

# C U R S U L 12

## 3. ELECTRODINAMICA (2)

### 3.3.6. Legea inducției electromagnetice.

Se numește **inducție electromagnetică** producerea unei t.e.m. într-un circuit sau, în general, în lungul unei curbe închise, datorită variației în timp a fluxului magnetic care străbate orice suprafață ce se sprijină pe acea curbă.

S-a constatat experimental că: **t.e.m. produsă prin inducție electromagnetică, în lungul unei curbe închise  $\Gamma$ , este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață sprijinită pe această curbă:**

$$u_{er} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_{Sr}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{Sr} \vec{B} \cdot d\vec{S} . \quad (3.41)$$

Sensul t.e.m. induse este astfel încât efectele ei se opun cauzei care a produs-o (**regula lui Lenz**). Pentru exemplificare, se consideră un circuit traversat de un flux magnetic variabil în timp  $\Phi$  (fig.3.15) în intervalul de timp în care fluxul inductor  $\Phi$  crește ( $d\Phi/dt > 0$ ), în circuit apare o t.e.m. indusă ce dă naștere unui curent  $i$  care va produce un flux  $\Phi_r$  (de reacție) ce se opune creșterii

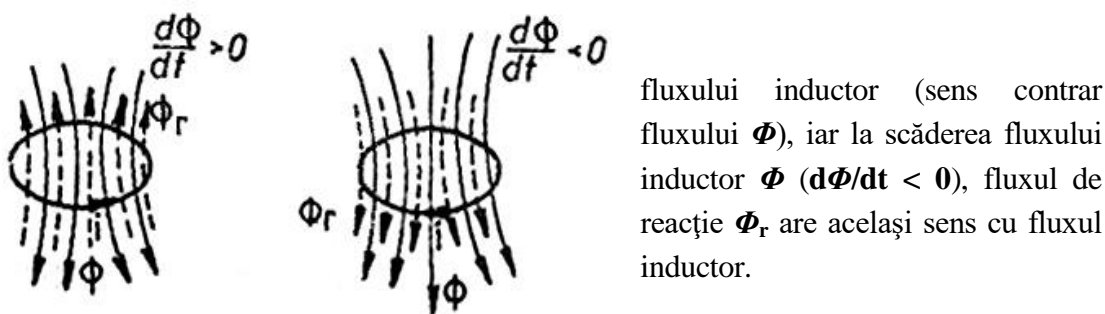


Fig.3.15. Explicativă la regula lui Lenz.

Pentru aplicarea legii inducției electromagnetice trebuie să se țină seama de următoarele reguli:

- curba închisă  $\Gamma$  este luată, în general, în lungul conductoarelor electrice, însă poate fi dusă și prin izolantși sau vid;
- dacă mediul este în mișcare, curba  $\Gamma$  este atașată corpurilor în mișcare;

- sensul de integrare pe curba  $\Gamma$  (sensul lui  $d\vec{l}$ ) și normala la suprafața  $S_\Gamma$  (sensul lui  $d\vec{S}$ ) sunt asociate după regula burghiului drept. Dacă s-ar utiliza regula burghiului stâng, ar dispărea semnul minus din legea inducției electromagnetice, dar apare în legea circuitului magnetic la derivata fluxului electric;

- dacă conturul  $\Gamma$  este luat în lungul conductorului unei bobine cu  $N$  spire practic suprapuse, fluxul magnetic care intervine în calculul t.e.m. induse este fluxul magnetic printr-o suprafață ce se sprijină pe întregul contur, adică fluxul prin toate spirele. Dacă se notează fluxul magnetic fascicular  $\Phi_f$  (fluxul printr-o singură spirală), în legea inducției intervine fluxul total  $\Phi = N \Phi_f$ :

$$u_{er} = - N \frac{d \Phi_f}{d t} . \quad (3.42)$$

- în regim staționar sau static, când fluxul magnetic nu variază în timp, t.e.m. indusă este nulă, deoarece derivata fluxului magnetic în raport cu timpul este zero, rezultând:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 ,$$

care arată că teorema potențialului electrostatic este o formă particulară a legii inducției electromagnetice. Dezvoltând membrul drept al relației (3.41) rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{S_\Gamma} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{div } \vec{B} + \text{rot} (\vec{B} \times \vec{v}) \right] d\vec{S} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} , \quad (3.43)$$

deoarece  $\text{div } \vec{B} = 0$ , din legea fluxului magnetic.

Relația (3.43) arată că t.e.m. apare ca urmare a variației inducției magnetice în timp (primul termen din membrul drept care este **t.e.m. de transformare**) și datorită unei mișcări (cel de al doilea termen din membrul drept care este **t.e.m. de mișcare**). Prima apare la transformatoarele electrice, iar a doua în mașinile electrice.

Aplicând formula lui Stokes primului membru al relației (3.43) rezultă forma locală a legii inducției electromagnetice:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) . \quad (3.44)$$

Pentru corpuri imobile ( $\vec{v} = 0$ ), rezultă cea de a doua ecuație a lui Maxwell:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.45)$$

Câmpurile electrice induse prin inducție electromagnetică (câmpurile solenoidale) având circulația diferită de zero ( $\text{rot } \vec{E} \neq 0$ ), sunt câmpuri rotaționale, cu linii de câmp închise. Legile circuitului magnetic și a inducției electromagnetice arată interdependența dintre câmpul magnetic și cel electric în regim nestaționar.

## Aplicații

### 1. Curenții turbionari.

Conform legii inducției electromagnetice, în spațiul în care fluxul magnetic este variabil, apare un câmp electric ale cărui linii de câmp sunt închise și se află în plane perpendiculare pe direcția fluxului magnetic. Dacă spațiul în care fluxul magnetic variază se află corpuri electroconductoare (oțel, cupru etc.), atunci câmpul electric variabil creează în aceste conductoare curenți induși numiți **curenți turbionari**.

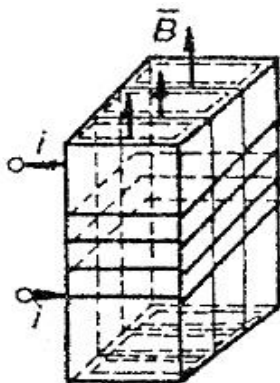


Fig.3.16. Circuit magnetic din tole electrotehnice.

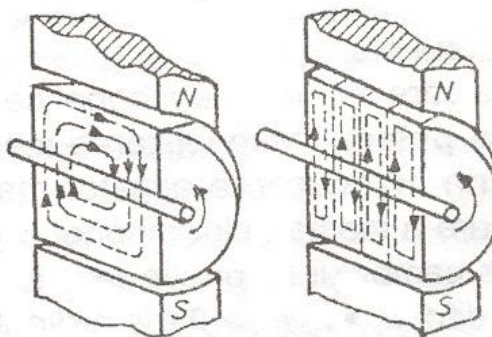


Fig.3.17. Circuit magnetic a) masiv; b) din tole electrotehnice.

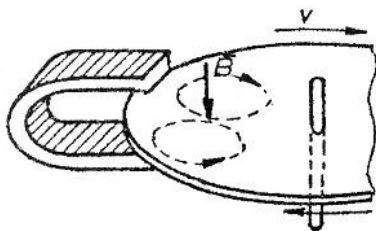


Fig.3.18. Contorul electric.

De exemplu, la trecerea curentului alternativ printr-o bobină cu miez de fier masiv sau din tole, în miez se vor induce t.e.m. ce vor da naștere unor curenți turbionari, care se închid în plane perpendiculare pe vectorul inducție magnetică (fig.3.16). La mașinile de curent continuu deși câmpul magnetic produs de stator este constant, în circuitul magnetic

rotoric se induc t.e.m. alternative de mișcare și ca urmare circuitul magnetic se realizează tot din tole (fig.3.17b).

Acești curenți provoacă pe de o parte încălzirea miezului prin efect Joule - Lenz, micșorând randamentul instalației electrice, iar pe de altă parte, potrivit regulei lui Lenz, exercită o acțiune demagnetizantă la creșterea fluxului magnetic. Pentru micșorarea pierderilor, miezurile se fabrică din tole izolate între ele, micșorându-se astfel secțiunea circuitului și valoarea curenților turbionari. Pentru o serie de dispozitive, curenții turbionari pot fi folosiți rațional pentru funcționarea lor. În figura 3.18 este reprezentat discul de aluminiu al unui contor de energie electrică, care se rotește între polii unui magnet permanent. În timpul funcționării contorului, la rotirea discului, în el apar curenți turbionari. Din interacțiunea acestor curenți cu câmpul magnetic al magnetului, apar forțe care contribuie la frânarea discului, creând astfel cuplul rezistent, proporțional cu viteza de rotire a discului. Ca urmare discul se va roti uniform cu o viteză determinată de puterea activă măsurată. Curenții turbionari mai sunt utilizați în practică și la încălzirea metalelor în vederea forjării sau a călirii lor superficiale.

## 2. Principiul de funcționare al generatorului de curent alternativ.

Se consideră o bobină plană dreptunghiulară cu  $N$  spire, ce se rotește în jurul unei axe de simetrie cu viteza  $n$  rot/sec, într-un câmp magnetic omogen, de inducție constantă, perpendicular pe axa de rotație (fig.3.19). Aplicând legea inducției electromagnetice și ținând seama că  $B = \text{const.}$ , apare numai o t.e.m. de mișcare:

$$u_{er} = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = N \oint_{\Gamma_{sp}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

Se induc t.e.m. numai în laturile **AB** și **CD**, deoarece pentru laturile **BC** și **DA**, produsul mixt (din relația de mai sus) dintre viteză, inducție și elementul  $dl$  este  $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$ , deoarece cei trei vectori sunt coplanari. Ca urmare t.e.m. indusă în spirală rezultă :

$$u_e = N \int_A^B v B \sin(\pi - \alpha) dl + N \int_C^D v B \sin \alpha dl = \omega N \Phi_m \sin \omega t, \quad (3.46)$$

unde:  $v = \omega a = 2\pi n a$ ,  $\Phi_m = B \cdot S = B \cdot 2al$  (fluxul maxim care străbate spira), iar  $\alpha$  este unghiul dintre o linie de câmp magnetic și normala la planul spirei care este variabil în timp și depinde de viteza unghiulară  $\omega$ .

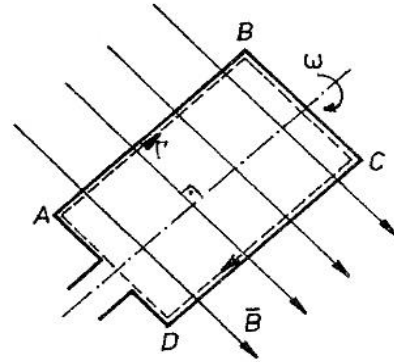


Fig.3.19. Principiul de funcționare al generatorului sincron.

### 3. Aplicație numerică

Într-un câmp magnetic uniform cu inducția magnetică  $B = 0,2 \text{ T}$  se găsesc două conductoare rectilii OA și OB formând între ele unghiul  $AOB = \pi/3$  (fig.3.20). Planul

determinat de cele două conductoare este perpendicular pe liniile câmpului magnetic. În contact cu cele două conductoare și perpendicular pe conductorul OA se găsește un al treilea conductor care se deplasează pe direcția OA cu viteza uniformă  $v = 10 \text{ m/s}$ . Conductoarele au rezistența specifică  $r = 0,8 \Omega/\text{m}$ .

Să se determine expresia t.e.m. indusă și intensitatea curentului din circuitul format de cele trei conductoare.

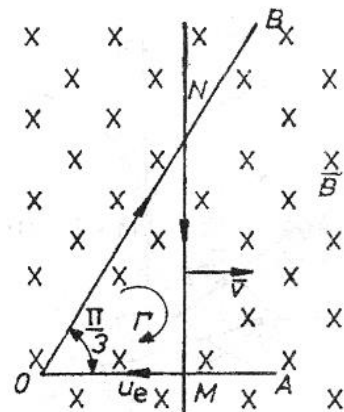


Fig.3.20. Explicativă la aplicație.

#### Rezolvare

T.e.m. indusă în circuitul format de cele trei conductoare este dată de legea inducției electromagnetice. Fluxul magnetic ce străbate circuitul este variabil în timp, deoarece suprafața circuitului este variabilă prin deplasarea conductorului MN cu viteza  $v$ .

Dacă se notează cu  $x$  segmentul variabil  $OM$  și se consideră la momentul  $t = 0$ ,  $OM = 0$ , rezultă  $x = vt$ , iar suprafața circuitului  $OMNO$  va fi la un moment dat  $t$ :

$$S = \frac{1}{2} OM \cdot MN = \frac{1}{2} OM \cdot OM \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} v^2 t^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Fluxul magnetic ce străbate circuitul este:

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} B v^2 t^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Prin derivarea fluxului magnetic în raport cu timpul, se obține t.e.m. indusă în circuit:

$$u_e = - \frac{d\Phi}{dt} = -B v^2 t \operatorname{tg} \alpha = -34,64 t \text{ [V]}.$$

Semnul minus din relația de mai sus apare din faptul că produsul vectorial dintre  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$  este un vector perpendicular pe planul format de  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$  și are sensul de la  $M$  la  $N$ , iar sensul de integrare a fost de la  $N$  la  $M$ .

Intensitatea curentului indus în circuit este:

$$i = \frac{u_e}{R} = \frac{u_e}{r(OM + MN + NO)} = \frac{-34,64 t}{0,8(vt + vt \operatorname{tg} \alpha + \frac{vt}{\cos \alpha})} = -0,92 \text{ [A]}.$$

Se observă că intensitatea curentului electric indus în circuit este constantă. Semnul minus din expresiile t.e.m. și a curentului, arată că sensul t.e.m. și a curentului indus prin conductorul  $MN$  este de la  $M$  la  $N$  și nu de la  $N$  la  $M$  cum s-a figurat pe figură. Asupra conductorului  $MN$  parcurs de curentul  $i$  și aflat în câmpul magnetic de inducție  $\vec{B}$ , va acționa o forță electromagnetică ( $\vec{F} = B i l$ ) având sensul contrar mișcării (vezi forța electromagnetică). Datorită acestei forțe, deplasarea conductorului care a produs apariția t.e.m., este frânată (se verifică regula lui Lenz d.p.v. mecanic). De asemenea, forța se opune măririi suprafeței triunghiului  $OMN$ , deci se opune creșterii fluxului magnetic (care a produs apariția t.e.m.)

### 3.4. CLASIFICAREA MATERIALELOR DIN PUNCT DE VEDERE

#### MAGNETIC

Din legea legăturii dintre inducția magnetică  $\overline{B}$ , intensitatea câmpului magnetic  $\overline{H}$  și magnetizația  $\overline{M}$  se știe că dacă nu este magnetizație permanentă, există relația:

$$\overline{B} = \mu \overline{H} = \mu_0 \mu_r \overline{H}.$$

În funcție de valorile permeabilității magnetice relative, materialele se clasifică în:

a) **materiale diamagnetice** la care momentul magnetic atomic sau molecular este nul (**materiale cu molecule nepolare**). Dacă se introduc aceste materiale într-un câmp magnetic exterior, apare un moment magnetic orbital suplimentar, la fiecare moleculă în parte, în sens contrar câmpului magnetic exterior, astfel încât câmpul magnetic din interiorul materialului este mai slab ca cel exterior și ca urmare  $\mu_r < 1$ ,  $\chi_m < 0$  (de ordinul a  $10^{-5}$ ). Din această categorie fac parte: hidrogenul, gazele inerte, carbonul, cupru, argintul, zincul, aurul etc;

b) **materiale paramagnetice** la care momentele magnetice orbitale și de spin nu sunt nule (**materiale cu molecule polare**). Magnetizarea macroscopică este însă nulă datorită agitației termice. Prin introducerea acestor materiale într-un câmp magnetic exterior, are loc o orientare a momentelor magnetice, astfel încât acestea să devină omoparalele cu direcția câmpului magnetic exterior. Ca urmare, câmpul magnetic interior este mai intens, deci  $\mu_r > 1$ ,  $\chi_m > 0$  (de ordinul a  $10^{-3}$ ). Din această categorie fac parte: aluminiu, platina, cromul, azotul etc.

Deoarece permeabilitățile relative ale acestor două clase de materiale sunt foarte apropiate de unitate, în calculele practice se iau pentru ele  $\mu_r \approx 1$  și  $\mu \approx \mu_0$ ;

c) **materiale feromagnetice**. Din această clasă fac parte fierul, nichelul, cobaltul și unele aliaje ale acestora, la care relația  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  nu mai reprezintă o dreaptă ca la materialele para - sau diamagnetice, permeabilitatea magnetică a lor fiind dependentă de intensitatea câmpului magnetic și de starea lor anterioară de magnetizare. La aceste materiale apare un efect cuantic numit **cuplaj de schimb**, care face ca între atomii vecini să apară un cuplaj magnetic rigid (momentele lor magnetice să devină paralele), chiar dacă agitația termică se opune acestui cuplaj.

Dacă temperatura crește peste o valoare limită, denumită **temperatură Curie**, cuplajul de schimb dispare brusc, rămânând doar efectul paramagnetic. Pentru fier, temperatura Curie este de 1043 K, iar pentru nichel 633 K.

Un corp feromagnetic introdus într-un câmp magnetic exterior, determină un câmp magnetic propriu în același sens și foarte intens în raport cu câmpul magnetic exterior, astfel încât câmpul magnetic interior rezultat este foarte puternic.

Pentru trasarea curbei  $B = f(H)$  (fig.3.21) se procedează astfel: se introduce materialul nemagnetizat într-un câmp magnetic variabil. La început la creșterea lui se a intensității câmpului magnetic (care inițial avea valoare zero), apare o creș-

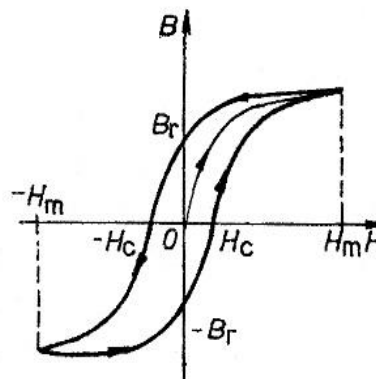


Fig.3.21. Ciclul de histerezis magnetic.

tere rapidă a inducției magnetice din material, după care creșterea este mai lentă și la un moment dat, inducția magnetică rămâne practic constantă. Se spune că **materialul s-a saturat**. Dacă se micșorează valoarea intensității câmpului magnetic, se constată că inducția magnetică scade lent și se ajunge ca la  $H = 0$  inducția magnetică să fie diferită de zero,  $B = B_r$ . Valoarea  $B_r$  reprezintă **inducția magnetică remanentă**. Dacă se schimbă sensul câmpului magnetic și se crește intensitatea acestui câmp, se constată că inducția magnetică va scădea brusc și va lua valoarea zero pentru o anumită valoare a intensității câmpului magnetic,  $-H_c$ , numită **intensitatea câmpului magnetic coercitiv**. Crescând în continuare valoarea intensității câmpului magnetic, se constată o creștere a inducției magnetice, dar având sensul schimbat. Când intensitatea câmpului magnetic ia valoarea  $-H_m$ , se constată că inducția magnetică rămâne practic constantă (materialul s-a saturat). Micșorând intensitatea câmpului magnetic până la anulare, schimbând apoi sensul lui și crescându-l până la valoarea  $H_m$ , se obține o curbă închisă numită **ciclu de histerezis**. În timpul descrierii ciclului de histerezis, materialul absoarbe o cantitate de energie de la câmpul electromagnetic (pentru a reorienta momentele magnetice), energie care se transformă în energie calorică. Această energie reprezintă pierderile prin histerezis, pierderi a căror valoare este proporțională cu aria delimitată de ciclul de histerezis.

Materialele feromagnetice se clasifică în două grupe: **materiale feromagnetice moi** și **materiale feromagnetice dure**.

- **Materiale feromagnetice moi**, sunt caracterizate printr-un ciclu de histerezis îngust, având câmpul coercitiv mic, permeabilitatea magnetică mare și pierderi prin histerezis reduse. Ele se utilizează pentru confecționarea circuitelor magnetice ale transformatoarelor, mașinilor și a aparatelor electrice. Din această grupă fac parte: tabla silicioasă (oțel cu 4% Si), permalloy, supermalloy, feritele de mangan-zinc etc.



- **Materiale feromagnetice dure** sunt caracterizate printr-un ciclu de histerezis lat, având câmpul coercitiv mare, pierderi mari prin histerezis. Ele se utilizează pentru confecționarea magneților artificiali. Din această grupă fac parte: oțelul cu 1% C, oțelul crom, alnico, feritele de bariu etc.

În tabelul 3.1 se dau caracteristicile ( permeabilitatea relativă  $\mu_r$ , inducția magnetică remanentă  $B_r$  și câmpul magnetic coercitiv  $H_c$  ale unor materiale feromagnetice uzuale.

**Tabelul 3.1.**

Materialul	$\mu_r$	$B_r$ [T]	$H_c$ [A/m]	Felul materialului
Fier pur	25.000	1,4	4	Materiale feromagnetice moi
Tole din oțel silicios	500	0,8	40	
Permalloy	10.000	0,6	4	
Ferită din mangan-zinc	2.000	0,15	10	
Oțel (1% C)	40	0,7	5.000	Materiale feromagnetice dure
Oțel crom, Oțel wolfram	30	1,1	5.000	
Alnico I	4	0,73	34.000	
Aliaj platină-cobald	1	0,45	26.000	
Ferită de bariu	1	0,2...0,4	$(1...2,5)10^5$	

### 3.5. CIRCUITE MAGNETICE

Liniile de câmp magnetic sunt curbe închise care conform teoremelor refracției liniilor de câmp magnetic, ele sunt practic tangențiale pe fața interioară a suprafețelor corpurilor feromagnetice și perpendiculare pe aceste suprafețe la ieșirea, respectiv intrarea în ele. Deoarece componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic se conservă la suprafața corpurilor feromagnetice, componenta tangențială a inducției magnetice din corpul feromagnetic  $B_t = \mu H_t$  este mult mai mare ca în exterior ( $\mu \gg \mu_0$ ) și se poate considera că liniile de câmp magnetic sunt conduse prin corpurile feromagnetice la fel cum este condus curentul electric prin conductoare (vezi teoremele refracției liniilor de câmp magnetic).

Se numește **circuit magnetic** un sistem de corpuri feromagnetice despărțite eventual prin aer (întrefieruri), care permite închiderea liniilor de câmp magnetic (fig.3.22).

Majoritatea liniilor de câmp se închid prin fier și întrefier, adică prin porțiunile utile ale circuitului magnetic și creează **fluxul magnetic util**  $\Phi_u$ .

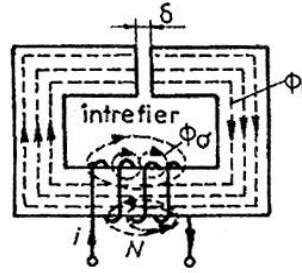


Fig.3.22. Circuit magnetic cu întrefier.

Liniile de câmp care se închid parțial prin aer și parțial prin circuitul magnetic, se numesc **linii de dispersie (de scăpări)**, iar fluxul magnetic creat de ele se numește **flux magnetic de dispersie (de scăpări)**  $\Phi_\sigma$ .

Calculul circuitelor magnetice constă în determinarea solenației necesare pentru a stabili un anumit flux util sau a determina fluxul util când se cunoaște solenația. În general se consideră fluxul magnetic uniform repartizat în secțiunea circuitului magnetic și dispersia nulă.

### 3.5.1. Reluctanța magnetică. Permeanța magnetică

Se consideră un tub de flux magnetic, suficient de subțire, pentru a putea considera

fluxul magnetic constant în secțiunea tubului.

Tensiunea magnetică între două puncte **A** și **B**, în lungul curbei **C** (axa tubului), va fi (fig.3.23) dacă se va considera curba C ca o linie de câmp și deci:

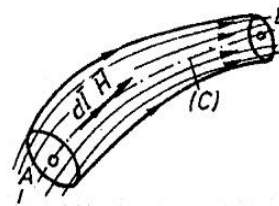


Fig.3.23. Tub de flux magnetic.

$$\overline{H} d\vec{l} = H dl \cos 0 = H dl.$$

Ca urmare tensiunea magnetică între punctele A și B va fi:

$$u_{mAB} = \int_{A(C)}^B \overline{H} d\vec{l} = \int_{A(C)}^B H dl = \int_{A(C)}^B \frac{BS}{\mu S} dl = \int_{A(C)}^B \frac{\Phi_f}{\mu S} dl.$$

Deoarece fluxul magnetic se conservă printr-un tub de flux, tensiunea magnetică dintre punctele **A** și **B** va fi:

$$u_{mAB} = \Phi_f \int_{A(C)}^B \frac{dl}{\mu S}. \quad (3.47)$$

Reluctanța magnetică  $R_m$  se definește ca mărimea pozitivă a raportului dintre tensiunea magnetică și fluxul magnetic fascicular:

$$R_{mAB} = \frac{u_{mAB}}{\Phi_f} = \int_{A(C)}^B \frac{dl}{\mu S} . \quad (3.48)$$

Reluctanța magnetică depinde de natura materialului și de caracteristicile circuitului magnetic, fiind o mărime de material analogă rezistenței electrice. Pentru o porțiune omogenă de circuit ( $\mu=\text{const.}$ ,  $S=\text{const.}$ ) reluctanța magnetică va fi:

$$R_m = \frac{l}{\mu S} , \quad (3.49)$$

unde  $l$  reprezintă lungimea medie a unei linii de câmp magnetic.

Permeanța magnetică  $\Lambda_m$  este inversa reluctanței magnetice și este analogă conductanței electrice:

$$\Lambda_m = \frac{I}{R_m} = \frac{\Phi_f}{u_m} . \quad (3.50)$$

Unitatea de măsură a reluctanței magnetice este **Amper/Weber** [A/Wb], iar a permeanței magnetice - **Weber/Amper** [Wb/A].

Relația (3.47) se poate scrie și sub forma:

$$u_m = \Phi_f R_m , \quad (3.51)$$

care reprezintă "**legea lui Ohm**" pentru circuitele magnetice, fiind analogă formal legii lui Ohm pentru circuitele electrice de curent continuu.

### 3.5.2. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

#### 3.5.2.1. Prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice.

Se consideră un nod al unui circuit magnetic. Dacă se aplică legea fluxului magnetic unei suprafețe închise  $\Sigma$  care înconjoară acest nod (fig.3.24), rezultă neglijând fluxurile de dispersie:

$$\int_{\Sigma} \bar{B} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{B} d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{B} d\bar{S} + \int_{S_3} \bar{B} d\bar{S} + \int_{S_4} \bar{B} d\bar{S} + \int_{S_5} \bar{B} d\bar{S} = 0 ,$$

$$\therefore \rightarrow \Phi_{f1} - \Phi_{f2} - \Phi_{f3} - \Phi_{f4} - \Phi_{f5} = 0 .$$

Generalizând relația de mai sus pentru un nod oarecare  $N$ , rezultă :

$$\sum_{k \in N} \Phi_{fk} = 0 . \quad (3.52)$$

**Suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare care trec prin laturile unui circuit magnetic ce converg într-un nod al acestuia este nulă.**

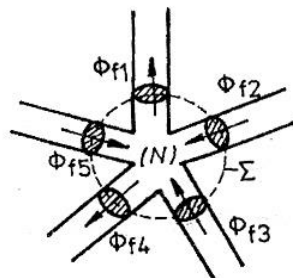


Fig.3.24. Explicativă la demonstrarea primei teoreme a lui Kirchhoff.

### 3.5.2.2. Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice.

Se consideră un ochi de circuit magnetic și un sens arbitrar de referință corespunzător sensului de integrare a lui  $\bar{H}$  (fig.3.25). Se aplică legea circuitului magnetic curbei  $\Gamma$  (linia mediană a circuitului magnetic) pentru regim staționar:

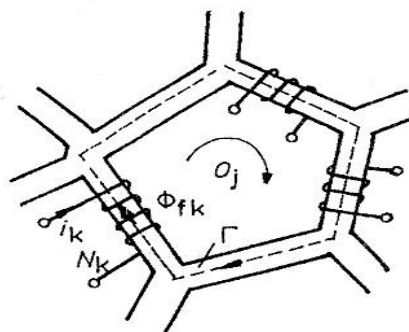


Fig.3.25. Explicativă la demonstrarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff.

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \theta_{S_{\Gamma}} , \quad \dots \rightarrow \oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \sum_{k \in O_j} u_{mk} = \sum_{k \in O_j} R_{mk} \Phi_{fk} ,$$

sau:

$$\sum_{k \in O_j} \theta_k = \sum_{k \in O_j} R_{mk} \Phi_{fk} . \quad (3.53)$$

**Suma algebrică a solenațiilor care înlanțuie laturile unui ochi de circuit magnetic este egală cu suma algebrică a produselor reluctanțelor laturilor cu fluxurile magnetice fasciculare care trec prin ele.**

Solenațiile și fluxurile magnetice care au același sens cu sensul de integrare prin latură se iau cu semnul plus, celălalte cu semnul minus. Sensul solenației este sensul în care înaintează burghiul pus pe axa bobinei când este rotit în sensul curentului prin bobină.

Din analiza teoremelor lui Kirchhoff pentru rețele electrice și pentru rețele magnetice, rezultă posibilitatea rezolvării circuitelor magnetice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff. Pentru simplificare, se poate figura schema electrică echivalentă a schemei magnetice, în care, solenațiile corespunzătoare sunt înlocuite cu surse de t.e.m., fluxurile fasciculare din laturi – prin curenți electrici, iar reluctanțele magnetice, prin rezistențe ale laturilor (vezi aplicația 2 de la paragraful 3.5.3.2).

### Aplicație

Se dă circuitul magnetic liniar din figura 3.26a, având  $\mu_r = 400$ ,  $N_1 = 300$  spire,  $N_2 = 1.000$  spire,  $I_1 = 5$  A,  $I_2 = 3$  A și dimensiunile geometrice:  $a = 10$  cm,  $b = 14$  cm,  $c = d = f = 4$  cm,  $e = 8$  cm și  $\delta = 3$  mm. Să se determine fluxurile magnetice fasciculare din cele trei laturi ale circuitului magnetic și inducția magnetică din întrefier.

### Rezolvare

Schema electrică echivalentă a circuitului magnetic este redată în figura 3.26b, în

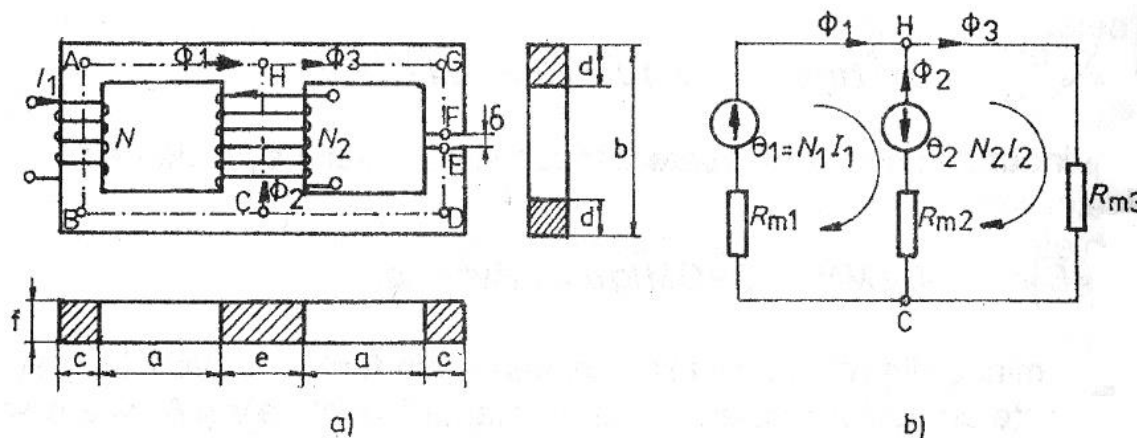


Fig.3.26. a) Circuitul magnetic al aplicației. b) schema electrică echivalentă.

care, sensurile fluxurilor magnetice fasciculare s-au ales arbitrar. Reluctanțele magnetice ale celor trei laturi ale circuitului magnetic din figură vor fi:

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu S_1} = \frac{e + 2a + c + b - d}{\mu_0 \mu_r f c} = 5,22 \cdot 10^5 \frac{A}{Wb},$$

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu S_2} = \frac{b - d}{\mu_0 \mu_r f e} = 6,22 \cdot 10^4 \frac{A}{Wb},$$

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu S_3} + \frac{\delta}{\mu_0 S_3} = \frac{b - d - \delta}{\mu_0 \mu_r f d} + \frac{\delta}{\mu_0 f d} = 2 \cdot 10^6 \frac{A}{Wb}.$$

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice nodului H, iar cea de a doua teoremă ochiurilor 1 și 2, rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 &= 0, & \Phi_1 + \Phi_2 &= \Phi_3, \\ \theta_1 + \theta_2 &= R_{m1} \Phi_1 - R_{m2} \Phi_2, & 1500 + 3000 &= 5,22 \cdot 10^5 \Phi_1 - 6,22 \cdot 10^4 \Phi_2, \\ -\theta_2 &= R_{m2} \Phi_2 + R_{m3} \Phi_3. & -3000 &= 6,22 \cdot 10^4 \Phi_2 + 2 \cdot 10^6 \Phi_3. \end{aligned}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații, se obțin fluxurile magnetice fasciculare:

$$\Phi_1 = 7,57 \cdot 10^{-3} Wb, \quad \Phi_2 = -8,8 \cdot 10^{-3} Wb, \quad \Phi_3 = -1,23 \cdot 10^{-3} Wb.$$

Fluxurile care au valoarea pozitivă, au sensul real cel figurat în figură, iar cele care au semnul minus, au sensul real invers față de sensul figurat (la fel ca și curenții din circuitele de curent continuu)

Inducția magnetică din întrefier va fi:

$$B_\delta = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{\Phi_3}{c f} = 0,77 T.$$

### 3.5.3. Gruparea reluctanțelor magnetice

**Reluctanța magnetică echivalentă a unei porțiuni de circuit magnetic cu două borne de acces și fără solenații pe laturi, este egală cu raportul dintre tensiunea magnetică aplicată**

între cele două borne și fluxul magnetic fascicular care intră printr-o bornă și iese prin cealaltă:

$$R_{me} = \frac{u_m}{\Phi_f} . \quad (3.54)$$

**3.5.3.1. Gruparea serie a reluctanțelor magnetice.** Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice, circuitului magnetic din fig.3.27, rezultă:

$$u_m = \sum_{k=1}^n u_{mk} = \sum_{k=1}^n R_{mk} \Phi_{fk} = \Phi_f \sum_{k=1}^n R_{mk} = \Phi_f \cdot R_{me} ,$$

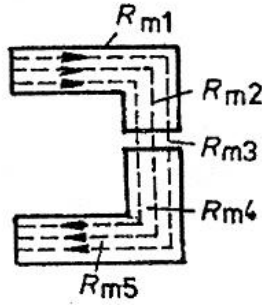


Fig.3.27. Explicativă la legarea în serie a reluctanțelor.

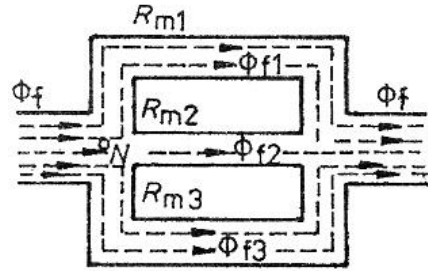


Fig.3.28. Explicativă la legarea în paralel a reluctanțelor magnetice.

deoarece se neglijează fluxurile magnetice de dispersie și deci fluxul magnetic este constant în fiecare latură. Din relația de mai sus rezultă că reluctanța magnetică echivalentă a mai multor laturi, conectate în serie, este egală cu suma reluctanțelor laturilor:

$$R_{mes} = \sum_{k=1}^n R_{mk} . \quad (3.55)$$

Relația pentru reluctanța echivalentă la gruparea serie, este asemănătoare cu ce a rezistenței electrice echivalente la gruparea serie.

**3.5.3.2. Gruparea în paralel a reluctanțelor magnetice.** Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului N din figura 3.28, se obține:

$$\Phi_f = \sum_{k \in N} \Phi_{fk} = \sum_{k \in N} \frac{u_m}{R_{mk}} = u_m \sum_{k \in N} \frac{1}{R_{mk}} = \frac{u_m}{R_{me p}} .$$

Din relația de mai sus rezultă:

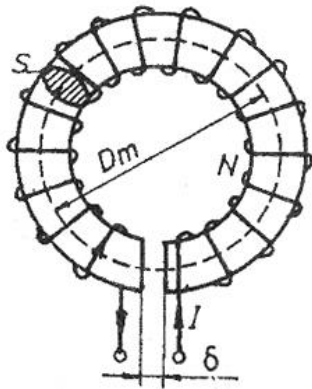
$$\frac{I}{R_{mep}} = \sum_{k \in N} \frac{1}{R_{mk}}, \quad \Lambda_{mep} = \sum_{k \in N} \Lambda_{mk} . \quad (3.56)$$

Din relațiile (3.56) rezultă că inversa reluctanței magnetice echivalente a  $n$  laturi fără bobine, conectate în paralel, este egală cu suma inverselor reluctanțelor laturilor sau, permeanța echivalentă a  $n$  laturi conectate în paralel este egală cu suma permeanțelor laturilor (la fel ca la gruparea paralel a rezistoarelor).

## Aplicații

### 1. Calculul unui circuit magnetic liniar neramificat.

Se consideră un tor cu diametrul mediu  $D_m$ , executat din material feromagnetic cu permeabilitatea magnetică relativă  $\mu_r$ , bobinat uniform cu  $N$  spire. Curentul care străbate bobinajul are intensitatea  $I$ . Torul are secțiunea  $S$  și prezintă un întrefier de lungime  $\delta$ . Se cer: reluctanța magnetică a circuitului magnetic, fluxul magnetic fascicular și cel total, inducția și intensitatea câmpului magnetic din întrefier și din circuitul magnetic (fig.3.29).



Reluctanța magnetică echivalentă este egală cu suma dintre reluctanța circuitului magnetic și a întrefierului:

$$R_{me} = R_{mFe} + R_{m\delta} = \frac{\pi D_m - \delta}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{\pi D_m + \delta(\mu_r - 1)}{\mu_0 \mu_r S} .$$

Fluxul magnetic fascicular ce străbate secțiunea circuitului și fluxul magnetic total ce străbate bobina vor fi:

$$\Phi_f = \frac{U_{mm}}{R_{me}} = \frac{N I}{R_{me}} = \frac{\mu_0 \mu_r S N I}{\pi D_m + \delta(\mu_r - 1)}, \quad \Phi_t = N \Phi_f .$$

Fig.3.29. Circuit magnetic sub formă de tor cu un întrefier.

Inducția magnetică în miez și în întrefier sunt egale și au valoarea:

$$B_{Fe} = B_{\delta} = \frac{\Phi_f}{S} = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{\pi D_m + \delta(\mu_r - 1)} . [T]$$



Intensitatea câmpului magnetic în fier și în întrefier au expresiile:

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0}, \quad H_{Fe} = \frac{B_{Fe}}{\mu_0 \mu_r} [A/m]$$

## 2. Calculul unui circuit magnetic liniar ramificat.

Se consideră circuitul magnetic din figura 3.30a. Se dau dimensiunile geometrice ale circuitului magnetic:  $l$ ,  $h$  și  $S$ , valorile intensităților curenților din cele trei înfășurări:  $I_1=I_3$ ,  $I_2 = 2 I_1$ , numărul de spire  $N_1 = N_2 = N_3$  și permeabilitatea magnetică relativă a circuitului magnetic  $\mu_r$ . Se cer fluxurile fasciculare din cele trei laturi.

Se desenează schema electrică echivalentă schemei magnetice (fig.3.30b).

Pentru fluxurile fasciculare  $\Phi_{f1}$ ,  $\Phi_{f2}$  și  $\Phi_{f3}$  se aleg sensuri arbitrare ca în figură. Conform teoremelor lui Kirchhoff pentru circuite magnetice, rezultă:

$$R_{m1} \Phi_{f1} + R_{m2} \Phi_{f2} = \theta_1 + \theta_2,$$

$$R_{m2} \Phi_{f2} + R_{m3} \Phi_{f3} = \theta_2 + \theta_3,$$

$$\Phi_{f1} + \Phi_{f3} = \Phi_{f2}.$$

Înlocuind în relațiile de mai sus valorile reluctanțelor magnetice exprimate în funcție de dimensiunile circuitului magnetic, se obține sistemul de ecuații:

$$\frac{2l+h}{\mu_0 \mu_r S} \Phi_{f1} + \frac{h}{\mu_0 \mu_r S} \Phi_{f2} = N_1 I_1 + N_2 I_2,$$

$$\frac{h}{\mu_0 \mu_r S} \Phi_{f2} + \frac{2l+h}{\mu_0 \mu_r S} \Phi_{f3} = N_2 I_2 + N_3 I_3,$$

$$\Phi_{f1} + \Phi_{f3} = \Phi_{f2}.$$

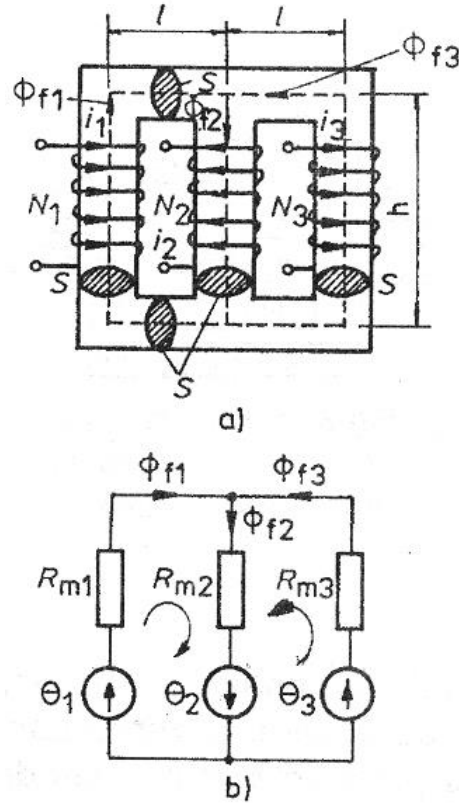


Fig.3.30. a) Circuit magnetic ramificat.

b) Schema electrică echivalentă.

Rezolvând sistemul de ecuații de mai sus, se obțin valorile fluxurilor magnetice fasciculare din laturi:

$$\Phi_{f1} = \Phi_{f3} = \frac{\Phi_{f2}}{2} = \frac{3 N_1 I_1 S \mu_0 \mu_r}{2 l + 3 h} \text{Wb} .$$

## TEME DE STUDIU

Test 1.

Enunțați legea inducției electromagnetice, forma integrală și cea locală. Unități de măsură pentru mărimile ce intervin.

Test 2.

Enunțați regula lui Lenz. Cum se determină sensul tensiunii electromotoare induse?

Test 3.

Cum se obține t.e.m. indusă într-o spirală a generatorului de c.a.?

Test 4.

Cum se clasifică materialele din punct de vedere magnetic ?

Test 5.

Ce sunt materialele diamagnetice ?.

Test 6.

Ce sunt materialele paramagnetice ?.

Test 7.

Ce este ciclul dinamic de histerezis magnetic. Care sunt punctele importante. Ce semnifică aria ciclului ?.

Test 8.

Ce sunt reluctanța magnetică și permeanța magnetică. Unități de măsură.

Test 9.

Care sunt teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice. Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 10.

Care sunt expresiile pentru reluctanțele echivalente la legarea serie, respective paralel a reluctanțelor magnetice.

Test 11.

Cum se determină semnul solenației unei bobine la aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff ?.

Test 12.

Cum se poate obține schema electrică echivalentă a unui circuit magnetic ?.

Test 13.

Care este prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice ?

Test 14.

Care este cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice ?