TPSM_07_C_2024_03_18 18.03.2024

III. Schema lui Poisson

1) Modelul urnei

n - urne a.î. urna i conține a_i bile albe și b_i - bile negre ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$E_{k|n}$ k - să fie albe, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$p_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n})$ $\quad p_i = \frac{a_i}{a_i + b_i} \in (0,1)$ -

$q_i = 1 - p_i = \frac{b_i}{a_i + b_i} \in (0,1)$ -

$$P_{k|n} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} p_i \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus I} q_j, \quad k = \overline{0,n}$$

Dacă $p_i = p$, $i = \overline{1,n}$ atunci

$$P_{k|n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$$

Interpolabilitate prob. $p_{k|n}$

Fie polinomul $f(X) = (p_1 X + q_1)(p_2 X + q_2) \dots (p_n X_n + q_n)$

$\text{grad}(X) = n$

$p_{k|n} \to$ repr. coef. lui X^k din forma canonică a polinomului f pentru $k = 0, 1, \ldots, n$

Ex.: $f(X) = (p_1 X + q_1)(p_2 X + q_2)(p_3 X + q_3) =$

$$= p_1 p_2 p_3 X^3 + (p_1 p_2 q_3 + p_2 p_3 q_1 + p_3 p_1 q_2) X^2$$
$$+ (p_1 q_2 q_3 + p_2 q_3 q_1 + p_3 q_2 q_1) X + q_1 q_2 q_3$$

Deci

$$f(X) = p_{n|n} X^n + p_{n-1|n} X^{n-1} + \ldots + p_{1|n} X + p_{0|n}$$

$\mathcal{S} = \{E_{k|n},\ k = \overline{0,n}\}$ - sistem complet de evenimente

Verificare

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k|n}) = \sum_{k=0}^{n} p_{k|n} = f(1) = \underbrace{(p_1 + q_1)}_{1} \underbrace{(p_2 + q_2)}_{1} \ldots \underbrace{(p_n + q_n)}_{1} = 1$$

Formularea generală a schemei lui Poisson

1. Se efectuează n experiențe independente
   Urmărim realizarea ev. A_i în experiența i, $i = \overline{1,n}$

   Fie $p_i = \mathbb{P}(A_i) \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$

   $q_i = 1 - p_i = \mathbb{P}(A_i^c) \in (0,1)$

   $E_{k|n}$ exact k evenimente dintre $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$p_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n}) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} p_i \cdot \prod_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} q_j$$

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \quad !!!$$

IV. Schema hypergeometrică

O urnă conține a - bile albe, b - bile negre.
$(a, b \in \mathbb{N}^*)$.

Se extrag n - bile. Studiem evenimentul $E_{k|n}$ dintre cele n bile extrase, k bile să fie albe ($n-k$ = bile negre)

$$E_{k|n} \neq \emptyset \iff \begin{cases} n \in \mathbb{N}^*, \ n \leq a+b \\ k \in \mathbb{N}, \ k \leq n, \ k \leq a \quad (1) \\ n-k \leq b \end{cases}$$

În condițiile (1):

$$p_{k|n} = \mathbb{P}\{E_{k|n}\} = \frac{\text{nr. caz. favor.}}{\text{nr. caz. posib.}} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

V. Schema hypergeometrică generalizată

O urnă conține a_i bile de culoarea i, $i = \overline{1,n}$ $(n \geq 2)$

Fie $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s$ a.î. $\sum_{i=1}^{s} k = n$

Se extrage n bile din urnă.
Notăm $E_{\bar{k}|n}$ evenimentul ca cele n bile extrase să aibă compoziția $\bar{k}$

$\bar{k}$: câte k_i bile din culoarea i, $i = \overline{1,s}$
în condițiile $k_i \leq a_i$, $i = \overline{1,s}$

Atunci $n = \sum_{i=1}^{s} k_i \leq \sum_{i=1}^{s} a_i$

$$p_{\bar{k}|n} = \mathbb{P}(E_{\bar{k}|n}) = \frac{C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} \dots C_{a_s}^{k_s}}{C_{a_1+\dots+a_s}^{n}}$$

VI. Schema geometrică

Un eveniment A se realizează în cadrul unei experiențe cu probabilitatea $p = \mathbb{P}(A) \in (0,1)$. Repetăm în mod independent experiența până la prima realizare a evenimentului dat.

E_n - evenimentul ca A să se realizeze pentru prima dată în experiența $n \in \mathbb{N}^*$

$q = 1 - p = \mathbb{P}(A^c) \in (0,1)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & (n-1) & n \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \dots & \otimes & \circ \\ q & q & q & q & q & & q & p \end{array}$$

$$\underbrace{q\,q\,q\,q\,q \dots q\;p}_{p \cdot q^{n-1}}$$

Notăm $p_n = \mathbb{P}(E_n),\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{p_n = p\, q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*}$$

$\mathcal{S} = \{E_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ — un sistem complet de evenimente

Verif.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} \underset{n-1=k}{=} p \sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

$$= p \cdot \frac{1}{\underbrace{1-q}_{p}} = \cancel{p} \frac{1}{\cancel{p}} = 1$$

Variabile aleatoare

Def.: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate și $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

X - variabilă aleatoare dacă:

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \ \forall\, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

unde $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \overset{\text{notat}}{=} \{X \in A\}$