ALGAD – C – 11 – 2023 – 11 – 10 10.11.2023

* Continuare ALGAD – 9 – C – 2023 – 11 – 03

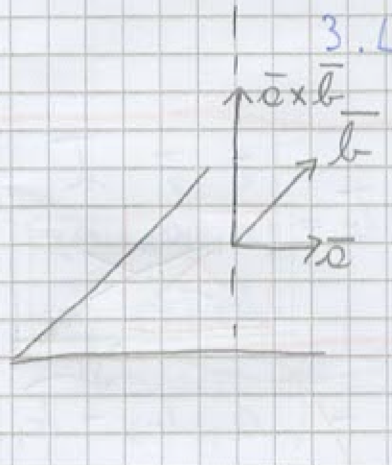
Vectori liberi. Produse de vectori

2) Produsul vectorial

Def.: S.N. Produs vectorial al vectorilor liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ vectorul $\bar{a} \times \bar{b}$ definit prin:

(înmulțire / cross product)

1. Direcția: perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$
2. Sensul: regula mâinii drepte
   sau
   regula burghiului (sensul în care s-ar roti un burghiu așezat perpendicular pe $\bar{a}$ și $\bar{b}$ atunci când se rotește dinspre primul vector spre al doilea
   (unghi)
3. Lungimea: $\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$
   (normă $\bar{a} \times \bar{b}$)



Proprietăți:

i) anticomutativitatea: $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

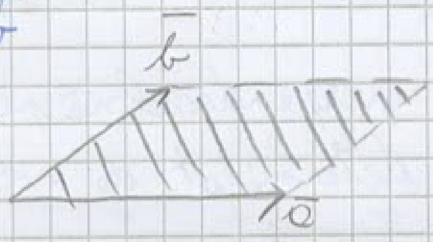
ii) distributivitate: $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

iii) $(\alpha \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\alpha \bar{b}) = \alpha (\bar{a} \times \bar{b})$

iv) ! $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (zero) $\Leftrightarrow$ $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt coliniari

Aplicații:

i) Aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este dată de lungimea produsului vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$



$$A_{\square} = \| \bar{a} \times \bar{b} \|$$

ii) Aria triunghiului determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este jumătate din aria paralelogramului

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \| \bar{a} \times \bar{b} \|$$

Expresia analitică:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k} \\ \bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - b_2 a_3) \bar{i} - (a_1 b_3 - b_1 a_3) \bar{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \bar{k}$$

3) Produsul mixt

Def. S.N. produs mixt al vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ scalarul definit prin:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

Proprietăți:

i) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$

ii) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$

* permutare circulară

iii) ! $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{0}$ (zero) $\Leftrightarrow$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ coplanari

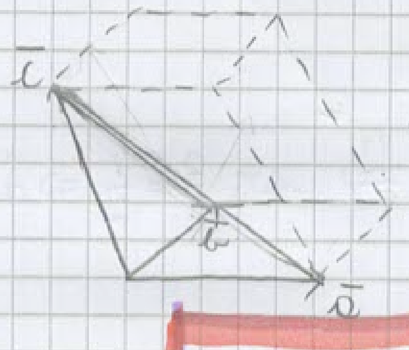
Aplicații

i) Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ este egal cu modulul produsului mixt.

$$V_{paralelipiped} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$$

* Nu e întotdeauna pozitiv

ii) $V_{tetraedului} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$



Expresia analitică
$$\boxed{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Aplicatie

Fie punctele:

$A(1,2,3)$,

$B(2,3,1)$,

$C(3,1,2)$,

$D(1,-1,1)$.

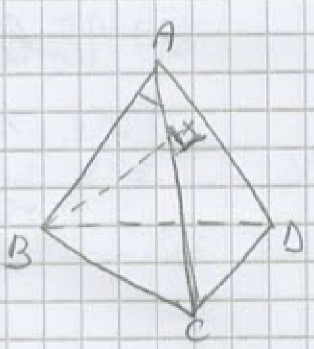
Determinati:

a) $\sphericalangle A$ al ΔABC $[\sphericalangle A = ?]$

b) vol. tetraedrului $ABCD$ $[V_{ABCD} = ?]$

c) lungimea înălțimii din **B** a tetraedrului $[h_B = ?]$

Solutie:



a) $\sphericalangle A = \sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \, \|\overline{AC}\|}$ (1)

$\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$

$\overline{AC} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$

$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \\ \|\overline{AB}\| = \sqrt{6} \\ \|\overline{AC}\| = \sqrt{6} \end{array}\right| \overset{(1)}{\Longrightarrow} \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{3}$

b) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right|$ (2)

$\overline{AD} = -3\bar{j} - 2\bar{k}$

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 15$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} V_{ABCD} = \frac{5}{2}$

c) ! $V_{ABCD} = \frac{h_B \cdot A_{\Delta ACD}}{3}$ (3)

$A_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\|\overline{AC} \times \overline{AD}\|$ (4)

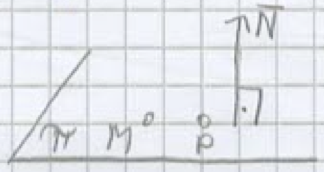
$$\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} A_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{1+16+36} = \frac{\sqrt{53}}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{5}{2} = \frac{h_B \cdot \frac{\sqrt{53}}{2}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_B = \frac{15\sqrt{53}}{53}$

Dreapta și planul

I) **Planul în spațiu**: pentru a determina ecuația unui plan, avem nevoie să cunoaștem un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ din plan și un vector $\overline{N} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$ normal (perpendicular) la plan



Fie π planul a cărui ecuație trebuie determinată.

Pentru un pct. arbitrar $P(x, y, z)$ din plan, vectorii $\overline{MP}$ și $\overline{N}$ sunt perpendiculari:

$\overline{MP} \perp \overline{N} \Leftrightarrow \overline{MP} \cdot \overline{N} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (a, b, c) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(\pi): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$

Desfăcând parantezele în ecuația anterioară se obține ecuația generală a planului:

$$\boxed{(\pi): ax + by + cz + d = 0} \quad (1)$$

Obs: 1) Ecuația generală a planului este o ecuație de gr. I în necunoscutele x, y, z. Reciproc, orice ecuație de gr. I în x, y, z reprezintă d. p. d. v. geometric un plan în spațiu.

2) Dat fiind un plan în spațiu prin ecuația generală, coeficienții necunoscutelor x, y, z reprezintă coordonatele unui vector normal la plan.

Ex: $(\pi): 2x - z + 1 = 0 \qquad \overline{N} = (2, 0, -1)$

Exemple: Planele de coordonate:

i) Planul (xOy) conține punctul $O(0,0,0)$ și
(o) (zero)

are vectorul normal $\overline{k} = (0,0,1)$, prin urmare ecuația sa este:

$$(xOy): \ 0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xOy): \ z = 0$$

*0 - zero

ii) Analog obținem:

$$(yOz): \ \left.\begin{matrix} O(0,0,0) \in (yOz) \\ \overline{i} = (1,0,0) \perp xOz \end{matrix}\right| \Rightarrow (yOz): x = 0$$

$$(xOz): \left\{\begin{matrix} O(0,0,0) \in (xOz) \\ \overline{j} = (0,1,0) \perp xOz \end{matrix}\right| \Rightarrow (xOz): y = 0$$

Obs: 1) Două plane paralele au vectorii normali coliniari;

Ex: $(\pi_1): 2x - z + 1 = 0, \ (\pi_2): -4x + 2z = 0$

2) Două plane perpendiculare își conțin reciproc vectorii normali.

II) Dreapta în spațiu

A) Dreapta determinată ca intersecție a două plane:

Fie $(\pi_1): a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ și

$(\pi_2): a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

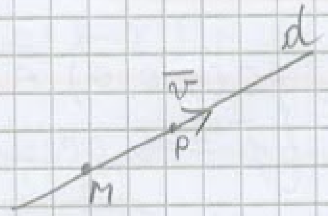
două plane concurente

$(\overline{N_1} = (a_1, b_1, c_1) \nparallel \overline{N_2} = (a_2, b_2, c_2))$. Atunci
(nu e paralel)

intersecția acestora este o dreaptă caracterizată de ecuațiile:

$$(d): \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

B) Dreapta determinată de un punct și un vector director



Fie d dreapta determinată de punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ și direcție (vectorul director) $\overline{v} = (l, m, n)$.

Pt. un pct arbitrar $P(x, y, z)$ de pe dreaptă $\overline{MP}$ și $\overline{v}$ sunt coliniari

$\overline{MP} = t \cdot \overline{v}$, unde $t \in \mathbb{R}$ este un parametru

Aceasta se scrie $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(l, m, n)$

$$\Rightarrow \boxed{(d): \begin{cases} x = l \cdot t + x_0 \\ y = m \cdot t + y_0 \\ z = n \cdot t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}} \quad (1)$$

Ecuațiile 1 se numesc ecuațiile parametrice ale dreptei, d.

Obs: Ecuațiile parametrice ale unei drepte sunt exprimarea coordonatelor x, y, z ale unui pct. de pe dreaptă ca funcții de gr. I în parametrul t.

Eliminând parametrul t din ecuațiile 1 se obțin ecuațiile canonice ale dreptei:

$$\boxed{(d): \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \quad (2)$$

Obs: Dacă fiind o dreaptă prin ecuațiile canonice, numitorii fracțiilor repr. coord. vect. director ale dreptei, iar cantitățile scăzute din x, y, z la numărător repr. coord. unui pct. de pe dreaptă.

Ex: Dreapta $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+2}{-1}$

are $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{k}$ ~~cu un~~ pct. de pe dr. $M(1, -1, -2)$

Exemple: 1) Axele de coordonate:

$$(Ox): \begin{cases} O(0,0,0) \in Ox \\ \bar{i} = (1,0,0) - \text{direcția axei } O_x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O_x): \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Ox): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Ox): \begin{cases} (xOy): z = 0 \\ (xOz): y = 0 \end{cases}$$

Analog pentru (Oy) și (Oz):

$(Oy): \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$, $(Oz): \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$

2) Pentru dreapta $(d): \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

ecuațiile canonice se obțin determinând 2 soluții particulare ale sistemului dat.

Pt. $x = y = 1 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow A(1,1,0) \in d$

Pt. $x = y = -1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow B(-1,-1,1) \in d$

$\Rightarrow (d)$: $A(1,1,0) \in d$

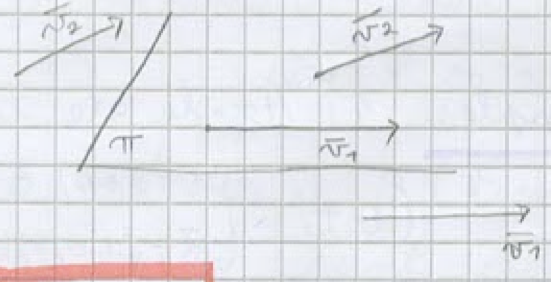
$\overline{AB} = (-2,-2,1)$ - direcția dreptei d

$\Rightarrow (d): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$

Cazuri particulare

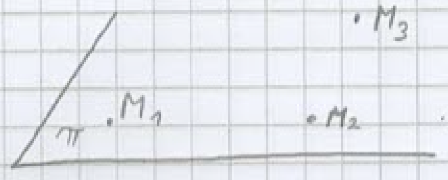
I) Planul mai poate fi determinat de:

a) un punct și doi vectori conținuți în plan sau paraleli cu planul:



$$\boxed{\overline{N} = \overline{v_1} \times \overline{v_2}}$$

b) Trei puncte din plan



$(\pi): \begin{cases} M_1 \in \pi \\ \bar{N} = \overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3} \end{cases}$

II) Dreapta mai poate fi determinată de 2 pct. A, B

$(d): \begin{cases} A \in d \\ \bar{AB} - \text{direcția dreptei } d \end{cases}$