Fizica Generala

Curs 5

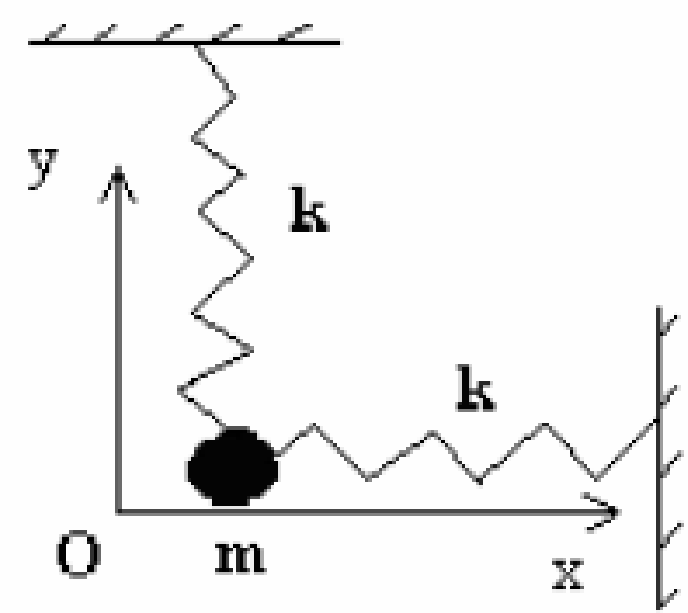
Compunerea oscilatiilor

continuare

Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

- Considerăm un punct material de masă m, care care este solicitat simultan să oscileze armonic sub acţiunea a două resorturi elastice identice legate pe două direcţii perpendiculare, ca în fig.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x(t)}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_1) = \sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1 \quad \Big| \cos\varphi_2 \quad \Big| \sin\varphi_2 \\ \dfrac{y(t)}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_2) = \sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2 \quad \Big| \cos\varphi_1 \quad \Big| \sin\varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \dfrac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \cos\omega t(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1) \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 = -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \dfrac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \dfrac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \sin\omega t(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) \end{cases}$$

$$\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

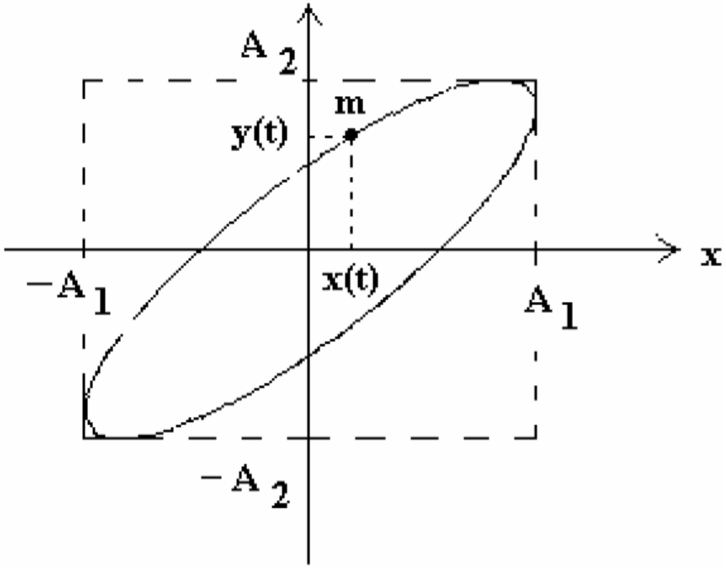
Prin ridicare la patrat se obtine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)=$$

$$=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)} \quad (*)$$

ecuaţia generalizată a elipsei, adică ecuaţia unei elipse rotite faţă de axele de coordonate



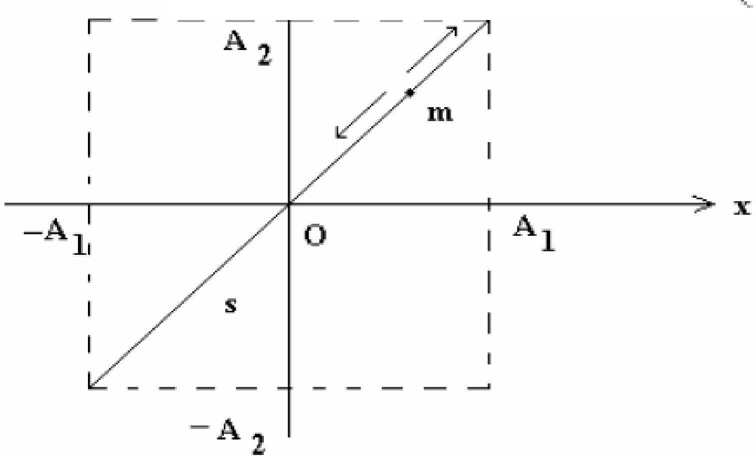
Cazuri particulare

- Dacă $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ (oscilaţiile sunt în fază)=>

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0$$

sau:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$



$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

- Dacă $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$ (oscilaţiile sunt în opoziţie de fază =>

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0$$

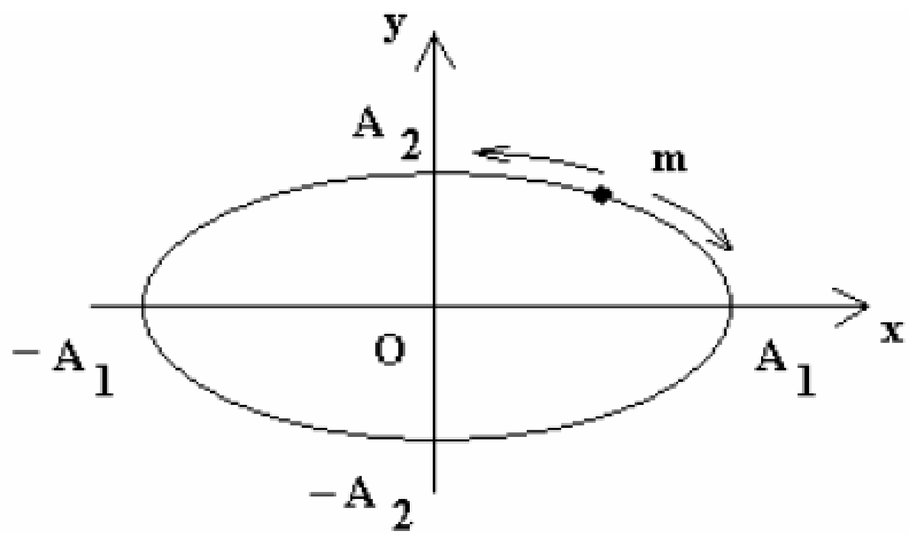
sau:

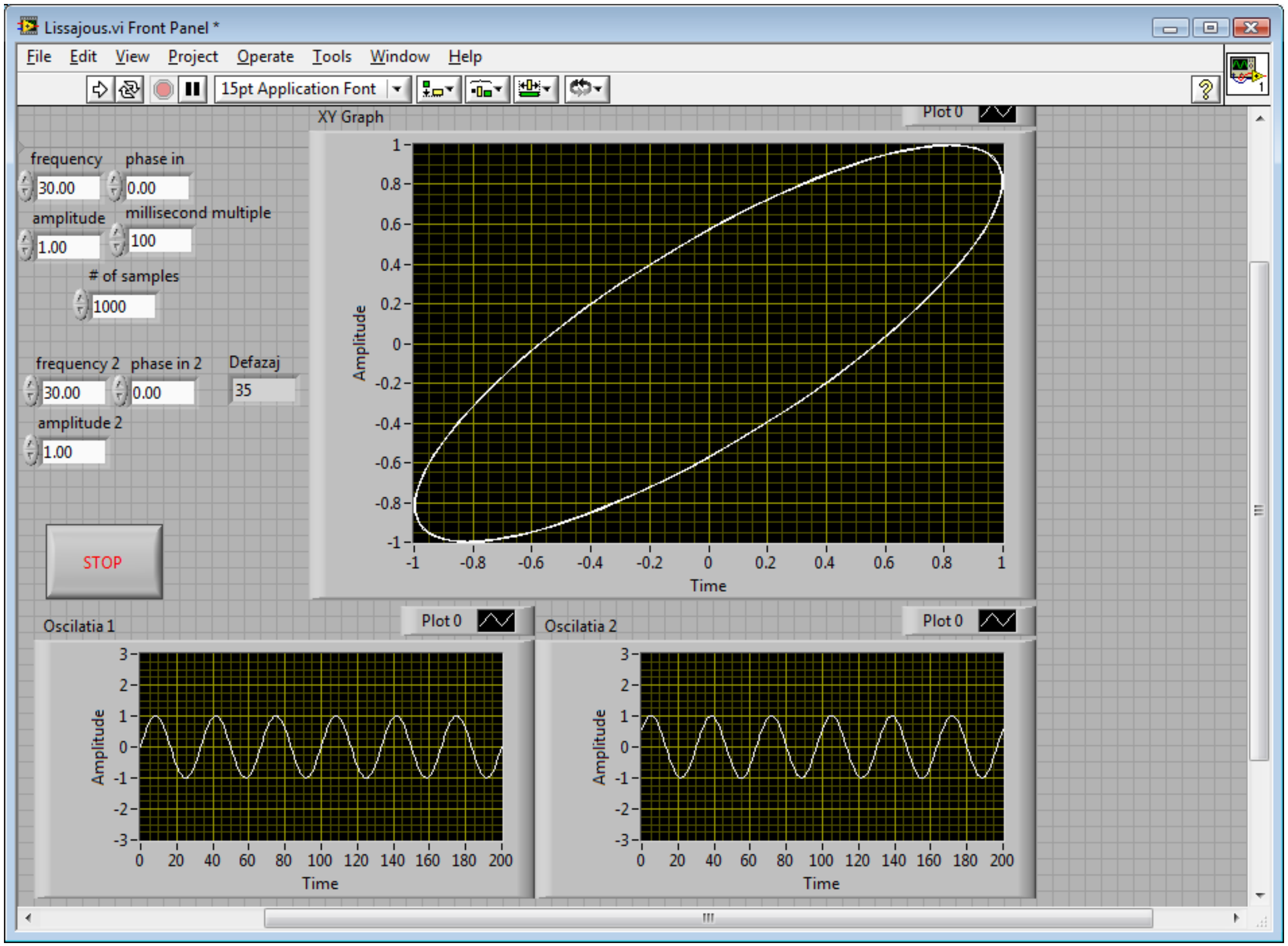
$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

- Dacă $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\,\pi/2$ (oscilaţiile sunt în cuadratură) =>

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1$$




Lissajous.vi Front Panel *
File Edit View Project Operate Tools Window Help
15pt Application Font
XY Graph
Plot 0
frequency
30.00
phase in
0.00
amplitude
1.00
millisecond multiple
100
# of samples
1000
frequency 2
30.00
phase in 2
0.00
Defazaj
35
amplitude 2
1.00
STOP
Amplitude
Time
Oscilatia 1
Plot 0
Oscilatia 2
Plot 0

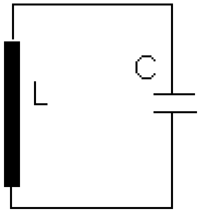
Oscilatii
Analogia mecano-electrica

Oscilatii electrice

- Studiem cazul circuitelor oscilante electrice
- Consideram cazul unui circuit oscilant simplu, format dintr-un condensator de capacitate C şi o bobină de inductanţă L

$$U_C - U_L = 0$$

$$U_C = \frac{q}{C}; \quad U_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\ddot{q}$$ unde $$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$



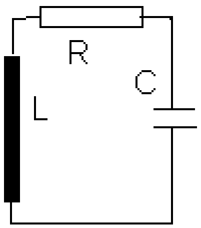
- =>ec. dif. este $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

- Solutia ec. dif. fiind $q = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$ sarcina din circuit variază armonic

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Oscilatii electrice

- In cazul real trebuie tinut cont de rezistenţa electrică în care sunt incluse contribuţiile rezistenţei conductorului bobinei reale şi rezistenţei dielectricului condensatorului real



$$U_R + U_C - U_L = 0$$

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0$$

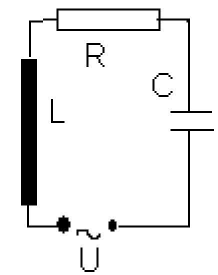
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$ unde $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\beta = \frac{R}{L}$

- pentru cazul unor rezistenţe mici are ca soluţie o oscilaţie amortizată a sarcinii în circuit

$$q = a\,e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

Oscilatii electrice

- Pentru a întreţine oscilaţiile sarcinii din circuit, este necesar evident un aport energetic din exterior, ceea ce inseamnă aplicarea la bornele circuitului a unei tensiuni alternative de o anumită pulsaţie



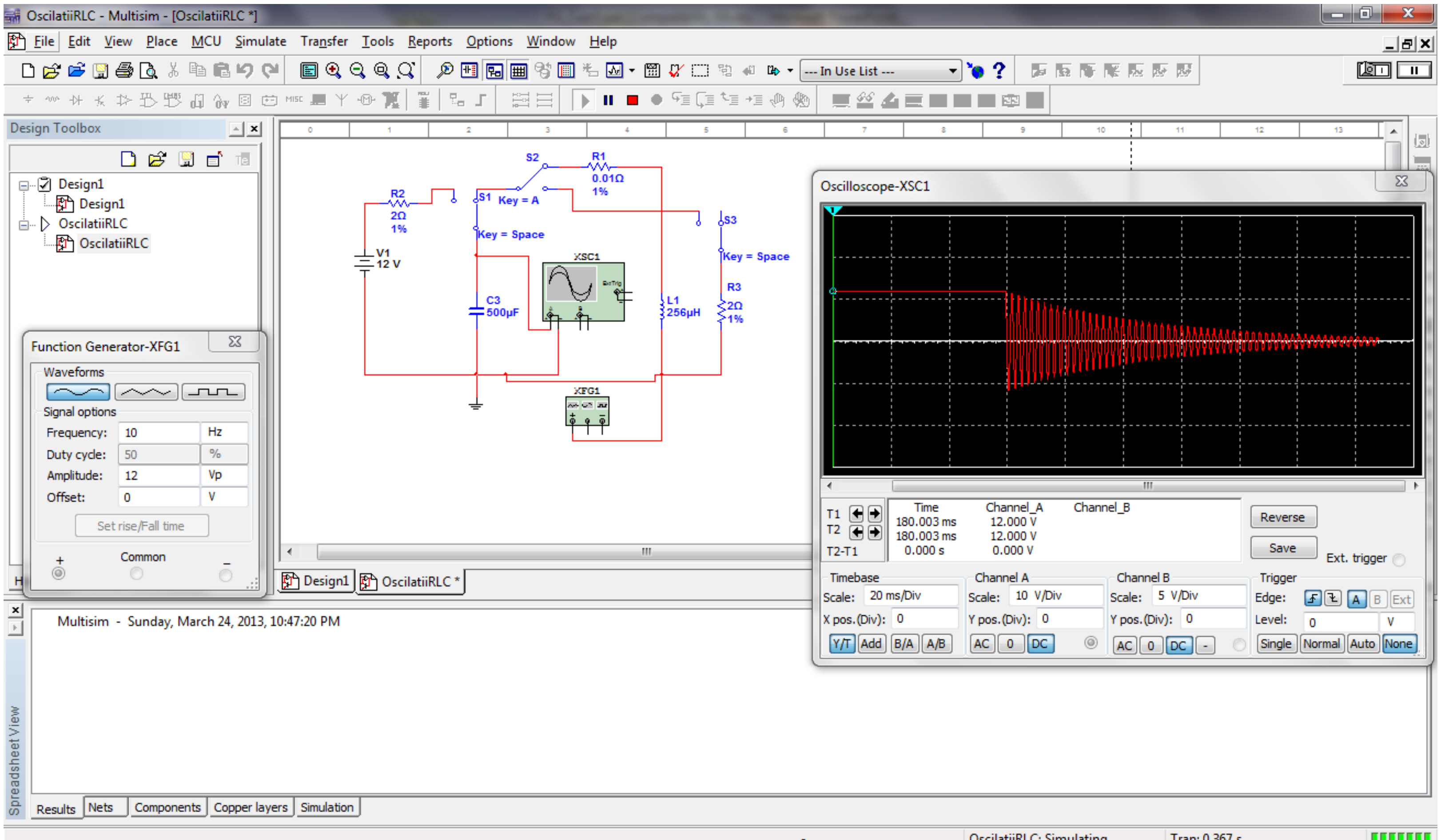
- Consideram $\tilde{U} = U_0 \cos(\omega_p t + \alpha)$

$$U_C + U_R - U_L = U_0 \cdot \cos(\omega_p t + \alpha)$$

- Avem în acest caz evident de-a face după trecerea timpului de relaxare cu oscilaţii forţate ale sarcinii în circuit, a căror ecuaţie matematică este:

$$q = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_p^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega_p^2}} \cos(\omega_p t + \alpha - \varphi) \qquad A_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\beta\omega_p)^2}}$$

Oscilatii electrice



Exercitiu: Sa se calculeze frecventa de oscilatie si coeficientul de amortizarea circuitului

Unde mecanice

Unde

- Mediile continue, cum sunt solidele, lichidele şi gazele, sunt medii formate din particule (atomi, molecule sau ioni) care interacţionează între ele.
- De aceea, dacă una dintre particule oscilează (vibrează), atunci vor oscila (vor vibra) şi particulele vecine; în felul acesta oscilaţiile (perturbaţiile) se propagă prin mediu de la o particulă la alta. Prin propagarea oscilaţiilor se generează undele.

Definitie

- *Unda* reprezintă fenomenul de extindere şi propagare din aproape în aproape a unei perturbaţii periodice produse într-un anumit punct din mediul de propagare.
- Propagarea undei se face cu o viteză finită, numită *viteza undei*.
- *Unda nu reprezintă transport de materie, ci numai transport de energie.*

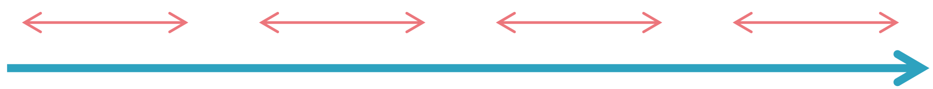
Clasificarea undelor

După *tipul de energie* pe care-l transportă unda

- **Unde elastice** – se transportă energie mecanică, undele fiind generate de perturbaţiile mecanice ale mediilor elastice;
- **Unde electromagnetice** – se transportă energie electromagnetică;
- **Unde magneto-hidrodinamice** – sunt generate prin perturbaţii electromagnetice şi elastice ale mediului de propagare.

După *natura perturbaţiei* şi modul de propagare al acesteia

- **Unde** ***longitudinale*** – direcţia de propagare a undei coincide cu direcţia de oscilaţie;



- **Unde** ***transversale*** **–** direcţia de propagare a undei este perpendiculară pe direcţia de oscilaţie.

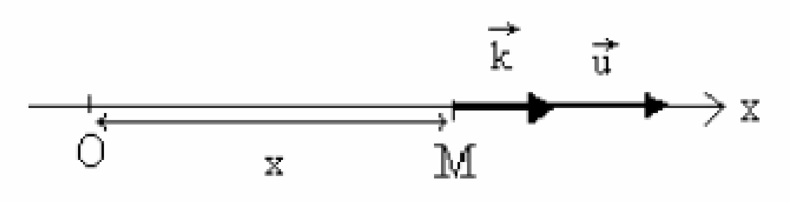
Marimi caracteristice:

- ***Funcţia de undă*** reprezină funcţia matematică ce descrie mărimea perturbată notata Ψ(x,y,z,t)
- ***Suprafaţa de undă*** reprezintă mulţimea punctelor din spaţiu ce oscilează având la un moment dat aceeaşi valoare a funcţiei de undă, Ψ(x,y,z,t) = const.
- După forma suprafeţelor de undă, putem întâlni *unde plane*, *unde sferice*, *unde cilindrice*, etc.
- ***Frontul de undă*** reprezintă suprafaţa de undă cea mai avansată la un moment dat.

Unde armonice unidimensionale

$$\Psi_O(t) = A\sin\omega t$$

Oscilaţia produsă în O se propagă numai pe o direcţie.
Într-un punct M, situat la distanţa x de origine, se va produce o oscilaţie de acelaşi tip, dar într-un moment ulterior şi anume la t − x /u
cu u viteza de propagare a undei



$$\Psi_M(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

https://www.youtube.com/watch?v=hZCsnd257w0

- Definim *lungimea de undă a undei* unidimensionale, ca fiind spaţiul străbătut de undă în timpul unei perioade, T, a oscilaţiei:

$$\lambda = u\,T = u\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Psi_M\,(x, t) = A\sin\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{u})$$

$$\Psi_M\,(x, t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

- *Vectorul de undă* este mărimea fizică vectorială orientată în sensul propagării undei $\vec{k} || \vec{u}$ şi egală în modul cu k = 2π/ λ

- In punctul M ecuaţia elongaţiei oscilaţiei este:

$$\Psi_M(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

$$\mathrm{k} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\mathrm{uT}} = \frac{\omega}{\mathrm{u}}$$

- Spatial

$$\Psi_M(r,t) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

- în cazul propagării undelor se utilizează două viteze:

(1) viteza de propagare, u este o mărime constantă, care depinde de carateristicile mediului de propagare.

(2) viteza de oscilaţie a particulelor mediului, v.

$$v(x, t) = \frac{d\Psi}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t - kx)$$

Ecuatia diferentiala a undelor

$$\boxed{\Delta \Psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operator

Energia transportata de unda

- *Unda nu reprezintă transport de materie, ci numai transport de energie.*

$$\Psi_M(x,t) = A\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

- Energia transportata
  - =cu en. cinetica maxima a elementului de masa pentru o unda elastica si care se poate determina astfel:

$$dE_C = \frac{1}{2} dm \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot S\cdot u\cdot dt\cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot S\cdot u\cdot dt\cdot A^2\cdot\omega^2$$

$$dm = dV\cdot\rho = S\cdot u\cdot dt\cdot\rho$$

- Energia transportata in unitatea de timp prin unitatea de suprafata a mediului suport reprezinta intensitatea undei:

$$I = \frac{1}{S}\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2}\rho\cdot u\cdot A^2\cdot\omega^2 \qquad [I]_{SI} = \frac{W}{m^2}$$

- În cazul în care unda se propagă printr-un mediu absorbant, o parte din energia ei se transformă în căldură, iar intensitatea undei scade, pe măsură ce unda traversează mediul.
- *Legea lui Beer* exprimă scăderea intensităţii undei, în funcţie de distanţa parcursă prin mediu:

$$I = I_0 e^{-\alpha \cdot x}$$

- *dI* pierderea de intensitate pentru unda transmisă de-a lungul stratului de mediu de grosime *dx:*

$$dI = -\alpha I dx$$

cu α coeficientul de absorbţie al mediului

- Prin integrare =>

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^x dx \Leftrightarrow I = I_0 e^{-\alpha \cdot x}$$

- Pentru unele materiale $\alpha = a \cdot \omega^2$ cu *a* constantă de material

- https://www.youtube.com/watch?v=64yDDGJbHUk
- 00:47:07 ; 1:14:14

- https://www.youtube.com/watch?v=w2s2fZr8sqQ&ebc=ANyPxKo2Y-LYfEpjlBOFD_Igr3DjY-EiS7yg0V1Mzo-zfGR6TPnyQUrDOUyKbYsxd4qylk7STaAIqwxOlQX6UOupVnv7ZmCuIQ
- 00:40 ; 2:34

Efectul Doppler

- La schimbarea sistemului de referinta, faza undei trebuie sa ramana invarianta:

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega' t' - \vec{k}'\vec{r}'$$

- Utilizand formulele de transformare Galilei =>

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega' t - \vec{k'}(\vec{r} - \vec{v_0}t)$$

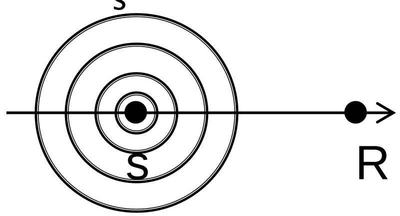
$$t\left(\omega - \omega' - \vec{k'}\vec{v_0}\right) - \vec{r}\left(\vec{k} - \vec{k'}\right) = 0, \qquad \forall r, t$$

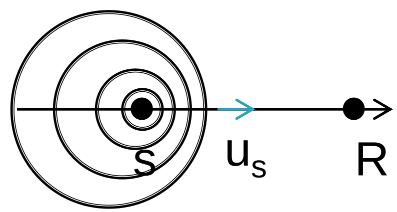
$$\begin{cases} \vec{k} = \vec{k'} \\ \omega' = \omega - \vec{k}\vec{v_0} \end{cases}$$

- Deci la schimbarea sist. de ref. se observa o modificare a fecventei, care este continutul efectului Doppler
- https://www.youtube.com/watch?v=313C1zo9pyE
- (2:39, 6:59)
- https://www.youtube.com/watch?v=RkAMYLcj17I&ab_channel=LecturesbyWalterLewin.Theywillmakeyou%E2%99%A5Physics (8.45)

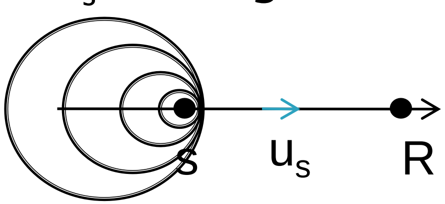
Unde de soc

- Daca o sursa sonora se misca cu viteza mai mare decat viteza sunetului, apare un fenomen specific numit unda de soc.
- Unda de soc reprezinta propagarea intr-un mediu gazos, lichid sau solid a unei suprafete asupra careia se manifesta o crestere brusca a presiunii insotita de variatia densitatii, temperaturii si vitezei de miscare a mediului
- Daca u_s=0 sau mica=>





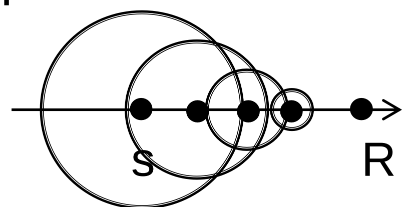
- Daca u_s este egala cu viteza sunetului



Fronturile de unda sunt toate tangente intr-un punct .
Observatorul percepe toate undele concomitent sub forma unei pocnituri, efectul tuturor undelor se insumeaza

- Daca u_s este mai mare decat viteza sunetului

Fronturile de unda se intretaie.
Sursa se afla naintea sunetului. Observatorul percepe sunetele emise in ordine inversa emisiei



Unde de soc

- https://www.youtube.com/watch?v=I1ykNQijOC8
- (7:15)