Chapter 1

Seminar — 10 Oct. 2023, Rev. 1

1.1 Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$

1.1.1 Teorie

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime

Def. Spunem că A este mărginită dacă:

$(\exists)\ m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\underbrace{m}_{\text{Margine inferioară (minorant)}} \leq a \leq \underbrace{M}_{\text{Margine superioară (majorant)}}, \forall a \in A$$

$\inf A$ = cea mai mare margine inferioară / cel mai mare minorant

$\sup A$ = cea mai mică margine superioară / cel mai mic majorant

$\min A = \inf A$, dacă $\inf A \in A$

$\max A = \sup A$, dacă $\sup A \in A$

1.2 Exerciţii

1.2.1 Determinaţi $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$ pentru:

a. $A = (0, 1)$
$\inf A = 0 \in A$
$\sup A = 1 \in A$

$\min A =$ nu există
$\max A =$ nu există

b. $A = (-1, 1] \cup \{2\}$
$\inf A = -1$
$\sup A = 2$
$\min A =$ nu există
$\max A = 2$

c. $A = (-\infty, 0]$
$\inf A = -\infty$
$\sup A = 0$
$\min A =$ nu există
$\max A = 0$

d. $A = \{x^2 - 2x + 5 | x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Im} f = [y_v, \infty)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 2x + 5$
$y_v = \frac{\Delta}{4a}$
$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow y_v = \frac{16}{4} = 4$

$\mathrm{Im} f = [y_v, \infty) = [4, \infty)$

$\inf A = \infty$
$\sup A = 4$
$\min A = 4$
$\max A =$ nu există

e. $A = \{x^2 + 2x - 1 | x \in \mathbb{R}\}$
$\mathrm{Im} f = [-\infty, \frac{-\Delta}{4a})$
$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f = (-\infty, 0]$

$\inf A = -\infty$
$\sup A = 0$
$\min A =$ nu există
$\max A = 0$

f. $A = \{x \in \mathbb{R} | 4x^2 + 3x - 1 > 0\}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 + 3x - 1$
$f(x) = 0$
$\Delta = 9 + 16 = 25$
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{8}$

$x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\inf A = -\infty$
$\sup A = \infty$

x	$-\infty$		-1			$\frac{1}{4}$		∞
$f(x)$	+	+	0	-	-	0	+	+

$A = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$
$\inf A = -\infty$
$\sup A = \infty$

1.2.2 Care din următoarele mulţimi este mărginită?

a. $A = \{\frac{1}{x} | x \in (0, \infty)\}$

$0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \infty$

$\underbrace{\frac{1}{0}}_{\infty} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\infty}$

$A = \{\frac{1}{x} | x \in (0, \infty)\} = (0, \infty) \Rightarrow$ $\inf A = 0$ — mărginit
$\sup A = \infty$ — nu este mărginit

b. $A = \{\frac{n+1}{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$

$0 < \frac{n+1}{n+2} < 1 \Rightarrow A$ — mărginită

c. $A = \{\sin n | n \in \mathbb{N}\} = [-1, 1) \Rightarrow A$ — mărginită

d. $A = \{\frac{n^2}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$

$\frac{n^2}{n+1} > 0$

$\frac{n^2}{n+1} < \frac{n^2}{n} = n$

$n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — nemărginită $\Rightarrow$ A — nu este mărginită

1.2.3 $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A, B — mărginite Arătaţi că:

$\min\{\inf A, \inf B\} = \mathrm{Im}(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Presupunem $\mathrm{Im} A \leq \inf B \Rightarrow \min\{\inf A, \inf B\} = \inf A$

$$\left.\begin{array}{l}\inf A \le a,\ \forall a \in A\\ \inf B \le b,\ \forall b \in B\\ \inf A \le B\end{array}\right\} \Rightarrow \inf A \le b,\ \forall\ b \in B$$

$\inf(A \cup B) = \inf A$

Def.: Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Spunem că mulţimea V este o vecinătate a lui x_0 dacă:

$$(x_0 - \varepsilon, x_o + \varepsilon) \subset V$$

$$V_{x_0} = \text{mulţimea tuturor vecinătăţilor lui } x_0.$$

1.2.4 Precizaţi care din următoarele mulţimi sunt vecinătăţi pentru x_0

a. $(-1, \infty) \in V_o$
$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset (-1, \infty)$
$\varepsilon = 1 \ \Rightarrow\ (-1, 1) \subset (-1, \infty)$

b. $(10, 11) \in V_{10}$ $(\underbrace{10 - \varepsilon}_{<10}, 10 + \varepsilon) \not\subset (10, 11)$

c. $\{0, 1, 2\} \in V_1$ (NU — o mulţime de elemente nu are vecinătăţi)

d. $\overline{\mathbb{R}} \in V_{-\infty}$ (DA)
$(-\infty, \infty) < \underbrace{[-\infty, \infty]}_{\overline{\mathbb{R}}}$

e. $\mathbb{Q} \in V_0$ (NU)

1.3 Şiruri de numere reale

Def.: Un şir de numere reale este o funcţie $f : \mathbb{N} \to M,\ M \subseteq \mathbb{R}$
$\mathbb{N} \ni n \to f(n) = \underbrace{x_n}_{\text{termenul general al şirului}} \in M$

1.3.1 Exemple

1. $x_n = n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$
2. $x_n = 2 \cdot n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ (subşir al şirului — nr. naturale)
3. $x_n = 2n + 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ (subşir al şirului — nr. naturale)

1.3.2 Notaţie

$$(x_n)_n \in \mathbb{N} \text{ — şir de numere naturale}$$

1.3.3 Definiţie

Spunem că şirul $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ este monoton dacă:

1. x_n — crescător, $\forall n \in \mathbb{N}$:
   $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

   sau

2. x_n descrescător, $\forall \ n \in \mathbb{N}$
   $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \leq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

1.3.4 Criteriu

$(x_n) \ n \in \mathbb{N}$ este:

a. Crescător dacă:
   $x_{n+1} - x_n \geq 0, \forall \ n \in \mathbb{N}$

b. Descrescător dacă:
   $x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall \ n \in \mathbb{N}$

1.3.5 Exerciţii

1. Studiaţi monotonia şirurilor

a. $x_n = \frac{2n+1}{4n+3}, n \in \mathbb{N}$

$x_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)+3} = \frac{2n+3}{4n+7}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2n+3}{4n+7} - \frac{2n+1}{4n+3} = \\ &= \frac{(2n+3)(4n+3)-(2n+1)(4n+7)}{(4n+3)(4n+7)} = \\ &= \frac{\cancel{8n^2}+\cancel{18n}+9-\cancel{8n^2}-\cancel{18n}-7}{(4n+3)(4n+7)} = \\ &= \frac{2}{(4n+3)(4n+7)} > 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &n \in \mathbb{N} \\ &2(???) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0, \ \ x_n \text{ monoton crescător}$$

b. $x_n \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots \frac{1}{2n}, \ \ n \geq 1$

$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \dots - \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \ \ x_n \text{ monoton crescător} \end{aligned}$$

c. $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \ n \geq 1$

$n = 1 \Rightarrow x_1 = -1 + 1 = 0$

$n = 2 \Rightarrow x_2 = -1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$n = 3 \Rightarrow x_3 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{aligned} &x_1 < x_2 \\ &x_2 > x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n \text{ — nu este monoton}$$

d. $x_n = \cos(\pi \cdot n), \forall\ n \in \mathbb{N}$

$n = 0 \Rightarrow x_0 = \cos 0 = 1$

$n = 1 \Rightarrow x_1 = \cos \pi = -1$

$n = 2 \Rightarrow x_2 = \cos 2\pi = 1$

$x_n = (-1)^2$ — nu este monoton

e. $x_n = \frac{1 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{n(n+3)}{(n+2)^2}$

$x_{n+1} = \frac{1 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{1\cdot 4\cdot 2\cdot 5 \ldots n(n+3)(n+1)(n+4)}{3^2\cdot 4^2 \ldots (n+2)^2\cdot (n+3)^2} \cdot \frac{3^2\cdot 4^2 \ldots (n+2)^2}{1\cdot 4\cdot 2\cdot 5 \ldots n(n+3)} = \\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{(n+3)^2} = \\
&= \frac{n^2+5n+4}{n^2+6n+9} < 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n \ \Rightarrow \ (x_n)_n \in \mathbb{N}$ — monoton descrescător