# Curs nr. 4: Reziduuri

## 1 Reziduuri

Numeroase teoreme anterioare se pot folosi în calculul integralelor complexe de-a lungul curbelor, spre exemplu, în cazul curbelor închise teorema lui Cauchy şi formulele integrale ale lui Cauchy. Însă, teorema reziduurilor le generalizează, aceasta permiţând calcularea integralei unei funcţii olomorfe şi în cazul în care, în interiorul curbei de integrare se găsesc puncte singulare izolate ale funcţiei. Teorema reziduurilor are numeroase aplicaţii, cum ar fi calculul integralelor reale trigonometrice.

### 1.1 Teorema reziduurilor

Fie $z = a$, $a \in \mathbf{C}$, un punct singular izolat al funcţiei $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. În coroana circulară de centru $a$,

$U(a, R)\backslash\{a\} := \{z \in \mathbf{C},\ 0 < |z - a| < R\}$, funcţia $f$ este olomorfă. Aşadar, $f$ se poate reprezenta printr-o serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - a)^n \,, \tag{1.1}$$

cu coeficienţii

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad \rho \in (0, R),\ n \in \mathbf{Z}. \tag{1.2}$$

**Definiţia 1.1** *Se numeşte reziduul funcţiei $f$ în punctul $a$, notat $rezf(a)$, coeficientul lui $\frac{1}{z-a}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f$ în $U(a, R)\backslash\{a\}$.*

Luând $n = -1$ în (1.1) şi (1.2) se obţine

$$c_{-1} := rezf(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz, \quad \rho \in (0, R). \tag{1.3}$$

sau echivalent

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz = 2\pi j rezf(a),\ \rho \in (0, R), \tag{1.4}$$

relaţie care reduce calculul unei integrale complexe pe curba $(C) : |z-a| = \rho$, $\rho \in (0, R)$, la determinarea coeficientului $c_{-1}$ din (1.1).

În cazul unui punct singular aparent, întotdeauna $c_{-1} = 0$. Dacă $z = a$ este punct singular esenţial, coeficientul se determină numai din dezvoltarea în serie Laurent (1.1), iar dacă $z = a$ este pol de ordinul $k$ atunci, există şi altă posibilitate, dată de următoarele propoziţii.

**Propoziţia 1.1** *Dacă $z = a$ este pol de ordinul $k$ atunci,*

$$rezf(a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} [(z-a)^k f(z)]^{(k-1)}. \tag{1.5}$$

**Demonstraţie.** Deoarece $z = a$ este pol de ordinul $k$ , în baza teoremei 2.4.6, $\forall$ $z \in U(a, R) \setminus \{a\}$ avem

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 (z-a) + ... + c_n (z-a)^n + ...,$$

echivalentă cu

$$\begin{aligned} f(z)(z-a)^k &= c_{-k} + ... + c_{-1}(z-a)^{k-1} + c_0 (z-a)^k + c_1 (z-a)^{k+1} + ... \\ &\quad + c_n (z-a)^{k+n} + ..., \end{aligned}$$

care derivată de $(k-1)$ ori, dă

$$\begin{aligned} [(z-a)^k f(z)]^{(k-1)} &= c_{-1}(k-1)! + c_0 k!(z-a) + ... \\ &\quad + c_n (k+n)(k+n-1)...(2+n)(z-a)^{1+n} + ... \end{aligned}$$

Trecând la limită, când $z \to a$, rezultă (1.5). ∎

**Exemplul 1.1** *$z = 1$ este pol de ordinul 2 pentru funcţia $f(z) = \frac{z-2}{z(z-1)^2}$. Calculăm $rezf(1)$. Din (1.5) avem*

$$rezf(1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} [(z-1)^2 \frac{z-2}{z(z-1)^2}]' = \lim_{z \to 1} \frac{2}{z^2} = 2.$$

**Propoziţia 1.2** *Dacă $z = a$ este pol de ordinul 1 al funcţiei $f$ şi $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, unde $g$ şi $h$ sunt funcţii olomorfe pe o vecinătate a lui $a$, atunci*

$$rezf(a) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{1.6}$$

**Demonstraţie.** Pentru $k = 1$, (1.5), devine $rezf(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)g(z)}{h(z)}$. Dar, $h(a) = 0$ deoarece $z = a$ este pol simplu al funcţiei $f$. Deci, se poate aplica regula l'Hospital:

$$rezf(a) = \lim_{z \to a} \frac{g(z) + (z-a)g'(z)}{h'(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

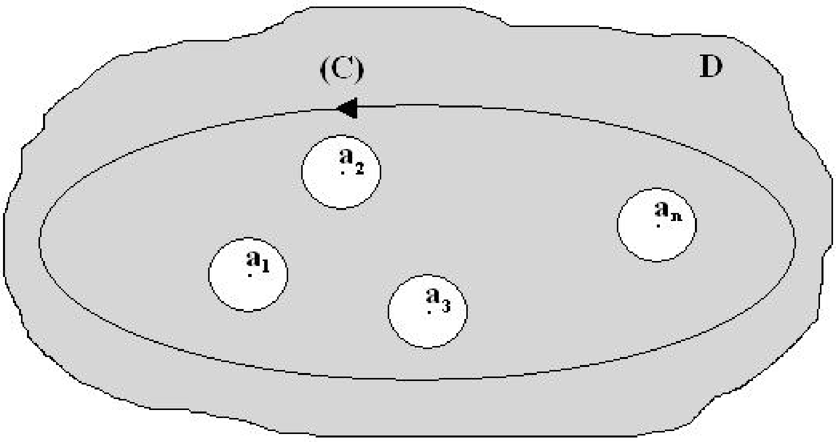
∎

**Exemplul 1.2** *$z = 0$ este pol de ordinul 1 pentru funcţia $f(z) = \frac{z-2}{z(z-1)^2}$. Atunci,*

$$rezf(0) = \left.\frac{z-2}{[z(z-1)^2]'}\right|_{z=0} = -2.$$

**Teorema 1.1** *(Teorema reziduurilor) Fie $f$ o funcţie olomorfă în domeniul $D$ şi $(C)$ o curbă simplă, închisă $(C) \subset D$. Dacă în interiorul domeniului mărginit de curba $(C)$ funcţia $f$ are un număr finit de puncte singulare izolate $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, (Figura 2.5.1), atunci*

$$\oint_{(C)} f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} rezf(a_k).$$



(Figura 2.5.1)

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe teorema lui Cauchy pentru domeniu $n$ - conex. Avantajul utilizării acesteia în calculul integralelor complexe constă în faptul că reziduurile se calculează relativ simplu.

În continuare vom calcula câteva integrale complexe cu ajutorul teoremei reziduurilor. Considerăm mai întâi un exemplu în care punctele singulare izolate $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt poli.

**Exemplul 1.3** *Calculăm $\oint_{|z-j|=2} \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}dz$. $z_1 = 0$ este pol de ordinul 2, iar $z_{2,3} = \pm 2j$ sunt poli de ordinul 1.Curba de integrare este cercul cu centrul în $j$ şi de rază 2. Doar $z_1 = 0$ şi $z_2 = 2j$ sunt în interiorul cercului $(C) : |z-j| = 2$, (Figura 2.5.2).*

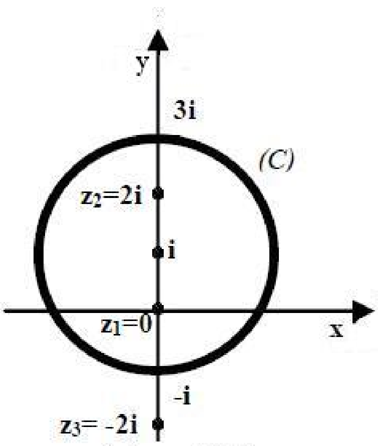
*Conform teoremei reziduurilor,*

$$\oint_{|z-j|=2} \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}dz = 2\pi j[rezf(0) + rezf(2j)].$$

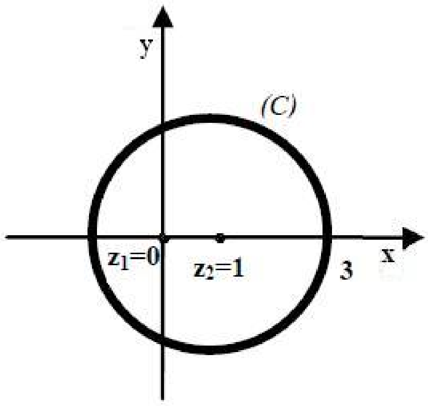
$rezf(0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0}[z^2 \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}]' = \lim_{z\to 1} \frac{-z^2-2z+4}{z^2+4} = 1.$

$rezf(2j) = \frac{z+1}{[z^2(z^2+4)]'}\Big|_{z=2j} = \frac{z+1}{2z(z^2+4)+2z^3}\Big|_{z=2j} = \frac{j-2}{16}.$

*Deci,* $\oint\limits_{|z-j|=2} \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}dz = \frac{\pi j(14+j)}{8}.$



(Figura 2.5.2)



(Figura 2.5.3)

Considerăm acum un exemplu în care printre punctele singulare izolate $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ sunt şi puncte esenţiale.

**Exemplul 1.4** *Calculăm* $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$. *$z_1 = 0$ este punct singular esenţial, iar $z_2 = 1$ este pol de ordinul* 1. *Ambele se găsesc în interiorul cercului $(C) : |z-1| = 2$, (Figura 2.5.3). Conform teoremei reziduurilor,*

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = 2\pi j[rezf(0) + rezf(1)].$$

*$z_1 = 0$ fiind punct singular izolat, $rezf(0)$ se obţine din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ în $U(0,1)\backslash\{0\} := \{z \in \mathbf{C},\ 0 < |z| < 1\}$. Avem,*

$$f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} = z(1 + z + z^2 + ... + z^n + ...)\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + ...\right),$$

*din care ne interesează coeficientul lui $\frac{1}{z}$. Rezultă*

$rezf(0) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = e - 2.$

*Deoarece $z_2 = 1$ este pol de ordinul 1,* $rezf(1) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(1-z)'}\Big|_{z=1} = -e.$

*Am obţinut,* $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = -4\pi j.$

## 1.2 Aplicaţie la calculul integralelor trigonometrice

Calculul mai multe tipuri de integrale reale se simplifică prin aplicarea teoremei reziduurilor. Prezentăm doar reducerea integralelor trigonometrice la integrale complexe.

Fie integrala

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx, \tag{1.7}$$

unde $R$ este o funcţie raţională în $\sin x$ şi $\cos x$.

Prin schimbarea de variabilă $z = e^{jx}$, când $x$ parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, $z$ descrie cercul $|z| = 1$ o singură dată, în sens trigonometric. Din formulele

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} \end{cases}$$

rezultă

$$\begin{cases} \cos x = \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin x = \frac{z^2-1}{2jz} \end{cases},$$

iar din $z = e^{jx}$, obţinem $dx = \frac{dz}{jz}$. Astfel, integrala (1.7) se reduce la integrala complexă

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{jz},$$

căreia i se poate aplica teorema reziduurilor. Rezultatul calculului unei astfel de integrale va fi întotdeauna un număr real.

**Exemplul 1.5** *Calculăm*

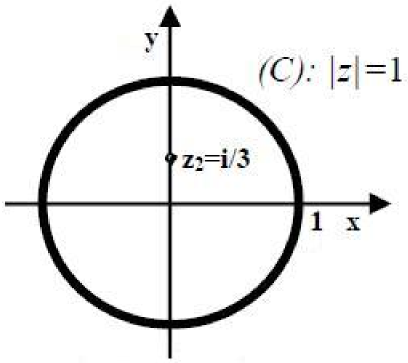
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin x}dx.$$

*Prin schimbarea de variabilă* $z = e^{jx}$, *rezultă* $\sin x = \frac{z^2-1}{2jz}$ *şi* $dx = \frac{dz}{jz}$. *Deci,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin x}dx = \oint_{|z|=1} \frac{2}{-3z^2 + 10jz + 3}dz.$$

*Rezolvând ecuaţia* $-3z^2 + 10jz + 3 = 0$ *găsim polii simpli* $z_1 = j$ *şi* $z_2 = \frac{j}{3}$. *Dar, doar* $z_2 = \frac{j}{3}$ *este în interiorul cercului* $(C) : |z| = 1$, *(Figura 2.5.4). Avem,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin x}dx = 2\pi j rezf(\frac{j}{3}) = 2\pi j \left.\frac{2}{(-3z^2 + 10jz + 3)'}\right|_{z=\frac{j}{3}} = \frac{\pi}{2}.$$



(Figura 2.5.4)

# 2 Exerciţii

**Exerciţiul 2.1** *Folosind teorema reziduurilor, calculaţi integralele:*

*1.* $\int\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{z^2-2z-8}dz$; *2.* $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z+3)}dz$; *3.* $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+1}dz$;

*4.* $\int\limits_{|z|=2} z^4 e^{\frac{1}{z}} dz$; *5.* $\int\limits_{|z+2j|=2} \frac{ch\frac{\pi z}{2}}{(z+j)^4}dz$; *6.* $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz$;

*7.* $\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2-1}dz$; *8.* $\int\limits_{|z-j|=3} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$; *9.* $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{z-j}}}{z^2+1}dz$;

*10.* $\int\limits_{|z-j|=4} \frac{\cos z}{(z-j)^3}dz$; *11.* $\int\limits_{|z-1-2j|=2} \frac{1}{z^3+8}dz$; *12.* $\int\limits_{|z-1-j|=2} \frac{z-1}{(z^2+4)(z-j)}dz$.

**Exerciţiul 2.2** *Calculaţi integralele reale:*

*1.* $\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{2+\sin x}dx$;

*2.* $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5-4\cos x}dx$;

*3.* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos x+a^2}dx,\ a \notin \{0, \pm 1\}$.