ALGAD_C_15_2023_11_24 24.11.2023

*Continuare ALGAD_C_13_2023_11_17

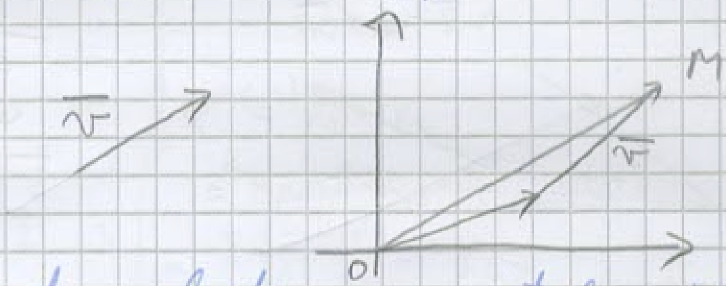
Schimbări de repere. Transformări geometrice (partea a II-a)

II) Transformări geometrice în plan

Transformările geom. sunt mișcări ale punctelor din plan (sau spațiu). Reperul nu se modifică în acest caz ci doar punctele.

1) Translația

Def.: S.N. Translație de vector $\vec{v}$ deplasarea pctelor. cu același vector $\vec{v}$.



Prin translație punctului M cu vectrul $\overline{v} = x_0 \overline{i} + y_0 \overline{j}$, acesta ajunge în punctul $M'(x', y')$. Avem:

$$\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j}, \quad \overline{OM'} = x'\overline{i} + y'\overline{j},$$

$$\overline{MM'} = \overline{v}$$

și avem

$$\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{v}$$

Obținem în coordonate ecuațiile translației ca transformare geom.:

ALGAD_C_15_2023_11_24 24.11.2023

* Continuare ALGAD_C_13_2023_11_17

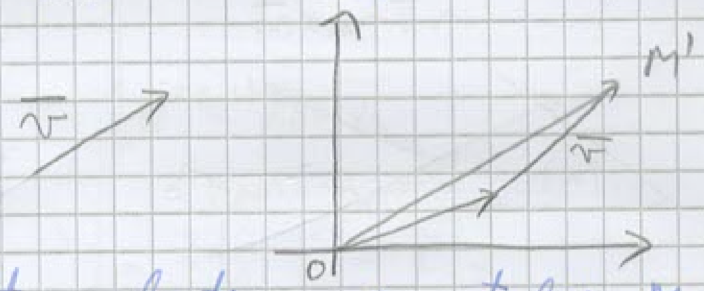
Schimbări de repere. Transformări geometrice (partea a II-a)

II) Transformări geometrice în plan

Transformările geom. sunt mișcări ale punctelor din plan (sau spațiu). Reperul nu se modifică în acest caz ci doar punctele.

1) Translație

Def.: S.N. Translație de vector $\vec{v}$ deplasarea pctelor cu același vector $\vec{v}$.



Prin translație punctului M cu vectorul $\overline{v} = x_0 \overline{i} + y_0 \overline{j}$, acesta ajunge în punctul $M'(x', y')$. Avem:

$$\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j}, \quad \overline{OM'} = x'\overline{i} + y'\overline{j},$$

$$\overline{MM'} = \overline{v}$$

și avem

$$\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{v}$$

obținem în coordonate ecuațiile translației ca transformare geom.:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

sau, în formă matriceală,

$$\boxed{X' = X + X_0}$$

unde $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ este matricea noilor coordonate,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ este matricea vechilor coordonate, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Obs.:

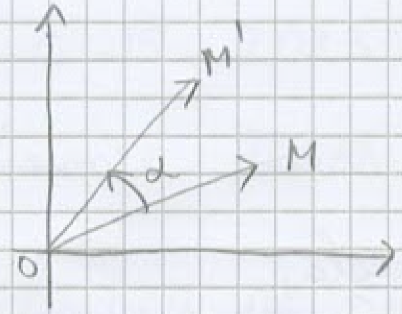
1) Ecuațiile de translație ca transformare plană coincid cu cele ale translației ca schimbare de reper obținute prin mutarea originii în punctul O' cu vectorul $\overline{OO'} = -\bar{v}$

2) Translații păstrează dist. dintre două puncte și unghiul dintre doi vectori.

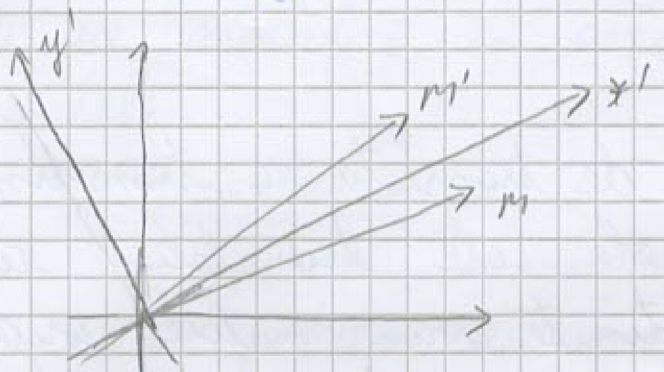
2) Rotația

Def: Rotația unui pct. M din plan în jurul originii înseamnă rotirea vectorului de poziție $\overline{OM}$ în jurul originii cu un unghi de rotație α în sens trigonometric dacă $\alpha > 0$ și invers dacă $\alpha < 0$:

$$\|\overline{OM'}\| = \|\overline{OM}\|, \ \measuredangle(\overline{OM'}, \bar{i}) = \measuredangle(\overline{OM}, \bar{i}) + \alpha$$



Legătura dintre coordonatele noului punct $M'(x', y')$ și coord. vechiului punct $M(x, y)$ se obține rotind și reperul $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ cu același punct α, obținându-se reperul $\{O', \bar{i}', \bar{j}'\}$



Coord pct. M' în reperul rotit sunt aceleași cu ale M în reperul original. Avem:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$$
$$\overline{OM'} = x'\bar{i} + y'\bar{j} = x\bar{i}' + y\bar{j}'$$

Cum $\begin{cases} \bar{i}' = \cos\alpha\, \bar{i} + \sin\alpha\, \bar{j} \\ \bar{j}' = -\sin\alpha\, \bar{i} + \cos\alpha\, \bar{j} \end{cases}$ * vezi cursul trecut

, obținem:

$$\overline{OM'} = x(-\cos\alpha\, \bar{i} + \sin\alpha\, \bar{j}) + y(-\sin\alpha\, \bar{i} + \cos\alpha\, \bar{j}) =$$

$$= (-\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y)\bar{i} + (\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)\bar{j}$$

Din urmare, obținem ecuațiile rotației ca în rotație geom.

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ y' = \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{cases} \iff \boxed{X' = A \cdot X}, \text{ unde}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Obs: Ecuațiile rotației ca schimbare de reper sunt echiv. cu cele de rotație ca transformare geom. cu unghiul $-\alpha$.

3) Simetrii

3.1) Simetria față de axa Ox: $M(x,y) \longmapsto M'(x,-y)$

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

3.2) Simetria față de axa Oy: $M(x,y) \longmapsto M'(-x,y)$

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

3.3) Simetria față de O: $M(x,y) \longmapsto M'(-x,-y)$

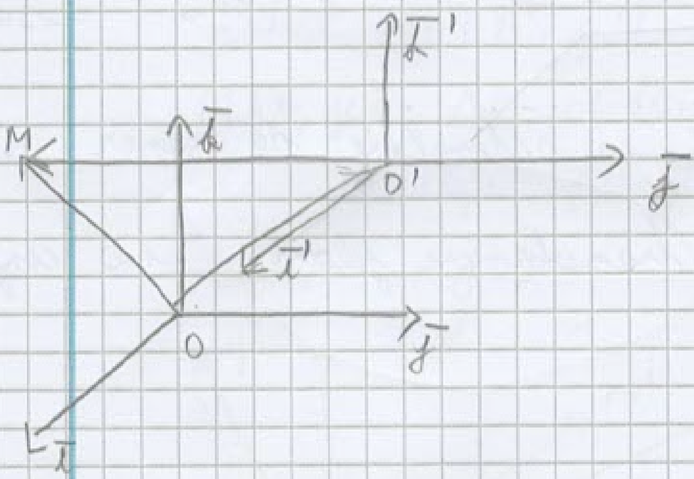
$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

III) Schimbări de repere în spațiu:

1) Translația: $\mathcal{R}=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\} \to \mathcal{R}'=\{O',\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$

$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z')$, $O'(x_0,y_0,z_0)$

$\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{OO'} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \Leftrightarrow X = X' + X_0$



unde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $X_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

2) Schimbări de baze

$$\mathcal{R}=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\} \longmapsto \mathcal{R}'=\{O,\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$$

$$\begin{cases} \bar{i}' = a_{11}\bar{i} + a_{21}\bar{j} + a_{31}\bar{k} \\ \bar{j}' = a_{12}\bar{i} + a_{22}\bar{j} + a_{32}\bar{k} \\ \bar{k}' = a_{13}\bar{i} + a_{23}\bar{j} + a_{33}\bar{k} \end{cases} \xrightarrow{\text{contin.}}$$

$$\xrightarrow{\text{contin.}} \boxed{X = AX'}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ex.: Rotație în planul yOz ($\bar{i}$ nu se modifică, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ se rotesc cu un unghi α):

$$\left.\begin{cases} \bar{i}' = \bar{i} \\ \bar{j}' = \cos\alpha\, \bar{j} + \sin\alpha\, \bar{k} \\ \bar{k}' = -\sin\alpha\, \bar{j} + \cos\alpha\, \bar{k} \end{cases}\right| \Rightarrow X = AX', \text{ unde}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

IV) Transformări geometrice în spațiu

1) **Translația** de vector $\bar{v} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$:

$$\boxed{X' = X + X_0}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

2) **Transformări liniare** (rotații sau simetrii)

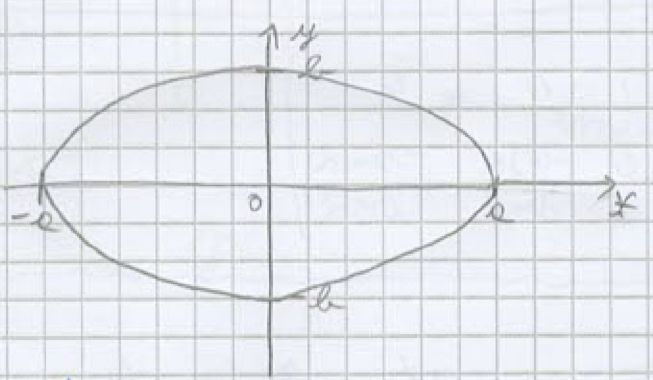
$\boxed{X' = AX}$, unde A este matricea transformării liniare

Conice

Def: S.N. conică o curbă plană ale cărei puncte $M(x, y)$ satisfac o ecuație de gr. II:

$$(\Gamma): ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

1) **Elipsa:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$



$y = 0 \Rightarrow x = \pm a$

$x = 0 \Rightarrow y = \pm b$

Definiții și proprietăți:

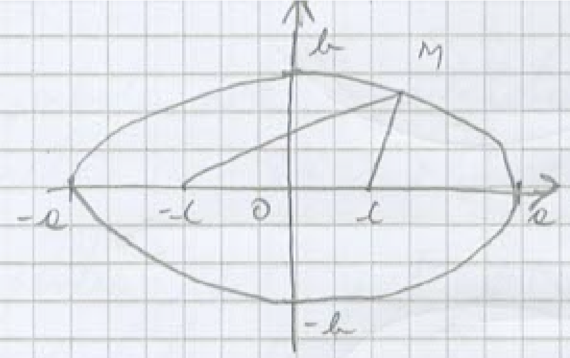
i) Numerele a și b s.n. semiaxele elipsei

ii) Elipsa admite 2 pct. speciale F și F' numite focare. Acestea sunt situate pe semiaxa mare a elipsei:

- dacă $a > b$, atunci $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, unde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- dacă $a < b$, atunci $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, unde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

iii) Proprietatea optică a elipsei:

Orice rază care pleacă dintr-unul dintre focare spre elipsă este reflectată prin celălalt focar.



iv) Suma distanțelor de la un pct. arbitrar M de pe elipsă la cele 2 focare este constantă

$$\|\overline{MF}\| + \|\overline{MF'}\| = 2a$$

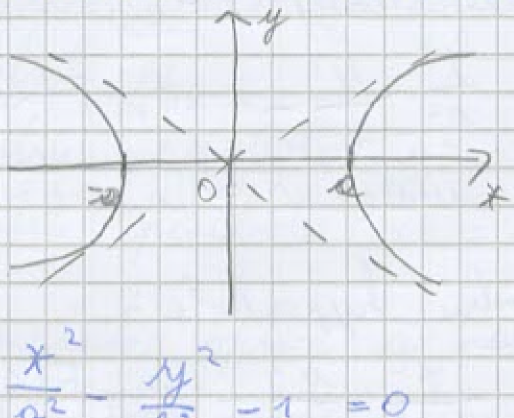
Caz particular: $a = b = r \Rightarrow$ cercul de rază r, cu centrul în origine

$$x^2 + y^2 = r$$

2) Hyperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

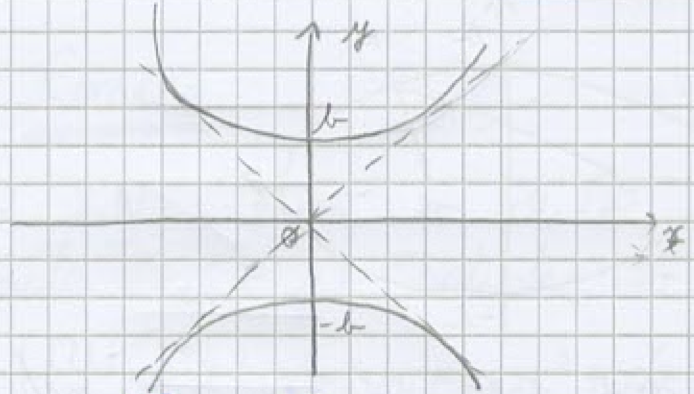
Hyperbola are 2 ramuri situate dealungul axei corespunzătoare termenului cu „+" din ecuație.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$x = 0 \Rightarrow y^2 - b^2 \Rightarrow y \in \emptyset$

$y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

$x=0 \Rightarrow y=\pm b$

$y=0 \Rightarrow x\in\emptyset$

i) Numerele a, b s.n. semiaxele hyperbolei

ii) Dreptele $y=\frac{b}{a}x$ și $y=-\frac{b}{a}x$ (desenate **punctat** în fig. anterioare)

s.n. asimptotele hyperbolei

iii) Hyperbola admite 2 pct. speciale F și F' numite focare care sunt situate pe axa corespunzătoare termenului cu „+" din ecuație:

- pentru hyperbola:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ F(c,0),\ F'(-c,0),$$

unde $c=\sqrt{a^2+b^2}$

- pentru hyperbola:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ F(0,c),\ F'(0,-c),$$

unde $c=\sqrt{a^2+b^2}$

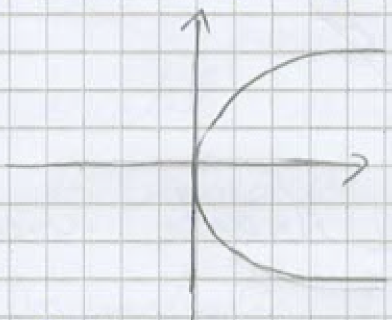
iv) Hyperbola are o utilitate utilă în practică folosită de exemplu la navigația prin GPS:

pentru orice pct. M de pe hyperbolă, modulul diferenței distanțelor la cele 2 focare este constant:

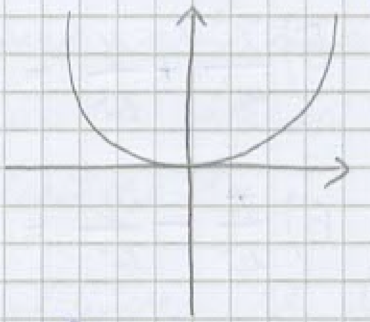
$$\left| \|\overline{MF}\| - \|\overline{MF'}\| \right| = 2a$$

* DDG: „problema navigației"

3) Parabola: $y^2 = 2px$ sau $x^2 = 2py$



$y^2 = 2px,\ p > 0$



$x^2 = 2py,\ p > 0$

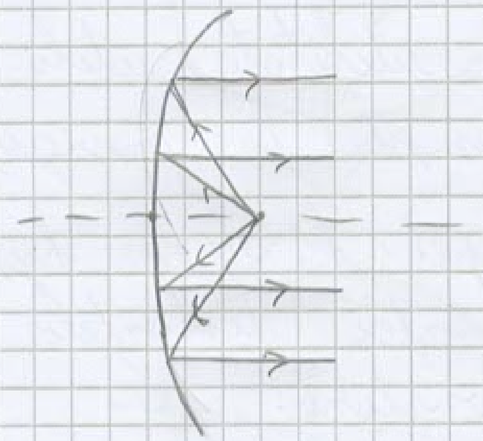
Def. și propr.:

i) Parabola are un singur focar, F, situat în interiorul ramurilor acesteia pe axa de simetrie la o distanță egală cu $\frac{p}{2}$ de vârful ei

- pentru parabola $y^2 = 2px$, $F(\frac{p}{2}, 0)$
- pentru parabola $x^2 = 2py$, $F(0, \frac{p}{2})$

ii) Proprietatea optică a parabolei:

Orice rază care pleacă din focar spre interiorul parabolei este reflectată paralel cu axa de simetrie



ii)

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \longrightarrow$ un pct. $(O(0,0))$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \longrightarrow \emptyset$

6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow$ 2 drepte concurente

$$\underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}_{d_1}\underbrace{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}_{d_2} = 0$$

7) $x^2 = 1 \;/\; y^2 = 1 \longrightarrow$ 2 drepte paralele

$(x=1, x=-1) \quad (y=1, y-1)$

8) $x^2 = 0 \;/\; y^2 = 0 \rightarrow$ 2 drepte confundate

Obs: Elipsa, hyperbola și parabola s.n. conice nedegenerate, iar celelate conice degenerate.

Reducerea la forma canonică a conicelor

Teoremă: Orice ecuație de gr. II de forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

poate fi redusă printr-o translație și/sau o rotație la una din formele canonice 1)-8) descrise anterior.

Obs: Teorema de mai sus afirmă că orice conică poate fi descrisă prin una dintre ecuațiile 1) - 8), adică nu există alte conice în afară de cele anterioare.

Demonstrația teoremei anterioare se bazează pe următoarele 2 obs:

i) Niciuna dintre ecuațiile canonice 1)-8) nu conține termeni în xy

ii) Cu excepția parabolei, nicio altă ecuație canonică nu cont. termeni de gr. I în x sau y.

Pornind de la ec. 1), eliminarea term. în xy (dacă ($\exists$)), se face efectuând o rotație de unghi α a reperului. Unghiul α se determină din ecuația $\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{b}{a-c}}$ (obs: dacă $a = c$, atunci $\alpha = \frac{\pi}{4}$)

Elim. term. pr. I se obt. prin formarea de pătrate perfecte, care descriu ecuațiile unei translații a reperului.

Exemplu:

$$(\Gamma): x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$$

Eliminăm mai întâi termenul în xy efectuând o rotație:

$$\tan(2\alpha) = \frac{-8}{1-7} \Leftrightarrow \tan(2\alpha) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{4}{3} \xLeftrightarrow{\tan(\alpha) = t} 4t^2 + 6t - 4 = 0$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad t_1 = -2, \quad t_2 = \frac{1}{2} \xRightarrow{\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})} tg\,\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{2} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Efectuăm rotația: $X = AX'$, unde $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$

Ecuația conicei devine:

$$(\Gamma): \frac{1}{5}(2x' - y')^2 - \frac{8}{5}(2x' - y')(x' - 2y') + \frac{7}{5}(x' + 2y')^2 +$$
$$+ \frac{6}{\sqrt{5}}(2x' - y') - \frac{6}{\sqrt{5}}(x' + 2y') + 9 = 0$$