CURSUL 7

2.7. CIRCUITE LINIARE DE CURENT CONTINUU

2.7.1. Definiţii

Circuitul electric se defineşte ca un ansamblu de elemente capabile să conducă curentul electric. În curent continuu (c.c.), elementele de circuit sunt sursele de t.e.m.și sursele de curent (elementele active) şi rezistoarele (elementele pasive).

Rezistenţa electrică a rezistorului, t.e.m. şi rezistenţa interioară a sursei de t.e.m., intensitatea curentul debitat de sursa de curent și conductanța sa, se numesc parametrii elementelor respective și au în general valori constante.

După proprietăţile de material ale elementelor circuitului electric, circuitele se împart în **circuite electrice liniare** şi **neliniare**. Circuitul electric liniar are parametrii independenţi de valorile curenţilor şi tensiunilor, iar cel neliniar are parametrii dependenţi de valorile curenţilor şi tensiunilor şi nu i se poate aplica legea conducţiei electrice sub formă integrală.

Din punct de vedere al repartiţiei densităţii de curent electric în secţiunea conductoarelor, circuitele electrice se clasifică în **circuite electrice filiforme**, la care repartiţia curentului electric în secţiune este uniformă (densitatea curentului este constantă în secţiunea conductorului) şi în **circuite electrice masive**, la care densitatea curentului electric nu este constantă în secţiunea conductoarelor.

După regimul de funcţionare, circuitele electrice se clasifică în **circuite de curent continuu** (c.c.), caracterizate prin existenţa numai a curentului electric de conducţie în conductoare care mereu acelaşi sens și valoare şi **circuite de curent alternativ** (c.a.), caracterizate de regimul cvasistaţionar, existând curent electric de conducţie în conductoare şi curent electric de deplasare în dielectricul condensatoarelor din circuit; la aceste circuite într-o secţiune a conductorului, intensitatea curentului variază periodic în timp (sinusoidal sau nesinusoidal).

Reţeaua electrică este un ansamblu de circuite electrice conectate într-un mod oarecare ce permite trecerea curentului electric. Din punct de vedere topologic, elementele principale ale unei reţele electrice sunt **nodurile, laturile** şi **ochiurile**. Două noduri vecine sunt independente, dacă sunt separate cel puțin printr-un element

Nodul este punctul de conexiune a cel puţin trei elemente de circuit. Numărul nodurilor ale unei reţele se notează cu ***N***.

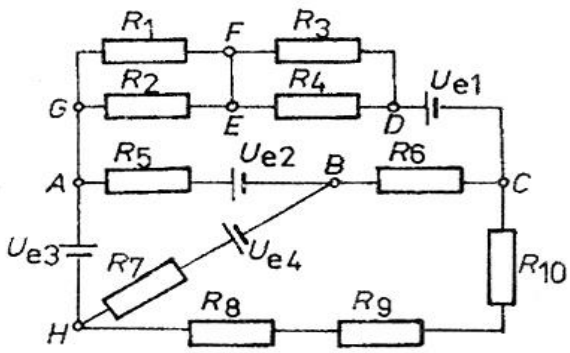
Latura (ramura) este o porţiune neramificată de circuit, formată din elemente conectate în serie (cel puţin un element) parcurse de acelaşi curent şi cuprinsă între două noduri vecine. O latură nu poate conține trei noduri ci doar două noduri la capete. Numărul de laturi ale unei reţele se notează cu **L**.

Ochiul (bucla) este un contur închis realizat de-a lungul laturilor reţelei, începând de la un nod şi ajungând la acelaşi nod, fără a parcurge o latură de două ori.

Se numeşte **ochi de reţea independent** faţă de un sistem de ochiuri dat, ochiul de reţea a cărui existenţă nu poate fi dedusă din cunoaşterea ochiurilor sistemului dat, sau altfel spus, ochiul independent conţine cel puţin o latură de reţea care nu a fost conţinută de celelalte ochiuri ale sistemului de ochiuri ale reţelei. Cele **O** ochiuri trebuie să conțină toate laturile rețelei.

L. Euler (1707 - 1783) a demonstrat că numărul de ochiuri independente ***O*** ale unei reţele electrice de curent continuu este:

$$O = L - N + 1 \,. \qquad (2.55)$$



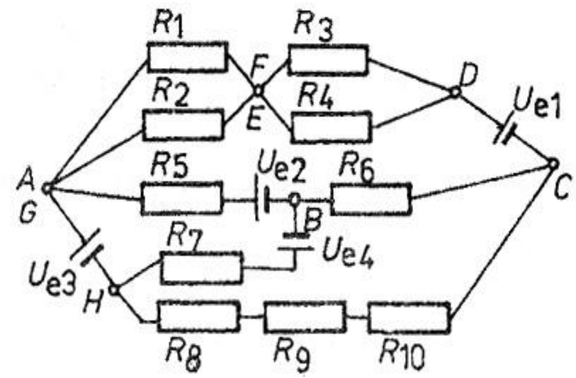


Fig.2.18. - a) Reţea electrică. - b) Schema echivalentă.

În figura 2.18a se reprezintă o reţea electrică. Nodurile reţelei electrice sunt ***A*** sau ***G***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E*** sau ***F***, ***H***, rezultând ***N*** = 6. Nodurile ***A*** şi ***G*** respectiv ***E*** şi ***F*** nu reprezintă noduri distincte deoarece au acelaşi potenţial (între ele neexistând nici un element). Schema reţelei se poate reprezenta ca în figura 2.18b în care se observă mai clar atât nodurile cât şi laturile reţelei. ***AG*** sau ***EF*** nu reprezintă laturi deoarece nu conţin nici un element de circuit, dar prin ele circulă un curent. Laturile acestei reţele electrice sunt: ***GF, GE, FD, ED, DC, AB, AH, HB, HC, BC***, deci ***L***=10. Un sistem de ochiuri independente este format din ochiurile: ***GEFG, EFDE, GEDCBHG, HABH, BCHB***. Un circuit de excepţie este circuitul serie, neramificat (fig.2.19), care are o singură latură şi un singur nod.

.

Circuitul care are numai două borne de acces cu exteriorul se numeşte **dipol**, circuitul care are patru borne de acces cu exteriorul se numeşte **cuadripol** etc.

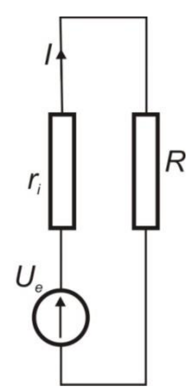


Fig.2.19 – Circuit simplu neramificat.

2.7.2. Sensuri de referinţă în circuitele de curent continuu.

Generatoarele de t.e.m. continuă au două borne de acces: borna pozitivă şi borna negativă. Dacă generatorul nu este conectat la un circuit exterior, borna pozitivă se va încărca cu sarcina electrică pozitivă, iar borna negativă cu sarcina negativă. Între sarcina pozitivă de la borna pozitivă şi sarcina negativă de la borna negativă se stabileşte un câmp electric coulombian, a cărui integrală de linie este diferenţa de potenţial dintre cele două borne, numită **tensiune la borne**. Sensul câmpului electric coulombian este de la borna pozitivă la borna negativă şi deci sensul tensiunii la bornele generatorului este sensul câmpului electric. Curentul electric debitat de generatorul electric iese pe la borna pozitivă şi intră pe la borna negativă Se stabileşte pentru generatorul electric regula de asociere a intensităţii curentului şi a tensiunii din figura 2.20a, numită **convenţie de semne pentru generatoare**.

Rezistorul este străbătut de un curent electric care intră pe la borna pozitivă şi iese pe la borna negativă, sensul tensiunii fiind tot de la borna pozitivă la cea negativă, rezultând o altă regulă de asociere a sensurilor tensiunii şi a intensității curentului, numită **convenţia de semne pentru receptoare** (fig.2.20b).

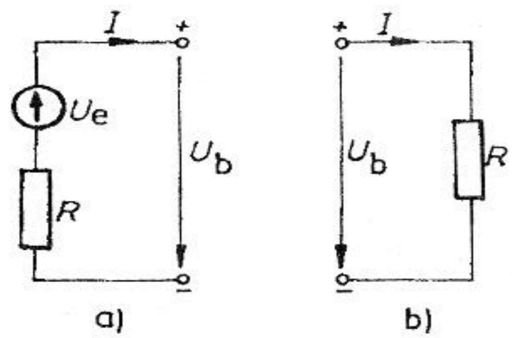


Fig.2.20. Convenţia de semne de la: a) generatoare; b) receptoare.

Un circuit dipolar având convenţia de semne de la generatoare este generator dacă puterea debitată $\boldsymbol{P = U_b.I}$ este pozitivă şi este receptor dacă puterea debitată este negativă. Un circuit dipolar având convenţia de semne de la receptoare este receptor, dacă puterea absorbită $\boldsymbol{P = U_b.I}$ este pozitivă şi este generator, dacă puterea absorbită este negativă.

Pentru convenţia de semne de la receptoare, sunt date schemele electrice din figura 2.21, iar pentru convenţia de semne de la generatoare, schema electrică din figura 2.22. Prin aplicarea legii conducţiei electrice conturului închis Γ din schema electrică din figura 2.21 a, rezultă:

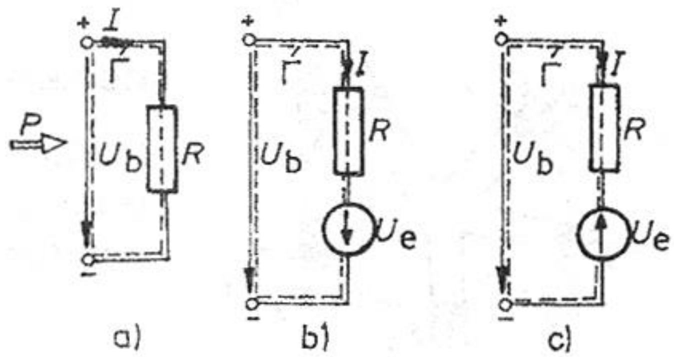


Fig.2.21. Exemple de circuite având convenţia de semne de la receptoare.

$$U_b = I\ R.$$

Puterea absorbită de latura receptoare va fi:

$$P = U_b I = I^2 R \geq 0.$$

Din legea conducţiei electrice, aplicată conturului închis Γ al schemei electrice din figura 2.21b, rezultă:

$$U_e + U_b = I\ R, \quad U_b = I\ R - U_e.$$

Puterea absorbită de latură este:

$$P = U_b\ I = I^2 R - I\ U_e.$$

Dacă $I^2 R > I U_e$, latura este receptoare, iar dacă $I^2 R < I U_e$, latura este generatoare.

Procedând analog pentru conturul Γ din figura 2.21c rezultă tensiunea şi puterea absorbită de latură:

$$U_b - U_e = IR, \quad U_b = IR + U_e, \quad P = I^2 R + I U_e > 0.$$

Puterea absorbită fiind pozitivă, latura este totdeauna receptoare.

Pentru schema electrică din figura 2.22 rezultă analog:

$$U_e = IR + U_b, \quad U_b = -IR + U_e, \quad P = I^2 R + I U_e > 0.$$

Puterea debitată fiind pozitivă, latura este generatoare.

În figurile 2.21 şi 2.22 s-a figurat şi sensul transmiterii puterii.

Regula de asociere a tensiunii la borne şi a curentului pentru dipolii activi şi pasivi, se poate generaliza şi pentru dipolii alimentaţi în current alternativ, indiferent de sensul pe care l-ar avea la un moment dat tensiunea şi curentul.

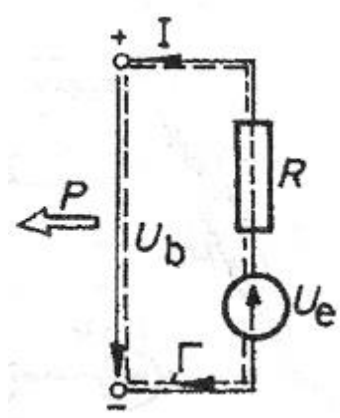


Fig.2.22. Convenţie de semne de la generatoare.

În valori instantanee, ecuaţia tensiunilor este:

$$u_e \pm u_b = i\,R, \quad (2.56)$$

unde tensiunea la borne se ia cu plus pentru convenția de semne de la receptoare şi cu minus pentru convenția de semne de la recep-

oare şi cu minus pentru convenţia de semne de la generatoare.

2.7.3. Surse ideale și reale din circuitele de curent continuu.

Noţiunea de sursă ideală este utilizată frecvent în situaţii ce apar atât în electronică, telecomunicaţii, calculatoare cât şi în domeniul energetic şi al ingineriei electrice. Aceste surse sunt de două tipuri:

1. surse (generatoare) ideale sau reale de tensiune;
2. surse (generatoare) ideale sau reale de curent.

2.7.3.1. Generatorul ideal și generatorul real de tensiune.

Generatorul ideal de tensiune are proprietatea că menţine la borne o tensiune constantă U_b, indiferent de valoarea curentului debitat (indiferent de sarcină), figura 2 23.

Tensiunea la borne generatorului este egală cu t.e.m. furnizată de generatorul ideal:

$$U_b = U_e,$$

iar rezistenţa internă a sursei ideale de tensiune este nulă *(r = 0).*

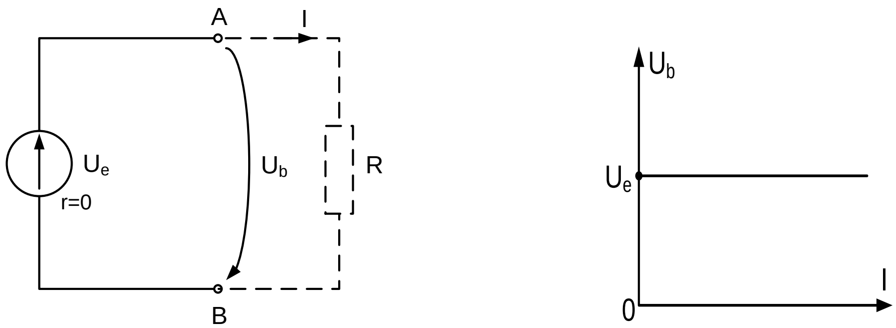
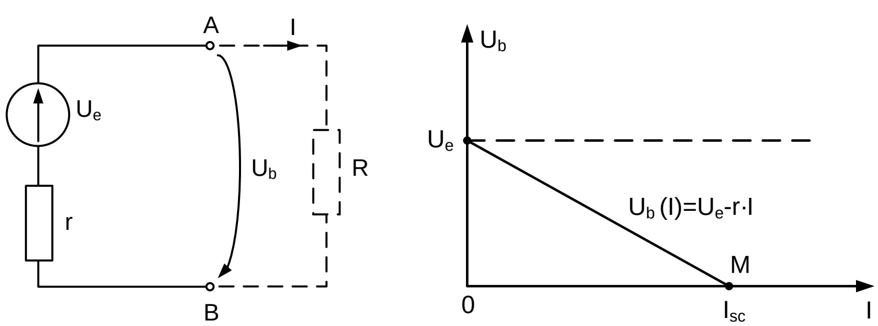


Fig. 2.23. Generatorul ideal de tensiune şi caracteristica sa $U_b = f(I)$

Generatorul ideal de tensiune reprezintă, aşa cum este şi denumirea sa, un caz ideal, deoarece ar trebui să debiteze o putere infintă, lucru practic imposibil.

Conform legii lui Ohm, curentul prin circuit, la alimentare unei sarcini R este: $I = \dfrac{U_e}{R}$. În condiţiile în care $R \to 0$, generatorul este în regim de scurtcircuit, curentul ar trebui să tindă către infint; ca urmare şi puterea cedată de generator ar fi şi ea infinită:

$$P_b = U_b \cdot I = U_e \cdot I \to \infty.$$



a. b.

Fig. 2.24. Generatorul real de tensiune.

Generator real debitează o putere finită pe la borne şi are o rezistenţă internă $r \neq 0$ (fig. 2.24.). Tensiunea la bornele generatorului real este :

$$U_b = U_e - r \cdot I,$$

şi este dependent de curentul debitat. Se ajunge la cazul ideal (sursa ideală), când $r \to 0$.

Caracteristica $U_b(I)$ pentru acest generator este căzătoare, ca în figura 2.24b. Această caracteristică intersectează abscisa (când $U_b = 0$), în punctul *M*, în care curentul ia valoarea maxima (curentul de scurtcircuit):

$$I_M = I_{SC} = \frac{U_e}{R + r} = \frac{U_e}{r}.$$

2.7.3.2. Generatorul ideal şi generatorul real de current.

Generatorul ideal de curent debitează un curent constant fără a fi influenţat de variaţiile tensiunii la borne (fig. 2.25). În acest caz se poate scrie că:

$$I_g = I_{SC} = J.$$

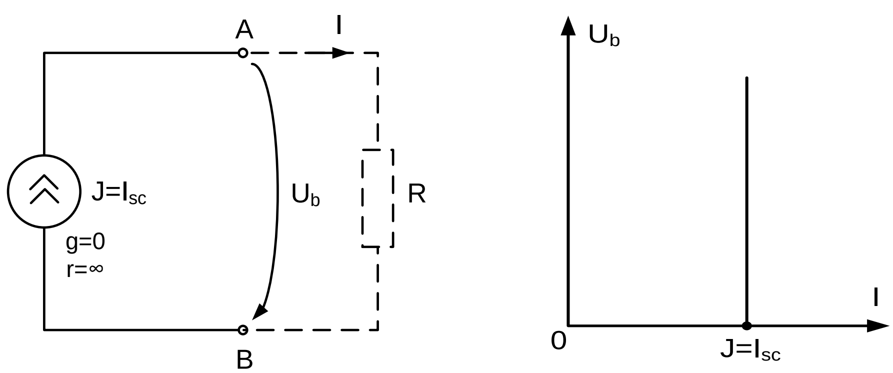


Fig. 2.25. Generatorul ideal de curent şi caracteristica sa *U(I)*.

Generatorul ideal de curent reprezintă un caz ideal, deoarece ar trebui să debiteze o putere infintă, imposibil practic.

Conform legii lui Ohm, tensiune aplicată laturii AB ce conţine sarcina R este:

$$U_b = R \cdot I_{sc}.$$

În condiţiile în care $R \to \infty$, generatorul este în regim de mers în gol, iar tensiunea $U_b \to \infty$, la fel şi puterea debitată de generator:

$$P_b = U_b \cdot I = U_e \cdot I \to \infty.$$

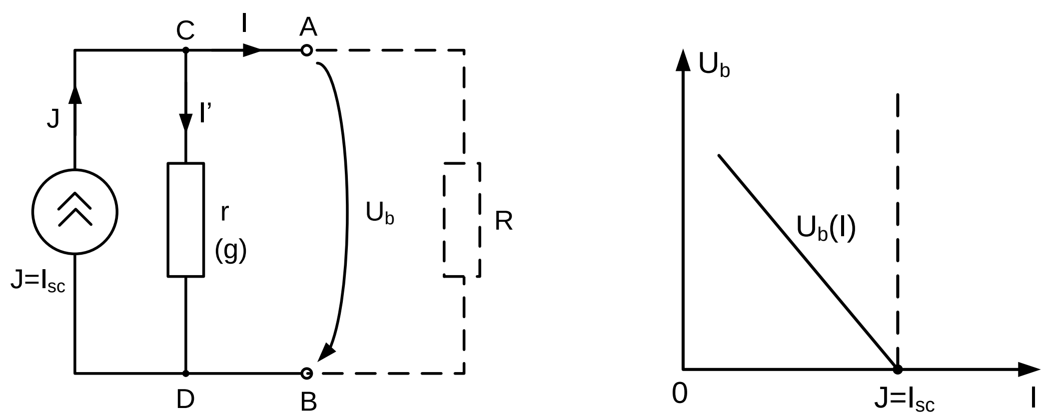


Fig. 2.26. Generatorul real de curent şi dependenţa tensiune-curent.

Schema echivalentă a generatorului real de curent conţine rezistenţa (conductanţa) echivalentă în paralel cu generatorul (fig. 2.26).

În acest caz curentul debitat de generator devine:

$$I = I_{SC} - I' = I_{SC} - \frac{U_b}{r}.$$

Se vede din relaţia de mai sus, că în cazul în care rezistenţa tinde spre infinit ($r \to \infty$) se revine la cazul generatorului ideal de curent.

2.7.3.3. Concluzii asupra surselor de tensiune şi curent.

1. Sursele reale de tensiune şi curent sunt echivalente dacă se îndeplinesc condiţiile:

$$g = \frac{1}{r} \quad \text{şi} \quad I_{SC} = J = \frac{U_e}{r}.$$

2. Sursele de t.e.m. pot fi conectate în serie şi în paralel, obţinându-se circuite echivalente serie, pentru obţinerea unor tensiuni mai mari, sau în paralel, pentru obţinerea unor curenţi mai mari.

În cazul conectării în serie a mai multor surse de t.e.m., pentru circuitul echivalent serie avem t.e.m. echivalentă egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare înseriate, iar rezistenţa electrică internă este echivalentă cu suma rezistenţelor electrice interne ale surselor, adică:

$$U_{eechiv} = \sum_{k=1}^{n} U_{ek}; \qquad r_{echiv} = \sum_{k=1}^{n} r_k,$$

unde: $r_{echiv} = \sum_{k=1}^{n} r_k$, este rezistenţa internă echivalentă.

În cazul conectării în paralel a mai multor surse de t.e.m., pentru circuitul echivalent paralel se obţin:

$$U_{eechiv} = \frac{\sum_{k=1}^{n} g_k U_{ek}}{\sum_{k=1}^{n} g_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} I_k}{g_e},$$

unde: $\sum_{k=1}^{n} g_k U_{ek} = \sum_{k=1}^{n} I_k$ - este suma algebrică a intensităţilor curenţilor de scurt-circuit ai laturilor conectate în paralel;

iar $g_{echiv} = \sum_{k=1}^{n} g_k$ - conductanţa internă echivalentă.

2.7.4. Teoremele lui Kirchhoff.

2.7.4.1. Prima teoremă a lui Kirchhoff.

Se consideră un nod **N** al unei reţele electrice de c.c. (fig.2.27), înconjurat de suprafaţa închisă **Σ**. Din legea conservării sarcinii electrice, aplicată suprafeţei **Σ**, pentru regimul electrocinetic staţionar (mărimi invariabile în timp), rezultă:

$$I_\Sigma = \int_\Sigma \overline{J}\, d\overline{S} = - \frac{d\, q_\Sigma}{d\, t} = 0\ . \qquad (2.57)$$

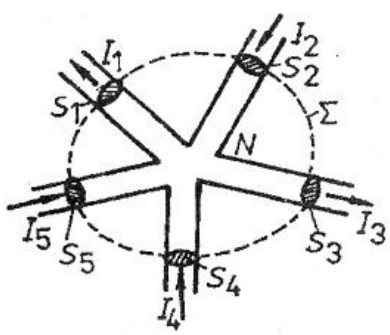


Fig.2.27 - Explicativă la demonstrarea primei teoreme a lui Kirchhoff.

Notând cu **S$_1$, S$_2$, ... , S$_5$**, suprafeţele deschise rezultate din intersecţia conductoarelor cu suprafaţa **Σ**, integrala vectorului densitate de curent $\overline{J}$ pe suprafaţa **Σ**, devine:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \overline{J}\, d\overline{S} &= \int_{S_1} \overline{J}\, d\overline{S} + \int_{S_2} \overline{J}\, d\overline{S} + \dots + \int_{S_5} \overline{J}\, d\overline{S} = \\ &= I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0\ , \end{aligned} \qquad (2.58)$$

deoarece pe restul suprafeţei **Σ**, vectorul $\overline{J}$ este nul, iar fluxul vectorului prin suprafaţa secţiunii transversale a unui conductor este intensitatea curentului electric prin conductorul respectiv.

Generalizând relaţia de mai sus, rezultă:

$$\sum_{k \in N} I_k = 0 \ . \tag{2.59}$$

Relaţia (2.59) constituie prima **teoremă a lui Kirchhoff**, care se enunţă astfel: **În orice moment suma algebrică a curenţilor care străbat laturile unui circuit ce converg într-un nod de rețea este egală cu zero, dacă se consideră curenţii care ies din nod cu un semn, iar cei care intră în nod cu semn contrar.**

Prima teoremă a lui Kirchhoff este valabilă şi în cazul circuitelor de c.a., deoarece legea conservării sarcinii electrice rămâne valabilă şi în regim cvasistaţionar.

Deci:
$$\sum_{k \in N} i_k = 0, \tag{2.60}$$

adică: **suma algebrică a valorilor instantanee ale curenţilor din laturile unui circuit ce converg într-un nod de reţea este nulă**.

2.7.4.2. T**eorema a doua a lui Kirchhoff**.

Se consideră un ochi de reţea **q**, având un anumit număr de laturi (fig.2.28).

Integrând forma locală a legii conducţiei (2.26) de-a lungul curbei închise Γ ce trece prin axa conductorilor care formează ochiul **q (**fiig.2.28), se obţine:

$$\oint_\Gamma (\overline{E} + \overline{E}_i)\, d\overline{l} = \oint_\Gamma \rho \overline{J}\, d\overline{l}. \tag{2.61}$$

În regim staţionar:

$$\oint_\Gamma \overline{E}\, d\overline{l} = 0 \ \ si \oint_\Gamma \overline{E}_i\, d\overline{l} = \sum_{k \in q} U_{ek}\ , \tag{2.62}$$

unde U_{ek} reprezintă t.e.m. a surselor din latura **k** a ochiului **q**.

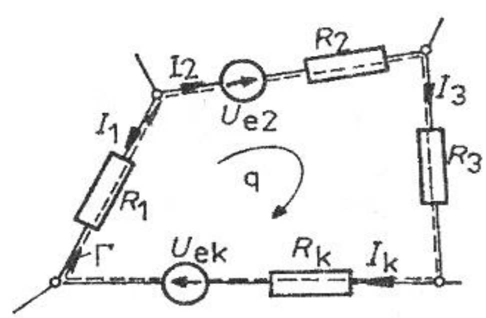


Fig.2.28. Explicativă la demonstrarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff.

Membrul drept al relaţiei (2.61) devine:

$$\oint_{\Gamma} \rho \bar{J} \, d\bar{l} = \sum_{k \in q} I_k \int_{l_k} \rho \frac{dl}{S} = \sum_{k \in q} I_k R_k \;, \tag{2.63a}$$

unde $\boldsymbol{R}_{\mathbf{k}}$ reprezintă rezistenţa echivalentă a laturii **k** a ochiului ***q***, $\boldsymbol{I_k}$ - intensitatea curentului electric din aceeaşi latură. Folosind relaţiile (2.62) şi (2.63),

$$\sum_{k \in q} U_{ek} = \sum_{k \in q} I_k R_k \;, \tag{2.64a}$$

care reprezintă expresia matematică a celei de-a doua teoremă a lui Kirchhoff: **suma algebrică a t.e.m. ale surselor din laturile unui ochi de reţea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune din laturile ochiului**. Căderile de tensiune, respectiv t.e.m. se iau cu semnul plus dacă sensurile lor coincid cu sensul de integrare, numit sens de referinţă (marcat cu o săgeată curbă în interiorul ochiului) şi cu semnul minus în caz contrar. Dacă unele laturi au și surse de curent, în membru drept va apărea și suma tensiunilor la bornele surselor de curent. Relația 2.64a devine:

$$\sum_{k \in q} U_{ek} = \sum_{k \in q} I_k R_k + \sum_{k \in q} U_{bk}. \tag{2.64b}$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate aplica şi la ochiuri de reţea de c.a., enunţându-se astfel: **suma algebrică a valorilor instantanee ale t.e.m. ale generatoarelor din laturile unui ochi de reţea este egală cu suma algebrica a căderilor de tensiune instantanee din laturile respective**.

2.7.5. Gruparea rezistoarelor.

Rezistorul este elementul de circuit electric caracterizat prin rezistenţa sa electrică, el neavând inductivitate sau capacitate şi nu este sediul unei t.e.m. imprimate. În reţelele electrice, rezistoarele pot fi grupate în serie, paralel, mixt, stea sau triunghi.

Rezistenţa echivalentă R_e este definită pentru o reţea pasivă de c.c. cu două borne de acces, ca **raportul pozitiv dintre tensiunea între aceste borne U_b şi intensitatea I a c.c. care intră în reţea pe la una din borne şi iese prin cealaltă**:

$$R_e = \frac{U_b}{I} > 0 \,. \tag{2.65}$$

2.**7.5.1. Gruparea în serie a rezistoarelor**.

Considerăm ***n*** rezistoare de rezistenţe R_1, R_2, ... R_n, legate în serie (străbătute de acelaşi curent de intensitate I). Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff aplicată ochiului, rezultă (fig.2.29):

$$U_1 + U_2 + ... + U_n - U_b = 0 \ , \text{ sau } I\,(R_1 + R_2 + ... + R_n) = U_b = I\ R_{es}$$

$$\rightarrow R_{es} = \sum_{k=1}^{n} R_k \,. \tag{2.66}$$

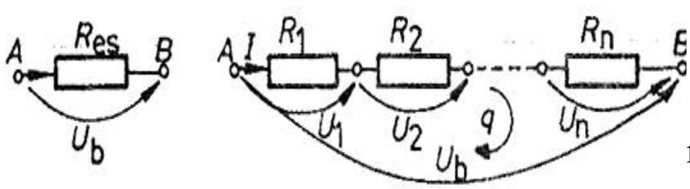


Fig.2.29 - Explicativă pentru calculul rezistenţei echivalente la gruparea în serie.

În cazul legării în serie a rezistoarelor, rezistenţa echivalentă este egală cu suma rezistenţelor rezistoarelor componente.

Pentru ***n*** rezistoare identice având rezistenţa R fiecare, rezistenţa echivalentă, la legarea în serie este:

$$R_{es} = n\ R \,. \tag{2.67}$$

2.**7.5.2. Gruparea în paralel a rezistoarelor.**

Considerăm ***n*** rezistoare de rezistenţe R_1, R_2,.., R_n legate în paralel (având aceeaşi tensiune la borne). Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului ***A*** (fig.2.30), rezultă:

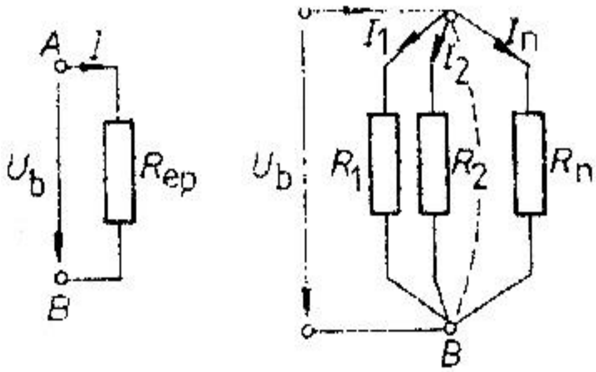


Fig.2.30 - Explicativă pentru calculul rezistenţei echivalente la gruparea paralel.

$$I = \frac{U_b}{R_{ep}} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n =$$

$$= \frac{U_b}{R_1} + \frac{U_b}{R_2} + \ldots + \frac{U_b}{R_n} \ ,$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{R_{ep}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \ . \qquad (2.68)$$

În cazul legării în paralel (derivaţie) a rezistoarelor, inversul rezistenţei echivalente este egal cu suma inverselor rezistenţelor rezistoarelor componente. Rezistența echivalentă este mai mică decât cea mai mică rezistență legată în paralel.

Inversul rezistenţei se notează cu ***G*** şi se numeşte **conductanţă**, deci:

$$G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k \ . \qquad (2.69)$$

Conductanţa echivalentă în cazul legării în paralel este egală cu suma conductanţelor elementelor legate în paralel.

Pentru ***n*** rezistoare identice, având rezistenţa ***R = 1/G*** fiecare, rezistenţa echivalentă, respectiv conductanţă echi-valentă vor fi:

$$R_{ep} = \frac{R}{n} \ , \ \ G_{ep} = n\ G \ . \qquad (2.70)$$

2.7.5.3. Gruparea în stea sau în triunghi a rezistoarelor.

Există numeroase cazuri când rezistoarele din reţelele electrice sunt legate în formă de stea (fig.2.31a) sau în triunghi (fig.2.31b), vârfurile stelei respectiv triunghiului fiind noduri ale reţelei.

Se notează cu R_1, R_2, R_3 rezistenţele laturilor stelei şi cu R_{12}, R_{23}, R_{31} rezistenţele laturilor triunghiului. Pentru reducerea unei reţele la o formă mai simplă, se foloseşte după necessitate, transformarea (transfigurarea) stelei într-un triunghi echivalent sau invers. Pentru ca transformările să fie echivalente, trebuie să fie îndeplinite următoarele condiţii:

- potenţialele nodurilor să rămână neschimbate;
- curenţii prin noduri să fie identici.

Ca urmare a acestor condiţii şi într-o conectare şi în cealaltă, rezistenţele echivelente între aceleaşi două borne trebuie să fie egale.

Se demonstează că transformarea stea - poligon şi poligon - stea este biunivocă numai dacă numărul ramurilor este trei (stea - triunghi, triunghi - stea).

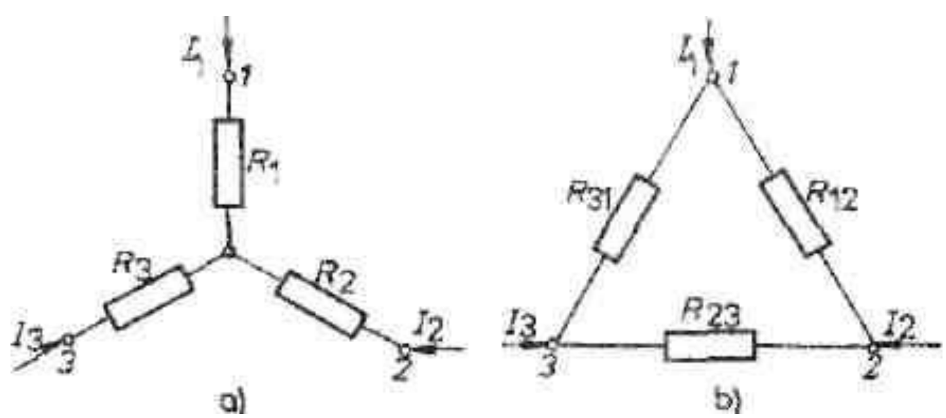


Fig. 2.31 . Conexiunea a trei rezistoare în: a) stea; b) triunghi.

Rezistenţa echivalentă între nodurile 1 şi 2 ale conexiunii în stea este:

$$R_{12Y} = R_1 + R_2 . \qquad (2.71)$$

Rezistenţa echivalentă între nodurile 1 şi 2 ale conexiunii în triunghi este:

$$R_{12\Delta} = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \qquad (2.72)$$

Din egalitatea relaţiilor (2.71) şi (2.72) rezultă:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Analog, sau prin permutări circulare, se obţin:

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31}(R_{23} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad R_3 + R_2 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \qquad (2.73)$$

Rezolvând sistemul de trei ecuaţii cu trei necunoscute date de relaţiile (2.72) şi (2.73), se determină rezistenţele laturilor stelei echivalente în funcţie de rezistenţele triunghiului:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \qquad (2.74)$$

sau rezistenţele laturilor triunghiului echivalent în funcţie de rezistenţele laturilor stelei:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1},$$
$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \qquad (2.75)$$

2.7.6. Rezolvarea reţelelor electrice.

Fiind dată o reţea electrică la care se cunosc valorile t.e.m. şi ale rezistenţelor laturilor, se pune problema determinării prin calcul a intensităţilor curenţilor care trec prin laturile reţelei. Dacă se cunosc o parte din valorile t.e.m., ale rezistenţelor şi o parte a curenţilor din laturi, se pot determina prin calcul celelalte mărimi necunoscute (t.e.m., curenţi, rezistenţe).

2.7.6.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff.

Pentru rezolvarea unei reţele prin metoda teoremelor lui Kirchhoff se procedează astfel:

a) se stabileşte numărul **N** de noduri ale reţelei;

b) se stabileşte numărul **L** de laturi ale reţelei;

c) se aleg sensuri de referinţă pentru curenţii şi t.e.m. necunoscute din laturi şi se figurează pe schema electrică;

d) se stabilesc ochiurile independente şi sensurile de referinţă pentru ele;

e) se scriu N - 1 ecuaţii cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff aplicată nodurilor reţelei şi O = L - N + 1 ecuaţii cu ajutorul celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff aplicată celor O ochiuri independente. Se obţine un sistem de L ecuaţii cu L necunoscute;

f) se rezolvă sistemul de ecuaţii liniare obţinut la punctul e (sistemul este compatibil și determinat). Curenţii a căror valoare a rezultat pozitivă din rezolvarea sistemului de ecuaţii, au sensul real cel stabilit la punctul c, iar cei ale căror valori sunt negative, au sensurile reale opuse celor stabilite la punctul c și au valoarea calculată cu semn +;

g) se verifică corectitudinea rezultatelor prin una din următoarele metode:

1.- se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff pentru nodul al N-lea (cel nefolosit). Relaţia obţinută trebuie să fie verificată cu ajutorul curenţilor găsiţi prin calcul;

2.- se scrie cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru un ochi nefolosit. Relaţia obţinută trebuie să fie verificată cu ajutorul curenţilor găsiţi din calcul;

3.- se scrie tensiunea electrică între două puncte oarecare pe mai multe drumuri diferite, rezultatele obţinute trebuind să fie aceleaşi pentru valorile curenţilor găsiţi

4.- se face bilanţul puterilor. Suma algebrică a puterilor debitate de sursele reţelei este egală cu suma puterilor ce se pierd prin efect Joule-Lenz în rezistenţele reţelei:

$$\sum_{k=1}^{L} U_{ek} I_k + \sum_{K=1}^{l} U_{bk} J_k = \sum_{k=1}^{L} I_k^2 R_k \ . \qquad (2.76)$$

Produsele $U_{ek} I_k$ se scriu cu semnul plus (+) dacă sensurile lui U_{ek} şi I_k coincid prin latura k şi cu semnul minus (-) în caz contrar. Produsele $U_{bk} \ J_k$ se iau totdeauna cu semnul plus la fel ca și produsele $I_k^2 R_k$.

Această metodă este cea mai corectă deoarece în verificare se vor folosi toate elementele din circuit (bilanțul se face pe toată rețeaua)

2.7.6.2. Metoda generatorului echivalent de tensiune (Helmholtz-Thevenin).

Această metodă se utilizează în cazurile în care se cere să se determine numai curentul dintr-o latură pasivă oarecare AB a unei reţele electrice liniară. Prin această metoda se înlocuieşte întreaga reţea, cu excepţia laturii AB, cu un generator de tensiune echivalent (fig. 2.32), având t.e.m. $U_{eg} = U_{AB0}$ şi rezistenţa interioară $r_i = R_{AB0}$. U_{AB0} reprezintă tensiunea între bornele A şi B când lipseşte rezistenţa R_{AB} a laturii AB, iar R_{AB0} - rezistenţa reţelei pasivizate faţă de bornele A şi B când latura AB lipseşte. Curentul electric din latura AB va fi:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} \ , \qquad (2.77)$$

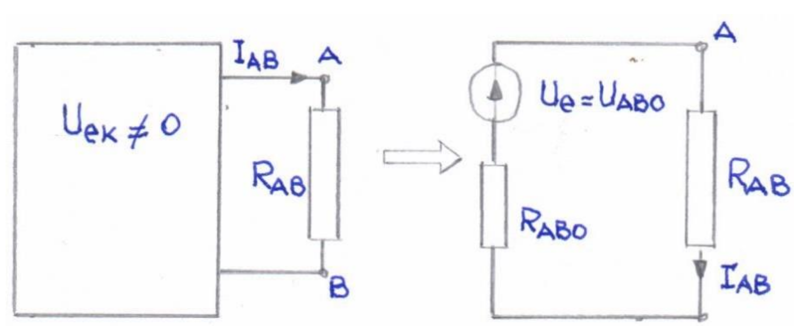


Fig.2.32. Schema echivalentă a generatorului de tensiune echivalent.

Demonstrarea teoremei se face cu ajutorul teoremei suprapunerii efectelor. Schema reală se va considera că se poate obține prin suprapunerea a două rețele liniare ca în figura 2.33. Prima rețea conține rețeaua initială la care pe latura pasivă AB s-a considerat o sursă de t.e.m. U_e având sensul contrar curentului I_{AB}. Rețeaua a doua este pasivizată, iar pe latura AB se introduce o sursă de t.e.m. U_e având sensul curentului I_{AB}. O rețea s-a pasivizat dacă sursele de t.e.m. se înlocuiesc cu rezistența interioară iar sursele de curent se înlocuiesc cu o întrerupere a laturii respective.

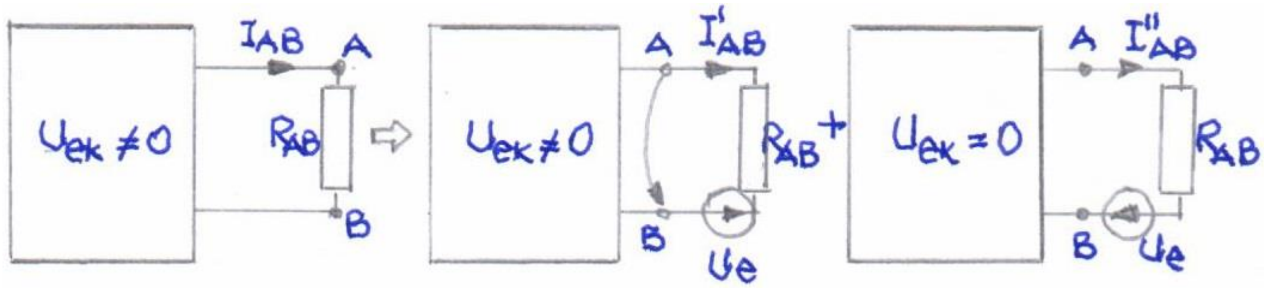


Fig.2.33. Explicativă la demonstrarea teoremei generatorului de t.e.m. echivalent

Curentul real va fi suma curenților I_{AB} ce se stabilesc în cele două scheme echivalente:

$$I_{AB} = I^{!}_{AB} + I^{!!}_{AB} ,$$

Curenții se obțin prin aplicarea teoremei a doua ochiurilor O_1 și O_2 din figură:

$$I^{!}_{AB} R_{AB} - U_{AB} = -U_e ,$$
$$I^{!!}_{AB} R_{AB} + I^{!!}_{AB} R_{ABpas} = U_e .$$

Sursa U_e se va alege astfel ca intensitatea curentului din prima schema să fie nul și ca urmare curentul căutat este doar curentul din schema a doua, adică

$$U_e = U_{AB0}$$

$$I''_{AB} R_{AB} + I''_{AB} R_{ABpas} = U_e = U_{AB0}$$

$$.I''_{AB} = I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{ABpas}}.$$

Pentru determinarea curentului dintr-o latură pasivă AB

a unei reţele liniare prin această

metodă, se procedează astfel:

a) se elimină latura AB din

reţea;

b) se calculează pentru schema obţinută la punctual a, tensiunea U_{AB0} între punctele A şi B;

c) se pasivizează (se înlocuiesc toate sursele de t.e.m. cu rezistoare având rezistenţele egale cu rezistenţele interioare ale surselor, laturile cu surse de curent se consideră circuite deschise), schema obţinută la punctual a şi se calculează rezistenţa R_{AB0} între punctele A şi B ale reţelei;

d) se calculează intensitatea curentului prin latura AB cu relaţia (2.77).

TEME DE STUDIU

Testul 1.

Care sunt diferențele dintre sursele ideale și cele reale de tensiune și de curent.

Testul 2.

Care este echivalența dintre o sursă de tensiune și una de curent.

Test 3.

Care este enunţul primei teoreme a lui Kirchhoff, unde se poate aplica şi cum se iau semnele intensităţilor curenţilor ?.

Test 4.

Care este enunţul celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff, unde se poate aplica şi cum se iau semnele căderilor de tensiune şi a tensiunilor electromotoare ?.

Test 5.

Care este valoarea rezistenţei echivalente la gruparea serie a rezistoarelor şi când se utilizează acestă conexiune ?.

Test 6.

Care este valoarea rezistenţei echivalente la gruparea paralel a rezistoarelor şi când se utilizează acestă conexiune ?.

Test 7.

Care sunt etapele de calcul pentru rezolvarea unui circuit, dacă se foloseşte metoda teoremelor lui Kirchhoff ?.

Test 8.

Care sunt etapele de calcul pentru rezolvarea unui circuit, dacă se foloseşte metoda generatorului de tensiune echivalent .