TPSM_06_C_2024_03_11 11.03.2024

Modele de bază de spații de probabilitate

I Spații Laplace

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$

$\mathbb{P}$ - satisf. axiomele P_1, P_2, P_3 - ale prob.

Notație: M - mulțime finită

$|M| = \text{card}(M) =$ nr. elemente lui M

$|\Omega| = n$; $|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$

Def.: $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n} \in [0,1]$, $\forall A \in \mathcal{F}$

$E_i = \{w_i\}$, $i \in \overline{1,n}$ — evenimente elementare echiprobabile:

$\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nr. caz. fav.}}{\text{nr. caz. posib.}}$

II. Spații discrete

$\Omega = \{w_i, i \in I\}$, $w_i \neq w_j$ ∀ $i \neq j$

I - cel mult numărabilă

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\} =$

$= \{\{w_j, j \in J\} \mid J \subset I\}$

Considerăm $\overline{P} = (P_i)_{i \in I}$, $P_i > 0$, $\forall i \in I$ a.î. $\sum_{i \in I} P_i = 1$

Definim $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(\{w_j, j \in J\}) = \sum_{j \in J} P_j$ [?], $\forall J \subset I$

$\mathbb{P}$ – satisface axiomele prob.

$E_i = \{w_i\}$, $i \in I$ – evenimentele elementare

$\mathbb{P}(E_i) = P_i$, $i \in I$

Obs.: Dacă

1) $I = \{1, \dots, n\}$

2) $P_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$

atunci obținem spațiul Laplace

$E_i = \{w_i\}$, $i \in I$ – evenimentele elementare

$\mathbb{P}(E_i) = P_i$, $i \in I$

Scheme de probabilitate

I. Schema Bernoulli

(schema binomială, schema bilei revenite)

Descrierea prin modelul urnei

O urnă conține:

a – bile albe $\qquad$ b – bile negre $(a, b \in \mathbb{N}^*)$

Se extrage o bilă, i se notează culoarea și se repune în urnă.

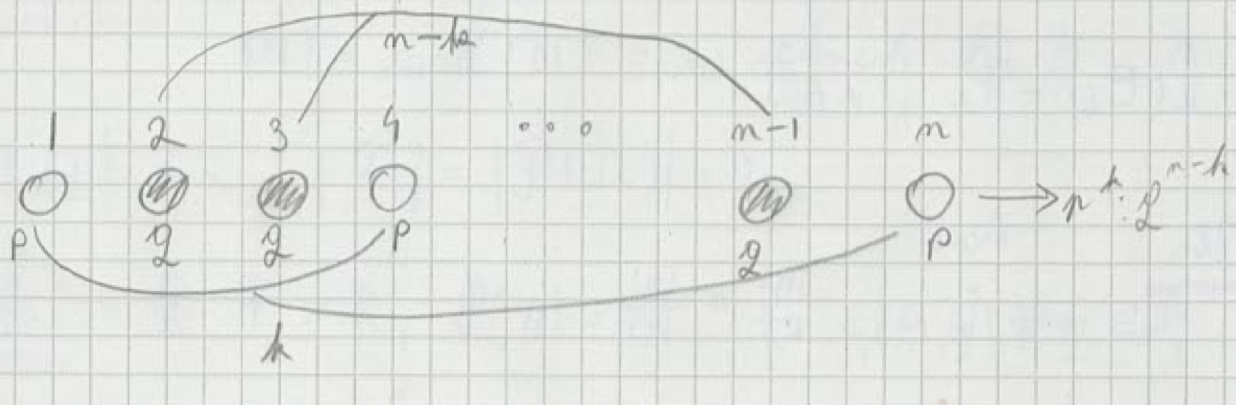
Repetăm experiența de 'n' ori.

$E_{k|n}$ – eveniment extragerii a exact k bile din totalul de n bile extrase

$P_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n}), \; k = \overline{0,n}$

$p = \frac{a}{a+b} \in (0,1)$ – prob. extr. unei bile albe

$q = \frac{b}{a+b} = 1 - p \in (0,1)$ – prob. extr. unei bile negre



nr. cazurilor favorabile: C_n^k

$P_{k|n} = C_n^k \, p^k q^{n-k}, \; k = \overline{0,n}$

Obs.: $\mathcal{S} = \{E_{k|n}, \; k = \overline{0,n}\}$ – sistem complet de evenimente

1) $E_{k|n} \cap E_{r|n} = \emptyset, \; \forall k \neq r$

2) $\bigcup_{k=0}^{n} E_{k|n} = \Omega$

3) $\mathbb{P}(E_{k|n}) = P_{k|n} > 0, \; k = \overline{0,n}$

Verificare:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k|n}) = \sum_{k=0}^{n} p_{k|n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n =$$
$$= 1^n = 1 \checkmark$$

Spațiul de probabilitate asociat schemei lui Bernoulli

Definim $\Omega_i = A_i \cup B_i$, $i = \overline{1,n}$

Presupunem $\begin{cases} A_i \cap B_i = \emptyset \\ |A_i| = a, \quad |B_i| = b \end{cases}$

A_i = mulțimea bilelor albe considerate la extragerea $i \in [1, \dots, n]$

B_i =

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n = \{(w_1, w_2, w_3 \dots w_n) \mid w_i \in \Omega_i, \ i = \overline{1,n}\}$$

$$|\Omega| = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{|\Omega_i|}_{a+b}$$

$$E_{k|n} = \{(w_1, \dots, w_n) \in \Omega \mid |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid w_i \in A_i\}| = k\}$$

$$|E_{k|n}| = C_n^k a^k b^{n-k}$$

Spațiu Laplace

$$p_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n}) = \frac{|E_{k|n}|}{|\Omega|} =$$

$$= C_n^k \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \cdot \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Formularea generală a schemei lui Bernoulli

Un even. A se poate prod. în cadrul unei experiențe cu prob. $p = \mathbb{P}(A) \in (0, 1)$. Repetăm experiența în cond. identice și independente de n ori.

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de exact k ori în cele experiențe este $p_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}$,
$q = 1 - p$

II. Schema multinomială (schema polinomială)

Descrisă prin modelul urnei

Conține câte a_i - bile de culoarea i, $i \in \{1, 2, \dots s\}$, $s \in \mathbb{N}$,
$s \geq 2$

Prob. de extr. o bilă de culoare i

$$p_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{s} a_i}$$

Vom extrage cu repunere

Fie $\overline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s$, Σ

k_i - nr. bilelor de culoare i extrase, $i = \overline{1, s}$

$E_{k/n}$ — Ev. coresp. $\overline{k}$

$$P_{\bar{k}|n} = \mathbb{P}(E_{\bar{k}|n}) = N_f \, p_1^{k_1} \, p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

$$N_f = C_n^{k_1} \, C_{n-k_1}^{k_2} \, C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdots C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1}}^{k_s} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \ \cdots \ \frac{k_s!}{k_s! \cdot 0!}$$

$$= \frac{n!}{k_1! \, k_2! \cdots k_s!}$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} \overset{\text{def.}}{=} \frac{n!}{k_1! \, k_2! \dots k_s!} \quad k_i \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \sum_{i=1}^{s} k_i = n$$ — Combinări multinomiale ale n luate câte $k_1, k_2, \dots, k_s$

$$P_{\bar{k}|n} = \binom{n}{k_1, \dots, k_s} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

$$\sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s \\ \sum_{i=1}^{s} k_i = n}} P_{k_n} = \sum \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} = (p_1 + p_2 + \dots + p_s)^n = 1^n = 1$$