Curs nr. 5: Ecuaţii diferenţiale

Prin intermediul ecuaţiile şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale pot fi modelate matematic fenomene, naturale sau create artificial, din fizică, mecanică, economie, medicină sau mai general, din tehnică.

1. **Ecuaţii diferenţiale ordinare**
2. **Probleme practice care conduc la ecuaţii diferenţiale**
3. **Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi**

1 Ecuaţii diferenţiale ordinare

Fie $y(x)$ o funcţie de variabila independentă x. Notăm prin $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, ..., $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ derivatele succesive ale lui y în raport cu x. Orice relaţie de egalitate care conţine cel puţin una dintre aceste derivate se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară.* Termenul „ordinar" distinge ecuaţiile diferenţiale ordinare de cele cu derivate parţiale care conţin două sau mai multe variabile independente, o funcţie de aceste variabile şi derivatele parţiale corespunzătoare. Deoarece în acest capitol vom studia numai ecuaţiile diferenţiale ordinare, le vom spune simplu ecuaţii diferenţiale.

Definiţia 1.1 *O relaţie de forma*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

unde $F : D \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$, se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul n.

Ordinul unei ecuaţii diferenţiale este dat de derivata de cel mai mare ordin pe care o conţine. Relaţia (1.1) se numeşte *forma generală* a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n. În plus, dacă ecuaţia (1.1) se poate rezolva în raport cu $y^{(n)}$, adică

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

unde $f : \Delta \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, atunci relaţia (1.2) se numeşte *forma normală* a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n.

Exemplul 1.1 $y^{(4)} - x^2y^{(3)} + 4xy'' - 3y' + 2xy - e^x = 0$ *este o ecuaţie diferenţială de ordinul* 4*, scrisă sub formă generală. Explicitând pe* $y^{(4)}$*, obţinem forma normală* $y^{(4)} = x^2y^{(3)} - 4xy'' + 3y' - 2xy + e^x$.

O funcţie $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in C^n(I)$, care transformă ecuaţia (1.1) în identitate, adică $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0$, $\forall x \in I$, se numeşte *soluţie* sau *integrală* a ecuaţiei (1.1), iar graficul funcţiei φ se numeşte *curbă integrală*.

Definiţia 1.2 *Funcţia* $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$*, soluţie a ecuaţiei (1.1), pentru orice* $x \in I$ *şi pentru orice constante arbitrare* c_1*,* c_2*, ...,* c_n*, se numeşte soluţie generală sau integrală generală a ecuaţiei (1.1).*

Din punct de vedere geometric, $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ reprezintă o familie de curbe. Prin particularizarea constantelor $c_1, c_2, ..., c_n$, numite *constante de integrare*, din soluţia generală, se obţine o *soluţie (integrală) particulară*. Orice soluţie care nu poate fi dedusă din soluţia generală se numeşte *soluţie (integrală) singulară*.

Exemplul 1.2 *i)* $y = e^x \cos x$ *este soluţie a ecuaţiei* $y'' - 2y' + 2y = 0$*. Într-adevăr,* $y' = e^x(\cos x - \sin x)$ *şi* $y'' = -2e^x \sin x$ *înlocuite în ecuaţia dată, o verifică identic,*

$$-2e^x \sin x - 2e^x(\cos x - \sin x) + 2e^x \cos x = 0.$$

ii) Ecuaţia $(y')^2 - xy' + y = 0$ *admite soluţia generală* $y(x) = cx - c^2$*, care din punct de vedere geometric reprezintă o familie de drepte, iar orice soluţie particulară se obţine prin particularizarea lui c. Spre exemplu, pentru* $c = 1$ *se obţine soluţia particulară* $y = x - 1$*. În plus, ecuaţia admite soluţia singulară* $y = \frac{x^2}{4}$ *care geometric, reprezintă o parabolă.*

iii) Integrând direct ecuaţia diferenţială $y' = x$ *se obţine soluţia generală* $y = \frac{x^2}{2} + c$*, aceasta reprezentând o familie de parabole. Se extrage o parabolă din familie impunând acesteia să treacă printr-un punct din plan. Alegem spre exemplu* $A(0, 1)$*, adică* $y(0) = 1$*, şi atunci constanta c ia valoarea concretă* $c = 1$ *şi corespunzător ei, se obţine soluţia particulară* $y = \frac{x^2}{2} + 1$*.*

Reciproc, având o familie de curbe $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, eliminând constantele c_1, c_2, ..., c_n din sistemul

$$y = \varphi,\ y' = \frac{d\varphi}{dx},\ y'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2},\ ...,\ y^{(n)} = \frac{d^n\varphi}{dx^n}, \tag{1.3}$$

rezultă în general o ecuaţie diferenţială de forma (1.1).

Exemplul 1.3 *Determinăm o ecuaţie diferenţială pornind de la familia de parabole* $y = c_1(x - c_2)^2$.

Eliminând între ecuaţiile $y = c_1(x - c_2)^2$*,* $y' = 2c_1(x - c_2)$ *şi* $y'' = 2c_1$ *parametrii* c_1 *şi* c_2 *rezultă ecuaţia diferenţială* $(y')^2 = 2yy''$*.*

Condiţiile suplimentare care se impun pentru determinarea constantelor de integrare se numesc *condiţii iniţiale* sau *condiţii Cauchy*.

Definiţia 1.3 *Se numeşte problemă Cauchy relativă la ecuaţia (1.2) ansamblul format din ecuaţia diferenţială (1.2) cu condiţiile iniţiale*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.4}$$

şi constă în determinarea unei soluţii particulare care verifică (1.4), unde x_0*,* y_k*,* $k = \overline{0, n-1}$ *sunt numere date.*

Aşadar, problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n este

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Exemplul 1.4 *i) Ansamblul*

$$\begin{cases} y'' - 3xy' + 4xy - 5x^2 = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

este o problemă Cauchy relativă la o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea.

ii) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ *este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Impunând condiţiile Cauchy $y(0) = 3$ *şi* $y'(0) = 5$*, obţinem o soluţie particulară. Într-adevăr, înlocuind* $x = 0$ *şi* $y = 3$ *în* $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ *rezultă* $c_1 + c_2 = 3$*. Pe de altă parte,* $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$ *în care, înlocuind* $x = 0$ *şi* $y' = 5$ *obţinem* $c_1 + 2c_2 = 5$*. Rezolvând sistemul rezultă* $c_1 = 1$ *şi* $c_2 = 2$*. Deci, soluţia particulară este* $y = e^x + 2e^{2x}$*.*

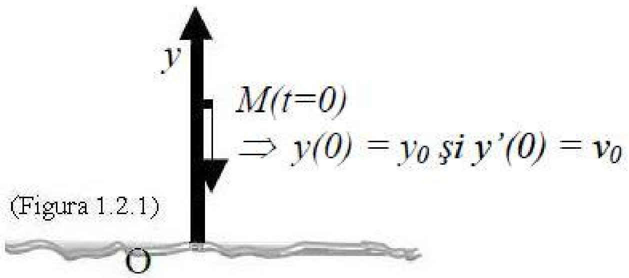
2 Probleme practice care conduc la ecuaţii diferenţiale

Vom prezenta doar câteva exemple de probleme fizice şi demografice care conduc la ecuaţii diferenţiale.

Exemplul 1. *Mişcarea unui punct material M pe o axă verticală, sub acţiunea forţei de atracţie a Pamântului.*

Se consideră un sistem de axe xOy în care originea este luată pe suprafaţa Pamântului, iar axa Oy este axa verticală în raport cu care se mişcă punctul M. Sensul pozitiv pe axa Oy este cel, de jos în sus. Poziţia punctului M la orice moment t este dată de valoarea coordonatei y în funcţie de t, $y(t)$. Înainte de începerea mişcării, la momentul

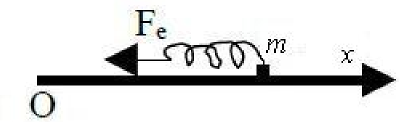
$t = 0$, (momentul iniţial), presupunem cunoscute poziţia punctului M, $y(0) = y_0$ şi viteza acestuia v_0. Din interpretarea mecanică a derivatelor de ordinul întâi şi al doilea, viteza este egală cu $y'(t)$, iar acceleraţia este $y''(t)$. Deci, la momentul iniţial au loc condiţiile iniţiale $y(0) = y_0$ şi $y'(0) = v_0$, iar mişcarea este modelată prin ecuaţia $y''(t) = -g$, unde g este acceleraţia gravitaţională a Pamântului, (apare minus deoarece mişcarea este dirijată în jos), (Figura 1.2.1).



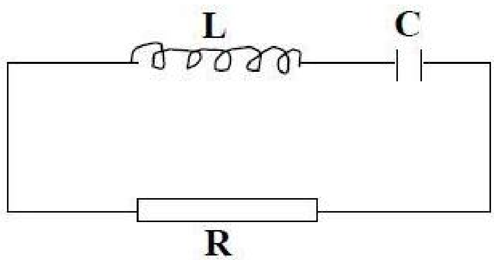
(Figura 1.2.1)

Integrând direct ecuaţia $y''(t) = -g$ rezultă, $y'(t) = -gt + c_1$ care, integrată din nou, dă soluţia generală $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2$, cu c_1 şi c_2, constante arbitrare. Impunând condiţiile iniţiale se obţine soluţia particulară $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0$.

Exemplul 2. *Mişcarea unui punct material de masă m care se deplasează pe o axă orizontală Ox, sub acţiunea unei forţei elastice* $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$, ($\vec{F}_e$ este proporţională cu distanţa până la originea O şi îndreptată spre O), (Figura 1.2.2).



(Figura 1.2.2)



(Figura 1.2.3)

Din legea a doua a lui Newton $m\vec{a} = \vec{F}$, se obţine ecuaţia diferenţială care modelează această mişcare, $m\ddot{x} + kx = 0$, ($\ddot{x} := \frac{d^2x}{dt^2}$), sau echivalent $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, unde $\omega^2 := \frac{k}{m}$. Soluţia generală a acesteia este

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

undee c_1 şi c_2 sunt constantele de integrare care se determină din condiţii iniţiale date, spre exemplu $x(0) = x_0$ şi $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Ecuaţia $m\ddot{x}+kx = 0$ se poate generaliza prin introducerea unor forţe suplimentare: forţe de frecare proporţionale cu viteza $\dot{x}(t)$ şi forţe perturbatoare armonice de forma $f_0 \cos \lambda t$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \lambda t. \tag{2.1}$$

Exemplul 3. *Circuitul electric* (RLC) este format din rezistenţa R, inductanţa L şi condensatorul de capacitate C, legate in serie, (Figura 1.2.3). Circuitul este caracterizat prin sarcina q şi intensitatea i, $\dot{q} = i$.

Notăm prin: U_R diferenţa de potenţial care traversează rezistenţa R, U_L diferenţa de potenţial care traversează inductorul şi U_C diferenţa de potenţial în condensator. Utilizând *legea lui Ohm*, $R = \frac{U_R}{i}$, *legea lui Faraday*, $L = \frac{U_L}{\dot{i}}$, şi $C = \frac{q}{U_C}$ şi, înlocuind corespuntătoar în *legea lui Kirchhoff*, $U_R + U_C + U_L = 0$ rezultă,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{CL}q = 0,$$

adică o ecuaţie echivalentă cu (2.1) în care $f_0 = 0$.

Exemplul 4. *Procese demografice*

i) Problema Cauchy $\begin{cases} \dot{x} + x = 3 \\ x(0) = 5 \end{cases}$ modelează un proces ”naştere-moarte” pentru o populaţie izolată, (nu au loc emigrări sau imigrări), de mărime $x(t)$. Populaţia iniţială este 5. Soluţia acesteia este $x(t) = 3 + 2e^{-t}$. Procesul este dominat de decese, deoarece viteza de creştere a populaţiei este $\dot{x} = -x + 3$, (unde 3 este rata de naşteri). Starea staţionară este $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 3$, (problemă stabilă).

ii) Problema $\begin{cases} \dot{x} = x - 3 \\ x(0) = 5 \end{cases}$ are soluţia $x(t) = 3 + 2e^{t}$ şi modelează un proces ”naştere-moarte” dominat de naşteri deoarece, viteza de creştere a populaţiei este $\dot{x} = x - 3$, (3 este rata de decese). Aceasta descrie o explozie a populaţiei deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$, (problemă instabilă).

iii) Problema Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = ax - bx^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$, $a, b > 0$, modelează procesul de creştere limitată a populaţiei, adică populaţia nu creşte la infinit. Termenul $-bx^2$ limitează creşterea. Soluţia este $x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + e^{-at}(a - bx_0)}$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}$. Raportul $\frac{a}{b}$ se numeşte *capacitatea ecosistemului* şi reprezintă valoarea atinsă asimptotic de către numrul de indivizi din ecosistem, oricare ar fi condiţia iniţială.

3 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi, sub formă generală

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{3.1}$$

unde $F : D \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, sau sub formă normală

$$y' = f(x, y(x)), \tag{3.2}$$

unde $f : \Delta \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe Δ.

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este $y = \varphi(x, c)$, depinzând de o singură constantă arbitrară, şi reprezintă din punct de vedere geometric o familie de curbe plane.

Problema Cauchy relativă la ecuaţia (3.2) este

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{3.3}$$

unde x_0, y_0 sunt numere date, şi constă în determinarea curbei plane din familie, care trece prin punctul de coordonate $(x_0, y_0) \in \Delta$.

3.1 Metode de integrare clasice

Aşa cum vom vedea în continuare, rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi se reduce la calculul unor integrale, altfel spus, la efectuarea unor *cuadraturi*. Vom prezenta metodele de determinare ale soluţiei generale pentru câteva clase de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, integrabile prin cuadraturi.

3.1.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma

$$y' = f(x)g(y), \tag{3.4}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi $g : [c, d] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, iar $g(y) \neq 0$, $\forall\ y \in [c, d]$.

Algoritmul de rezolvare

Se scrie ecuaţia (3.4) sub forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

se separă variabilele

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx,$$

şi apoi se integrează,

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Rezultă

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

şi atunci soluţia generală a ecuaţiei (3.4) este

$$y(x) = G^{-1}[F(x) + c], \tag{3.5}$$

unde G este o primitiva a funcţiei $\frac{1}{g(y)}$, F este o primitivă a lui f, iar $c := G(y_0) - F(x_0)$.

Exemplul 3.1 *$x(y^2+1) - y(x^2+1)y' = 0$ este o ecuaţie cu variabile separabile. Urmând algoritmul de mai sus, avem*

$$x(y^2+1) - y(x^2+1)\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{ydy}{y^2+1} = \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Integrând,

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{xdx}{x^2+1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln c,$$

care se scrie

$$y^2 + 1 = c(x^2+1)$$

şi reprezintă soluţia generală a ecuaţiei date. Scrierea constantei arbitrare prin intermediul unui logaritm, ajută la simplificarea formei soluţiei generale.

3.1.2 Ecuaţii omogene

Aşa cum este cunoscut, o funcţie de două variabile $g(x,y)$ este omogenă de grad k dacă $g(tx,ty) = t^k g(x,y)$, $\forall\, t \geq 0$.

O ecuaţie diferenţială de forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3.6}$$

unde funcţiile $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt omogene de acelaşi grad, se numeşte *ecuaţie omogenă.*

Ecuaţia (3.6) se poate rescrie sub forma

$$y' = f(\frac{y}{x}), \tag{3.7}$$

unde $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ este continuă şi omogenă de grad zero, $(x \neq 0)$.

Algoritmul de rezolvare

Se efectuează schimbarea de funcţie necunoscută $y(x) = u(x)x$, unde funcţia $u(x)$ este derivabilă. Derivând, avem $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ astfel că ecuaţia (3.7) devine

$$u'x + u = f(u), \tag{3.8}$$

echivalentă cu

$$\frac{xdu}{dx} = f(u) - u. \tag{3.9}$$

Distingem următoarele situaţii:

a) Dacă $f(u) - u \neq 0$, atunci (3.9) este o ecuaţie cu variabile separabile

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}. \tag{3.10}$$

Integrând, se obţine $x = ce^{\int \frac{du}{f(u)-u}} =: g(u, c)$ care conduce la soluţia generală a ecuaţiei (3.7)

$$x = g(\frac{y}{x}, c). \tag{3.11}$$

b) Dacă $\exists\ u_0$ a.î. $f(u_0) = u_0$, atunci $y = xu_0$ este soluţie singulară a ecuaţiei (3.7).

Exemplul 3.2 $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ *este o ecuaţie omogenă. Într-adevăr, împărţind ecuaţia prin* x^2 *obţinem*

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}y' = 0. \tag{3.12}$$

Substituţia $y(x) = u(x)x$ *şi* $y'(x) = u'(x)x + u(x)$, *transformă ecuaţia (3.12) în*

$$2uu'x = -u^2 - 1.$$

Deoarece $-u^2 - 1 \neq 0$,

$$\frac{2udu}{u^2+1} = -\frac{dx}{x} \tag{3.13}$$

care, prin integrare conduce la soluţia generală $x(u^2 + 1) = c$ *a ecuaţiei cu variabile separabile (3.13) şi mai departe, se obţine soluţia generală* $x^2 + y^2 = cx$ *a ecuaţiei (3.12).*

3.1.3 Ecuaţii liniare

Ecuaţiile diferenţiale *liniare* de ordinul întâi au forma

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{3.14}$$

unde funcţiile f, g sunt continue pe domeniul lor de definiţie.

Dacă $g(x) = 0$, $\forall\ x$, atunci ecuaţia (3.14) devine

$$y' + f(x)y = 0 \tag{3.15}$$

şi se numeşte ecuaţie *liniară omogenă*, (cuvântul „omogen" are altă semnifica- ţie decât cel anterior). Dacă g nu este identic nulă, atunci ecuaţia (3.14) se numeşte ecuaţie *liniară neomogenă*.

Algoritmul de rezolvare

Integrarea ecuaţiei (3.14) se face în două etape:

I. Se integrează mai întâi ecuaţia (3.15), iar soluţia acesteia va permite determinarea soluţiei generale a ecuaţiei (3.14). Ecuaţia (3.15) este cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx \ \Rightarrow\ \ln|y| = -F(x) + \ln c, \tag{3.16}$$

unde F este o primitivă a funcţiei f. De aici, se obţine soluţia generală a ecuaţiei (3.15),

$$y = ce^{-F(x)}. \tag{3.17}$$

II. Se aplică metoda variaţiei constantei, adică constanta c din (3.17) devine funcţie de x. Se determină apoi funcţia $c(x)$ astfel încât $y = c(x)e^{-F(x)}$ să fie soluţie pentru ecuaţia (3.15). Într-adevăr,

$$c'(x)e^{-F(x)} - c(x)f(x)e^{-F(x)} + f(x)c(x)e^{-F(x)} = g(x) \;\Rightarrow\; c'(x) = g(x)e^{F(x)}. \tag{3.18}$$

Integrând, rezultă

$$c(x) = \int g(x)e^{F(x)}dx + k.$$

Deci, soluţia generală a ecuaţiei (3.14) este

$$y(x) = \left[\int g(x)e^{F(x)}dx + k\right] e^{-F(x)}. \tag{3.19}$$

Exemplul 3.3 *Determinăm soluţia generală a ecuaţiei liniare*

$$y' - \frac{x+1}{x}y = x - x^2,$$

parcurgând algoritmul de mai sus.

I. Rezolvând mai întâi ecuaţia omogenă ataşată $y' - \frac{x+1}{x}y = 0$, *obţinem*

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+1}{x}dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+1}{x}dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = x + \ln|x| + \ln c.$$

Soluţia generală a ecuaţia omogene ataşate este $y(x) = cxe^x$.

II. Căutăm soluţia generală a ecuaţiei liniare date de forma $y(x) = c(x)xe^x$. *Avem* $y'(x) = c'(x)xe^x + c(x)(1+x)e^x$ *şi înlocuind în ecuaţia liniară neomogenă obţinem*

$$c'(x)xe^x + c(x)(1+x)e^x - (x+1)c(x)e^x = x - x^2 \;\Rightarrow\; c'(x) = (1-x)e^{-x}\,.$$

Folosind metoda integrării prin părţi, rezultă

$$c(x) = \int (1-x)e^{-x}dx = -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x}dx + k = xe^{-x} + k.$$

Deci, soluţia generală a ecuaţiei liniare date este $y(x) = x^2 + kxe^x$.

În particular, determinăm acea soluţie a ecuaţiei date care, satisface condiţia Cauchy $y(\ln 2) = 0$. *Deoarece,* $0 = \ln^2 2 + k\ln 2e^{\ln 2} \;\Rightarrow\; k = -\ln\sqrt{2}$, *soluţia particulară a problemei Cauchy este* $y(x) = x^2 - \ln\sqrt{2}xe^x$.

3.1.4 Ecuaţii Bernoulli

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \tag{3.20}$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$, iar funcţiile f, g sunt continue pe domeniul lor de definiţie. Pentru $\alpha = 1$, (3.20) este o ecuaţie liniară, iar pentru $\alpha = 0$ aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile.

Algoritmul de rezolvare

Prin schimbarea de funcţie necunoscută $u(x) = (y(x))^{1-\alpha}$, ecuaţia (3.20) se reduce la o ecuaţie liniară. Se împarte ecuaţia (3.20) prin y^{α},

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + f(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = g(x). \tag{3.21}$$

Pe de altă parte, $u'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x)$ care, împreună cu (3.21), conduce la ecuaţia liniară de ordinul întâi în necunoscuta $u(x)$,

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + f(x)u = g(x). \tag{3.22}$$

Se aplică ecuaţiei (3.22) algoritmul de rezolvare a ecuaţiei liniare, iar în soluţia generală a ecuaţiei (3.22) se revine la $y(x)$ prin $u(x) = (y(x))^{1-\alpha}$.

Exemplul 3.4 *Ecuaţia diferenţială* $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$ *este o ecuaţie Bernoulli cu* $\alpha = 5$. *Determinăm soluţia generală a acesteia, aplicând algoritmul. Se împarte ecuaţia prin* y^5, $\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{2xy^4} = 5x^2$. *Prin schimbarea* $u = y^{-4}$, *rezultă* $u' = -4y^{-5}y'$ *iar ecuaţia se reduce la ecuaţia liniară*

$$u' + \frac{2}{x}u = -20x^2. \tag{3.23}$$

I. Rezolvând ecuaţia liniară omogenă ataşată ecuaţiei (3.23),

$$u' + \frac{2}{x}u = 0,$$

obţinem soluţia generală $u = cx^{-2}$.

II. Căutăm soluţia generală a ecuaţiei (3.23) de forma $u = c(x)x^{-2}$. *Avem* $u' = c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3}$ *şi, înlocuind în ecuaţia (3.23), obţinem*

$$c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3} + 2c(x)x^{-3} = -20x^2 \;\Rightarrow\; c(x) = -4x^5 + k.$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei (3.23) este $u = -4x^3 + kx^{-2}$. *Deoarece* $y = u^{-\frac{1}{4}}$, *rezultă* $y = \frac{1}{\sqrt[4]{-4x^3+kx^{-2}}}$, *soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli date.*

3.1.5 Ecuaţii diferenţiale totale exacte. Factor integrant

Considerăm ecuaţiile diferenţiale de forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3.24}$$

unde $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt funcţii care admit derivate partiale continue pe un dommeniul $D \subset \mathbf{R}^2$.

Dacă funcţiile P şi Q verifică egalitatea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall\ (x,y) \in D, \tag{3.25}$$

atunci ecuaţia (3.24) se numeşte *ecuaţie diferenţială totală exactă.* Relaţia (3.25) este condiţia de independenţă de drum a integralei curbilinii de speţa a doua $\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, unde $A(x_0,y_0)$ şi $B(x,y)$, ([?]). Rezultă că există o funcţie diferenţiabilă $V(x,y): D \to \mathbf{R}$ astfel încât,

$$dV(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

şi

$$V(x,y) = \int_{(AB)} \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt.$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale totale exacte este

$$V(x,y) = c \ \Leftrightarrow\ \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = c,\ c \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 3.5 *Ecuaţia diferenţială* $\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$ *este o ecuaţie diferenţială totală exactă deoarece verifică (3.24), (*$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$*). Atunci, soluţia generală a ecuaţiei este*

$$V(x,y) = c \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{y_0} - \frac{y_0}{t^2}\right)dt + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{t^2}\right)dt = c \Leftrightarrow \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = k,\ k \in \mathbf{R}.$$

În general, condiţia (3.25) nu este verificată, situaţie in care se caută o functie $\alpha(x,y)$ numită *factor integrant* astfel încat, ecuaţia

$$\alpha(x,y)P(x,y)dx + \alpha(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

să fie o ecuaţie diferenţială totală exactă, adică

$$\frac{\partial}{\partial y}(\alpha P) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha Q),\ \forall\ (x,y) \in D,$$

echivalent cu

$$P\frac{\partial \alpha}{\partial y} - Q\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),\ \forall\ (x,y) \in D. \tag{3.26}$$

Aşadar, determinarea unui factor integrant $\alpha(x,y)$ revine la rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale (3.26), care este în general o problemă dificilă. Însă, dacă se cere ca factorul integrant să aibă o formă specială, spre exemplu $\alpha(x)$, $\alpha(y)$, $\alpha(xy)$, $\alpha(\frac{x}{y})$, $\alpha(x \pm y)$, $\alpha(x^2 \pm y^2)$, atunci acesta se găseşte mai uşor.

Exemplul 3.6 *Fie ecuaţia diferenţială* $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$. *Arătăm că admite un factor integrant de forma* $\alpha = \alpha(xy)$.

Avem $P = xy^2$ *şi* $Q = x^2y - x$, *iar* $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$ *şi* $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 1$. *Impunând ca* $\alpha = \alpha(xy)$ *să satisfacă ecuaţia (3.26) şi notând* $z := xy$ *obţinem,*

$$(Px - Qy)\frac{d\alpha}{dz} = \alpha\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Leftrightarrow z\frac{d\alpha}{dz} = -\alpha.$$

Din ultima ecuaţie cu variabile separabile rezultă $\alpha = \frac{\tilde{c}}{z}$, $\tilde{c} > 0$. *Luăm* $\tilde{c} = 1$ *şi în acest caz, factorul integrant este* $\alpha(x, y) = \frac{1}{xy}$.

Înmulţind ecuaţia dată cu $\alpha(x, y) = \frac{1}{xy}$, *obţinem ecuaţia diferenţială totală exactă* $ydx + \frac{xy-1}{y}dy = 0$, *cu soluţia generală*

$$V(x, y) = c \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} y_0 dt + \int_{y_0}^{y} \frac{xt - 1}{t} dt = c \Leftrightarrow xy - \ln y = k,\ k \in \mathbf{R}.$$

3.2 Metode numerice

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi sub formă normală

$$y' = f(x, y(x)), \tag{3.1}$$

unde $f : \Delta \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe Δ.

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este $y = \varphi(x, c)$, depinzând de o singură constantă arbitrară, şi reprezintă din punct de vedere geometric o familie de curbe plane.

Problema Cauchy relativă la ecuaţia (3.2) este

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{3.2}$$

unde x_0, y_0 sunt numere date, şi constă în determinarea curbei plane din familie $y = y(x)$, care trece prin punctul de coordonate $(x_0, y_0) \in \Delta$. Presupunem că soluţia problemei Cauchy (3.3) există şi este unică.

Rezolvarea numerică a problemei Cauchy (3.3) constă în determinarea valorilor aproximative ale soluţiei exacte $y = y(x)$, într-o mulţime de puncte date x_i, $i = 0, 1, ...$ care aproximează „suficient de bine" soluţia exactă $y = y(x)$.

În continuare vom prezenta două metode numerice unipas (Euler şi Runge-Kutta) în care determinarea valorii aproximative a soluţiei în fiecare punct se va obţine direct, pe baza informaţiilor din punctul precedent.

3.2.1 Metoda Euler

Se defineşte o familie de drepte d_M în $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ astfel: prin fiecare punct $M(x, y) \in \Delta$ trece câte o dreaptă de pantă $m = tg\theta$, (θ fiind unghiul format de direcţie cu sensul pozitiv al axei Ox), unde $\theta = arctgf(x, y)$. Rezultă, $m = f(x, y)$

Interpretare geometrică: graficul soluţiei problemei Cauchy (3.3) trece punctul $M(x_0, y_0)$ şi este tangent în orice punct al său unei drepte din familie.

Se consideră nodurile echidistante $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, ..., n$, cu pasul $h > 0$. Dreapta din familie care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ are panta $m_0 = f(x_0, y_0)$ şi este dată de ecuaţia

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{3.3}$$

Presupunem că funcţia $y = y(x)$ dată de (3.3) este o aproximantă a soluţiei problemei Cauchy (3.3) pe $[x_0, x_1]$. Atunci, valoarea aproximativă a soluţiei în x_1 este dată de

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0). \tag{3.4a}$$

Repetăm procedeul şi presupunând că în x_i s-a calculat valoarea aproximativă y_i, atunci pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ se aproximează soluţia cu

$$y = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i), \tag{3.5a}$$

iar în punctul x_{i+1} se obţine valoarea aproximativă

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Aşadar, considerând cunoscută aproximarea y_i a soluţiei problemei Cauchy (3.3) în x_i, procedeul de aproximare Euler, se sintetizează prin formulele:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i),\ i = 0, ..., n \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observaţia 3.1 *Justificarea formulelor (3.6) se face utilizând polinomul Taylor cu rest Lagrange în care termenii cu derivatele de ordin superior se neglijază. Acest fapt face ca face ca metoda să fie comodă în calcul, dar nu foarte precisă, erorile acumulîndu-se la fiecare pas.*

Exemplul 3.7 *Determinăm o soluţie aproximativă a problemei Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases},\ x \in [0, 1],\ y > 0,$$

aplicând metoda numerică Euler, cu pasul $h = 0,2$.

Ecuaţia diferenţială este de tip Bernoulli cu $\alpha = -1$ şi prin integrare se obţine soluţia exactă $y = \sqrt{2x + 1}$ a problemei Cauchy date.

Folosind formulele (3.6) avem

$$x_0 = 0;\ x_1 = 0,2;\ x_2 = 0,4;\ x_3 = 0,6;\ x_4 = 0,8 \text{ şi } x_5 = 1;$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1, \quad f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1; \\
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,2 \cdot 1 = 1,2; \quad f(x_1, y_1) = y_1 - \frac{2x_1}{y_1} = \frac{13}{15}; \\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{13}{15} \simeq 1,3733.
\end{aligned}
$$

Se continuă calculele până la y_5. Soluţia aproximativă prin metoda Euler în punctele $x_0 = 0$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$ şi $x_5 = 1$, în comparaţie cu soluţia exactă, în aceleaşi puncte, este dată în tabelul:

x_i	y_i (aproximativ prin Euler)	y_i (exact)
0	1	1
0,2	1,2	1,1832
0,4	1,3733	1,3416
0,6	1,5294	1,4832
0,8	1,6786	1,6124
1	1,8237	1,7320

3.2.2 Metodele de tip Runge-Kutta

Spre deosebire de metoda Euler care are la bază aproximarea de ordinul 1, metodele de tip Runge-Kutta au un ordin ridicat de aproximare, adică sunt identice cu seriile Taylor până la termenii h^m, unde h este pasul curent iar m este diferit pentru metode diferite din această familie şi defineşte ordinul metodei. Metoda Euler poate fi considerată o metodă Runge-Kutta de ordin $m = 1$.

Metodele Runge-Kutta de ordin $m \geq 2$ constau în aproximarea soluţiei problemei Cauchy (3.3) astfel:

$$y(x+h) \simeq z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i k_i(h),$$

cu

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = 1,$$

unde

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= hf(x, y), \\
k_1(h) &= hf(x + a_2 h, y + b_{21} k_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_m(h) &= hf(x + a_m h, y + b_{m1} k_1 + b_{m2} k_2 + \ldots + b_{mm-1} k_{m-1}),
\end{aligned}
$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, \; i = 2, \ldots, m.$$

Constantele c_1, c_i, a_i, b_{ij} se determină din condiţiile

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= \varepsilon'(0) = ... = \varepsilon^{(p)}(0) = 0, \text{ pentru orice funcţie } f \\ \varepsilon^{(p*1)}(0) &\neq 0, \text{ pentru o funcţie } f, \end{aligned}$$

unde

$$\varepsilon(h) = y(x+h) - z(h)$$

reprezintă eroarea aproximării.

Pentru calculul aproximativ al soluţiei problemei Cauchy (3.3) prin metoda Runge-Kutta de ordin $m = 4$ pe un interval $[a, b]$, cu pasul h procedăm astfel:

Pas 1. Avem

$$x_0 = a, \;\; x_N = b, \;\; x_i = x_0 + ih, \;\; i = 0, ..., N, \;\;\; h = \frac{b-a}{N} \text{ şi } y(x_0) = y_0.$$

Pas 2. Calculăm

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3), \end{aligned}$$

Exemplul 3.8 *Determinăm o soluţie aproximativă a problemei Cauchy*

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}, \; x \in [0, 1]\,, \;\; y > 0,$$

aplicând metoda numerică Runge-Kutta de ordinul $m = 4$, cu pasul $h = 0,1$.

Pas 1. Avem $f(x, y) = xy$, $y(0) = 1 \Rightarrow x_0 = 0$ şi $y_0 = 1$.

Deoarece $[a, b] = [0, 1] \Rightarrow h = \frac{b-a}{N} \Leftrightarrow N = \frac{1}{0,1} = 10$. Atunci, prin $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, ..., 10$, avem

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; \;\; x_1 = 0,1; \;\; x_2 = 0,2; \;\; x_3 = 0,3; \;\; x_4 = 0,4; \;\; x_5 = 0,5; \\ x_6 &= 0,6; \;\; x_7 = 0,7; \;\; x_8 = 0,8; \;\; x_9 = 0,9 \text{ şi } x_{10} = 1. \end{aligned}$$

Pas 2. Calculăm

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1; \;\; y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,005013 \\ k_1 &= 0,1 \cdot f(x_0, y_0) = 0, \\ k_2 &= 0,1 \cdot f(x_0 + \frac{0,1}{2}, y_0 + \frac{0}{2}) = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005, \\ k_3 &= 0,1 \cdot f(x_0 + \frac{0,1}{2}, y_0 + \frac{0,005}{2}) = 0,1 \cdot 0,05 \cdot 1,0025 = 0,0050125, \\ k_4 &= 0,1 \cdot f(x_0 + 0,1, y_0 + 0,0050125) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 1,0050125 = 0,010050125. \end{aligned}$$

Se continuă calculele până la y_{10}. Soluţia aproximativă prin metoda Runge-Kuta în punctele x_i, $i = 1, ..., 9$ în comparaţie cu soluţia exactă $y = e^{\frac{x^2}{2}}$, în aceleaşi puncte, este dată în tabelul:

x_i	y_i (aproximativ prin Runge-Kuta)	y_i (exact)
0	1	1
$0,1$	$1,005013$	$1,005013$
$0,2$	$1,020202$	$1,020201$
$0,3$	$1,046028$	$1,046027$
$0,4$	$1,083287$	$1,083286$
$0,5$	$1,133148$	$1,133148$
$0,6$	$1,197217$	$1,197217$
$0,7$	$1,277621$	$1,277620$
$0,8$	$1,377128$	$1,377128$
$0,9$	$1,499303$	$1,499303$

3.3 Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (faculativ)

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi, sub formă generală

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{3.1}$$

unde $F : D \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, sau sub formă normală

$$y' = f(x, y(x)), \tag{3.2}$$

unde $f : \Delta \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe Δ.

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este $y = \varphi(x, c)$, depinzând de o singură constantă arbitrară, şi reprezintă din punct de vedere geometric o familie de curbe plane.

Problema Cauchy relativă la ecuaţia (3.2) este

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{3.3}$$

unde x_0, y_0 sunt numere date, şi constă în determinarea curbei plane din familie, care trece prin punctul de coordonate $(x_0, y_0) \in \Delta$.

În mod natural, apar următoarele întrebări. Există cel puţin o curbă din familia $y = \varphi(x, c)$ care trece prin punctul (x_0, y_0)? Dacă există o astfel de curbă, este unică? Răspunsurile la aceste întrebări sunt date de următoarea teorema de existenţă şi unicitate.

Teorema 3.1 *(Teorema lui Picard) Fie problema Cauchy (3.3) cu*

$$\Delta = \{(x, y) | \, |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \; a, b > 0. \tag{3.4}$$

Dacă

i) f este continuă pe Δ şi

ii) f este Lipschitz în raport cu variabila y pe Δ, i.e. $(\exists)$ $k > 0$ a.î

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|\,,\ \forall\ \ (x,y_1),\ (x,y_2) \in \Delta,$$

atunci problema Cauchy dată admite soluţia unică $y = y(x)$, pentru $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, unde $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ şi $M = \sup\limits_{(x,y)\in\Delta} |f(x,y)|$.

Observaţia 3.2 *i) Dacă f este derivabilă în raport cu y şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ este continuă în raport cu y pe Δ, atunci f este Lipschitz în raport cu y pe Δ, cu constanta $k \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.*

ii) Soluţia $y = y(x)$ a problemei Cauchy (3.3) cu (3.4), se determină prin metoda aproximărilor succesive, care constă în construirea şirului de funcţii

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds,\ \ y(x_0) = y_0,\ \ |x - x_0| \leq h,\ \ n \in \mathbf{N}. \tag{3.5}$$

Se demonstrează că şirul de funcţii $y_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, converge uniform către soluţia $y = y(x)$ a problemei Cauchy considerate. Nu întotdeauna se poate găsi efectiv limita şirului de funcţii $y_n(x)$ motiv pentru care, se aproximează.

3.4 Exemplu

Exemplul 3.9 *Determinăm soluţia problemei Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases},\ (x,y) \in [-1,1] \times [0,2]\,,$$

folosind metoda aproximărilor succesive.

Avem

$$f(x,y) = y + x, \qquad (x_0, y_0) = (0,1) \qquad \text{şi} \qquad \Delta = [-1,1] \times [0,2]\,.$$

Din $(x,y) \in \Delta$, $|x - x_0\ | = |x| \leq a$ şi $|y - y_0| = |y - 1| \leq b$ rezultă $a = b = 1$ şi $M = 3$.

Funcţia $f(x,y) = y + x$ este continuă pe Δ şi Lipschitz în raport cu y pe Δ, (cu $k = 1$). Într-adevăr,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2| \leq k\,|y_1 - y_2|\,,$$

$\forall\ (x,y_1),(x,y_2) \in \Delta$ şi $k \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 1$.

Deci, f îndeplineşte condiţiile teoremei lui Picard cu $h = \min\left\{1, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$ şi conform acesteia, problema Cauchy dată admite soluţia unică $y = y(x)$, $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Prin metoda aproximărilor succesive, construim şirului de funcţii $y_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$:

- aproximarea de ordinul zero este

$$y_0 = 1.$$

- aproximarea de ordinul întâi este

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds = 1 + \int_0^x f(s,1)ds = 1 + \int_0^x (1+s)ds \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \quad \textit{(parabola).} \end{aligned}$$

- aproximarea de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds = 1 + \int_0^x f(1+s+\frac{s^2}{2}, s)ds \\ &= 1 + \int_0^x (1+2s+\frac{s^2}{2})ds = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

-aproximarea de ordinul al treilea:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= x_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds = 1 + \int_0^x f(1+s+s^2+\frac{s^3}{6}, s)ds \\ &= 1 + \int_0^x (1+2s+s^2+\frac{s^3}{6})ds = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}. \end{aligned}$$

....

Inductiv, deducem că

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + ... + \frac{2x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Atunci,

$$\lim_{n\to\infty} y_n(y) = 2e^x - x - 1 = y(x),$$

care reprezintă soluţia problemei Cauchy date.

3.5 Contraexemplu

Observaţia 3.3 *În demonstraţia unicităţii soluţiei este esenţial faptul ca funcţia f să fie Lipschitz. Renunţând la la această condiţie, problema Cauchy admite soluţie, dar nu este unică. Vom arăta acest lucru printr-un exemplu.*

Exemplul 3.10 *Considerăm problema Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Se verifică uşor că $y = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ *sunt două soluţii ale acesteia care trec prin origine.*

Într-adevăr, din $y = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ *rezultă* $y' = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}}$*, iar din* $y' = y^{\frac{1}{3}}$*, obţinem*

$$\pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Deci,

$$y = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$$

sunt soluţii, deci soluţia problemei Cauchy nu este unică. Unicitatea nu are loc, deoarece funcţia nu este Lipschitz în vecinătatea originii. Pentru a arăta acest fapt trebuie să găsim o pereche de puncte pentru care relaţia

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq k$$

nu are loc. Dacă luăm punctele (x, y_1) *şi* $(x, 0)$*, atunci*

$$|f(x,y_1) - f(x,0)| = |y_1|^{\frac{1}{3}}$$

şi deci,

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,0)|}{|y_1|} = |y_1|^{-\frac{2}{3}}.$$

Alegând pe y_1 *suficient de mic, putem face pe* $|y_1|^{-\frac{2}{3}} > k$*,* $\forall\ k > 0$*.*

Teorema de existenţă şi unicitate se extinde şi la problema Cauchy relativă la ecuaţia diferenţială de ordinul n.