un domeniu dublu conex în care* $f(z)=\frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}$ *este olomorfă, (Figura 2.3.7). Aplicăm (2.2) pentru* $n=2$:

$\oint\limits_{(C)} f(z)dz = \oint\limits_{(C_1)} f(z)dz \Leftrightarrow \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}dz = \oint\limits_{|z+1|=\varepsilon} \frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}dz.$

Pentru a calcula integrala $\oint\limits_{|z+1|=\varepsilon} \frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}dz$ *folosim teorema 2.3. Alegem funcţia* $h(z)=\frac{e^{\pi jz}}{z+3}$ *care este olomorfă în interiorul lui* $(C_1):|z+1|=\varepsilon$, *deci în baza teoremei 2.3.,* $h(-1)=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{|z+1|=\varepsilon} \frac{h(z)}{z+1}dz$. *Rezultă,*

$\oint\limits_{|z+1|=\varepsilon} \frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}dz = 2\pi j h(-1) = -\pi j$. *Deci,* $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi jz}}{(z+3)(z+1)}dz = -\pi j.$

Exemplul 2.6 *Calculăm* $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz$. *Punctele în care numitorul funcţiei* $f(z)=\frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}$ *se anulează sunt* $z=1$ *şi* $z=-j$. *Amândouă sunt în interiorul cercului* $(C):|z|=2$. *Le înconjurăm cu cercuri de rază foarte mică,* $(C_1):|z-1|=\varepsilon_1$ *şi* $(C_2):|z+j|=\varepsilon_2$ *astfel încât să fie conţinute în întregime în discul* $U(0,2)$. *Se obţine un domeniu triplu conex în care* $f(z)=\frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}$ *este olomorfă, (Figura 2.3.8). Aplicăm formula (2.2) pentru* $n=3$, *adică* $\oint\limits_{(C)} f(z)dz = \oint\limits_{(C_1)} f(z)dz + \oint\limits_{(C_2)} f(z)dz$

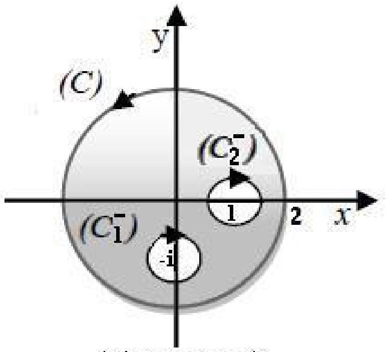
$\Leftrightarrow \oint\limits_{|z|=2} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz = \oint\limits_{|z-1|=\varepsilon_1} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz + \oint\limits_{|z+j|=\varepsilon_2} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz$. *Integrala s-a redus la calculul integralelor* $\oint\limits_{|z-1|=\varepsilon_1} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz$ *şi* $\oint\limits_{|z+j|=\varepsilon_2} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz$.

Fie $g(z)=\frac{z\sin\pi z}{z+j}$ *care este olomorfă în interiorul lui* $(C_1):|z-1|=\varepsilon_1$, *deci în baza teoremei 2.3.3,*

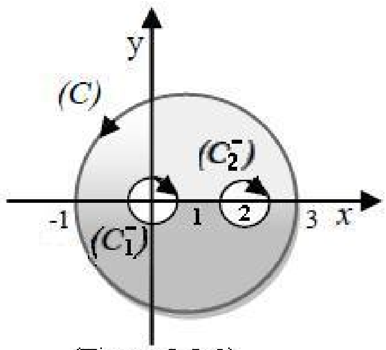
$g(1)=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{|z-1|=\varepsilon_1} \frac{g(z)}{z-1}dz$. *Deci* $\oint\limits_{|z-1|=\varepsilon_1} \frac{z\sin\pi z}{(z-1)(z+j)}dz = 2\pi j\ g(1) = 0.$

Fie $h(z) = \frac{z \sin \pi z}{z-1}$ *care este olomorfă în interiorul lui* $(C_2) : |z + j| = \varepsilon_2$ *şi aplicând din nou teorema 2.3.3 avem* $h(-j) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{|z+j|=\varepsilon_2} \frac{h(z)}{z+j} dz$. *Rezultă* $\oint\limits_{|z+j|=\varepsilon_2} \frac{z \sin \pi z}{(z-1)(z+j)} dz = 2\pi j$ $h(-j) = \sqrt{2}\pi(1-j)sh\pi$.

Deci, $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z \sin \pi z}{(z-1)(z+j)} dz = \sqrt{2}\pi(1-j)sh\pi$.



(Figura 2.3.8)



(Figura 2.3.9)

O generalizare a formulei integrale a lui Cauchy dată este următoarea teoremă:

Teorema 2.4 *Fie* $D \subset \mathbf{C}$ *un domeniu simplu conex,* $(C) \subset D$ *o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni astfel încât* $(C) = Fr\Delta$, *unde* $\Delta \subset D$ *este un domeniu şi* $f : D \to \mathbf{C}$. *Dacă* f *este olomorfă pe* D *atunci* f *este indefinit derivabilă pe* D *şi*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \oint\limits_{(C)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \forall\, a \in \Delta,\ n \in \mathbf{N}^*. \tag{2.4}$$

Exemplul 2.7 *Calculăm* $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz$. $z = 0$ *şi* $z = 2$ *sunt punctele în care numitorul funcţiei* $f(z) = \frac{z+3}{z(z-2)^2}$ *se anulează. Ambele sunt în interiorul cercului* $(C) : |z-1| = 2$. *Le înconjurăm cu cercuri de rază foarte mică,* $(C_1) : |z| = \varepsilon_1$ *şi* $(C_2) : |z-2| = \varepsilon_2$ *astfel încât să fie complet conţinute în discul* $U(1, 2)$. *Obţinem un domeniu triplu conex în care* $f(z)$ *este olomorfă, (Figura 2.3.9). (2.2) cu* $n = 3$ *este*

$\oint\limits_{(C)} f(z)dz = \oint\limits_{(C_1)} f(z)dz + \oint\limits_{(C_2)} f(z)dz$

$\Leftrightarrow \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz = \oint\limits_{|z|=\varepsilon_1} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz + \oint\limits_{|z-2|=\varepsilon_2} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz$. *Deci avem de calculat integralele* $\oint\limits_{|z|=\varepsilon_1} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz$ *şi* $\int\limits_{|z-2|=\varepsilon_2} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz$.

Fie $g(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2}$ *care este olomorfă în interiorul lui* $(C_1) : |z| = \varepsilon_1$, *deci în baza teoremei 2.3,* $g(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{|z|=\varepsilon_1} \frac{g(z)}{z} dz$. *Rezultă,*

$$\oint\limits_{|z|=\varepsilon_1} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz = 2\pi j g(0) = \frac{3\pi j}{2}.$$

Fie $h(z) = \frac{z+3}{z}$ *care este olomorfă în interiorul lui* $(C_2) : |z-2| = \varepsilon_2$ *şi aplicând teorema 2.4 cu* $n = 1$, *avem* $h'(2) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{|z-2|=\varepsilon_2} \frac{h(z)}{(z-2)^2} dz$. *Dar,* $h'(z) = -\frac{3}{z^2}$. *Obţinem,*

$$\oint\limits_{|z-2|=\varepsilon_2} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz = 2\pi j h'(2) = -\frac{3\pi j}{2}.$$

Deci, $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z+3}{z(z-2)^2} dz = 0$.

3 Serii de funcţii olomorfe

Se conturează posibilitatea construirii teoriei funcţiilor olomorfe pornind de la definirea lor ca funcţii dezvoltabile în serii de puteri. De asemenea, în această secţiune sunt prezentate serile Laurent care permit studiul comportării funcţiilor olomorfe în jurul punctelor singulare izolate.

3.1 Serii de puteri

Fie $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, un şir de funcţii complexe şi $z_0 \in D$. Atunci, $(f_n(z_0))_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir numeric convergent sau divergent. Notăm cu $A := \{z \in D, (f_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir numeric convergent$\}$ mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Considerăm şi o funcţie $f : A \to \mathbf{C}$.

Definiţia 3.1 *i) Şirul de funcţii* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge punctual în* A *către* f *dacă*

$$\forall\, z \in A,\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(z,\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \ a.\hat{\imath}.\ \ \forall\, n \geq N(z,\varepsilon),\ \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon;$$

ii) Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniform în* A *către* f *dacă*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \ a.\hat{\imath}.\ \ \forall\, n \geq N(\varepsilon),\ \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \ \forall\, z \in A.$$

Şirului de funcţii complexe $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ îi asociem seria de funcţii complexe

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(z) := f_0(z) + f_1(z) + ... + f_n(z) + ... \tag{3.1}$$

şi, corespunzător acesteia, şirul sumelor parţiale

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) := f_0(z) + f_1(z) + ... + f_n(z). \tag{3.2}$$

Fie $E := \{z \in D, (S_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir numeric convergent$\}$ mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii (3.2) şi funcţia $S : E \to \mathbf{C}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$.

Definiţia 3.2 *Seria de funcţii (3.1) este*

i) punctual convergentă în E către S, dacă şirul de funcţii (3.2) converge punctual pe E către S (în $z \in E$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(z) := S(z)$);

ii) uniform convergentă în E către S, dacă şirul de funcţii (3.2) converge uniform pe E către S ($\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(z) := S(z)$, $\forall\ z \in E$);

iii) absolut convergentă dacă seria $\sum_{n\in\mathbf{N}} |f_n(z)|$ este convergentă.

Din cele prezentate până acum reiese că nu sunt diferenţe semnificative între cazul real şi cazul complex al şirurilor şi seriilor de funcţii. Mai mult, pot fi stabilite criterii de convergenţă similare cu cele din cazul real: criteriul Weierstrass de convergenţă uniformă, criteriul general de convergenţă al lui Cauchy.

Definiţia 3.3 *Seria de funcţii*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n\,(z-a)^n = c_0 + c_1\,(z-a) + ... + c_n\,(z-a)^n + ... \tag{3.3}$$

se numeşte seria de puteri centrată în $a \in \mathbf{C}$, unde z, $c_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$.

Prin notaţia $\xi := z - a$, seria (3.3) se reduce la seria de puteri $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n\xi^n$. Deci studiul seriilor (3.3) se reduce la studiul seriilor centrate în 0,

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n z^n = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n + ... \tag{3.4}$$

Teorema 3.1 *(Teorema lui Abel) Fiind dată seria de puteri (3.4), există numărul R ($0 \leq R < \infty$), numit raza de convergenţă astfel încât (3.4) este*

i) absolut convergentă în discul $|z| < R$ şi divergentă exteriorul său, (adică $|z| > R$).

ii) uniform convergentă în discul $|z| \leq r$, unde $0 < r < R$.

Observaţia 3.1 *Raza de convergenţă se determină cu formulele*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad \textit{sau } R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{3.5}$$

Ca şi în cazul real, teorema lui Abel nu afirmă nimic despre natura seriei (3.4) în punctele de pe cercul $|z| = R$. Aceste puncte pot fi puncte de convergenţă sau de divergenţă.

Exemplul 3.1 *Determinăm razele de convergenţă pentru seriile:*

i) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$. *Avem* $c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *şi atunci,*

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\right| = 4.$

ii) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+j}{1-2jn}\right)^n z^n$. *Deoarece* $c_n = \left(\frac{n+j}{1-2jn}\right)^n$, *folosim a doua formulă din (3.5). Deci,*

$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+j}{1-2jn}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{1+4n^2}}} = 2.$

3.2 Serii Taylor

Definiţia 3.4 *Fie funcţia olomorfă $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ şi $a \in D$. Seria de puteri*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ... \quad (3.6)$$

se numeşte seria Taylor a lui f în jurul punctului a.

Pentru $a = 0$, (3.6) se numeşte *seria Mac-Laurin.*

Observaţia 3.2 *Aplicând teorema 2.4.1 seriei Taylor (3.6), rezultă că aceasta este absolut convergentă in discul $U(a, R) \subset D$.*

Apare, în mod firesc întrebarea dacă seria Taylor (3.6) converge către f în discul $U(a, R)$? Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

Teorema 3.2 *Relativ la seria de puteri (3.3) sunt adevărate următoarele afirmaţii:*
i) Suma seriei (3.3) este o funcţie olomorfă $f : U(a, R) \to \mathbf{C}$, adică

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n (z-a)^n ; \quad (3.7)$$

ii) În $U(a, R)$, seria (3.3) poate fi derivată şi integrată termen cu termen, iar seriile care se obţin au acelaşi disc de convergenţă, $U(a, R)$;
iii) Coeficienţii c_n ai seriei (3.3) sunt unic determinaţi prin

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ n \in \mathbf{N}. \quad (3.8)$$

Înlocuind (3.8) în (3.7) rezultă $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$. Deci seria Taylor (3.6) converge către f în discul $U(a, R)$.
Este adevărată şi reciproca, adică

Teorema 3.3 *Dacă $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ este olomorfă pe D şi $a \in D$, atunci f se poate reprezenta în orice disc $U(a, R)$ prin seria Taylor (3.6).*

O condiţie necesară şi suficientă de olomorfie este:

Teorema 3.4 *Funcţia f este olomorfă în $U(a, R)$, unde $a \in \mathbf{C}$ şi $R > 0$, dacă şi numai dacă f se reprezintă în $U(a, R)$ printr-o serie Taylor.*

Seria Taylor a unei funcţii întregi are raza de convergenţă infinită, $R = \infty$. Spre exemplu e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz, chz sunt funcţii întregi, deci dezvoltarea lor în serie Taylor se face în discuri cu centrul în a şi raza ∞.

EXEMPLE FUNDAMENTALE

Exemplul 3.2 *Dezvoltăm în serie Taylor funcţia* $f(z) = e^z$ *în* $U(a,\infty)$, $a \in \mathbf{C}$. *Deoarece* $f^{(n)}(z) = e^z$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $c_n = \frac{1}{n!}e^a$. *Deci,*

$$e^z = e^a\left(1 + \frac{(z-a)}{1!} + \frac{(z-a)^2}{2!} + ... + \frac{(z-a)^n}{n!} + ...\right).$$

Pentru $a = 0$ *obţinem seria Mac-Laurin*

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n + ..., \ \forall\ z \in \mathbf{C}. \tag{3.9}$$

Exemplul 3.3 *i) Dezvoltăm în serie Mac-Laurin funcţiile* $\sin z$ *şi* $\cos z$ *în* $U(0,\infty)$.

Seriile Mac-Laurin corespunzătoare acestor funcţii se pot găsi ca în exemplul anterior, dar putem şi altfel şi anume, utilizând (3.9) şi formulele $\begin{cases} \cos z = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} \end{cases}$. *Într-adevăr,*

$e^{jz} = 1 + j\frac{1}{1!}z - \frac{1}{2!}z^2 - j\frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + ...$ *şi*
$e^{-jz} = 1 - j\frac{1}{1!}z - \frac{1}{2!}z^2 + j\frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + ...$ *conduc la*

$$\begin{cases} \cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + ... \\ \sin z = \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + ... \end{cases}, \ \forall\ z \in \mathbf{C}. \tag{3.10}$$

ii) La fel se determină seriile Mac-Laurin corespunzătoare acestor funcţii shz şi chz în $U(0,\infty)$:

$$\begin{cases} chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + ... \\ shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \frac{1}{1!}z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + ... \end{cases}, \ \forall\ z \in \mathbf{C}. \tag{3.11}$$

Exemplul 3.4 *Reamintim şi seria geometrică,*

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ..., \quad |z| < 1. \tag{3.12}$$

3.3 Puncte singulare izolate

Fie funcţia $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ şi $a \in \mathbf{C}$.

Definiţia 3.5 *Mulţimea* $\dot{V} := V \backslash \{a\}$ *se numeşte vecinătate punctată a lui* a.

Spre exemplu, o vecinătate punctată a lui a este coroana circulară de centru a

$$U(a,R)\backslash\{a\} := \{z \in \mathbf{C},\ 0 < |z-a| < R\}.$$

Definiţia 3.6 *Punctul* a *se numeşte punct ordinar sau regulat al funcţiei* f *dacă există* V *o vecinătate a lui* a *astfel încât* f *se reprezintă printr-o serie Taylor pe* $V \cap D$. *În caz contrar,* a *se numeşte punct singular izolat.*

Deci, dacă a este punct singular izolat, atunci f nu este olomorfă în V, dar există vecinătatea punctată $\dot{V}$ în care f este olomorfă. Sunt cunoscute mai multe tipuri de puncte singulare izolate.

Definiţia 3.7 *Punctul singular izolat a al funcţiei f se numeşte:*
i) aparent sau eliminabil dacă există şi este finită limita

$$\lim_{z\to a} f(z) = c_0,\ c_0 \neq 0, \infty;$$

ii) pol de ordinul k, $k \in N^*$, dacă

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty,\ \lim_{z\to a} (z-a)^k f(z) = c_{-k},\ c_{-k} \neq 0, \infty;$$

iii) esenţial dacă nu există $\lim_{z\to a} f(z)$.

Exemplul 3.5 *i) Pentru funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z = 0$ este punct singular aparent.*
Într-adevăr, $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.
ii) Fie $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3}$. $z = 2$ este pol de ordinul 1, (pol simplu) deoarece $\lim_{z\to 2} \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3} = \infty$ şi $\lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = \frac{e^2}{27} = c_{-1} \neq 0, \infty$, iar $z = -1$ este pol de ordinul 3, $\lim_{z\to -1} \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3} = \infty$ şi $\lim_{z\to -1} (z+1)^3 f(z) = -\frac{1}{3e} = c_{-3} \neq 0, \infty$.
iii) Pentru funcţia $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z = 0$ este punct singular esenţial deoarece $\lim_{z\to 0} \cos \frac{1}{z}$ nu există.

3.4 Serii Laurent

În continuare vom prezenta câteva caracterizări ale punctelor singulare izolate cu ajutorul seriilor Laurent.

Seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-a)^n \tag{3.13}$$

este suma a două serii:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-a)^n$ este seria după puterile pozitive ale lui $(z-a)^n$, $n \in \mathbf{N}$, adică o serie Taylor. Aceasta se numeşte *partea Taylor* a seriei (3.13) şi este convergentă în $U(a, R)$;

ii) $\sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n (z-a)^n$ este seria după puterile negative ale lui $(z-a)^n$, $n \in \mathbf{Z}\backslash\mathbf{N}$, şi se numeşte *partea principală* a seriei (3.13). Notând $\xi := \frac{1}{z-a}$, obţinem $\sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{-n} \xi^n$, adică o serie Taylor care este convergentă în discul $U(0, R')$ sau în exteriorul discului $U(a, r)$. Într-adevăr, $|\xi| < R'$ este echivalent cu $|z-a| > \frac{1}{R'} > r$, $R' \neq 0$.

Comparând razele de convergenţă r şi R şi aplicând teoremele 3.2 şi 3.3 rezultă că seria (3.13) este convergentă în coroana circulară $U(a, r, R)$, $(r < R)$, suma seriei fiind o funcţie olomorfă în $U(a, r, R)$ şi reciproc.

Definiţia 3.8 *Fie* $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *o funcţie olomorfă în* $U(a, r, R)$, $a \in \mathbf{C}$. *Seria*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3.14}$$

unde coeficienţii c_n *sunt daţi de*

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \rho \in (r, R), \ n \in \mathbf{Z}. \tag{3.15}$$

se numeşte seria Laurent a funcţiei f *în jurul punctului* a.

Teorema 3.5 *Funcţia* $f : U(a, r, R) \to \mathbf{C}$, *olomorfă în* $U(a, r, R)$ *se poate reprezenta în mod unic sub forma unei serii Laurent (3.14),*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3.16}$$

cu coeficienţii c_n *daţi de (3.15).*

Teorema 3.6 *Fie* $z = a$ *un punct singular izolat al funcţiei* f. *Atunci*

i) $z = a$ *este aparent dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei* f *în* $\dot{V}$ *nu are parte principală, adică*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ \forall\, z \in \dot{V}; \tag{3.17}$$

ii) $z = a$ *este pol de ordinul* k *dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei* f *în* $\dot{V}$ *are* k *termeni în partea principală, adică*

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ \forall\, z \in \dot{V}; \tag{3.18}$$

iii) $z = a$ *este esenţial dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei* f *în* $\dot{V}$ *are în partea principală o infinitate de termeni, adică*

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ \forall\, z \in \dot{V}. \tag{3.19}$$

Exemplul 3.6 *Arătăm că funcţia* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *are punctul* $z = 0$ *esenţial. Înlocuind pe* z *cu* $\frac{1}{z}$ *în (3.9) obţinem dezvoltarea Laurent*

$$e^{\frac{1}{z}} = \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + 1,$$

care are în partea principală o infinitate de termeni. Deci, conform teoremei 2.4.6, $z = 0$ *este punct singular esenţial. Menţionăm şi valoarea coeficientul* c_{-1} *din aceată dezvoltare. Acesta este* $c_{-1} = 1$.

Exemplul 3.7 *Funcţia* $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ *are punctele* $z = 0$ *şi* $z = 1$ *poli de ordinul* 1. *Într-adevăr, în* $0 < |z| < 1$, *avem*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}(1 + z + z^2 + ... + z^n + ...)\\ &= \frac{1}{z} + 1 + z + +z^2 + ...\end{aligned}$$

În $0 < |z-1| < 1$, *avem*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-(1-z)}\\ &= \frac{1}{1-z} + 1 + (1-z) + (1-z)^2 + ...\end{aligned}$$

Şi aici, în ambele dezvoltări, $c_{-1} = 1$.

Determinăm dezvoltările în serie Laurent ale funcţiei $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ *şi în* $|z| > 1$, *respectiv* $|z-1| > 1$.

În $|z| > 1$, *avem*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z^2}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ...)\\ &= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - ....\end{aligned}$$

În $|z-1| > 1$, *avem*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{1-z})}\\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z}(1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2} + ...)\\ &= -\frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^4} - ...\end{aligned}$$

Exemplul 3.8 $z = 0$ *este punct singular izolat al funcţiei* $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. *Pentru a stabili natura acestuia, dezvoltăm în serie Laurent funcţia* $f(z) = \frac{\cos z}{z}$, *în jurul punctului* $z = 0$. *Ţinând cont de dezvoltarea (3.10) a funcţiei* $\cos z$, *avem*

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + ...\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2!}z + \frac{1}{4!}z^3 + ..., \ 0 < |z| < \infty,$$

care este o serie Laurent cu un singur termen în partea principală. Deci, $z = 0$ *este pol de ordinul* 1. *În plus,* $c_{-1} = 1$.

Exemplul 3.9 *Dezvoltăm în serie Laurent, în jurul punctului singular* $z = 0$*, funcţia* $f(z) = \frac{1}{\sin z}$*. Utilizând dezvoltarea (3.10),*

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + ...}.$$

Dar, $z = 0$ *nu este punct singular izolat pentru funcţia* $\frac{1}{\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + ...}$*. Rezultă că* $\frac{1}{\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + ...}$ *se dezvoltă în serie Taylor în jurul lui* $z = 0$*. Deci,*

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + ...} = \frac{1}{z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...).$$

De aici obţinem, $(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...)\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + ...\right) = 1$*. Rescrisă ca* $a_0 + a_1 z + (a_2 - \frac{a_0}{3!})z^2 + (a_3 - \frac{a_1}{3!})z^3 + (a_4 - \frac{a_2}{3!} + \frac{a_0}{5!})z^4 + ... = 1$*, conduce la*

$$a_0 = 1, \;\; a_1 = 0, \;\; a_2 = \frac{1}{6}, \;\; a_3 = 0, \;\; a_2 = \frac{7}{360}, \; ...$$

şi,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + ...$$

Dezvoltarea funcţiei $f(z) = \frac{1}{\sin z}$*, în jurul lui* $z = 0$*, are un singur termen în partea principală. Rezultă că* $z = 0$ *este pol simplu.*

În exemplele prezentate, coeficienţii seriilor Taylor şi Laurent nu au fost determinaţi cu formulele (3.8) şi (3.15) din cauza calculelor dificile, ci s-au folosit diverse procedee care au redus problema, la dezvoltarea în serie a unor funcţii cunoscute. De o mare importanţă este coeficientul c_{-1} din dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii jurul unui punct singular izolat, asa cum vom vedea în următoarea secţiune.