C U R S U L 4

ELECTROSTATICA (4)

1.8. ENERGIA ŞI FORȚELE ÎN CÂMPUL ELECTROSTATIC

1.8.1. Energia câmpului electrostatic

În jurul unui sistem de corpuri încărcate electric, există un câmp electric. Dacă în acest câmp electric se introduce un corp încărcat cu sarcină electrică, asupra lui se vor exercita acţiuni ponderomotoare de natură electrică, care vor duce la deplasarea şi rotirea lui, deci se va produce un lucru mecanic. Aceasta presupune existenţa unei energii a câmpului electrostatic preluată de la sursele de energie exterioară în procesul de încărcare a corpurilor cu sarcină electrică.

Se consideră câmpul electrostatic produs de **n** conductoare încărcate cu sarcinile $q_1, q_2,...q_n$ şi aflate la potenţialele $V_1, V_2,...,V_n$ (fig.1.27). Presupunem că la starea finală, s-a ajuns printr-o creştere proporţională a tuturor sarcinilor electrice, pornind de la o stare iniţială în care sarcinile erau nule şi deci şi câmpul electric era nul în orice punct.

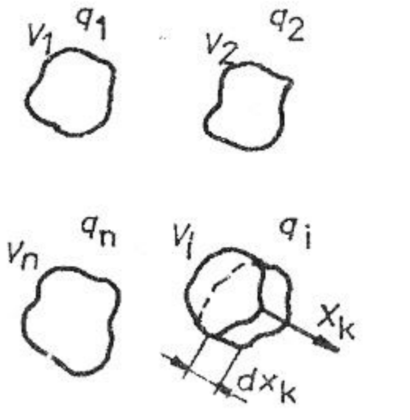

Fig.1.27 - Explicativă la calculul energiei câmpului electric

Lucrul mecanic cheltuit pentru creşterea cu $dq'_k = q_k d\lambda$ a sarcinii conductorului **k**, (sarcina dq'_k fiind adusă de la infinit unde potenţialul electric s-a considerat că este zero) este dată de relaţia (1.41):

$$\mathrm{d\,L_k} = \mathrm{d}q_{k'} \cdot V_{k'} = q_k \mathrm{d}\lambda \cdot \lambda V_k \quad .$$

Deplasarea sarcinilor s-a făcut suficient de lent pentru a se păstra regimul electrostatic. O stare intermediară este caracterizată prin sarcinile $q'_k = \lambda q_k$ şi potenţialele electrice $V'_k = \lambda V_k$ ale corpurilor (deoarece potențiale sunt proporţionale cu sarcinile electrice). Variabila **λ** va lua valorile $\lambda \in [0, 1]$.

Pentru toate conductoarele, lucrul mecanic elementar făcut rezultă:

$$\mathrm{d}\,L = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\,\mathrm{L}_\mathrm{k} = \sum_{k=1}^{n} q_k\, V_k\;\; \lambda\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Energia câmpului electrostatic va fi egală cu lucrul mecanic efectuat pentru atingerea stării finale (**λ=1**) pornind de la starea iniţială (**λ=0**):

$$W_e = \mathrm{L} = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \mathrm{d}\,\mathrm{L} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} q_k\, V_k \int_0^1 \lambda\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} q_k\, V_k\,. \tag{1.72}$$

Aplicaţie

Să se calculeze energia electrică a unui condensator electric având capacitatea ***C***, încărcat cu sarcina electrică ***q***.

Rezolvare

Conform relaţiei (1.72) energia câmpului electric va fi:

$$W_e = \frac{1}{2} q_1\, V_1 + \frac{1}{2} q_2\, V_2 = \frac{1}{2} q\, V_1 - \frac{1}{2} q\, V_2 = \frac{1}{2}\, \mathrm{q}\, \mathrm{U} = \frac{1}{2} \mathrm{C}\, U^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{q}^2}{\mathrm{C}}\,.$$

Relaţia (1.72) nu indică localizarea corectă a energiei câmpului electrostatic. Pentru aceasta se defineşte **densitatea de volum a energiei câmpului electric $\mathbf{w_e}$**:

$$w_e = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\, W_e}{\Delta\, \mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{W_e}}{\mathrm{d}\,\mathrm{V}}\,. \tag{1.73}$$

Pentru determinarea densităţii de volum a energiei în funcţie de mărimile de stare ale câmpului, se consideră câmpul omogen din interiorul unui condensator plan, pentru care:

$$w_e = \frac{W_e}{V_d} = \frac{\frac{1}{2} C\, U^2}{V_d} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\, \mathrm{S}}{\mathrm{d}} d^2\, E^2}{V_d} = \frac{\varepsilon\, \mathrm{S}\, \mathrm{d}\, E^2}{2\, V_d} = \frac{\varepsilon\, E^2}{2} = \frac{\overline{\mathrm{E}}\, \overline{\mathrm{D}}}{2}\,, \tag{1.74}$$

unde $\mathbf{V_d}$**= S d** reprezintă volumul dielectricului dintre armături (fig.1.17).

Ca urmare energia câmpului electrostatic localizată într-un volum **V** este:

$$W_e = \int_V w_e \, dV = \int_V \frac{\overline{E}\,\overline{D}}{2} \, dV \ . \qquad (1.75)$$

1.8.2. Teoremele forţelor generalizate

Metoda generală de determinare a forţelor în câmpul electrostatic se bazează pe considerente energetice. Calculul forţelor se face prin intermediul lucrului mecanic care s-ar efectua la o deplasare oarecare a corpurilor încărcate asupra cărora se exercită aceste forţe. Metoda utilizează noţiunile de coordonate şi forţe generalizate.

Coordonatele generalizate sunt variabilele scalare cu ajutorul cărora se caracterizează complet configuraţia geometrică a unui sistem de corpuri. Numărul minim al acestora, reprezintă numărul de grade de libertate al sistemului. Coordonatele generalizate, care se vor nota cu $\mathbf{x_k}$, pot fi distanţe, unghiuri, arii, volume etc.

Când coordonatele generalizate au variaţii elementare $\mathbf{dx_k}$, forţele generalizate $\mathbf{X_k}$, care se exercită asupra celor **n** corpuri, efectuează un lucru mecanic elementar (fig.1.27):

$$d\,L = \sum_{k=1}^{n} \overline{X}_k \overline{d}\, x_k \ . \qquad (1.76)$$

Mărimile $\mathbf{X_k}$ care intervin se numesc **forţe generalizate.** Forţa generalizată nu este o forţa propriu-zisă. Dacă, de exemplu, x_k este o deplasare, X_k este componenta unei forţe după direcţia deplasării; dacă x_k este un unghi de rotaţie, X_k este momentul forţelor în raport cu axul de rotaţie etc.

Presupunem că toate cele **n** corpuri sunt fixe în afară de corpul **i** care poate să-şi modifice doar coordonata $\mathbf{x_k}$. Lucrul mecanic efectuat de sursele de energie exterioară pentru variaţia cu $\boldsymbol{dq_k}$ a sarcinilor celor **n** corpuri trebuie să acopere creşterea de energie a câmpului electric şi lucrul mecanic efectuat de forţa generalizată $\mathbf{X_k}$ asupra corpului **i**:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \, d\,q_k = d\,W_e + X_k \, d\,x_k \ . \qquad (1.77)$$

a) **Dacă sistemul de corpuri este izolat de surse,** sarcinile corpurilor nu se pot modifică în decursul deplasării $\mathbf{dx_k}$, deci $\boldsymbol{dq_k=0}$ şi se obţine:

$$d W_e + X_k\, d x_k = 0, \quad \to X_k = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{q = const.} . \tag{1.78}$$

Componenta forţei generalizată X_k, pe direcția coordonatei generalizate x_k, este egală cu derivata parţială, cu semn schimbat, a energiei electrostatice în raport cu coordonata generalizată, dacă sarcinile corpurilor sunt constante şi dacă energia câmpului s-a exprimat numai în funcţie de coordonatele generalizate şi sarcinile cu care sunt încărcate corpurile.

Semnul minus arată că lucrul mecanic se face pe seama scăderii energiei câmpului electrostatic (sursele exterioare sunt deconectate).

b) **Dacă sistemul de corpuri este conectat la surse**, acestea vor menţine constante potenţialele $\boldsymbol{V_k}$ ale corpurilor şi atunci:

$$(d W_e)_{V = const} = d \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} V_k\, q_k \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} d V_k\, q_k + \sum_{k=1}^{n} V_k\, d q_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} V_k\, d q_k$$

şi rezultă:

$$2\, d W_e = d W_e + X_k\, d x_k\,, \quad X_k = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V = const} . \tag{1.79}$$

Componenta forţei generalizată X_k, pe direcția coordonatei generalizate x_k, este egală cu derivata parţială a energiei electrostatice în raport cu coordonata generalizată, dacă potenţialele corpurilor s-au considerat constante şi dacă energia câmpului s-a exprimat numai în funcţie de coordonatele generalizate şi potenţialele corpurilor.

Cele două expresii (1.78) şi (1.79) sunt echivalente reprezentând cele două teoreme ale forţelor generalizate în câmpul electrostatic.

Aplicaţii

1. Să se determine forţa ce se exercită între armăturile unui condensator plan având aria armăturilor **S** şi distanţa dintre armături **x.**

Rezolvare

Energia câmpului electric al condensatorului este :

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}U^2 C .$$

Dacă aplicăm relaţia (1.77) rezultă:

$$X = F = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{q=const} = -\frac{q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\frac{dC}{dx}\right) = \frac{q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{dx} .$$

Dacă se utilizează relaţia (1.78) rezultă aceeaşi expresie:

$$X = F = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{V=const} = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{dx} .$$

Folosind expresia capacităţii condensatorului plan rezultă:

$$F = -\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon A}{x^2} .$$

(1.80)

Semnul minus arată că forţa este de atracţie, adică în sens contrar creşterii coordonatei generalizate **x.**

2. Un sistem de trei plăci conductoare plane paralele, situate în aer şi având o suprafaţă **S** fiecare, de dimensiuni mari faţă de distanţa **d** dintre plăci, prezintă o capacitate C_1 între primele două plăci şi o capacitate C_2 între ultimele două plăci (fig.1.28). Prin legarea celor două plăci de la margine la o tensiune U_{AB} rezultă câte un potenţial constant $V_A>V_C>V_B$ pentru fiecare din cele trei plăci. Să se determine valorile distanţei **x** pentru care energia totală a câmpului electric al sistemului de plăci este minimă şi valoarea forţei ce se exercită în acest caz asupra plăcii din mijloc.

Rezolvare

Capacităţile dintre plăci au valorile:

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{x} \quad C_1 = \frac{\varepsilon S}{d-x} .$$

Energia câmpului electrostatic a sistemului de două conductoare este:

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} = \frac{C_1 (V_A - V_B)^2}{2} + \frac{C_2 (V_B - V_C)^2}{2} .$$

Valoarea coordonatei x pentru care energia electrică este minimă este de fapt valoarea pentru care se anulează derivata energiei câmpului electric în raport cu coordonata x:

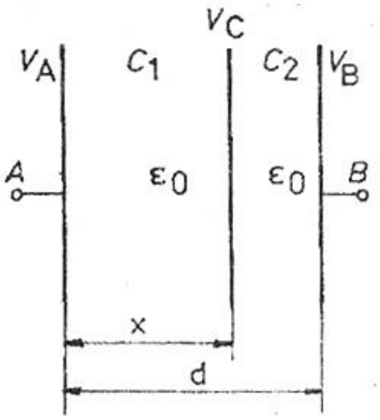

Fig.1.28.Explicativă la aplicaţia 2.

$$\frac{\partial W_e}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\varepsilon\, S}{2}\left[-\frac{(V_A - V_B)^2}{x^2} + \frac{(V_B - V_C)^2}{(d-x)^2}\right] = 0\,.$$

Rezultă valoarea coordonatei x:

$$x = d\left|\frac{V_A - V_B}{V_A - V_C}\right|\ .$$

Din punct de vedere fizic, soluţia corespunde numai dacă $V_A - V_B > V_B - V_C$, deoarece în caz contrar x >d ceea ce este imposibil, placa C aflându-se între cele două plăci laterale A şi B.

Forţa care acţionează asupra armăturii intermediare şi tinde să mărească distanţa x, va avea conform teoremei forţelor generalizate în câmpul electric valoarea zero:

$$F = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{V=const.} = 0\ .$$

3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a creşte distanţa dintre armăturile unui condenstor plan, având ca dielectric aerul, de la d_1=1 cm la d_2=2 cm. Capacitatea iniţială a condensatorului este C_1=100 pF. Să se calculeze de asemenea şi variaţia energiei condensa-torului dacă procesul a avut loc astfel:
1.- condensatorul a fost mereu conectat la o sursă de tensiune constantă de U= 10 kV;
2.- condensatorul încărcat a fost deconectat de la sursă.

Rezolvare

1. Pentru primul caz, deoarece tensiunea este constantă, lucrul mecanic va fi:

$$L_{12} = \int_{d_1}^{d_2} \overline{F}\, d\,\overline{x} = \frac{\varepsilon_0\, S\, U^2}{2}\int_{d_1}^{d_2}\frac{d\,x}{x^2} = \frac{\varepsilon_0\, S\, U^2}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 2{,}5\ mJ\ .$$

Variaţia energiei câmpului electric din condensator va fi:

$$\Delta\, W = W_2 - W_1 = \frac{C_2\, U^2}{2} - \frac{C_1\, U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\, S\, U^2}{2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = -2{,}5\ mJ\ .$$

Deşi sistemul primeşte lucru mecanic din exterior, energia condensatorului scade. Rezultă că sursa primeşte energia:

$$\Delta W_s = L_{12} - \Delta W = 5\ mJ\ .$$

2. În cazul al doilea, sarcina condensatorului este constantă:

$$q = q_1 = C_1 U = 10^{-6} C.$$

Ca urmare forţa ce acţionează este constantă şi egală cu:

$$F = \frac{q}{2\ \varepsilon_0 S}\ .$$

Lucrul mecanic făcut din exterior va fi:

$$L_{12} = F\ (d_2 - d_1) = 5\ mJ\ .$$

Variaţia energiei câmpului electric din condensator va fi:

$$\Delta\ W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2\ C_2} - \frac{q^2}{2\ C_1} = 5\ mJ\ .$$

În acest caz lucrul mecanic efectuat de forţele exterioare a dus la creşterea energiei câmpului electric.

1.9. METODE DE DETERMINARE A CÂMPULUI ELECTROSTATIC

Pentru determinarea câmpului electrostatic se pot folosi mai multe metode în funcţie de configuraţia acestuia. Se poate folosi metoda fluxului electric, metoda aproximării liniilor de câmp electric, metoda imaginilor etc. Deoarece metoda fluxului electric este cea mai simplă se va studia în acest curs doar această metodă.

1.9.1. Metoda fluxului electric (metoda fundamentală).

Această metodă este utilizată în cazul determinării câmpului electric care are o anumită simetrie, astfel încât legea fluxului electric aplicată unei anumite suprafeţe închise să se transforme dintr-o integrală vectorială într-o integrală scalară. Pentru calculul câmpului prin această metodă se vor parcurge următoarele etape de calcul:

1 – Se studiază simetria câmpului electric.

2 – Se alege o suprafaţă închisă **Σ** astfel încât în orice punct al suprafeţei (sau porțiuni ale suprafeții), vectorul inducţiei electrice $\overline{D}$ să aibă acelaşi modul şi aceeaşi orientare faţă de normala la suprafaţă.

3 – Se va aplica legea fluxului electric suprafeţei închise **Σ,** care datorită punctului 2 se va transforma dintr-o integrală vectorialî într-o integrală scalară:

$$\int_{\Sigma} \overline{D}\,\mathrm{d}\overline{S} = \int_{\Sigma} D\,dS\cos\alpha = q_{\Sigma}\,.$$

4 – Deoarece valoarea inducţiei D este constantă pe suprafaţă sau pe porțiuni, se poate scoate de sub semnul integralei, ramânând de integrat doar elementul de arie dS pe suprafaţa **Σ** , rezultatul fiind aria acestei suprafeţe.

5 – Se va calcula sarcina electrică din interiorul suprafeţei **Σ**, în funcţie de modul de distribuţie al acesteia (sarcini concentrate, distribuite în volum suprafeţei **Σ**, pe suprafeţe ce se află în interiorul suprafeței **Σ** sau liniar pe firele din interiorul suprafeței **Σ**). Sarcina electrică din interior se va calcula astfel:

$$q_{\Sigma} = \int_{V_{\Sigma}} \rho_{\mathrm{v}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V} + \int_{\mathrm{S}} \rho_{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{S} + \int_{\mathrm{C}} \rho_{\mathrm{l}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{l} + \sum_{k=1}^{n} q_k.$$

6 - Se va determina valoarea vectorului inducţiei electrice și a intensității câmpului electric pentru orice punct de pe suprafaţa considerată.

7 - Vectorul inducţei electrice se va obţine amplificând valoarea inducţei electrice obţinute la puctul 6 cu versorul normalei la suprafaţa **Σ** în punctul considerat.

Metoda se poate folosi şi în cazul unor câmpuri fără simetrie, dar la care câmpul se poate considera ca un rezultat a unei superpoziţii de câmpuri simetrice (vezi aplicaţia 2).

Aplicaţia 1.

Să se determine câmpul electric produs de o sferă dielectrică de rază R, încărcată uniform cu densitatea de sarcină electrică de volum $\boldsymbol{\rho_v}$ constantă, într-un punct B din exteriorul sferei aflat la distanţa R_B <R de centrul sferei şi într-un punct A din interiorul sferei aflat la distanţa R_A >R de centrul sferei (fig.1.29).

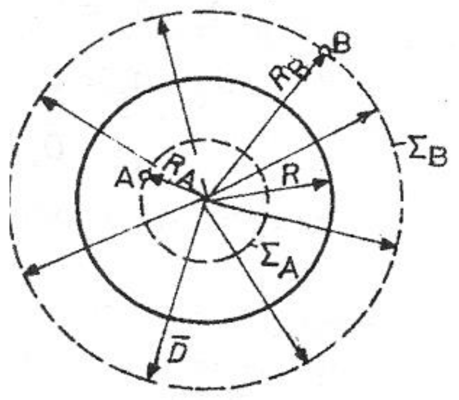

Fig. 1.29. Explicativă la aplicaţia 1.

Problema are o simetrice sferică. Liniile de câmp electric vor avea direcţiile după razele sferei şi vor avea sensul de la sferă spre exterior, deoarece sarcina electric este pozitivă.

Pentru determinarea inducţiei electrice din punctul B, se consideră o suprafaţă închisă $\mathbf{\Sigma_B}$ concentrică cu sfera şi de rază $R_B>R$ (fig.1.29). Aplicând legea fluxului electric suprafeţei $\mathbf{\Sigma_B}$ se obţine:

$$\int_{\Sigma_B} \overline{D}\, d\overline{S} = \int_{\Sigma_B} D\, dS \cos\alpha = q_{\Sigma_B} = \int_{V_{\Sigma_{SB}}} \rho_v \, dV = \int_{V_{sfer\breve{a}fer\breve{a}}} \rho_v \, dV = \boldsymbol{\rho_v}\, 4\, \pi . R^3 /3,$$

deoarece avem o distribuţie de sarcină electrică uniformă doar în interiorul suprafeţei sferei $\mathbf{\Sigma_B}$ care este de fapt volumul sferei dielectrice.

Din egalitatea de mai sus rezultă după integrare:

$$D . 4\, \pi\, R_B^{\,2} = \boldsymbol{\rho_v}\, 4\, \pi R^3 /3,$$

respectiv:

$$D = \boldsymbol{\rho_v}\, R^3 /3\, R_B^{\,2}\ ,$$

Pentru determinarea inducţiei electrice din punctul A, se consideră o suprafaţă închisă $\mathbf{\Sigma_A}$ concentrică cu sfera şi de rază $R_A < R$ (fig.1.29). Aplicând legea fluxului electric suprafeţei $\mathbf{\Sigma_A}$ se obţine:

$$\int_{\Sigma_A} \overline{D}\, d\overline{S} = q_{\Sigma_A} = \int_{V_{\Sigma_A}} \rho_v \, dV .$$

Deoarece avem o distribuţie uniformă a sarcinii electrice în interiorul suprafeţei sferei $\mathbf{\Sigma_A}$ care se află în interiorul sferei dielectrice, rezultă prin integrare:

$$D . 4\, \pi\, R_A^{\,2} = \boldsymbol{\rho_v}\, 4\, \pi . R_A^{\,3} /3,$$

respectiv:

$$D = \boldsymbol{\rho_v}\, R_A /3.$$

Aplicaţia 2.

Să se determine câmpul electric produs de o sferă dielectrică de rază R, încărcată uniform cu densitatea de sarcină electrică de volum $\boldsymbol{\rho_v}$ constantă, sfera având o cavitate sferică de rază r<R aflată la distanţa r <a<R de centrul sferei, într-un punct A din exteriorul sferei aflat pe linia centrelor la distanţa r_A>R de centrul sferei dielectrice şi într-un punct B din interiorul sferei aflat la distanţa r_B<R de centrul sferei, (OB $\perp$ OA) ca în figura 1.30.

Rezolvare

Câmpul electric produs de sfera din problemă poate fi considerat că este produs de o sferă plină de rază R având densitatea de volum ρ_v constantă şi de o sferă fictive de rază r încărcată cu densitatea de volum - ρ_v constantă, aflată în locul golului. Din punct de vedere al încărcării electrice, cele două distribuţii ar da încărcarea reală a sferei iniţiale. Ca urmare se va calcula inducţia electrică produsă în punctual A de sfera mare, respective de sfera fictivă mică, inducţia electrică din punctual A fiind suma vectorială a celor două inducţii electrice.

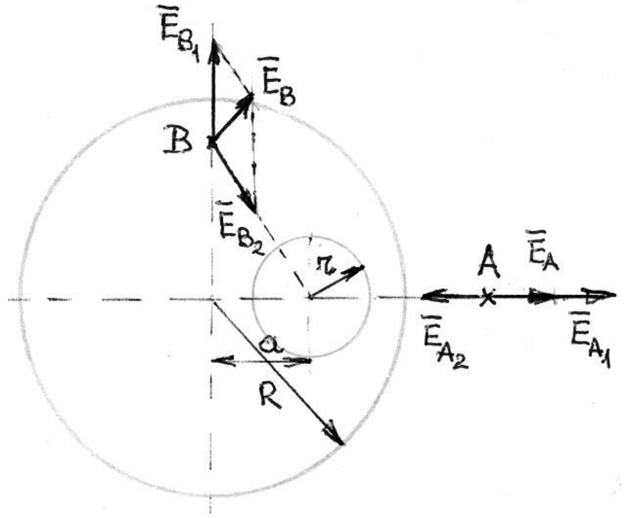

Fig.1.30. Explicativă la aplicaţia 2.

Folosind rezultatul de la aplicaţia 1 vom avea pentru cele două inducţii expresiile:

$$D^1_A = \boldsymbol{\rho_v} R^3 /3\, r_A^2 , \qquad D^2_A = \boldsymbol{\rho_v}\, r^3 /3\, (r_A - a)^2 .$$

Deoarece vectorii au sensuri contrare (sarcina golului s-a considerat negativă şi ca urmare vectorul inducţiei vine spre gol), valoarea inducţiei în punctul A va fi:

$$D_A = D^1_A - D^2_A = \boldsymbol{\rho_v} R^3/3 r_A^2 - \boldsymbol{\rho_v} r^3/3 (r_A - a)^2 .$$

Sensul vectorului este de la sferă spre exterior dacă rezultatul este pozitiv și spre sferă dacă rezultatul este negativ.

Pentru a calcula inducţia electrică produsă în punctual B se vor calcula inducţiile electrice produse de sfera mare, respective de sfera fictivă mică, inducţia electrică din punctual B fiind suma vectorială a celor două inducţii electrice.

Folosind rezultatele de la aplicaţia 1 vom avea pentru cele două inducţii expresiile:

Pentru inducţia produsă de sfera mare în punctul B:

$$D^1_B = \boldsymbol{\rho_v} r_B/3,$$

deoarece punctul este în interiorul sferei mari, iar pentru inducția produsă de cavitate în B:

$$D^2_B = \boldsymbol{\rho_v} a^3/3(r_B^2 + a^2) ,$$

deoarece punctul B se află în exteriorul cavității.

Valoarea inducţiei electrice în punctul B se obţine adunând vectorial cei doi vectori ai inducţiei electrice din punctul B (vezi figura 1.30).

Aplicaţia 3.

Să se determine potenţialul unui punct aflat într-un câmp electric determinat de o distribuţie uniformă de sarcină electrică $\boldsymbol{\rho_l}$ pe un fir rectiliniu infinit de secţiune foarte mică.

Potenţialul unui punct P se determină în funcţie de potenţialul unui punct de referinţă P_0 cu formula:

$$V(P) = V(P_0) + \int_P^{P_0} \overline{E}\, d\bar{l} .$$

Punctul de referinţă se poate lua orice punct iar valoarea potenţialului acestuia se ia de regulă zero. Deoarece conductorul este infinit se va lua ca punct de referinţă un punct P_0 care se află la distanţa r_0 de conductor şi care are potenţialul nul (fig.1.31).

Se consideră o suprafaţă închisă Σ de forma unui cilindru circular drept de rază r având ca axă firul încărcat cu sarcină electrică. Suprafaţa Σ se compune din suprafaţa laterală a cilindrului S_l şi suprafeţele celor două baze S_{bs} şi S_{bj}. Câmpul electric are o simetrie cilindrică, liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe conductor şi au sensul de la conductor spre exterior (sarcina fiind pozitivă).

Aplicând suprafeţei Σ legea fluxului electric şi ţinând cont că pe cele două suprafeţe ale bazelor vectorul inducţie electrică $\overline{D}$ este perpendicular pe elementul de suprafaţă $d\,\overline{S}$, rezultă:

$$\int_{\Sigma} \overline{D}\, d\,\overline{S} = \int_{S_{bs}} \overline{D}\, d\,\overline{S} + \int_{S_{js}} \overline{D}\, d\,\overline{S} + \int_{S_l} \overline{D}\, d\,\overline{S} =$$

$$= \int_{S_{bs}} D\, dS \cos\frac{\pi}{2} + \int_{S_{bj}} D\, dS \cos\frac{\pi}{2} + \int_{S_l} D\, dS \cos$$

$$= \int_{S_l} D\, d\,S\, \cos 0 = D\, 2\pi\, r\, h =$$

$$= q_{\Sigma} = \int_1^2 \rho_l\, d\,l = \rho_l\, h\,,$$

unde h reprezintă înălţimea cilindrului Σ considerat. Nu avem în interior sarcină electrică decât pe porțiunea de fir din interiorul cilindrului.

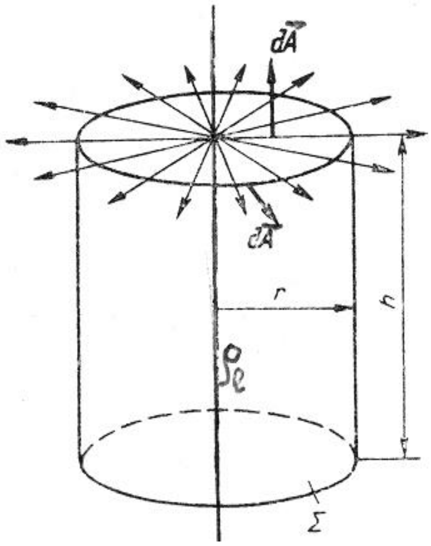

Fig.1.31 Fir încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină pozitivă ρ_l .

Din relaţia de mai sus rezultă valoarea inducţiei electrice, respectiv a intensităţii câmpului electric produs de firul încărcat electric într-un punct aflat la distanţa r de conductor:

$$D = \frac{\rho_l}{2\,\pi\, r} \text{ şi respectiv } E = \frac{\rho_l}{2\,\pi\,\varepsilon\, r}\,.\quad \overline{E} = \frac{\rho_l}{2\,\pi\,\varepsilon\, r}\,\frac{\overline{r}}{r}.$$

Înlocuind în formula de calcul a potenţialului valoarea intensităţii câmpului electric şi ţinând seama de faptul că liniile de câmp electric sunt după raze, vom considera curba de integrare o rază și rezultă:

$$V(P) = V(P_0) + \int_P^{P_0} \overline{E}\, d\,\overline{l} = \int_r^{r_0} \overline{E}\, d\,\overline{r} = \int_r^{r_0} E\, d\,r\, \cos 0 = \int_r^{r_0} \frac{\rho_l}{2\,\pi\,\varepsilon}\,\frac{d\,r}{r} = \frac{\rho_l}{2\,\pi\,\varepsilon} \ln\frac{r_0}{r}.$$

Dacă se consideră pentru simplificare că punctul de referinţă se află la 1 m de conductor rezultă potenţialul punctului P aflat la distanţa r de conductor ca fiind:

$$V(P) = \frac{\rho_l}{2\,\pi\,\varepsilon} \ln\frac{1}{r}. \qquad (1.81)$$

Din relaţia de mai sus se vede că în cazul considerat, pentru puncte aflate la distanţe mai mici de 1 m potenţialul este pozitiv (r < 1, 1/r > 1, ln(1/r) > 0, *V*(P) > 0) iar pentru puncte aflate la o distanţă mai mare de 1 m potenţialul este negativ.

1.9.2. Metoda aproximării liniilor de câmp electric prin drepte şi arce de cerc

Se ştie că între două plane paralele încărcate electric cu sarcini electrice de semne contrare, apare un câmp electric omogen, având liniile de câmp perpendiculare pe aceste

suprafeţe. Acest lucru este o consecinţă a condiţie de echilibru electrostatic pentru conductoare omogene. Liniile de câmp electric intră şi ies perpendicular pe suprafeţele electroconductoare (1.31).

$$U_{12} = V_1 - V_2 = E\, d\ .$$

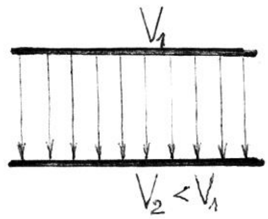

Fig.1.31. Liniile de câmp electric între două plane paralele.

În cazul în care avem unghiuri diedre, liniile de câmp se vor aproxima prin arce de cerc, având centrul în vârful unghiului diedru, astfel linia de câmp va fi perpendiculară pe suprafaţa planelor unghiului diedru.

Pentru determinarea câmpului prin această metodă se procedeată astfel:

1 – Se consideră mai întâi planele de bază care sunt două plane paralele. Între acestea câmpul se consideră uniform şi liniile sunt paralele şi perpendiculare pe cele două plane.

2 – Pentru unghiurile diedre dintre corpuri şi planele de bază se trasează liniile de câmp sub forma unor arce de cerc cu centrul în vârful unghiului diedru (vezi figurile 1.32 a,b,c)

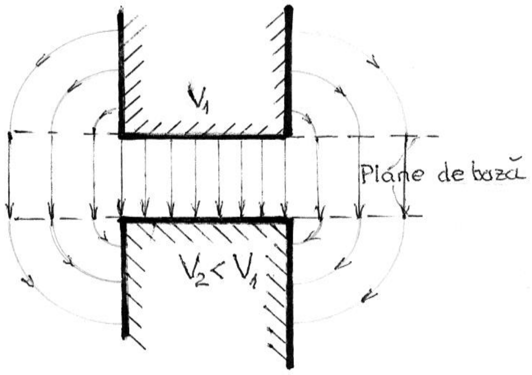

Fig.1.32.a Liniile de câmp electric între două corpuri de formă paralelipipedică.

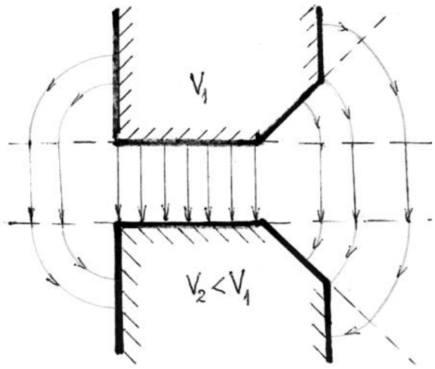

Fig.1.32.b Liniile de câmp electric între două corpuri care au şi un unghi diedru ascuţit.

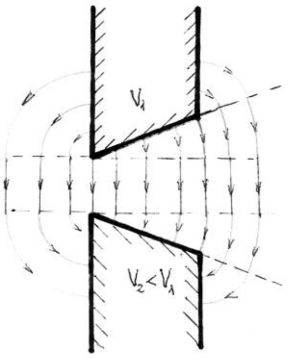

Fig.1.32.c Liniile de câmp electric între două corpuri cu vârfuri.

Observaţie. În cazul vârfurilor, linia de câmp electric are lungimea cea mai mică şi ca urmare intensitatea câmpului electric are valoarea cea mai mare ($E=U$/d) (fig.1.32.c). Acest lucru este utilizat la construcţia paratrăsnetelor.

Metoda permite determinarea câmpului electric dacă se cunosc potenţialele celor două corpuri metalice.

1.9.3. Metoda imaginilor

Metoda se utilizează în cazurile generale când există corpuri încărcate cu sarcină electrică aflate în vecinătatea unor corpuri metalice sau a pămîntului.

Metoda constă a înlocui corpul metalic (pământul) printr-o distribuţie de sarcini electrice q'_k aflate în zona fostului corp metalic (pământului) înlocuit cu mediul aflat iniţial în jurul corpului metalic. Distribuţia trebuie astfel aleasă încât zona suprafeţei corpului să rămână o suprafaţă echipotenţială (V=const.) (vezi fig 1.33).

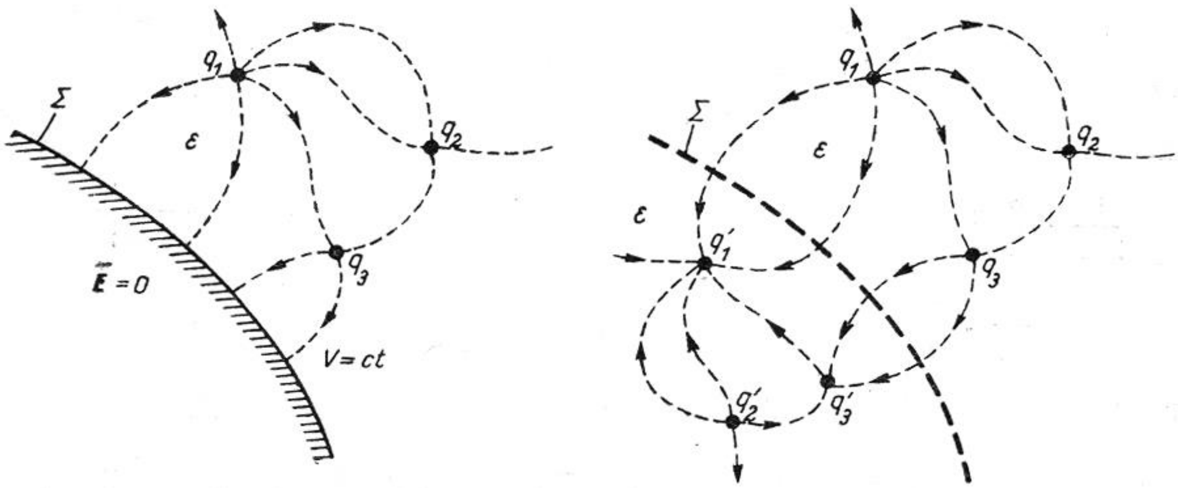

Fig. 1.33. Schema reală şi schema echivalentă cu sarcini imagine.

Cu noua distribuţie de sarcini, se determină câmpul electric folosind metoda superpoziţiei. Câmpul electric într-un punct este suma vectorială a câmpurilor produse de fiecare sarcină (reală și imagine) în parte în punctul respectiv.

Dacă considerăm o suprafaţă închisă **Σ** ce înconjoară corpul metalic, în situaţia dată, respectiv în situaţia echivalentă, fluxul electric prin această suprafaţă trebuie să se conserve, ceeace înseamnă că suma sarcinilor imagine trebuie să fie egală cu suma sarcinilor aflate pe corpul metalic iniţial:

$$q_{corp\ iniţial} = \Sigma\, q'_k\ .$$

Aplicație

Se consideră un corp încărcat cu sarcina +***q*** aflat la distanţa h de pământ (fig.1.34).

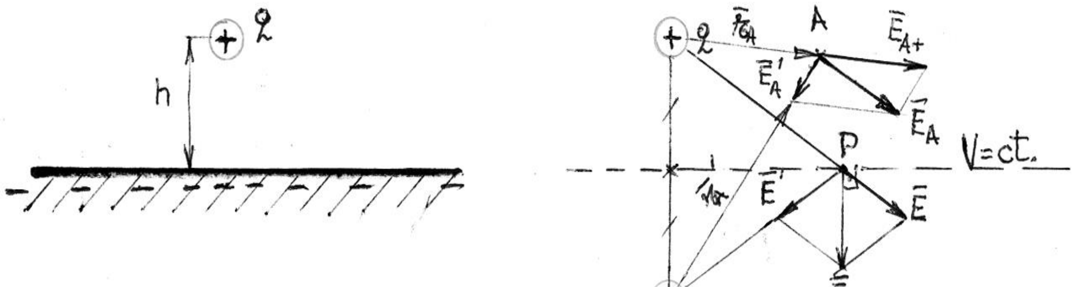

Fig.1.34. Explicativă pentru determinarea poziţiei şi valorii sarcinii imagine.

Sarcina pozitivă ***q*** va încărca prin influenţă pământul cu sarcină negativă. Distribuţia acestei sarcini electrice nu este uniformă (densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice $\boldsymbol{\rho_s}$ nu este constantă). În zona apropiată sarcinii ***q*** densitatea de sarcină apărută în pământ este mai mare, valoarea ei va scădea o dată cu îndepărtarea de sarcină. Expresia acestei distribuţii de sarcină este dificil de calculat, motiv pentru care se utilizează metoda imaginilor. Se va înlocui pământul cu o distribuţie de sarcini imaginare astfel încât suma lor să fie egală cu suma sarcinilor induse, iar potenţialul pământului să fie constant (suprafaţă echipotenţială). Acest lucru impune ca liniile de câmp electric să fie perpendiculare pe suprafaţa pământului. Sarcina totală apărută prin influenţă va avea valoarea $-\boldsymbol{q}$.

Sarcina $\boldsymbol{q}$ produce în punctual P aflat pe suprafaţa echipotenţială un câmp electric de intensitate $\overline{E}$ aflat pe linia ce uneşte sarcina cu punctual P şi îndreptat spre acesta. Sarcina imagine $\boldsymbol{q}'$ trebuie să producă un câmp electric $\overline{E}'$ care adunat cu intensitatea $\overline{E}$ produsă de sarcina iniţială $\boldsymbol{q}$ să dea un câmp electric resultant perpendicular pe suprafaţa echipotenţială (suprafaţa pământului). Acest câmp electric trebuie să fie simetric faţă de normala la suprafaţa pământului şi să aibă acelaşi modul.

Deoarece proprietăţile de mai sus trebuiesc îndeplinite indiferent de poziţia punctului P, înseamnă că sarcina imagine trebuie să aibă valoare negativă şi egală cu $-\boldsymbol{q}$ şi trebuie să fie aşezată simetric daţă de $\boldsymbol{q}$ în raport cu suprafaţa echipotenţială.

Rezultă din aceste considerente, că sarcina imagine este $-\boldsymbol{q}$ şi este aşezată simetric faţă de planul pământului, motiv pentru care metoda se mai numeşte metoda imaginilor).

Pentru a determina intensitatea câmpului electric într-un punct A se va determine intensitatea cîmpului E_{A+} produs de sarcina +q în A (care direcția dreptei qA și sensul de la q la A, sarcina fiind pozitivă) și intensitatea câmpului electric E_{A-} produs de sarcina imagine $\boldsymbol{q}'$ în A (care are direcția dreptei $\boldsymbol{q}'$ A și sensul de la A la $\boldsymbol{q}'$, sarcina fiind negativă)

TEME DE STUDIU

Test 1.

Care este expresia energiei câmpului electrostatic produs de o distribuţie de sarcini electrice ?.

Test 2.

Care este expresia densităţii de volum a energiei câmpului electrostatic ?.

Test 3.

Care sunt expresiile teoremelor forţelor generalizate în câmpul electrostatic ?.

Test 4.

Ce este forţa generalizată ?.

Test 5.

Ce înseamnă dacă forţa generalizată are semnul minus, dar plus ?.

Test 6

Capacitatea unui condensator depinde de:

- sarcina cu care este încărcat condensatorul;
- tensiunea electrică dintre plăci;
- de dimensiunile geometrice şi permitivitate dielectricului.

Test 7

Care este unitatea de măsură a capacităţii condensatoarelor:

- Coulombul;
- Faradul;
- Volt / metru.

Test 8.

Care sunt metodele de determinare ale câmpului electrostatic ?.

Test 9.

Când se poate folosi metoda fluxului electric ?.

Test 10.

Care este potenţialul produs de un fir rectiliniu filiform încărcat uniform cu densitate liniară de sarcină electrică într-un punct aflat la distanţa r de conductor ?.

Test 11.

Cum depinde semnul potenţialului de distanţa punctului faţă de conductor ?.

Test 12.

Când se poate folosi metoda fluxului electric chiar dacă câmpul electric nu prezintă simetrie ?.

Test 13.

Cum se aproximează liniile de câmp electric și cum se iau planele de referință la metoda aproximării liniilor de cîmp electric.

Test 14.

Cum se iau și ce valori au sarcinile imagine la metoda imaginilor pentru determinarea câmpului electrostatic.