Curs 5 Analiză Matematică

Radu MICULESCU

november 2023

Puncte de extrem local

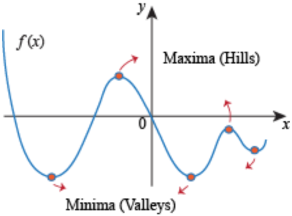
Definiție. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ *și* $f : D \to \mathbb{R}$.
Punctul c *se numește punct de maxim local (relativ) al funcției* f *dacă există* $\delta > 0$ *astfel încât*

$$f(c) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$.
Punctul c *se numește punct de minim local (relativ) al funcției* f *dacă există* $\delta > 0$ *astfel încât*

$$f(c) \leq f(x),$$

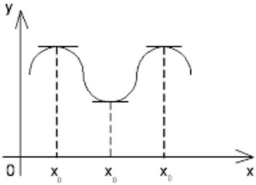
pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$.
Punctele de maxim local și cele de minim local se numesc puncte de extrem local.


y
f(x)
Maxima (Hills)
0
x
Minima (Valleys)

Teorema lui Fermat

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ *un interval nedegenerat,* c *un punct din interiorul intervalului* I *și* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *cu următoarele proprietăți:*
i) c *este un punct de extrem local al funcției* f*;*
ii) f *este derivabilă în* c*.*
Atunci

$$f^{'}(c) = 0.$$


y
0
x0
x0
x0
x

Demonstrație

Fără pierderea generalității, putem presupune că c este un punct de maxim local.
Prin urmare există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(c) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in (c - \delta, c + \delta) \subseteq I$.
Așadar

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

pentru orice $x \in (c, c + \delta)$ și

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

pentru orice $x \in (c - \delta, c)$.

În consecință, avem

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^{'}(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

deci

$$f^{'}(c) = 0. \square$$

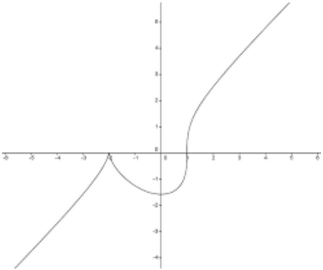
Observații

1. *Condiția ca c să fie un punct din interiorul intervalului I este esențială*, așa cum arată următorul exemplu: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0,1]$.

2. *Funcția f poate avea puncte de extrem în care să nu fie derivabilă*, așa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. *Este posibil ca $f'(c) = 0$ fără ca c să fie punct de extrem local*, așa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. *Interpretarea geometrică a Teoremei lui Fermat*: într-un punct de extrem din interiorul intervalului I în care f este derivabilă, tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa Ox.



Exemplu

Fie $a, b > 0$.
Atunci $a^x + b^x \geq 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $b = \frac{1}{a}$.

"$\Leftarrow$" Conform inegalității mediilor, avem

$$\frac{a^x + b^x}{2} \geq \sqrt{a^x b^x} = 1.$$

"$\Rightarrow$" Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = a^x + b^x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Ipoteza se rescrie sub forma

$$f(x) \geq f(0),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, i.e. 0 este punct de minim al funcției f.
Conform teoremei lui Fermat,

$$f'(0) = 0,$$

i.e.

$$\ln a + \ln b = 0,$$

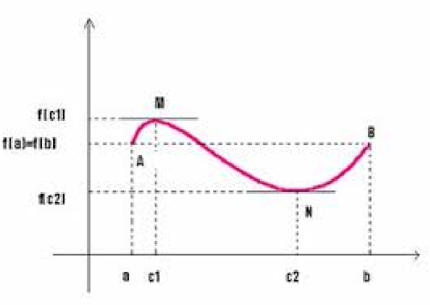
de unde

$$ab = 1.$$

Teorema lui Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *și* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *având următoarele proprietăți:*
i) f *este continuă pe* $[a, b]$*;*
ii) f *este derivabilă pe* (a, b)*;*
iii) $f(a) = f(b)$.
Atunci există $c \in (a, b)$ *astfel încât*

$$f^{'}(c) = 0.$$


f(c1)
f(a)=f(b)
f(c2)
M
A
B
N
a
c1
c2
b

Demonstrație

Printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $f - f(a)$, putem presupune că

$$f(a) = f(b) = 0.$$

De asemenea, putem presupune că f nu este identic nulă (căci altfel concluzia este imediată) și că ia și valori strict pozitive (printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $-f$).
Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Vom arăta că

$$c \in (a, b).$$

Într-adevăr, dacă

$$c \in \{a, b\},$$

atunci

$$0 = f(a) = f(b) = f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in [a, b]$, ceea ce contrazice faptul că f ia și valori strict pozitive.
Deci

$$c \notin \{a, b\}.$$

Teorema lui Fermat ne asigură că

$$f^{'}(c) = 0. \ \square$$

Observații

1. În general, *punctul c din concluzia Teoremei lui Rolle nu este unic*, așa cum ne arată cazul funcțiilor constante.

2. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$*, unde* I *este un interval nedegenerat al axei reale, o funcție derivabilă. Atunci:*
α*) Între două soluții consecutive ale ecuației* $f(x) = 0$ *se află cel puțin o soluție a ecuației* $f'(x) = 0$.
β*) Între două soluții consecutive ale ecuației* $f'(x) = 0$ *se află cel mult o soluție a ecuației* $f(x) = 0$.

3. *Interpretarea geometrică a Teoremei lui Rolle*: în ipotezele Teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct al graficului lui f în care tangenta la graficul funcției f este orizontală.

Exemplu

Să se determine numărul și poziționarea rădăcinilor ecuației

$$e^{2x} - 6e^{x} + 4x + 4 = 0.$$

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = e^{2x} - 6e^{x} + 4x + 4,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Atunci

$$f^{'}(x) = 2(e^{x} - 1)(e^{x} - 2),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci ecuația

$$f^{'}(x) = 0$$

are rădăcinile 0 și $\ln 2$.

Cum

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$f(0) < 0,$$

$$f(\ln 2) < 0$$

și

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

deducem că ecuația $e^{2x} - 6e^{x} + 4x + 4 = 0$ are o unică rădăcină în intervalul $(\ln 2, \infty)$.

Teorema lui Lagrange

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *și* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *având următoarele proprietăți:*
i) f *este continuă pe* $[a, b]$*;*
ii) f *este derivabilă pe* (a, b).
Atunci există $c \in (a, b)$ *astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c).$$

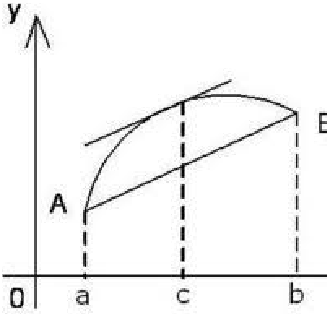
Demonstrație

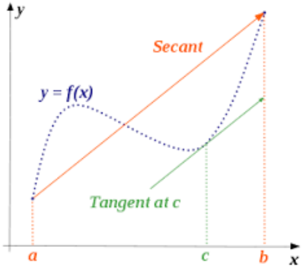
Să considerăm funcția $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

pentru orice $x \in [a, b]$, care este diferența dintre f și funcția care are ca grafic segmentul de capete $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Prin aplicarea teoremei anterioare funcției φ se obține concluzia. $\square$


y
A
E
0
a
c
b


y
Secant
y = f(x)
Tangent at c
a
c
b
x

Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange

În ipotezele Teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct al graficului lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu segmentul de capete $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Consecințe ale Teoremei lui Lagrange

1. *În cadrul teoremei de mai sus, avem:*
α*) Dacă*

$$f^{'}(x) = 0,$$

pentru orice $x \in (a, b)$, *atunci* f *este constantă.*
β*) Dacă*

$$f^{'}(x) \geq 0 \; (f^{'}(x) > 0),$$

pentru orice $x \in (a, b)$, *atunci* f *este crescătoare (strict crescătoare).*
γ*) Dacă*

$$f^{'}(x) \leq 0 \; (f^{'}(x) < 0),$$

pentru orice $x \in (a, b)$, *atunci* f *este descrescătoare (strict descrescătoare).*

2. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obține diverse aproximări*

De exemplu, pentru a aproxima pe $\sqrt{105}$, conform Teoremei lui Lagrange, există $c \in (100, 105)$ astfel încât

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}},$$

de unde obținem

$$\frac{5}{2 \cdot 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \cdot 10},$$

adică

$$10,22 < \sqrt{105} < 10,25.$$

3. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obține diverse inegalități*

De exemplu, este cunoscută inegalitatea lui Bernoulli, anume că pentru $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $1 + x > 0$, avem

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Vom arăta că această inegalitate este valabilă pentru orice exponent $r \in [1, \infty)$.
În acest scop putem considera funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = (1 + x)^r,$$

pentru orice $x \in (-1, \infty)$.
Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul de capete x și 0, se obține inegalitatea de mai sus.

4. Corolarul Teoremei lui Lagrange privind existența derivatei unei funcții într-un punct. *Fie I un interval nedegenerat al axei reale,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *și* $x_0 \in I$ *astfel încât:*

i) f *este continuă;*

ii) f *este derivabilă pe* $I \setminus \{x_0\}$*;*

iii) există $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f^{'}(x)$.

Atunci:

α) *Există* $f^{'}(x_0)$.

β)

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f^{'}(x).$$

Demonstrație

Este suficient să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x\to x_0} f^{'}(x),$$

pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Aplicând Teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul de capete x_0 și x_n, există ζ_n între x_0 și x_n astfel încât

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f^{'}(\zeta_n).$$

Cum

$$\lim_{n \to \infty} \zeta_n = x_0,$$

deducem că

$$\lim_{n \to \infty} f^{'}(\zeta_n) = \lim_{x \to x_0} f^{'}(x),$$

i.e.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x \to x_0} f^{'}(x). \ \square$$

Exemple

1. Să se arate că
$$e^x \geq x+1,$$
pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de
$$f(x) = e^x - x - 1,$$
pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că
$$f^{'}(x) = e^x - 1,$$
pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci
$$f^{'}(x) \geq 0,$$
pentru orice $x \geq 0$ și
$$f^{'}(x) \leq 0,$$
pentru orice $x \leq 0$.

Prin urmare:

i) f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$;

ii) f este crescătoare pe $[0, \infty)$.

Așadar 0 este punct de minim global, i.e.

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, i.e.

$$e^x \geq x + 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se studieze derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Avem

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2+1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{x^2+1}, & x \in (-1, 1) \end{cases}.$$

Este ușor de văzut că f este continuă pe $\mathbb{R}$.
Deoarece

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} -\frac{2}{x^2 + 1} = -1,$$

deducem că

$$f_s'(-1) = -1.$$

Similar obținem

$$f_d'(-1) = 1, f_s'(1) = 1 \text{ și } f_d'(1) = -1.$$

Așadar f nu este derivabilă în -1 și 1.

3. Să se demonstreze că

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Funcția $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x,$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$, este derivabilă și

$$f'(x) = 0,$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.
Prin urmare există $C \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = C,$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Cum

$$C = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

decucem că

$$f(x) = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.
Deoarece egalitatea precedentă este adevărată și pentru $x \in \{-1, 1\}$, concluzionăm că

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Teorema lui Darboux

Fie I un interval nedegenerat al axei reale și $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci, pentru orice interval J inclus în I, $f^{'}(J)$ este interval (i.e. $f^{'}$ are proprietatea lui Darboux).

Demonstrație

Fie $a, b \in J$, $a < b$.
Putem presupune, fără pierderea generalității, că

$$f^{'}(a) < f^{'}(b).$$

Pentru $\lambda \in (f^{'}(a), f^{'}(b))$ arbitrar, considerăm funcția continuă $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x,$$

pentru orice $x \in I$.
Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\varphi(c) = \inf_{x \in [a,b]} \varphi(x).$$

Vom arăta că

$$c \in (a, b).$$

Într-adevăr, avem

$$\varphi^{'}(a) < 0 \text{ și } \varphi^{'}(b) > 0,$$

i.e.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi^{'}(a) < 0 \text{ și } \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi^{'}(b) > 0.$$

Prin urmare, există $u, v \in (a, b)$, $u < v$ astfel încât

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0,$$

pentru orice $x \in (a, u)$ și

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} > 0,$$

pentru orice $x \in (v, b)$.

Ca atare

$$\varphi(x) < \varphi(a),$$

pentru orice $x \in (a, u)$ (deci $a \neq c$) și

$$\varphi(x) < \varphi(b),$$

pentru orice $x \in (v, b)$ (deci $b \neq c$).
Prin urmare, conform Teoremei lui Fermat, găsim că

$$\varphi^{'}(c) = 0,$$

i.e.

$$f^{'}(c) = \lambda,$$

ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Regula lui l'Hospital

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, I *un interval din* $\mathbb{R}$, *astfel încât*

$$(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b],\ x_0 \in [a, b]$$

și $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *cu următoarele proprietăți:*
i)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

$$\text{(respectiv } \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty\text{);}$$

ii) f *și* g *sunt derivabile și*

$$g^{'}(x) \neq 0,$$

pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$;
iii) există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Atunci:

α*)*

$$g(x) \neq 0$$

pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$ *(respectiv există* V *o vecinătate a lui* x_0 *astfel încât* $g(x) \neq 0$*, pentru orice* $x \in (I \cap V) \setminus \{x_0\}$*).*

β*) Există*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$$

și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple

1. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{xe^x+\sin x}.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(xe^x+\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x+xe^x+\cos x}=\frac{1}{2},$$

concluzionăm că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{xe^x+\sin x}=\frac{1}{2}.$$

2. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0,$$

concluzionăm că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0.$$

Teorema lui Taylor

Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:
i) există $f^{'}$, $f^{''}$, ..., $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ și sunt continue;
ii) există $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$.
Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$ există γ, între α și β, astfel încât

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f^{'}(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f^{''}(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

Demonstrație

Fie P numărul real definit de relația

$$\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}P = f(\beta) - [f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + ...+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}].$$

Funcția $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(x) = f(\beta) - [f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(\beta-x) + \frac{f''(x)}{2!}(\beta-x)^2 + ...+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1} + \frac{P}{n!}(\beta-x)^n],$$

pentru orice $x \in [a,b]$, are următoarele două proprietăți:

i)

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0;$$

ii)

$$\varphi^{'}(x) = \frac{P - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1},$$

pentru orice $x \in [a, b]$.
Atunci, utilizând Teorema lui Rolle, se deduce concluzia. $\square$

Observație

Cantitatea $\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n$ *se notează cu* R_n *și se numește restul sub forma lui Lagrange.*

Acest rest se poate prezenta și în alte forme.

Menționăm aici doar forma lui Cauchy, anume afirmăm că există $\theta \in (0,1)$ *astfel încât*

$$R_n = (1-\theta)^{n-1}\frac{f^{(n)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n.$$

Exemplu

Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Conform Teoremei lui Taylor, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există astfel încât

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 \cos c_x,$$

deci

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cos c_x = \frac{1}{2}.$$