Fizica Generala

Curs 3

Oscilaţii

- Se numeşte *oscilaţie* fenomenul fizic în decursul căruia o anumită mărime fizică a procesului prezintă o variaţie periodică sau pseudo-periodică.
- Un sistem fizic izolat, care este pus în oscilaţie printr-un impuls, efectuează *oscilaţii libere* sau proprii, cu o frecvenţă numită *frecvenţa proprie* a sistemului oscilant.

Clasificarea oscilatiilor

- Oscilaţiile pot fi clasificate în funcţie de mai multe criterii si anume:
- Dupa forma energiei:
  - **oscilaţii elastice, mecanice** – au loc prin transformarea reciprocă a energiei cinetice în energie potenţială;
  - **oscilaţii electromagnetice** – au loc prin transformarea reciprocă a energiei electrice în energie magnetică;
  - **oscilaţii electromecanice** – au loc prin transformarea reciprocă a energiei mecanice în energie electromagnetică.

Clasificarea oscilatiilor

- conservarea energiei
  - oscilaţii nedisipative, ideale sau neamortizate (energia totală se conservă);
  - oscilaţii disipative sau amortizate (energia se consumă în timp);
  - oscilaţii forţate sau întreţinute (se furnizează energie din afara sistemului, pentru compensarea pierderilor).

Mărimi caracteristice oscilaţiilor periodice

- Daca notam cu S(t) mărimea fizică ce caracterizează o oscilaţie =>S(t) = S(t+T) cu T perioada de oscilatie
- **Oscilaţiile armonice** reprezintă acel tip de oscilaţii în care mărimile caracteristice se pot exprima prin **funcţii trigonometrice (sinus, cosinus)** sau prin **funcţii exponenţiale de argument complex.**
- Acele oscilaţii care nu sunt armonice, se pot descompune în serii Fourier de funcţii.
- Formulele lui Euler, utilizate în calculele următoare:

$$\left|e^{i\varphi}\right|^2 = 1$$

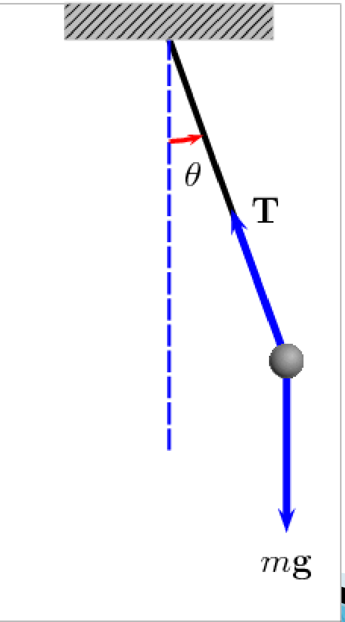
$$\rho^2 \left|e^{i\varphi}\right|^2 = \rho^2 = a^2 + b^2$$

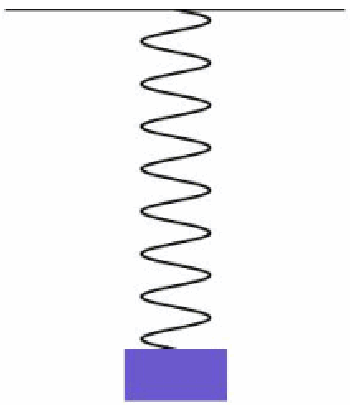
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

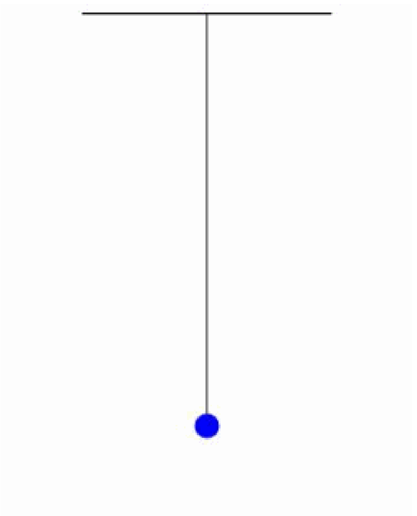
$$\rho\, e^{i\varphi} = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = a + ib$$

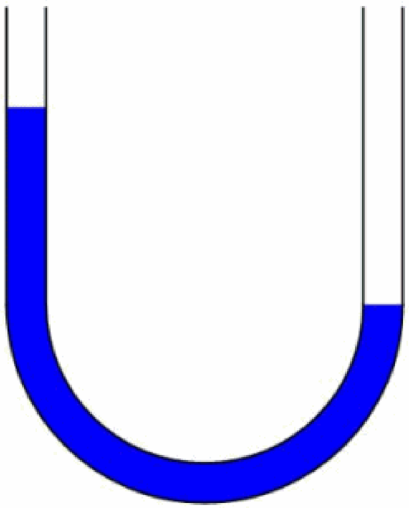
Mişcarea oscilatorie armonică ideală

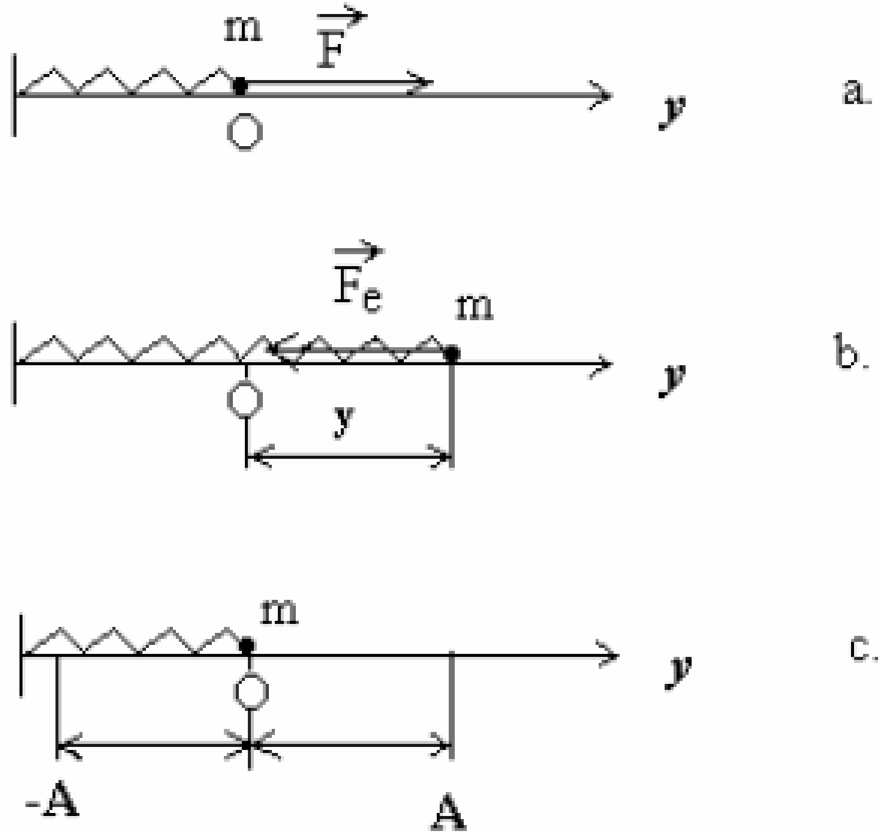
- În absenţa unor forţe de frecare sau de disipare a energiei, mişcarea oscilatorie este o mişcare ideală, deoarece energia totală a oscilatorului rămâne constantă în timp.











$$ma = -k\,y$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + k\,y = 0$$

ω_0 *pulsaţia proprie a oscilatorului* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A - *amplitudinea mişcării oscilatorii, iar* φ_0 - *faza iniţială a mişcării.*

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 y$$

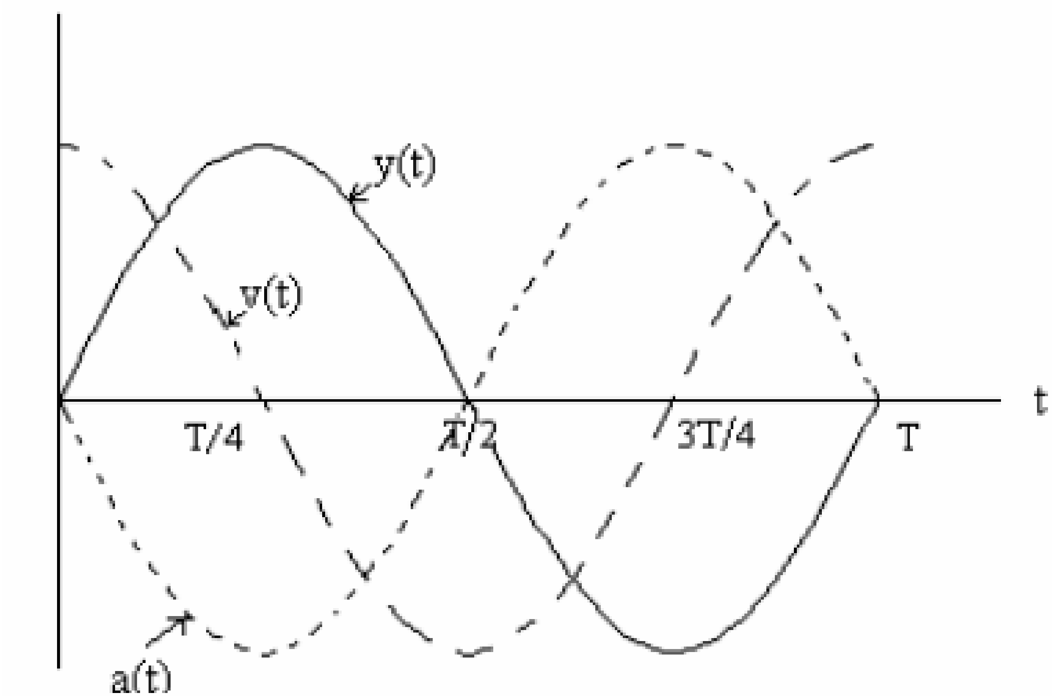
Oscilator mecanic ideal:

a) momentul iniţial;

b) alungirea y produce forţa de revenire F_e

c) amplitudinea mişcării oscilatorii.

Mărimile fizice caracteristice ale oscilatorului ideal pot fi reprezentate grafic în funcţie de timp.
Dacă faza iniţială este nulă, se obţin graficele funcţiilor y = f(t), v = f(t) şi a = f(t) din fig.



Energiile cinetică şi potenţială ale oscilatorului ideal sunt de forma:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

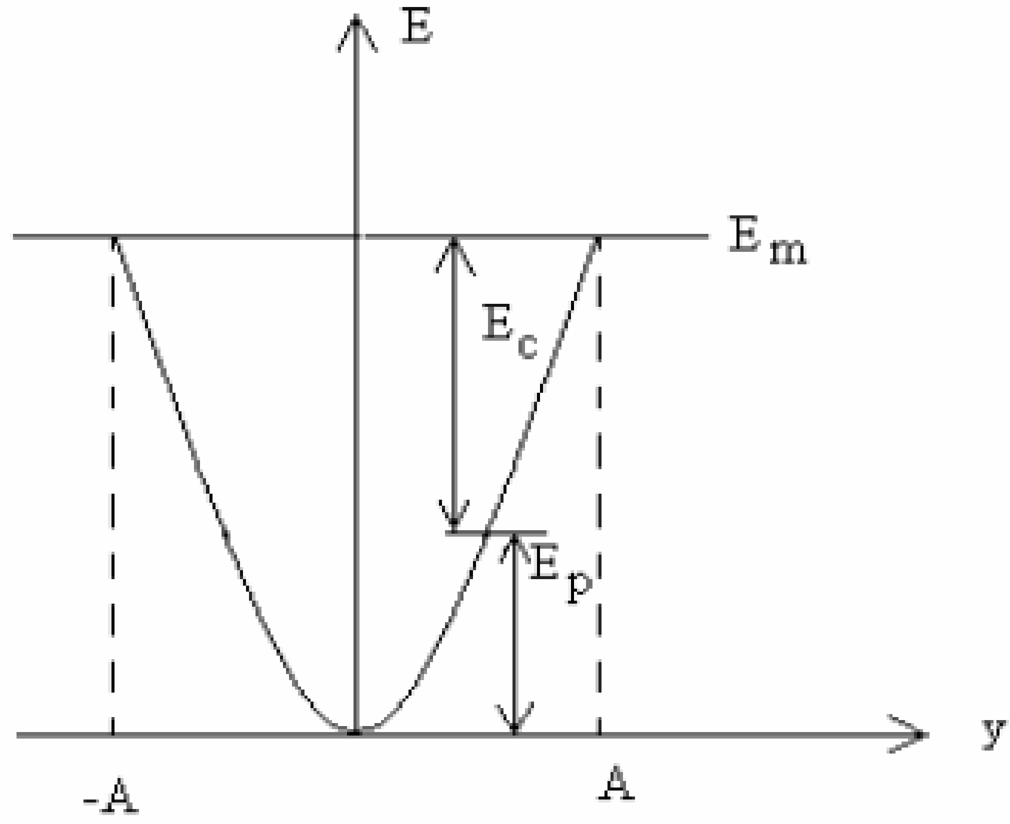
$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$k = m\,\omega_0^2$$

Energia mecanică a oscilatorului ideal este suma energiilor cinetică şi potenţială

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2\left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}k\,A^2$$



Energiile cinetică, potenţială şi totală în funcţie de elongaţia oscilatorului ideal.

- Conservarea energiei mecanice a oscilatorului constituie efectul direct al faptului că forţele elastice sunt forţe conservative.
- Caracterul oscilant al mişcării se poate constata şi din transformarea periodică a energiei cinetice în energie potenţială şi reciproc.

https://www.youtube.com/watch?v=tNpuTx7UQbw

- Min 39.30

Oscilaţii amortizate

Mişcarea oscilatorie amortizată

- Sistemele oscilante reale sunt supuse unor forţe de frânare, sau de disipare a energiei pe care o au la începutul mişcării. Acea parte a energiei ce se pierde prin frecare se transformă în căldură.
- Amplitudinea mişcării oscilatorii amortizate este descrescatoare în timp. Un caz interesant de forţe de frânare îl constituie *forţele proporţionale cu viteza de oscilaţie*.

Modulul unei forţe proporţionale cu viteza de mişcare şi opusă acesteia se poate scrie sub forma:

$$F_f = -\rho v$$

ρ este *coeficientul de rezistenţă mecanică*

$$\ddot{y} + \frac{\rho}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\beta = \frac{\rho}{m}$$

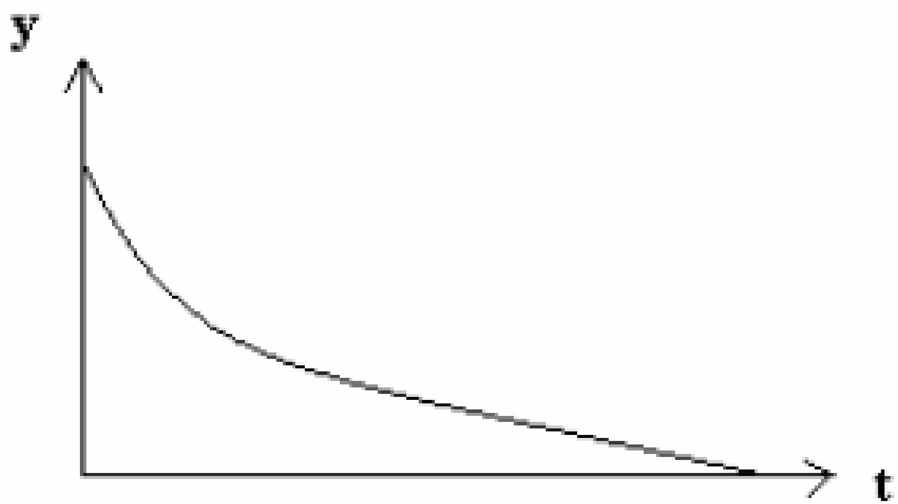
unde ω_0 reprezintă pulsaţia proprie a oscilatorului ideal, iar β se numeşte *coeficient de amortizare*

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \qquad r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

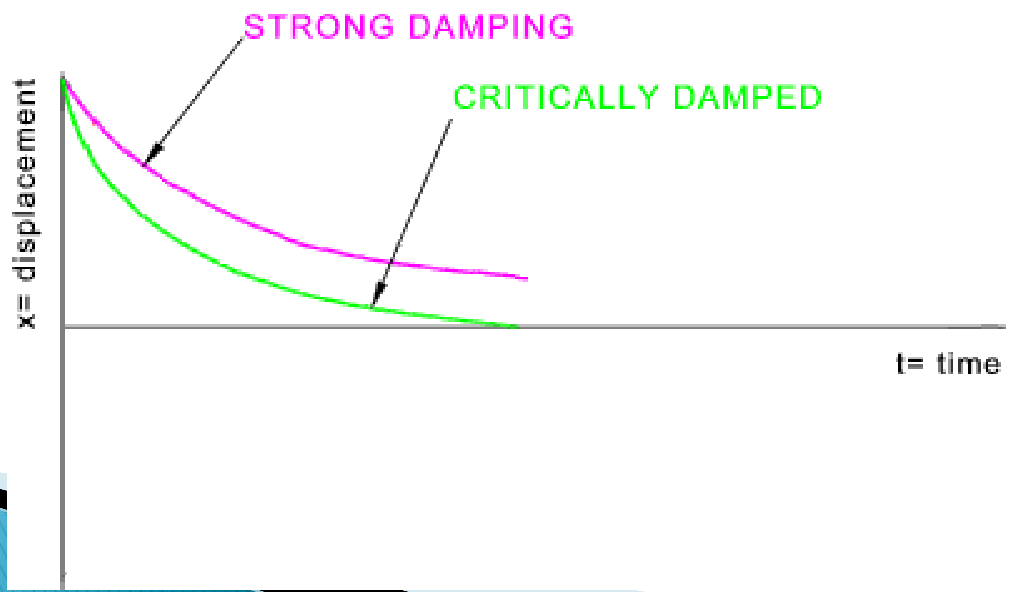
$$\beta > \omega_0 \qquad y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condiţiile iniţiale ale mişcării, fiind numere reale. Mişcarea descrisă de ecuaţia este *neperiodică*. Elongaţia tinde la zero când timpul tinde la infinit, fără ca punctul material să oscileze.



$$\beta = \omega_0 \qquad y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

Această mişcare este de asemenea neperiodică, fiind numită *mişcare aperiodică critică*. Elongaţia, având un singur maxim, tinde asimptotic la zero, dar fără ca punctul material să efectueze oscilaţii elastice.



$$\beta < \omega_0 \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

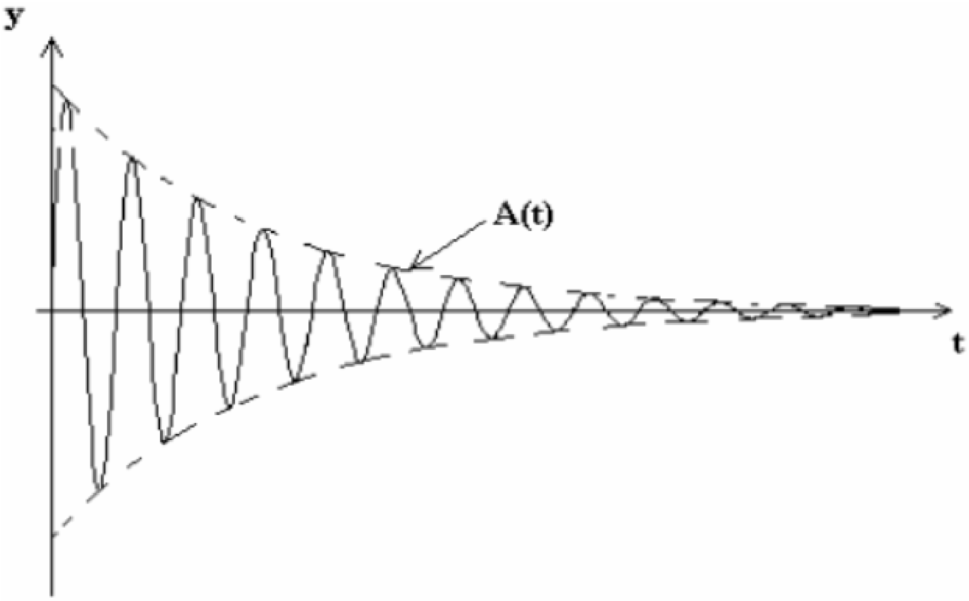
Mărimea ω se numeşte pseudo-*pulsaţia oscilatorului amortizat*

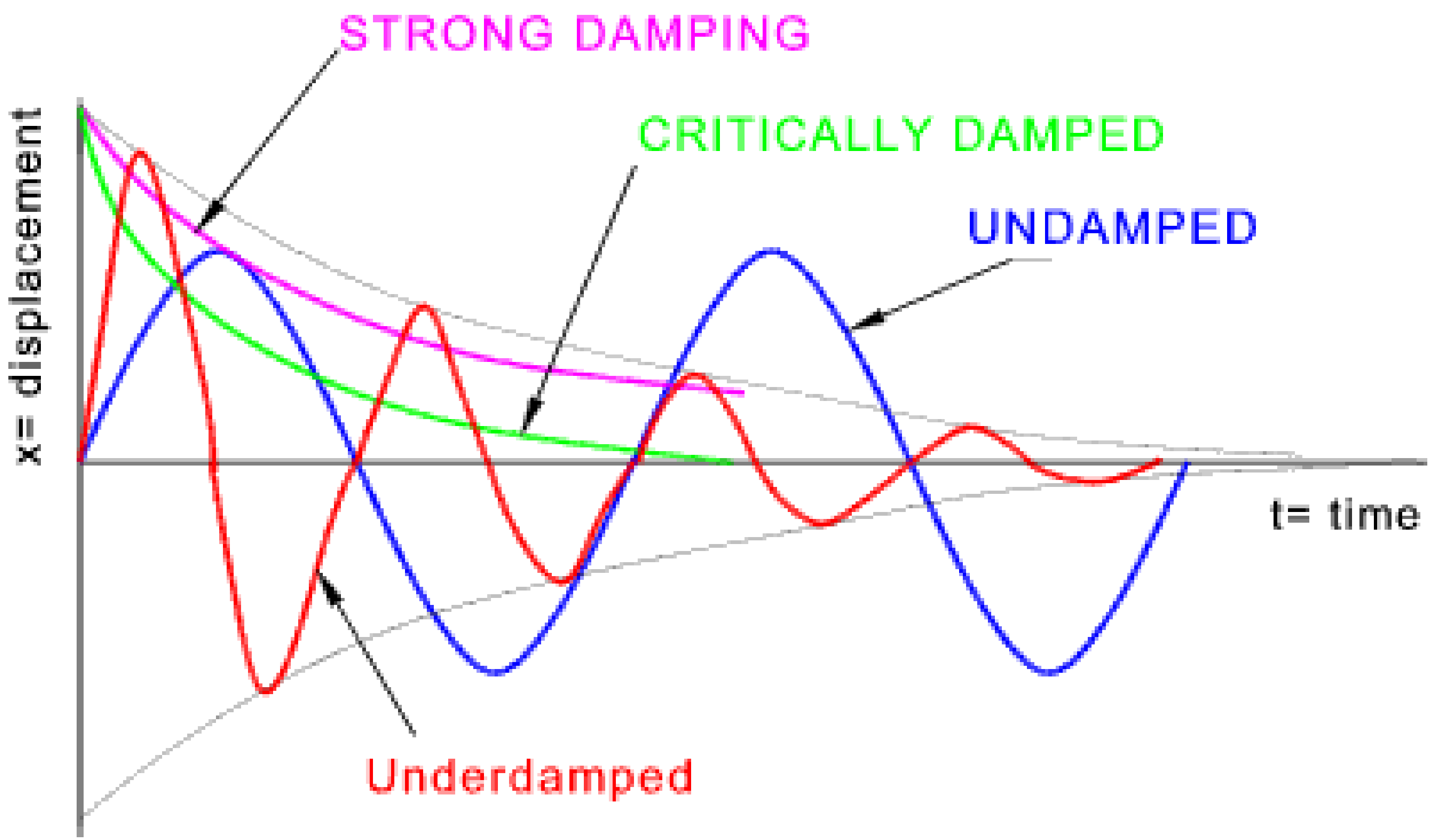
$$r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$$

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t}$$

$$y(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi)$$



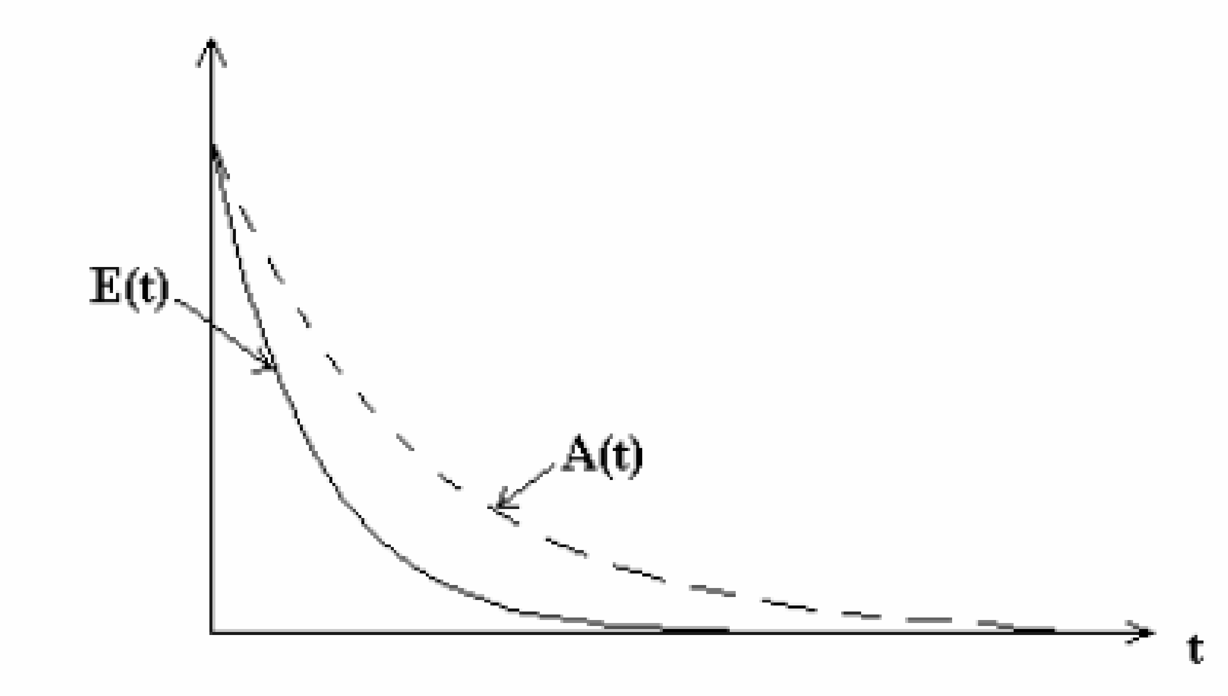

STRONG DAMPING
CRITICALLY DAMPED
UNDAMPED
x= displacement
t= time
Underdamped

Descreşterea amplitudinii mişcării oscilatorii amortizate este caracterizată de mărimea numită *decrement logaritmic*.
Decrementul logaritmic este egal cu logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive

$$\Delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -A_0 \beta e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + A_0 \omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t}$$



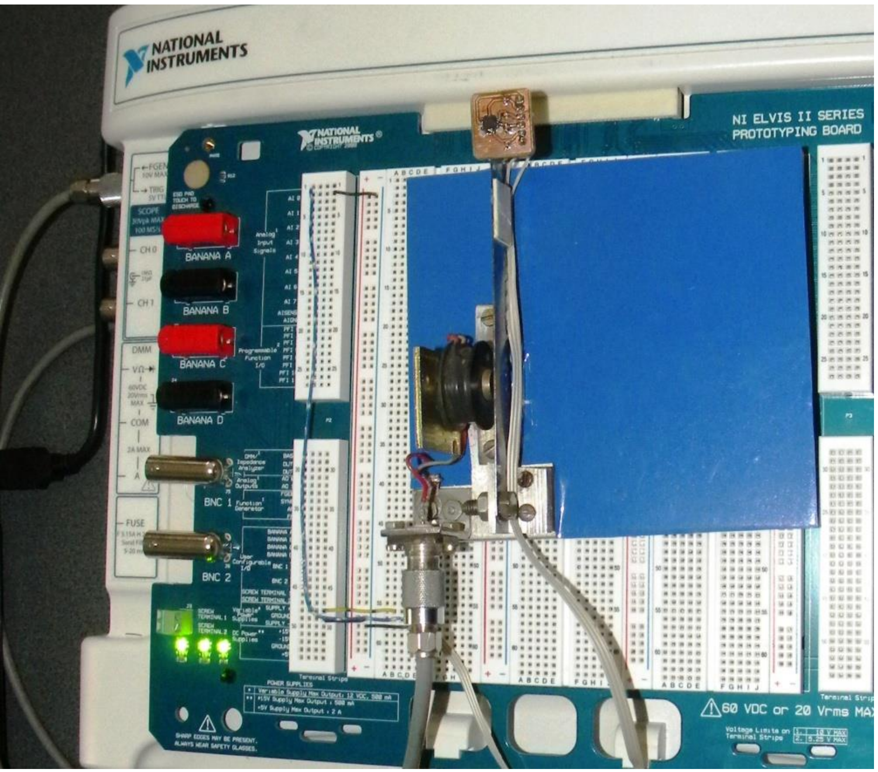
Comparând vitezele de scădere în timp ale amplitudinii şi energiei totale în cazul oscilatorului amortizat, putem constata că energia mecanică scade mult mai repede decât amplitudinea mişcării.

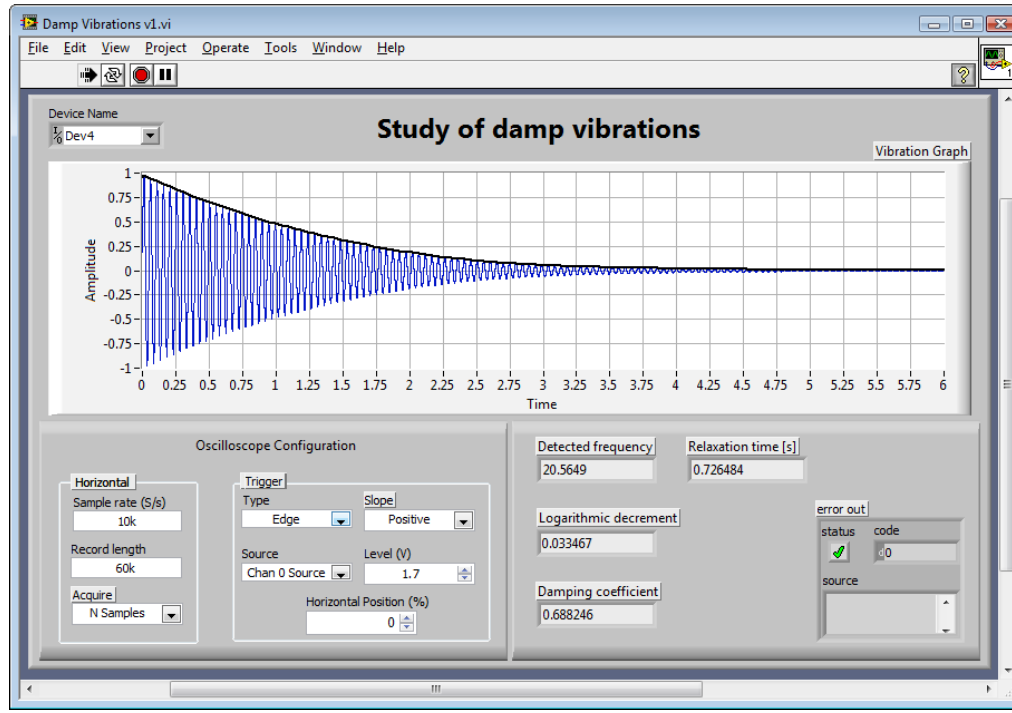
Timpul caracteristic pentru scăderea energiei mecanice a oscilatorului amortizat se numeşte *timp de relaxare*, notat τ.
Timpul de relaxare τ este intervalul de timp după care energia mecanică scade de e = 2.718 ori (ln e = 1):

$$\frac{E(t)}{E(t+\tau)} = 2.718 = e$$

$$\frac{\frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t}}{\frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta(t+\tau)}} = e \qquad 2\beta\tau = 1$$

$$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{\rho}$$ timpul de relaxare.


NATIONAL INSTRUMENTS
NI ELVIS II SERIES
PROTOTYPING BOARD
BANANA A
BANANA B
BANANA C
BANANA D
BNC 1
BNC 2
60 VDC or 20 Vrms MAX


Damp Vibrations v1.vi
File Edit View Project Operate Tools Window Help
Device Name
Dev4
Study of damp vibrations
Vibration Graph
Amplitude
Time
1
0.75
0.5
0.25
0
-0.25
-0.5
-0.75
-1
0 0.25 0.5 0.75 1 1.25 1.5 1.75 2 2.25 2.5 2.75 3 3.25 3.5 3.75 4 4.25 4.5 4.75 5 5.25 5.5 5.75 6
Oscilloscope Configuration
Horizontal
Sample rate (S/s)
10k
Record length
60k
Acquire
N Samples
Trigger
Type
Edge
Slope
Positive
Source
Chan 0 Source
Level (V)
1.7
Horizontal Position (%)
0
Detected frequency
20.5649
Relaxation time [s]
0.726484
Logarithmic decrement
0.033467
Damping coefficient
0.688246
error out
status
code
0
source

Oscilaţii forţate

- Să considerăm un oscilator mecanic format dintr-un resort elastic şi un corp de dimensiuni neglijabile.
- Datorită forţei de frecare, energia mecanică a oscilatorului se consumă în timp, astfel încât oscilaţia este amortizată.
- Pentru a întreţine mişcarea oscilatorie, trebuie să se aplice forţe exterioare, care să compenseze pierderile de energie din sistem.
- În acest caz, punctul material va efectua o mişcare oscilatorie *forţată*

Consideram cazul forţelor perturbatoare ce sunt periodice. O astfel de forţă perturbatoare se poate scrie sub forma:

$$F_p = F_0 \sin \omega_p t$$

=> ec. devine:

$$m\ddot{y} = -ky - \rho\dot{y} + F_0 \sin \omega_p t$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega_p t$$

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t)$$

$$y_o(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_p(t) = A_p \sin(\omega_p t - \varphi) \qquad \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin\omega_p t \qquad f = \frac{F_0}{m}$$

$$-A_p\omega_p^2 \sin(\omega_p t - \varphi) + 2\beta A_p\omega_p \cos(\omega_p t - \varphi) + A_p\omega_0^2 \sin(\omega_p t - \varphi) = f\sin\omega_p t$$

Consideram cazurile: $\omega_p t = \dfrac{\pi}{2}$ și $\omega_p t = 0$

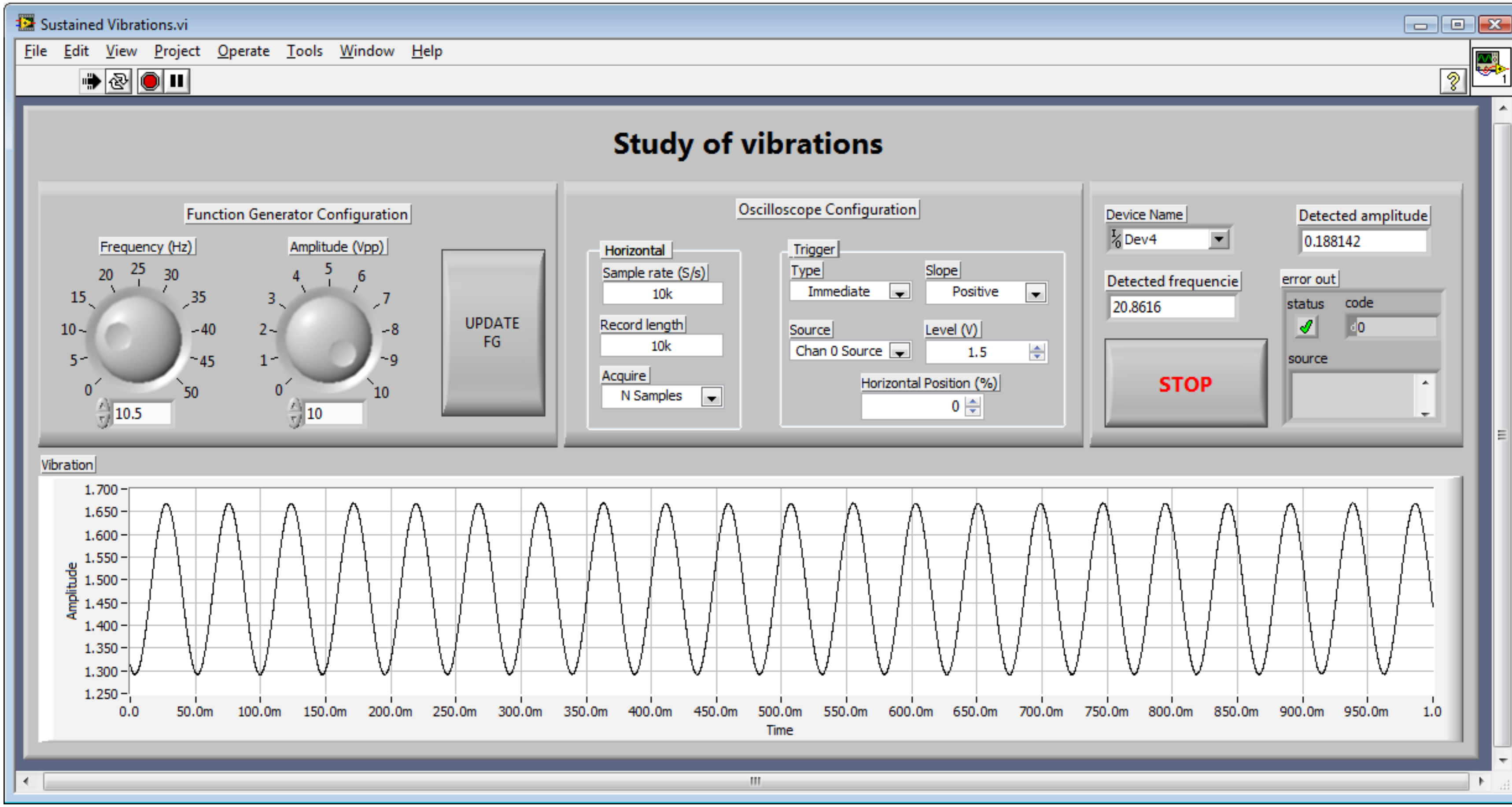
$$\begin{cases} -A_p\omega_p^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) + 2\beta A_p\omega_p \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + A_p\omega_0^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = f\sin\frac{\pi}{2} \\ -A_p\omega_p^2 \sin(-\varphi) + 2\beta A_p\omega_p \cos(-\varphi) + A_p\omega_0^2 \sin(-\varphi) = f\sin 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_p(\omega_0^2 - \omega_p^2)\cos\varphi + 2\beta A_p\omega_p \sin\varphi = f \\ -A_p(\omega_0^2 - \omega_p^2)\sin\varphi + 2\beta A_p\omega_p \cos\varphi = 0 \end{cases} \qquad A_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\beta\omega_p)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega_p}{(\omega_0^2 - \omega_p^2)}$$

Discutii

- Observăm că amplitudinea oscilaţiei permanente este constantă în timp, depinde de pulsaţia ω_p a forţei ce o întreţine, dar nu depinde de condiţiile inţiale.
- De asemenea, observăm că există un defazaj între forţa F_p şi elongaţia oscilaţiei întreţinute $y_p(t)$. Oscilaţia permanentă este în urmă cu faza φ faţă de forţa F_p.
- Frecvenţa de oscilaţie a regimului permanent este egală cu frecvenţa forţei exterioare, F_p, aşa cum rezultă şi experimental.


Sustained Vibrations.vi
File Edit View Project Operate Tools Window Help
Study of vibrations
Function Generator Configuration
Frequency (Hz)
Amplitude (Vpp)
10.5
10
UPDATE FG
Oscilloscope Configuration
Horizontal
Sample rate (S/s)
10k
Record length
10k
Acquire
N Samples
Trigger
Type
Immediate
Slope
Positive
Source
Chan 0 Source
Level (V)
1.5
Horizontal Position (%)
0
Device Name
Dev4
Detected amplitude
0.188142
Detected frequencie
20.8616
error out
status
code
0
source
STOP
Vibration
Amplitude
Time

Rezonanţa

- *Rezonanţa* este fenomenul fizic de apariţie a maximului amplitudinii oscilaţiei întreţinute.

$$\frac{dA_p}{d\omega_p} = f\frac{d}{d\omega_p}\left\{\left[\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)^2+4\beta^2\omega_p^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$-\frac{1}{2}f\left[\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)^2+4\beta^2\omega_p^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left\{2\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)\left(-2\omega_p\right)+8\beta^2\omega_p\right\}$$

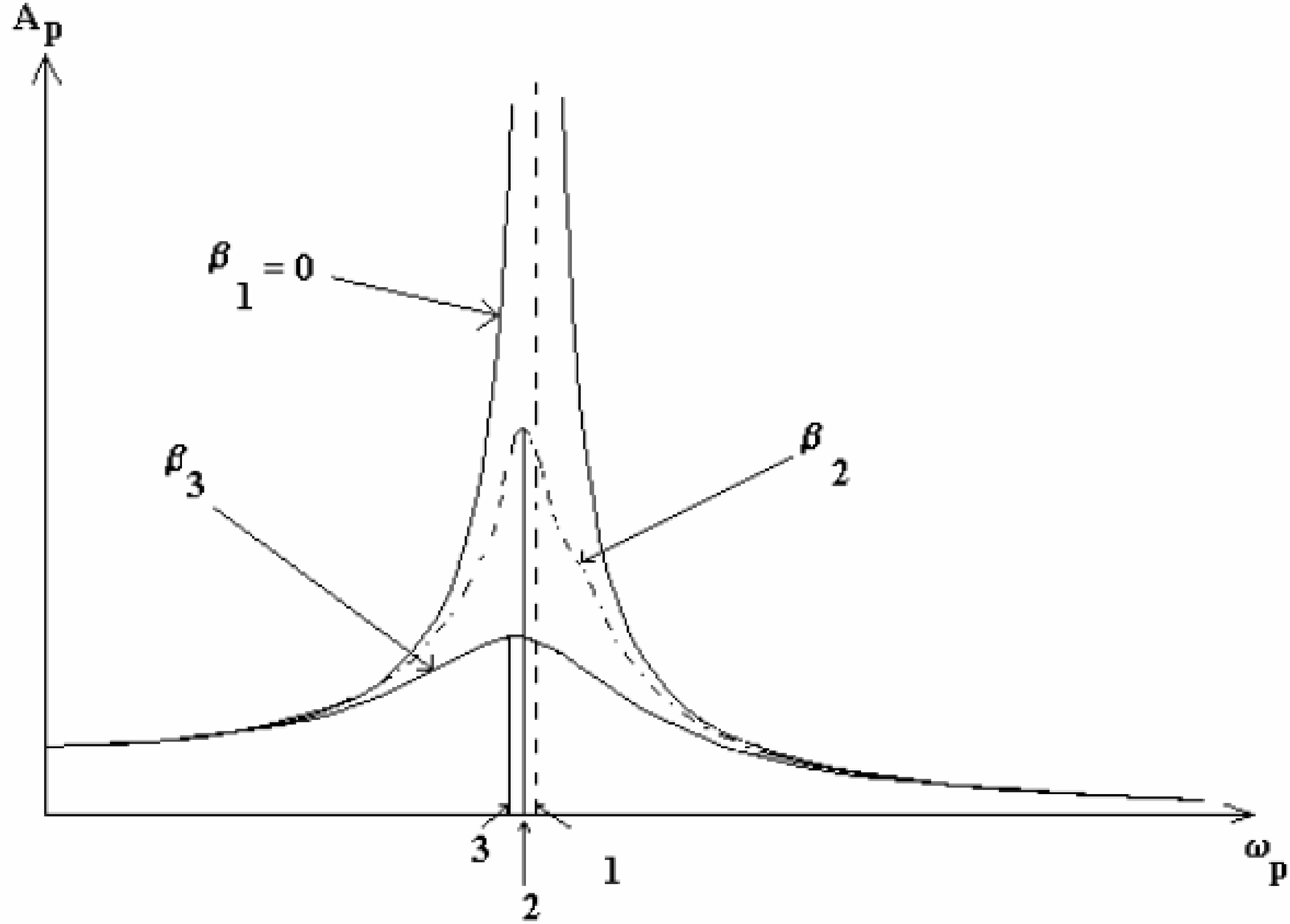
$$\frac{dA_p}{d\omega_p} = 0$$

$$4\omega_p\left(-\omega_0^2+\omega_p^2+2\beta^2\right)=0$$

$$\omega_p = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2-2\beta^2}$$

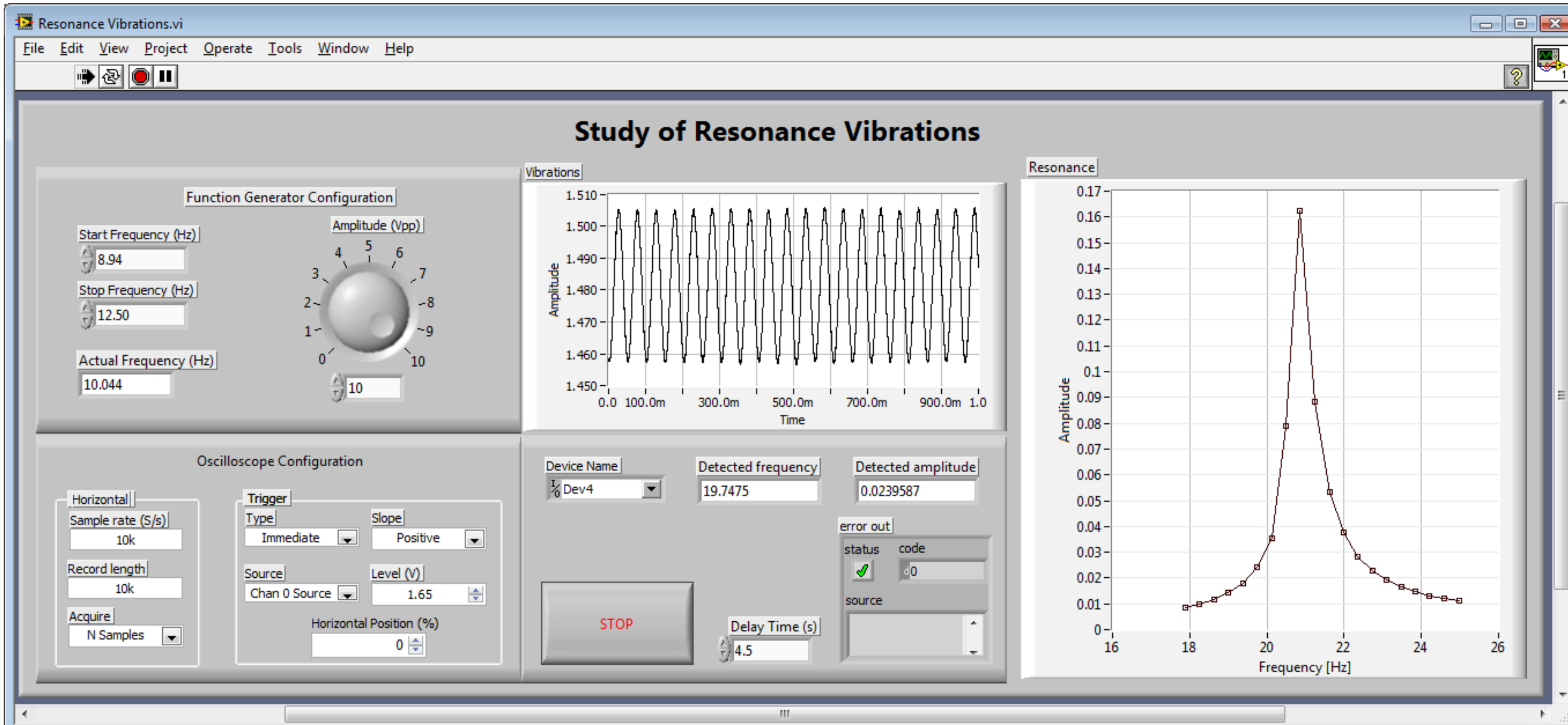
$$A_{rez} = A_{max} = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{rez}^2\right)^2+4\beta^2\omega_{rez}^2}} =$$

$$= \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$



Curbe de rezonanță pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare: **1** $\beta_1 = 0$; **2** $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2}$; **3** $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_3^2}$, $\beta_3 > \beta_2$.

https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k



https://www.youtube.com/watch?v=lXyG68_caV4

47s

https://www.youtube.com/watch?v=uWoiMMLIvco

47s