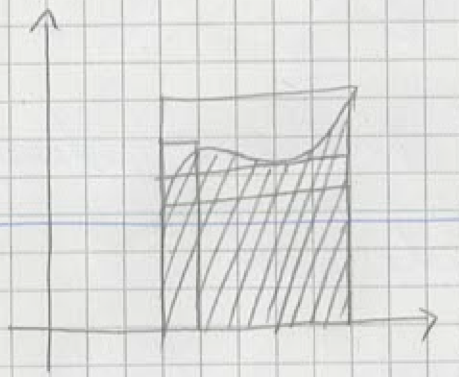
AnMate_C_12_2023_11_10 10.11.2023

Integrabilitate

Arie



$A_b \simeq (b-a)$

Definiție: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă (Riemann) dacă există $I\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon>0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon>0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune $\Delta = a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{k-1}<x_k<\dots<x_{n-1}<x_n=b$, cu $\|\Delta\| = \max\{x_k-x_{k-1}\}<\delta_\varepsilon$ și pentru orice sistem de puncte intermediare

$\xi = (\xi_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$

$\xi_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$

avem $\left|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\xi_k-\xi_{k-1})}_{S_\Delta(f,\xi)} - I\right| < \varepsilon.$

Sume Reimon

R_1 Orice funcție continuă este integrabilă

R_2 Orice funcție monotonă este integrabilă

Observație Un I precum în definiția alăturată, dacă există, este unic

I = integrala Riemann a funcției f pe $[a, b]$

not. $\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad I = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi)$

Rezultat TEOREMA LUI LEIBNIZ-NEWTON

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât

i) f integrabilă

ii) f admite primitive i.e. există

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă

cu $F' = f$

Atunci $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \stackrel{not.}{=} F\Big|_a^b$ cu $F' = f$

Demonstrație

$\Delta_n : a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{k-1}^n < x_k^n < \ldots x_{m_n-1}^n < x_{m_n}^n$

Fie $(\Delta_n)_n$ șir de diviziuni cu $\lim_{n \to \infty} \|\Delta_n\| = 0$

Pentru că f este integrabilă, avem

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$(\forall)\ \xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{m_n}^n)$$

$F : [x_{k-1}^n, x_k^n] \to \mathbb{R}$

Teoria lui Lagrange aplicată ne asigură existența $\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$

astfel încât $F(x_k^n) - F(x_{k-1}^n) = F'(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n)$

$$\longrightarrow f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = F(x_k^n) - F(x_{k-1}^n)$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \sum_{k=1}^{m_n} F(x_k^n) - F(x_{k-1}^n) =$$

$$= F(x_1^n) - F(x_0^n) + F(x_2^n) - F(x_1^n) + F(x_3^n) - F(x_2^n) + \ldots$$

$$\ldots + F(x_{n-2}^n) - F(x_{n-1}^n) + F(x_n) \ldots\ldots \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) =$$

$$= \underline{F(b) - F(a)} \qquad \text{pentru } (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

Definiție Fie $f: \underset{\text{interval}}{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă

$F: I \to \mathbb{R}$

cu proprietatea ~~a~~ că $F' = f$ se numește primitivă a lui f.

Mulțimea primitivelor a lui f se notează

$$\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ derivabilă cu } F' = f\} =$$
$$= \{F_0 + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

F_0 o primitivă fixată a lui f

F o altă primitivă arbitrară a lui f

$F' = F_0' = f \Rightarrow (F - F_0)' = 0 \Rightarrow$ există $C \in \mathbb{R}$

astfel încât

$$F(x) - F_0(x) = C \quad (\forall)\, x \in I$$
$$F(x) = F_0(x) + C$$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^{\alpha+1-1} \underset{(\forall)\,\alpha \neq -1}{=} x^{\alpha} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\forall)\, \alpha \neq -1$$

$$\int 1\,dx = x$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$$

$\vdots$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = tg\, x$$

$$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -ctg\, x$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\left(arctg \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{x^2 + a^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \, arctg \frac{x}{a}$$

$$\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+\alpha}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+\alpha}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{x^2+\alpha}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2+\alpha} + x}}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right) \to \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\to \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$(\ln \cos x)' = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\,\mathrm{tg}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln \cos x$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \mathrm{ctg}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\int \mathrm{ctg}\,x = \ln \sin x$$

$$\boxed{\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

și

$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx =$$

$$= tg\, x - ctg\, x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{9}{4}-x^2\right)}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{2x}{3}$$

$$\int e^x \,dx$$

$$\left(\int a^x \,dx = \frac{a^x}{\ln a} \right.$$

$$\int e^{2x}\,dx = \int (e^2)^x\,dx = \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \ln\left(2+\sqrt{2+(\sqrt{2})^2}\right) - \ln\left(0+\sqrt{2+0^2}\right) =$$

$$= \ln(\sqrt{2}+2) - \ln\sqrt{2} = \ln\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\, arctg\, \frac{x}{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\, arctg\, 2x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(arctg\, 1 - arctg\, 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

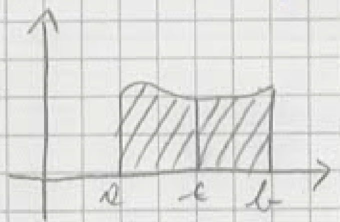
Propoziție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$c \in (a, b)$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) f integrabilă pe $[a, b]$

ii) f integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$



În plus $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Convenție $\int_b^a f = -\int_a^b f$

Propoziție Fie $: [a, b] \to [0, \infty)$ integrabilă

Atunci $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

COROLAR Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile

astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$

Atunci $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

$h = g - f \geq 0$

$\Downarrow$

$\int_a^b h \geq 0$

$\Downarrow$

$\int_a^b g - f \geq 0 \rightarrow \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f$

EXEMPLE

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = ?$$

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

$\Downarrow$

$$0 = \int_0^1 0\, du \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$n \to \infty$

$\to 0 \leftarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = ?$$

$$0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

$(\forall)\, x \in [0, 1]$

$$0 = \int_0^1 0\, dx \leq \ln(1+x^n)\, dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$\to 0 \leftarrow$