Curs 8 Analiză Matematică

Radu MICULESCU

octomber 2023

Şir Cauchy

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, de elemente din* $\mathbb{R}$*, se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$*,* $m, n \geq n_\varepsilon$*.*

Observaţie. *În contrast cu definiţia şirului convergent care cuprinde elemente "exterioare" şirului considerat (anume limita acestuia), definiţia şirului Cauchy are avantajul de a implica numai elementele şirului dat. Prin urmare, dezavantajul "ghicirii" valorii limitei unui şir pentru testarea convergenţei acestuia cu ajutorul definiţiei şirului convergent nu este prezent în definiţia şirului Cauchy.*

Orice șir convergent este șir Cauchy

Orice șir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, de elemente din* $\mathbb{R}$*, este șir Cauchy.*

Demonstrație

Deoarece șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, există $l \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.
Prin urmare, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - l| + |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy. $\square$

Criteriul lui Cauchy

Pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, de elemente din* $\mathbb{R}$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*
i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent;*
ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este Cauchy.*

Observație. *Importanța criteriului lui Cauchy rezidă în posibilitatea testării convergenței șirului fără cunoașterea prealabilă a limitei sale. Acest criteriu se va utiliza foarte frecvent în cele ce urmează.*

Exemplu

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *unde*

$$x_n = \frac{arctg 1}{2} + \frac{arctg 2}{2^2} + \ldots + \frac{arctg n}{2^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, *este șir Cauchy.*

Să remarcăm că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, avem

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{arctg(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{arctg(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{arctg m}{2^m} \right| <$$

$$< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{\pi}{2^{n+1}}. \quad (1)$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.
Prin urmare, având în vedere (1), pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left| x_m - x_n \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$, i.e. șirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy.

Exemplu

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, unde*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*, nu este șir Cauchy.*

Să presupunem, prin reducere la absurd, că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

de unde

$$\frac{m-n}{m} = \underbrace{\frac{1}{m} + ... + \frac{1}{m}}_{m-n \text{ ori}} \leq \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{m} < \varepsilon$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > n_\varepsilon$.

În particular, pentru

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ și } m = 2n,$$

obținem contradicția

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3}.$$

Noțiunea de serie de elemente din $\mathbb{R}$

Conceptul de serie, care încearcă să dea sens "sumelor infinite", s-a dovedit util în definirea unor constante importante (ca, de exemplu, e și π), precum și în definirea riguroasă a funcțiilor elementare.

Definiție. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}$, definim seria generată de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ca fiind șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Dacă șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent,

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

se numește suma seriei.

x_n-urile poartă numele de termenii seriei, iar S_n-urile de sume parțiale.

Prin convenție, simbolurile

$$\sum x_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n\geq 1} x_n$$

vor desemna atât seria generată de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cât și suma sa, în cazul în care seria este convergentă.

Observație. *Deși, în general, termenii unei serii sunt indexați cu ajutorul mulțimii numerelor naturale, există situații în care este de preferat să începem indexarea cu* $n = 0$ *sau cu* $n = k$, *unde* $k \in \mathbb{N}$.

Exemplu

Să se afle suma seriei

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Deoarece

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

pentru orice $k\in\mathbb{N}$, obținem că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.
Drept urmare seria considerată este convergentă și suma sa este $\frac{1}{2}$.

O condiție necesară, însă nu și suficientă, pentru convergența unei serii

Dacă seria $\sum x_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}$, *este convergentă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Reciproca nu este adevărată.

Demonstrație

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

arată că reciproca nu este validă. $\square$

Convergența seriilor cu termeni pozitivi echivalează cu mărginirea șirului sumelor parțiale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de elemente din* $[0,\infty)$.
Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\sum x_n$ *este convergentă;*

ii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit.*

În acest caz

$$\sum x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Criteriul lui Cauchy pentru serii

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de elemente din* $\mathbb{R}$.
Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\sum x_n$ *este convergentă;*

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$\left| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m \right| < \varepsilon.$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N},\ m > n \geq n_\varepsilon$.

Exemple standard de serii (seria geometrică și seria armonică)

1. *Pentru* $a \in \mathbb{R}$, *seria*

$$\sum a^n,$$

numită seria geometrică, este convergentă dacă și numai dacă $|a| < 1$.

2. *Pentru* $a \in \mathbb{R}$, *seria*

$$\sum \frac{1}{n^a},$$

numită seria armonică generalizată, este convergentă dacă și numai dacă $a > 1$.

Remarcă. *Denumirea de serie armonică generalizată are drept temei faptul că, în cazul* $a = 1$, *orice termen al seriei, începând cu cel de al doilea, este media armonică a termenilor vecini. Pentru* $a > 1$, *suma seriei* $\sum \frac{1}{n^a}$ *se notează cu* $\zeta(a)$. *Funcția astfel construită, numită funcția* ζ *a lui Riemann, este un ingredient principal în studiul distribuției asimptotice a numerelor prime și în celebra conjectură a lui Riemann rămasă fără răspuns până în acest moment.*

Propoziția privind comportamentul seriilor la operațiile algebrice

α) *Dacă seriile* $\sum x_n$ *și* $\sum y_n$, *cu elemente din* $\mathbb{R}$, *sunt convergente, atunci seriile* $\sum(x_n + y_n)$ *și* $\sum(x_n - y_n)$ *sunt convergente și sunt valabile relațiile următoare:*

$$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$$

și

$$\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n.$$

β) *Dacă seria* $\sum x_n$, *cu elemente din* $\mathbb{R}$, *este convergentă și* $c \in \mathbb{R}$, *atunci seria* $\sum cx_n$ *este convergentă și*

$$\sum cx_n = c \sum x_n.$$

Serii absolut convergente

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de elemente din* $\mathbb{R}$, *spunem că seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă dacă seria* $\sum |x_n|$ *este convergentă.*

Observație. *Pentru seriile care au drept termeni numere reale pozitive nu există distincție între noțiunile de convergență și convergență absolută.*

Teorema privind convergența seriilor absolut convergente

Dacă seria $\sum x_n$, *cu elemente din* $\mathbb{R}$, *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Demonstrație

Deoarece seria $\sum x_n$ este absolut convergentă, conform Criteriului lui Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left| x_{n+1} \right| + \left| x_{n+2} \right| + ... + \left| x_m \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$.

Cum

$$\left| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m \right| \leq \left| x_{n+1} \right| + \left| x_{n+2} \right| + ... + \left| x_m \right|,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$, de unde, conform Criteriului lui Cauchy concluzionăm că seria $\sum x_n$ este convergentă. $\square$

Produsul a două serii

Următoarea definiție este motivată de modul în care se înmulțesc două polinoame și este utilă în demonstrarea proprietăților uzuale ale funcțiilor elementare.

Definiție. *Pentru seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, *cu elemente din* $\mathbb{R}$, *se definește produsul Cauchy al lor ca fiind seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, *unde*

$$c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observație extrem de importantă

Produsul Cauchy a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă.

Spre exemplu, produsul Cauchy al seriei convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ cu ea însăși nu este o serie convergentă.

Într-adevăr, termenul general c_n al produsului seriei menționate cu ea însăși este dat de

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Cum

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2},$$

pentru orice $k \in \{0, 1, ..., n\}$, deducem că

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Această ultimă inegalitate arată că afirmația $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ este falsă, deci seria produs $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă.

Teorema lui Mertens

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *două serii, de elemente din* $\mathbb{R}$, *satisfăcând următoarele două proprietăți:*

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolut către* A;

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge către* B.

Atunci produsul Cauchy al celor două serii este o serie convergentă, cu suma AB.

Criteriile de comparație

Cele două criterii de comparație prezentate mai jos, aplicabile seriilor cu termeni pozitivi, sunt utile atunci când dispunem de serii standard a căror natură este cunoscută (de obicei acestea sunt seria geometrică și seria armonică), de inegalități și limite adecvate.

Criteriul de comparație cu inegalități

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *și* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două șiruri de elemente din* $[0,\infty)$ *astfel încât:*

i) există $n_0 \in \mathbb{N}$ *cu proprietatea că*

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$;

ii) $\sum y_n$ *este convergentă.*

Atunci $\sum x_n$ *este convergentă.*

Criteriul de comparație la limită

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *și* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două șiruri de elemente din* $(0,\infty)$.

α) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\in(0,\infty)$, *atunci seriile* $\sum x_n$ *și* $\sum y_n$ *au aceeași natură.*

β) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$ *și seria* $\sum y_n$ *este convergentă, atunci și seria* $\sum x_n$ *este convergentă.*

γ) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$ *și seria* $\sum y_n$ *este divergentă, atunci și seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Exemplu

Să se stabilească natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{a^n + n}$, unde $a > 0$.

Dacă $a > 1$, avem

$$\frac{1}{a^n + n} < (\frac{1}{a})^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} (\dfrac{1}{a})^n$ fiind convergentă, deducem că seria inițială este convergentă.

Dacă $a = 1$ obținem seria $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n}$ care este divergentă.

Dacă $a < 1$, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^n + n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

găsim că seria considerată este divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de elemente din* $[0,\infty)$ *astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\overset{not}{=}r,$$

atunci:

a) seria $\sum x_n$ *este convergentă pentru* $r\in[0,1)$;

b) seria $\sum x_n$ *este divergentă pentru* $r\in(1,\infty)$.

c) nu putem preciza natura seriei $\sum x_n$ *pentru* $r=1$.

Exemplu

Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \sigma(n) \cdot x^n$, unde $x > 0$, iar $\sigma(n)$ reprezintă numărul divizorilor lui n.

Deoarece

$$x \leq \sqrt[n]{\sigma(n) \cdot x^n} \leq x \cdot \sqrt[n]{n}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma(n) \cdot x^n} = x.$$

Așadar, dacă $x < 1$, seria este convergentă, iar dacă $x > 1$, seria este divergentă.
Dacă $x = 1$ seria este divergentă, căci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty.$$

Criteriul raportului (al lui D'Alembert)

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de elemente din* $(0,\infty)$ *astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\overset{not}{=} r,$$

atunci:

a) seria $\sum x_n$ *este convergentă pentru* $r\in[0,1)$;

b) seria $\sum x_n$ *este divergentă pentru* $r\in(1,\infty)$.

c) nu putem preciza natura seriei $\sum x_n$ *pentru* $r=1$.

Exemplu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!}.$$

Cu notația

$$x_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!},$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 3,$$

Drept urmare, seria dată divergentă.

Criteriul lui Raabe-Duhamel

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de elemente din* $(0,\infty)$ *astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) \overset{not}{=} r,$$

atunci:

a) seria $\sum x_n$ *este convergentă pentru* $r\in(1,\infty)$;

b) seria $\sum x_n$ *este divergentă pentru* $r\in(-\infty,1)$;

c) nu putem preciza natura seriei $\sum x_n$ *pentru* $r=1$.

Exemplu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)}\right)^2.$$

Notând cu x_n termenul general al seriei, un calcul simplu arată că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\frac{4}{3}>1,$$

deci, conform criteriului lui Raabe-Duhamel, seria este convergentă.

Criteriul lui Dirichlet

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *și* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două șiruri de elemente din* $\mathbb{R}$ *satisfăcând următoarele proprietăți:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir descrescător de numere reale pozitive care converge către* 0;

iii) $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este mărginit, unde* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este șirul sumelor parțiale ale seriei* $\sum y_n$.

Atunci seria

$$\sum x_n y_n$$

este convergentă.

Exemplu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}},$$

unde $x \in \mathbb{R}$ și $\lambda \in (0, \infty)$.

Dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = 2k\pi$, atunci seria dată devine

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\lambda}}$$

care este convergentă pentru $\lambda > 1$ și divergentă pentru $\lambda \leq 1$.
Dacă $x \neq 2k\pi$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$\frac{\cos nx}{n^{\lambda}} = x_n y_n,$$

unde

$$x_n = \frac{1}{n^\lambda}$$

și

$$y_n = \cos nx.$$

Evident

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.
De asemenea

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_n\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Conform criteriului lui Dirichlet, în acest caz, seria considerată este convergentă.

Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de elemente din* $[0,\infty)$ *satisfăcând următoarele două proprietăți:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător;*

ii)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Atunci seria alternată $\sum(-1)^n x_n$ *este convergentă.*

Exemplu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

Avem

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n+n)) =$$

$$= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Folosind Criteriul lui Leibniz, deducem că seria considerată este convergentă.

Criteriul lui Abel

Fie $\sum y_n$ *o serie de elemente din* $\mathbb{R}$ *și* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de elemente din* $\mathbb{R}$ *satisfăcând următoarele proprietăți:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton și convergent;*

ii) $\sum y_n$ *este convergentă.*

Atunci seria $\sum x_n y_n$ *este convergentă.*

Exemplu

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}.$$

Se observă că avem

$$\frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n} = x_n y_n,$$

unde

$$x_n = \cos \frac{1}{n} \text{ și } y_n = \frac{\cos n}{n}.$$

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este convergentă, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton și mărginit. Așadar, în conformitate cu Criteriul lui Abel, seria considerată este convergentă.

Unele funcții elementare ca sume de serii

Noțiunile anterioare ne permit să (re)definim într-o manieră extrem de riguroasă funcțiile elementare.

1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă și suma sa se notează cu e^x.
Așadar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2. Pentru orice $x, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| < 1$, seria $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ este absolut convergentă și suma sa se notează cu $(1+x)^{\alpha}$.
Așadar

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^{\alpha}.$$

3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ este absolut convergentă și suma sa se notează cu $\sin x$.
Așadar
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$$

4. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ este absolut convergentă și suma sa se notează cu $\cos x$.
Așadar
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Observație. *Utilizând Teorema lui Mertens se pot stabili proprietățile uzuale ale funcțiilor exponențială,* $\sin$ și $\cos$.