Curs 7 Analiză Matematică

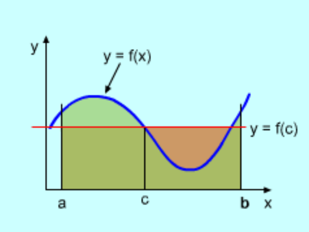
Radu MICULESCU

November 2023

Teorema de medie pentru integrala Riemann

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă.*
Atunci există $c \in [a, b]$ *astfel încât*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$


y
y = f(x)
y = f(c)
a
c
b
x

Demonstrație

Conform teoremei lui Weierstrass, există $x_*, x^* \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.
Utilizând Teorema de "monotonie" a integralei Riemann, deducem că

$$f(x_*) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(x^*),$$

de unde, cum f are proprietatea lui Darboux (căci este continuă), există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, i.e. concluzia. $\square$

Orice funcție continuă admite primitive

Pentru orice $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă, funcția* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, *dată de*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, *este derivabilă și*

$$F' = f$$

(i.e. F este o primitivă a lui f).

Demonstrație

Pentru $c \in [a, b]$ arbitrar ales, vom arăta că există

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}$$

și că

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c).$$

În acest scop, vom considera un șir arbitrar $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $[a, b] \setminus \{c\}$ astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} u_n = c,$$

și vom dovedi că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(u_n) - F(c)}{u_n - c} = f(c).$$

Într-adevăr, conform Teoremei de medie pentru integrala Riemann, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există c_n, între c și u_n, cu proprietatea că

$$F(u_n) - F(c) = f(c_n)(u_n - c),$$

de unde

$$\frac{F(u_n) - F(c)}{u_n - c} = f(c_n). \tag{1}$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c$$

(căci

$$|c_n - c| \leq |u_n - c|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$\lim_{n\to\infty} u_n = c)$$

și f este continuă în c, prin trecere la limită în (1), după $n \to \infty$, deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(u_n)-F(c)}{u_n-c}$ și că valoarea sa este $f(c)$. $\square$

Exemplu

Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin^3 x}.$$

Conform teoremei de medie, pentru orice $x \geq 0$, există $c_x \in [0, x]$ astfel încât

$$\int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt = x \ln(1+c_x^2),$$

de unde deducem că

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt = 0.$$

Similar se arată că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \int_0^x \ln(1+t^2)dt = 0,$$

deci

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x \ln(1+t^2)dt = 0.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x \ln(1+t^2)dt\right)'}{(\sin^3 x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{3},$$

concluzionăm că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin^3 x} = \frac{1}{3}.$$

TEMĂ

Să se calculeze:

i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x t^n \sqrt{1+t^2}\,dt}{x^{n+2}},$$

unde $n \in \mathbb{N}$;
ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t\,dt}{x^2}.$$

Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann

Fie $\phi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *și* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *astfel încât:*
i) ϕ *este derivabilă;*
ii) $\phi^{'}$ *este continuă*;
iii) f *este continuă.*
Atunci:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(\phi(x)\phi^{'}(x)dx.$$

Demonstrație

Dacă F este o primitivă a funcției f, atunci $F \circ \phi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \phi)\phi^{'}$ și Formula Leibniz-Newton ne îndreptățește să scriem egalitățile

$$\int_a^b f(\phi(x)\phi^{'}(x)dx = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

și

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)),$$

de unde deducem concluzia. □

Exemplu

Să se calculeze

$$\int_0^1 x^2 e^{x3} dx.$$

Avem

$$\int_0^1 x^2 e^{x3} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \Big|_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

TEMĂ

Să se calculeze:

i)

$$\int_0^1 x(x^2-1)^2 dx;$$

ii)

$$\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx;$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx;$$

iv)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx;$$

v)

$$\int_0^{1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx;$$

vi)

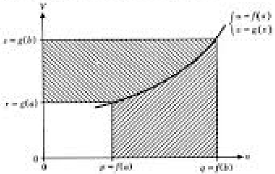
$$\int_1^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *două funcții de clasă* $\mathcal{C}^1$ *(i.e. derivabile, cu derivatele continue).*
Atunci

$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx.$$

Proof without Words: Integration by Parts



Area ▧ + Area ▨ = qs − pr

$$\int_r^s u\,dv + \int_p^q v\,du = uv\Big|_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

—Roger B. Nelsen
Lewis and Clark College
Portland, OR 97219

Demonstrație

Deoarece

$$(fg)^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x),$$

avem

$$\int_a^b (fg)^{'}(x)dx = \int_a^b (f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x))dx,$$

de unde, utilizând formula Leibniz-Newton, deducem că

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)g^{'}(x)dx + \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx,$$

i.e. concluzia. □

Exemplu

Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

Cu notația

$$I \overset{not}{=} \int_0^{\pi} e^x \sin x dx,$$

avem

$$I = \int_0^{\pi} (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x \,|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x (\sin x)' dx =$$

$$= -\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = -\int_0^{\pi} (e^x)' \cos x dx =$$

$$= -e^{x}\cos x \,\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} e^{x}(\cos x)' dx = e^{\pi} + 1 - \int_{0}^{\pi} e^{x}\sin x dx =$$

$$= e^{\pi} + 1 - I,$$

de unde

$$I = \frac{e^{\pi}+1}{2},$$

i.e.

$$\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin x dx = \frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

TEMĂ

Să se calculeze:

i)

$$\int_{1}^{e} \ln x dx;$$

ii)

$$\int_{0}^{1} xe^{-x} dx;$$

iii)

$$\int_0^1 arctgx dx;$$

iv)

$$\int_0^1 x \cdot arctgx dx;$$

v)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

Suprafețe poligonale și ariile lor

Definiție. *Se numește suprafață poligonală o regiune din plan cuprinsă între laturile unui poligon (inclusiv linia poligonală) sau o reuniune finită de asemenea regiuni.*

Definiție. *Aria unei suprafețe poligonale P este suma ariilor triunghiurilor în care se descompune P.*

Observații

1. *Aria suprafeței poligonale P se notează cu $\mathcal{A}(P)$.*

2. *Definiția anterioară este coerentă*, i.e. $\mathcal{A}(P)$ nu depinde de descompunerea considerată.

Aria interioară și aria exterioară a unei suprafețe plane mărginite

Pentru o suprafață plană mărginită S (i.e. există un pătrat care include pe S) vom considera

$$\mathcal{I} = \{P \mid P \text{ este o suprafață poligonală și } P \subseteq S\}$$

și

$$\mathcal{E} = \{Q \mid Q \text{ este o suprafață poligonală și } S \subseteq Q\}.$$

Deoarece avem $P \subseteq S \subseteq Q$, deducem că

$$\mathcal{A}(P) \leq \mathcal{A}(Q),$$

pentru orice $P \in \mathcal{I}$ și orice $Q \in \mathcal{E}$, deci putem considera

$$\mathcal{A}_*(S) = \sup\{\mathcal{A}(P) \mid P \in \mathcal{I}\}$$

și

$$\mathcal{A}^*(S) = \inf\{\mathcal{A}(Q) \mid Q \in \mathcal{E}\},$$

numite aria interioară și respectiv aria exterioară a lui S.

Aria unei suprafețe plane mărginite

Observație. *În cadrul de mai sus, avem*

$$\mathcal{A}_*(S) \leq \mathcal{A}^*(S).$$

Definiție. *Spunem că o suprafață plană mărginită S are arie dacă*

$$\mathcal{A}_*(S) = \mathcal{A}^*(S),$$

caz în care această valoare comună definește aria lui S care este notată cu $\mathcal{A}(S)$.

O caracterizare alternativă a suprafețelor plane mărginite care au arie

Pentru o suprafață plană mărginită S, următoarele afirmații sunt echivalente:

i) S are arie;

ii) există $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ și $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(P_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(Q_n).$$

În acest caz, valoarea comună a celor două limite este $\mathcal{A}(S)$.

Proprietatea de aditivitate a ariei

Pentru două suprafețe plane mărginite S_1 și S_2 care nu au puncte comune interioare și care au arie, suprafața $S_1 \cup S_2$ are arie și

$$\mathcal{A}(S_1 \cup S_2) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2),$$

i.e. aria este aditivă.

Aria de sub graficul unei funcții continue

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ *continuă.*
Atunci suprafața plană

$$S = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ și } y \in [0, f(x)]\}$$

are arie și

$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplu

Să se calculeze aria suprafeței plane care este determinată de curbele

$$y = \frac{8}{x^2},\ y = x \text{ și } x = 4.$$

Aria cerută este

$$\int_2^4 x dx - \int_2^4 \frac{8}{x^2} dx = 4.$$

Temă

Să se calculeze aria suprafeței plane care este determinată de curbele:

i)

$$y = x^2, x = -4, y = 0;$$

ii)

$$y = x^2 - 6x + 5, x + y = 11.$$

Corpuri poliedrale și volumul lor

Definiție. *Se numește corp poliedral o reuniune finită de tetraedre.*

Definiție. *Volumul unui corp poliedral P este suma volumelor tetraedrelor în care se descompune P.*

Observații

1. *Volumul corpului poliedral P se notează cu $\mathcal{V}(P)$.*

2. *Definiția anterioară este coerentă*, i.e. $\mathcal{V}(P)$ nu depinde de descompunerea considerată.

Volumul interior și exterior al unui corp geometric mărginit

Pentru un corp geometric mărginit C (i.e. există un cub care include pe C) vom considera

$$\mathcal{I} = \{P \mid P \text{ este un corp poliedral și } P \subseteq C\}$$

și

$$\mathcal{E} = \{Q \mid Q \text{ este un corp poliedral și } C \subseteq Q\}.$$

Deoarece avem $P \subseteq C \subseteq Q$, deducem că

$$\mathcal{V}(P) \leq \mathcal{V}(Q),$$

pentru orice $P \in \mathcal{I}$ și orice $Q \in \mathcal{E}$, deci putem considera

$$\mathcal{V}_*(C) = \sup\{\mathcal{V}(P) \mid P \in \mathcal{I}\}$$

și

$$\mathcal{V}^*(C) = \inf\{\mathcal{V}(Q) \mid Q \in \mathcal{E}\},$$

numite volumul interior și respectiv volumul exterior al lui C.

Volumul unui corp geometric mărginit

Observație. *În cadrul de mai sus, avem*

$$\mathcal{V}_*(C) \leq \mathcal{V}^*(C).$$

Definiție. *Spunem că un corp geometric mărginit C are volum dacă*

$$\mathcal{V}_*(C) = \mathcal{V}^*(C),$$

caz în care această valoare comună definește volumul lui C care este notat cu $\mathcal{V}(C)$.

O caracterizare alternativă a corpurilor geometrice mărginite care au volum

Pentru un corp geometric mărginit C*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) C *are volum;*

ii) există $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ *și* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{V}(P_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}(Q_n).$$

În acest caz, valoarea comună a celor două limite este $\mathcal{V}(C)$.

Proprietatea de aditivitate a volumului

Pentru două corpuri geometrice mărginite C_1 și C_2 care nu au puncte comune interioare și care au volum, corpul $C_1 \cup C_2$ are volum și

$$\mathcal{V}(C_1 \cup C_2) = \mathcal{V}(C_1) + \mathcal{V}(C_2),$$

i.e. volumul este aditiv.

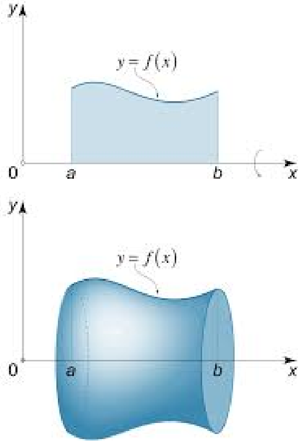
Volumul corpurilor de rotație

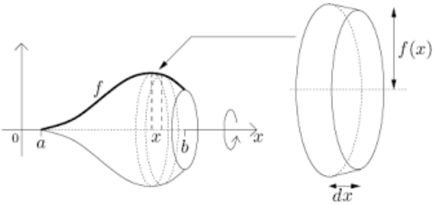
Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ *continuă.*
Atunci corpul geometric

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b] \text{ și } y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

are volum și

$$\mathcal{V}(C) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$


y
y = f(x)
0
a
b
x
y
y = f(x)
0
a
b
x


f
0
a
x
b
x
f(x)
dx

Exemplu

Să se calculeze volumul elipsoidului de rotație, i.e. volumul corpului obținut prin rotirea mulțimii

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

unde $a, b > 0$, în jurul axei Ox.

Considerând funcția $f : [0, a] \to [0, \infty)$, dată de

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

pentru orice $x \in [0, a]$, volumul cerut este

$$2\pi \int_0^a f^2(x)dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

În particular obținem că volumul sferei de rază r este

$$\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Temă

Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de:

i) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \sin x,$$

pentru orice $x \in [0, \pi]$;

ii) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = e^{-x},$$

pentru orice $x \in [0, 2]$.

Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x t^n\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^{n+2}}.$$

Soluție. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x t^n\sqrt{1+t^2}dt\right)'}{\left(x^{n+2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\sqrt{1+x^2}}{(n+2)x^{n+1}}=\frac{1}{n+2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{1}{n+2},$$

conform Teoremei lui l'Hospital, concluzionăm că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x t^n\sqrt{1+t^2}dt}{x^{n+2}}=\frac{1}{n+2}.$$

Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx,$$

unde $f:[0,1]\to(0,\infty)$ *este o funcție continuă.*

Folosind Teorema de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann-Stieltjes și Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann, obținem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1dx = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx.$$

Folosind Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann, avem

$$n\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx = \int_0^1 (x^n)' \frac{x}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 x^n \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^n \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Cum

$$0 \leq \int_0^1 x^n \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

utilizând lema cleștelui rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = 0,$$

de unde

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}.$$

Să se arate că există

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \int_{x}^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

și să se calculeze valoarea sa.

Folosind Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann, avem

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = -\int_x^{3x} \left(\frac{1}{t}\right)' \sin t dt = -\frac{\sin t}{t} \Big|_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt =$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 3x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt,$$

de unde, conform Teoremei de medie, există $c_x \in (x, 3x)$ astfel încât

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 3x}{3x} + 2x \frac{\cos c_x - 1}{c_x} + \ln 3.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} c_x = 0$, deducem că

$$\lim_{x \longrightarrow 0} 2x \frac{\cos c_x - 1}{c_x} = 0.$$

Având în vedere faptul că

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1,$$

tragem concluzia că există $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \int\limits_{x}^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ și că

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \int\limits_{x}^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \ln 3.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} n\int\limits_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx,$$

unde $a > 0$.

Folosind Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann, avem

$$n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \int_0^1 x(\ln(a+x^n))' dx = \ln\frac{a+1}{a} - \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a})dx,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Deoarece

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a})dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{a}dx = \frac{1}{a(n+1)},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n+1)} = 0,$$

conform lemei cleștelui, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a})dx = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \ln\frac{a+1}{a}.$$