ACGAD - 7 - C - 2023 - 10 - 27 27.10.2023

TRANSFORMĂRI LINIARE. ENDOMORFISME

Matricea unei transformări liniare

Fie V și W 2 spații vectoriale și fie $T: V \to W$ o transformare liniară. Pentru $\dim V = n$ și $\dim W = m$, fie $B_V = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază pe V și $B_W = \{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ o bază pe W. Fie $x \in V$ un vector. Atunci

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T(e_i)$$

Descompunem vectorii $T(e_i)$ în baza B_W:

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$$

Def.: Matricea $A = (a_{ji})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \in M_{m,n}(K)$ s.n. matricea trans. liniare T în raport cu baza $B \to W$. Ea conține pe coloane coordonatele vectorilor $T(e_i)$ în baza $B \to W$ și se mai notează $A = M_{BW}(T)$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) f_j$$

Cum $T(x) \in W$, avem și $T(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j' f_j$.

Prin urmare, coordonatele vectorului $T(x)$ sunt

$$X_j' = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} x_i$$

Notând $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și $T(X) = X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}$ matricele cu coordonatele vectorilor $X \in V$ și, respectiv $T(X) \in W$, am obținut

$$\boxed{T(X) = AX}$$

EXEMPLU:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, \ 3x_1 + x_2, \ -x_1)$$

Fie $B_0^2 = \{e_1^2 = (1,0), \ e_2^2 (0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^2$ și $B_0^3 = \{e_1^3 = (1,0,0), \ e_2^3 = (0,1,0), \ e_3^3 (0,0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$

Avem $T(e_1^2) = T(1,0) = (1,3,-1) = 1 \cdot e_1^3 + 3e_2^3 + (-1)e_3^3$

$$T(e_2^2) = T(0,1) = (-2,1,0) = (-2)e_1^3 + 1 \cdot e_2^3 + 0 \cdot e_3^3$$

$$\Rightarrow M_{B_0^3}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs: $T(X) = T(X_1, X_2) = (X_1 - 2X_2, \ 3X_1 + X_2, \ -X_1) =$

$$= X_1(1, 3, -1) + X_2(-2, 1, 0)$$

PROPOZIȚIE: Fie B' și B'' 2 baze în V și $A' = M_{B'}(T)$, $A'' = M_{B''}(T)$.

Legătura dintre matricele A' și A'' este

$$A'' = M_{B'B''}^{-1}(T) \cdot A' \cdot M_{B'B''}(T)$$

Endomorfisme

Def.: S. N. Endomorfism o transformare liniară $T: V \to V$

Obs.: Matricea oricărui endomorfism este o matrice pătratică.

Fie V un spațiu vectorial cu $\dim V = n$ și B o bază pe V, cu $A = M_B(T)$

Def.:

1) Un scalar $\lambda \in K$ s.n. valoare proprie a endomorfismului T dacă $\exists\, v_\lambda \in V$, $v_\lambda \neq 0$ a.î. $T(v_\lambda) = \lambda v_\lambda$

2) Vectorul v_λ cu proprietatea anterioară s.n. vector propriu asociat valorii proprii $\lambda = K$

Propoziție: Mulțimea $V_\lambda = \{ v_\lambda \in V \mid T(v_\lambda) = \lambda v_\lambda \}$ a tuturor vectorilor proprii asociați valorii proprii $\lambda \in K$ este un subspațiu vectorial în V, numit subspațiul propriu asociat valorii proprii λ.

Teoremă

Valorile proprii ale unui endomorfism T (ale matricei $A = M_B(T)$) se determină ca soluții ale ecuației caracteristice $\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Forma diagonală a unui endomorfism (a unei matrice)

Def: Un endomorfism s.n. diagonalizabil (admite formă diagonală) dacă $\exists$ o bază a spațiului vectorial pe care este definit endomorfismul a.î. matricea endomorfismului în raport cu acea bază este o matrice diagonală.

Cu alte cuvinte: $\exists$ B' bază în V a.î.

$\Delta = M_{B'}(T)$ – diagonală

Teoremă: Un endomorfism este diagonalizabil $\Leftrightarrow$ toate valorile proprii sunt în K, iar ordinul de multiplicitate algebrică al fiecărei valori proprii este = cu dimens. subsp. propriu corespunzător.

Teoremă:

Algoritmul de diagonalizare a unui endomorfism.

1. Se fixează o bază B a sp. vec. V și se scrie matricea endomorfismului în raport cu această bază, $A = M_3(T)$

2. Se determină valorile proprii rezolvând ecuația caracteristică $\det(A - \lambda I_1) = 0$ cu soluțiile $\lambda_1 \dots \lambda_p$ și multiplicitățile **algebrice** corespunzătoare $m_1 \dots m_p$.

3. Se verifică dacă toate valorile proprii $\lambda_1 \dots \lambda_p$ aparțin ~~corpurilor~~ corpului scalarilor K. În caz contrar, algoritmul se oprește și se afirmă că endomorfismul nu este diagonalizabil.

4. Se determină subspațiile proprii $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_p}$ împreună cu dimensiunile acestora ~~nn~~ notate $d_i = \dim V_{\lambda_i} = i = \overline{1,p}$

5. Se verifică dacă $m_i = d_i$, $i = \overline{1,p}$. În caz contrar algo. se oprește și se afirmă că endomorfismul nu e diagonalizabil.

6. Se fixează câte o bază B_i în fiecare subspațiu propriu $V_{\lambda i}$ și se scrie baza

$$B' \cup B_i$$

în care se obț. forma diagonală.

7. Se scrie forma diagonală

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

așezând pe diag principală fiecare valoare proprie de atâtea ori de cât ne indică ordinul său de multiplicitate.

La final se verif. identitatea

$$\Delta = M_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot M_{BB'}$$