CURSUL 8

2.7.6.3. Metoda generatorului echivalent de curent (Norton).

Această metodă se utilizează în cazurile în care se cere să se determine tensiunea între două puncte oarecare A şi B ale unei reţele electrice liniare. Prin această metodă se înlocuieşte întreaga reţea, cu excepţia laturii AB cu un generator de curent echivalent, având curentul $I_g = I_{ABsc}$ şi conductanţa interioară $G_i = G_{AB0}$ (fig.2.34). I_{ABsc} reprezintă intensitatea curentului ce trece prin latura AB dacă rezistenţa ei R_{AB} se consideră nulă, iar G_{AB0} - conductanţa interioară a reţelei pasivizate faţă de bornele A şi B, fără latura AB.

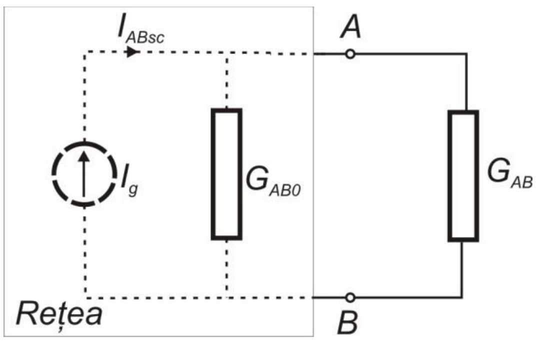

Fig.2.34. Explicativă la generatorul de curent echivalent.

Tensiunea electrică între punctele A şi B va fi:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}}. \quad (2.78)$$

Demonstrație.

Din figura 2.34 se determină tensiunea U_{AB}:

$$U_{AB} = I_{AB} \cdot R_{AB} = I_{ABsc} \frac{R_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} \cdot R_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{\dfrac{R_{AB} + R_{AB0}}{R_{AB} \cdot R_{AB0}}} = \frac{I_{ABsc}}{\dfrac{1}{R_{AB0}} + \dfrac{1}{R_{AB}}} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB0} + G_{AB}}.$$

Pentru determinarea tensiunii electrice între două puncte A şi B ale unei reţele prin această metodă, se procecedează astfel:

a) se anulează rezistenţa R_{AB} a latuni AB;

b) se calculează curentul de scurtcircuit din latura AB, când R_{AB} = 0;

c) se pasivizează reţeaua şi se calculează conductanţa dintre punctele A şi B, G_{AB0}, latura AB fiind eliminată;

d) se calculează tensiunea U_{AB} cu ajutorul relaţiei (2.78).

Aplicaţie

Se dă reţeaua electrică din figura 2.35a, în care se cunosc valorile t.e.m., rezistenţele interioare ale surselor şi rezistenţele rezistoarelor. Se cere să se calculeze prin metoda generatorului echivalent de tensiune curentul I_3 şi prin metoda generatorului echivalent de curent, tensiunea U_{AB}.

Rezolvare

Valoarea curentului I_3 se calculează cu relaţia (2.77), (metoda generatorului echivalent de tensiune):

$$I_3 = I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}}.$$

Calculul tensiunii U_{AB0} se face cu ajutorul reţelei electrice din figura 2.35b, în care lipseşte latura AB:

$$U_{AB0} = U_{e2} - \frac{(R_3 + R_4 + r_{i2})(U_{e2} - U_{e1})}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_{i1} + r_{i2}} =$$
$$= \frac{U_{e2}(R_1 + R_2 + r_{i1}) + U_{e1}(R_3 + R_4 + r_{i2})}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_{i1} + r_{i2}}.$$

Rezistenţa echivalentă între bornele A şi B ale reţelei pasivizate (fig. 2.35c) este :

$$R_{AB0} = \frac{(R_1 + R_2 + r_{i1})(R_3 + R_4 + r_{i2})}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_{i1} + r_{i2}}.$$

Valoarea curentului I_3 va fi :

$$I_3 = \frac{U_{e2}(R_1 + R_2 + r_{i1}) + U_{e1}(R_3 + R_4 + r_{i2})}{R_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_{i1} + r_{i2}) + (R_1 + R_2 + r_{i1})(R_3 + R_4 + r_{i2})}.$$

Pentru calculul tensiunii U_{AB} se aplică relaţia (2.78),(metoda generatorului de curent echivalent):

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} = \frac{I_{ABsc}}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{AB0}}}.$$

Curentul de scurtcircuit I_{Absc} se calculează cu ajutorul schemei din figura 2.35d, obţinută prin scurtcircuitarea laturii AB:

$$I_{ABsc} = \frac{U_{e1}}{R_1 + R_2 + r_{i1}} + \frac{U_{e2}}{R_3 + R_4 + r_{i2}}.$$

Tensiunea U_{AB} rezultă:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} = \frac{\left[U_{e2}(R_1 + R_2 + r_{i1}) + U_{e1}(R_3 + R_4 + r_{i2})\right]R_5}{R_5(R_1 + R_2 + r_{i1} + R_3 + R_4 + r_{i2}) + (R_1 + R_2 + r_{i1})(R_3 + R_4 + r_{i2})}.$$

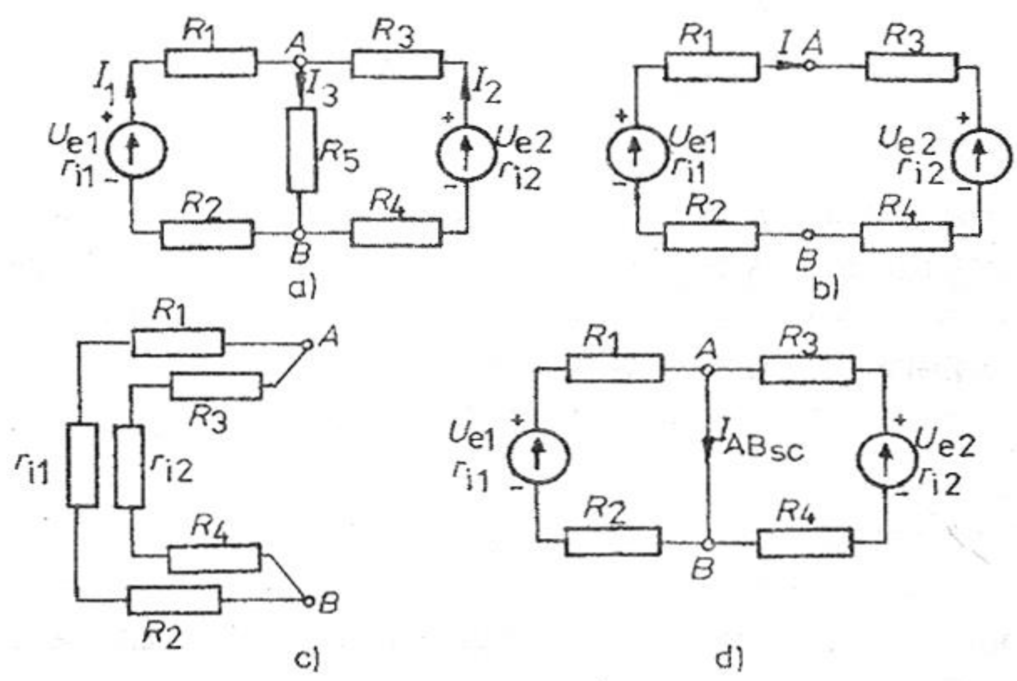

Fig.2.35. Reţeaua electrică rezolvată la aplicaţie.

2.7.6.4. Metoda curenților ciclici (curenți de ochiuri).

Metoda se folosește în cazul în care numărul ochiurilor independente O este mult mai mic decât numărul laturilor rețelei L (O << L). Metoda introduce un număr O de necunoscute fictive notate cu prim, numite curenți ciclici sau curenți de ochiuri. Curenții se vor figura în interiorul ochiurilor independente printr-o săgeată. Curenții reali din laturi se vor determina ca fiind suma algebrică a curenților ciclici care traversează latura respectivă. Fiecărui ochi independent i se atribuie un curent fictiv I_k'

Metodologia de rezolvare a rețelelor de curent continuu prin metoda curenților ciclici.

1- Se determină numărul N de noduri ale rețelei;
2- Se determină numărul L de laturi ale rețelei;
3- Se va figura pe fiecare latură câte un singur curent. Sensul curentului prin latură se va lua arbitrar. Dacă o latură conține o sursă de curent, curentul din latură este și este chiar curentul J al sursei;

4- Se determină numărul de ochiuri independente: O = L – N + 1 și se vor stabili care sunt acestea;
5- Fiecărui ochi independent i se va atribui un curent ciclic I_k'. Sensul curentului se va alege arbitrar. Dacă un ochi are o sursă de curent, curentul ciclic va avea sensul curentului sursei de curent și va fie egal cu acesta (deci niciun ochi nu poate avea mai mult de o sursă de curent) ;
6- Se va scrie un sistem de O ecuații liniare cu O necunoscute (curenții ciclici) de forma:

$$\begin{aligned} &R_{11}I_1^{'}+R_{12}I_2^{'}+\text{.........}+R_{1O}I_O^{'}=U_{e1}^{'};\\ &R_{21}I_1^{'}+R_{22}I_2^{'}+\text{.........}+R_{2O}I_O^{'}=U_{e2}^{'};\\ &\text{.......... ....}\\ &R_{O1}I_1^{'}+R_{O2}I_2^{'}+\text{.........}+R_{OO}I_O^{'}=U_{eO}^{'}. \end{aligned} \qquad (1)$$

7- Se vor determina coeficienții din ecuațiile (1).
Coeficienții cu indici egali de forma R_{kk} numiți și rezistențe proprii ale ochiului k, se determină ca fiind suma rezistențelor laturilor care formrază ochiul k. Coeficienții sunt totdeauna pozitivi.
Coeficienții cu indici diferiți de forma $R_{jk}=R_{kj}$ numiți rezistențe de cuplaj dintre ochiul k și ochiul j , se determină ca fiind suma rezistențelor laturilor comune celor două ochiuri luată cu semnul + dacă cei doi curenți ciclici trec în acelați sens prin latura comună și cu semnul – dacă cei doi curenți ciclici au sensuri opuse prin latura comună;
8- Termenul liber de forma $U_{ek}^{'}$ se numește tensiune electromotoare a ochiului k și este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor de t.e.m. din ochiul k. Dacă tensiunile electromotoare au același sens cu sensul curentului ciclic se iau cu semnul plus (+), iar în caz contrar cu semnul minus (-).
9- Se rezolvă sistemul de ecuații (1), rezultând valorile curențiilor ciclici. Curenții reali prin laturi vor fi egali cu suma algebrică a curenților ciclici care trec prin latura respectivă, și anume: se vor lua cu semnul plus curenții ciclici care au același sens cu sensul curentului prin latură și cu semnul minus cei de sens contrar.
10- Se verifică rezultatele obținute prin bilanțul puterilor.

Observație . Pentru ochiurile ce conțin surse de curent, curentul ciclic este cunoscut și ca urmare pentru acest ochi nu se va scrie o ecuație în sistemul (1).

Aplicație

1. Se cunosc valorile rezistențelor $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=1\Omega$ și a tensiunilor electromotoare $U_{e1}=28V$, $U_{e2}=20V$. Sursele nu au rezistențe interioare. Să se rezolve rețeaua din figura 1 prin metoda curenților ciclici.

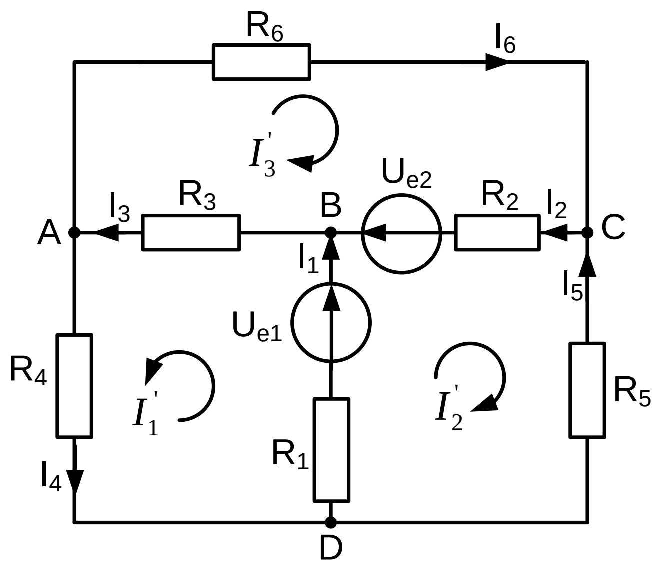

Fig. 1. Rezolvarea unei rețele de curent continuu prin metoda curenților ciclici.

Rezolvare

Numărul de noduri este N = 4 (A,B,C,D), numărul de laturi este L = 6 (BD,AD,AB,BC,DC,AC), iar numărul de ochiuri independente este O = L – N + 1 = 3. S-au ales ochiurile: ABDA, DBCD, ACBA.

Se aleg arbitrar sensurile curenților ciclici I_1', I_2' şi I_3'(nu avem surse de curent).

Se vor determina rezistențele proprii şi de cuplaj:

$R_{11}= R_3 + R_4+ R_1=3$; $R_{12}= R_{21}=R_1= 1$; $R_{13}= R_{31}= R_3= 1$;

$R_{22}= R_5 + R_1 + R_2= 3$; $R_{23}= R_{32}= - R_2= -1$; $R_{33}= R_3 + R_6 + R_2= 3$.

Se vor determina t.e.m. fictive de ochi:

$U_{e1}' = U_{e1}= 28$; $U_{e2}' = U_{e1} - U_{e2}= 8$; $U_{e3}' = U_{e2} = 20$.

Ecuațiile (1) vor fi:

$$\begin{cases} 3I_1' + I_2' + I_3' = 28; \\ I_1' + 3I_2' - I_3' = 8; \\ I_1' - I_2' + 3I_3' = 20. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1' = 7A; \\ I_2' = 2A; \\ I_3' = 5A. \end{cases}$$

Curenții din laturi vor fi calculați cu ajutorul curenților ciclici:

$$\begin{cases} I_1 = I_2' + I_1' = 9A; \\ I_2 = -I_2' + I_3' = 3A; \\ I_3 = I_1' + I_3' = 12A; \\ I_4 = I_1' = 7A; \\ I_5 = -I_2' = -2A; \\ I_6 = I_3' = 5A. \end{cases}$$

Verificare

Bilanțul puterilor.

- Puterile debitate de surse vor fi:

$$P_g = U_{e1} I_1 + U_{e2} I_2.$$

- Puterile absorbite de rezistoare vor fi :

$$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Rezultă :

$$U_{e1}I_1 + U_{e2}I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 \quad \Leftrightarrow$$

312 W = 312 W.

2. Cunoscând elementele din circuitul de curent continuu din figura 2a, să se determine valorile curenților din laturile circuitului folosind metoda curenților ciclici. Să se verifice rezultatele obținute prin bilanțul puterilor. Se dau valorile:

U_{e1}=100V, U_{e2}=160V, J=10A, R_2=R_5=20Ω, R_3=R_4=10Ω, R_6=30Ω.

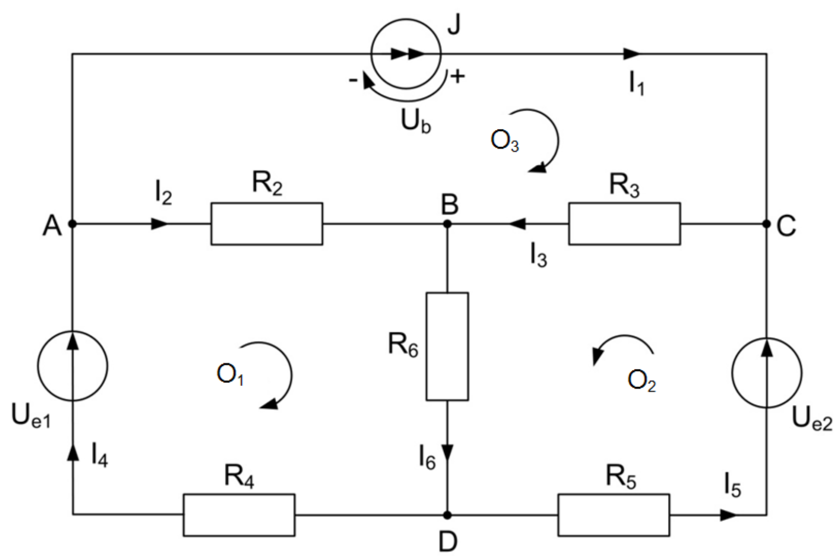

Fig. 2a

Rezolvare

Cunoaştem valoarea curentului prin latura cu generatorul de curent, I_1=J=10A. Rămân de determinat încă 5 curenți.

Sistemul general de ecuații scrise pentru curenți ciclici, notând curenții ciclici cu indicele ochiurilor din figura 2b este:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^{'} + R_{12}I_2^{'} + R_{13}I_3^{'} = U_{e1}^{'}\ , \\ R_{21}I_1^{'} + R_{22}I_2^{'} + R_{23}I_3^{'} = U_{e2}^{'}\ , \\ R_{31}I_1^{'} + R_{32}I_2^{'} + R_{33}I_3^{'} = U_{e3}^{'}\ . \end{cases}$$

Exprimăm şi calculăm rezistențele fictive de ochi, rezistențele comune ochiurilor şi tensiunile electromotoare fictive de ochi şi ținem cont de faptul că ştim curentul ciclic din ochiul cu generatorul de curent.

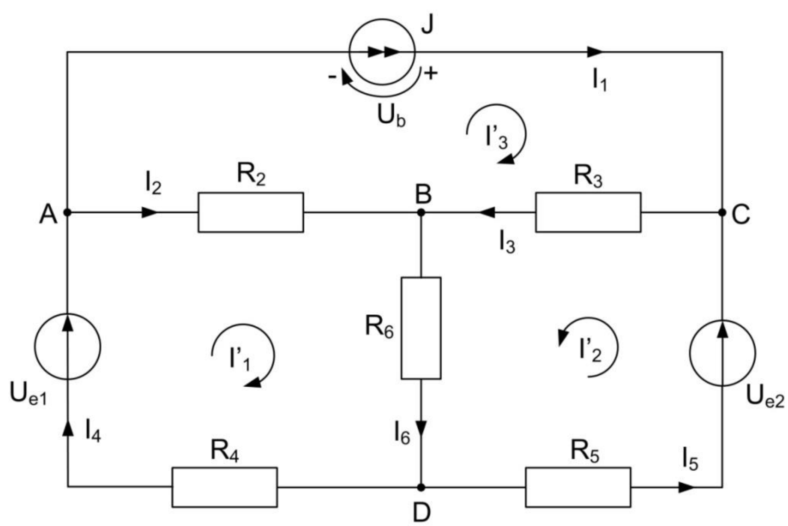

Fig. 2b

Prin urmare, în locul celei de-a treia ecuații vom scrie relația cunoscută a curentului ciclic $I_3^{'}$ și ca urmare sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^{'} + R_{12}I_2^{'} + R_{13}I_3^{'} = U_{e1}^{'}\ , \\ R_{21}I_1^{'} + R_{22}I_2^{'} + R_{23}I_3^{'} = U_{e2}^{'}\ , \\ I_3^{'} = J = 10\,A. \end{cases}$$

$$R_{11} = R_4 + R_2 + R_6 = 10 + 20 + 30 = 60, \quad R_{22} = R_5 + R_6 + R_3 = 20 + 30 + 10 = 60$$

$$R_{12} = R_{21} = R_6 = 30\ , \quad R_{13} = R_{31} = -R_2 = -20\ , \quad R_{23} = R_{32} = R_3 = 10$$

$$U'_{e1} = U_{e1} = 100, \qquad U'_{e2} = U_{e2} = 160.$$

Cu aceste valori se obține sistemul de ecuații cu necunoscute curenții ciclici:

$$\begin{cases} 60 I'_1 + 30 I'_2 - 20 I'_3 = 100 \\ 30 I'_1 + 60 I'_2 + 10 I'_3 = 160 \\ \qquad\qquad\qquad I'_3 = 10 \end{cases}$$

Înlocuind ultima relație în primele două ecuații, se obține un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute, care se rezolvă uşor.

$$\begin{cases} 60 I'_1 + 30 I'_2 = 300 \\ 30 I'_1 + 60 I'_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 I'_1 + I'_2 = 10 \\ I'_1 + 2 I'_2 = 2 \end{cases}$$

Se obțin valorile curenților ciclici:

$$I'_1 = 6; \quad I'_2 = -2; \quad I'_3 = 10.$$

Cu ajutorul curenților ciclici se determină valorile curenților din laturi:

$$I_1 = I'_3 = 10A \quad I_2 = I'_1 - I'_3 = 6 - 10 = -4A \quad I_3 = I'_3 + I'_2 = 10 + (-2) = 8A$$

$$I_4 = I'_1 = 6A \quad I_5 = I'_2 = -2A \quad I_6 = I'_1 + I'_2 = 6 - 2 = 4A$$

Verificare cu bilanțul puterilor:

$$U_{e1} I_4 + U_{e2} I_5 + U_b J = I_1^2 \cdot 0 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Pentru a putea calcula puterile debitate de sursele din circuit trebuie să calculăm tensiunea la bornele generatorului de curent, U_b. Vom scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru ochiul O_3, care conține generatorul de curent.

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 - U_b = 0. \qquad \rightarrow$$

$$U_b = -I_2 R_2 + I_3 R_3 = -(-4) \cdot 20 + 8 \cdot 10 = 160V$$

Înlocuind valoarea tensiunii la bornele generatorului de curent, valoarea curenților şi a tensiunilor electromotoare în relația bilanțului puterilor, se obține:

$$100\cdot 6+160\cdot(-2)+160\cdot 10=$$
$$=10^2\cdot 0+(-4)^2\cdot 20+8^2\cdot 10+6^2\cdot 10+(-2)^2\cdot 20+4^2\cdot 30$$

$$600-320+1600=16\cdot 20+64\cdot 10+36\cdot 10+4\cdot 20+16\cdot 30=$$
$$=320+640+360+80+480$$

$$1880\ W=1880\ W.$$

2.7.6.5. Metoda potențíalelor de noduri.

Metoda se utilizează atunci când numărul nodurilor N este mai mic decât numărul de ochiuri independente N (N << O). Metoda utilizează ca necunoscute potențialele nodurilor. Datorită faptului că potențialul se definește în funcție de potențialul unui punct de referință a cărui potențial poate fi luat cât se dorește, se va considera un nod ca punct de referință și având potențialul zero. Ca urmare numărul de necunoscute va fi N-1.

Se consideră o latură de circuit de curent continuu care conține un rezistor și o sursă de tensiune electromotoare (nu conține sursă de curent). Considerăm convenția de semne pentru tensiune și curent cea de la receptoare. Pentru a putea cunoaște sensul curentului, a tensiunii și a tensiunii electromotoare acestea vor avea doi indici, sensul mărimii fiind succesiunea indicilor. Considerăm o latura care este între nodurile A și B. Rezistența R_{AB} reprezintă rezistența totală a laturii AB. Dacă se aplică teorema a doua a lui Kichhoff ochiului format de latură și tensiunea la borne se va obține (fig.2.36):

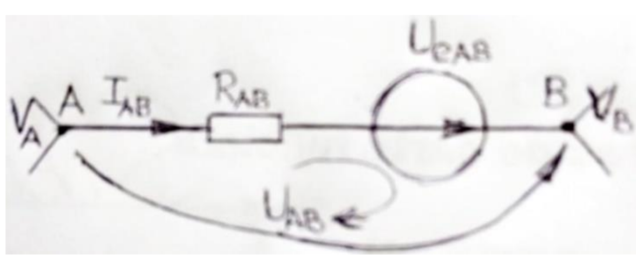

Fig.2.36. Explicativă la metoda potențialelor de noduri.

$$I_{AB}R_{AB} - U_{AB} = U_{eAB}.$$

Din relația de mai sus se determină valoarea intensității curentului :

$$I_{AB} = \frac{1}{R_{AB}}(U_{AB} + U_{eAB}) = \frac{1}{R_{AB}}(V_A - V_B + U_{eAB}) \cdot \qquad (1)$$

Cu relația de mai sus se poate calcula curentul dintr-o latură, dacă se cunosc potențialele nodurilor de la capetele laturii, rezistența totală a laturii și valoarea t.e.m. a sursei de pe latură. Tensiunea electromotoare se va lua cu semnul plus dacă sensul t.e.m. sursei coincide cu sensul curentului și cu semnul minus în caz contrar.

Pentru deteminarea curenților din laturile rețelei este necesară conoașterea potențialele bornelor laturilor, deci cunoașterea potențialelor nodurilor rațelei.

Potențialele se determină rezolvând următorul sistem liniar de ecuații:

$$\begin{aligned}
&G_{11}V_1^{'} + G_{12}V_2 + \ldots\ldots\ldots + G_{1N-1}V_{N-1}^{'} = I_{sc1}^{'};\\
&G_{21}V_1^{'} + G_{22}V_2 + \ldots\ldots\ldots + G_{2N-1}V_{N-1}^{'} = I_{sc2}^{'};\\
&\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ .\\
&G_{N-1,1}V_1^{'} + G_{N-1,2}V_2 + \ldots\ldots\ldots + G_{N-1,N-1}V_{N-1}^{'} = I_{scN-1}^{'}.
\end{aligned} \qquad (2)$$

În acest sistem conductanța de forma G_{ii} se numește **conductanța proprie** a nodului i și este egală cu suma conductanțelor laturilor ce converg în nodul **i** .

Conductanța de forma G_{ij} se numește **conductanța de cuplaj** dintre nodurile i și j și este egală cu suma, luată cu **semnul minus**, a conductanțelor laturilor care leagă nodurile i și j.

Conductanța unei laturi ce conține o sursă de curent se consideră zero.

Curentul de forma $I_{scj}^{'}$ se numește curentul de scurtcircuit injectat în nodul j și este egal cu suma algebrică a curenților de scurtcircuit ai laturilor legate la nodul j (se consideră pozitivi curenții care intră în nod și negativi cei care ies din nod). Laturile pasive nu au curenți de scurtcircuit. Laturile care conțin surse de curent au curentul de scurtcircuit chiar curentul **J** al sursei de curent. Laturile ce conțin surse de t.e.m. vor avea curentul de scurtcircui egal cu raportul dintre t.e.m. a sursei și rezistența totală a laturei, iar sensul curentului este sensul t.e.m.

Metodologia de rezolvare a rețelelor de curent continuu prin metoda potențialelor de noduri.

1- Se determină numărul N de noduri ale rețelei;
2- Se determină numărul L de laturi ale rețelei;
3- Se va figura pe fiecare latură câte un singur curent. Sensul curentului prin latură se va lua arbitrar. Dacă o latură conține o sursă de curent, curentul din latură este chiar curentul J al sursei;
4- Se alege un nod ca fiind nod de referință. Potențialul lui se consider zero;
5- Se va scrie un sistem de N-1 ecuații liniare cu N-1 necunoscute (potențiale electrice ale nodurilor rămase) de forma:

$$\begin{aligned}
&G_{11}V_1^{'} + G_{12}V_2 + \dots\dots\dots + G_{1N-1}V_{N-1}^{'} = I_{sc1}^{'};\\
&G_{21}V_1^{'} + G_{22}V_2 + \dots\dots\dots + G_{2N-1}V_{N-1}^{'} = I_{sc2}^{'};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .\\
&G_{N-1,1}V_1^{'} + G_{N-1,2}V_2 + \dots\dots\dots + G_{N-1,N-1}V_{N-1}^{'} = I_{scN-1}^{'}.
\end{aligned} \qquad (2)$$

6- Se vor determina coeficienții din ecuațiile (2). Coeficienții cu indici egali de forma G_{jj} numiți și conductanțe proprii ale nodului j. Coeficienții sunt totdeauna pozitivi și sunt egali cu suma conductanțelor laturilor ce au puncul k comun. Coeficienții cu indici diferiți de forma $G_{jk} = G_{kj}$ numiți conductanțe de cuplaj dintre nodul k și nodul j se determină ca fiind suma conductanțelor laturilor dintre cele două noduri și au totdeauna semnul (-);
7- Se determină curenții de scurtcircuit ai nodurilor.
8- Se rezolvă sistemul de ecuații (2), rezultând valorile potențiale nodurilor. Curenții reali prin laturi se vor calcula cu ajutorul formulei (1). Pentru aceasta este nevoie să se scrie curentul și tensiunile electromotoare cu doi indici care să arate sensurile lor prin latură.
9- Se verifică rezultatele obținute prin bilanțul puterilor.

Observație . Pentru laturile cu surse de curent, curentul este cunoscut și este egal cu curentul sursei J.

Aplicații

1.Se cunosc valorile rezistențelor $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=1\Omega$ şi valorile tensiunilor electromotoare $U_{e1}=28V$, $U_{e2}=20V$. Să se rezolve rețeaua din figura 3 prin metoda potențialelor de noduri. Să se verifice prin bilanțul puterilor.

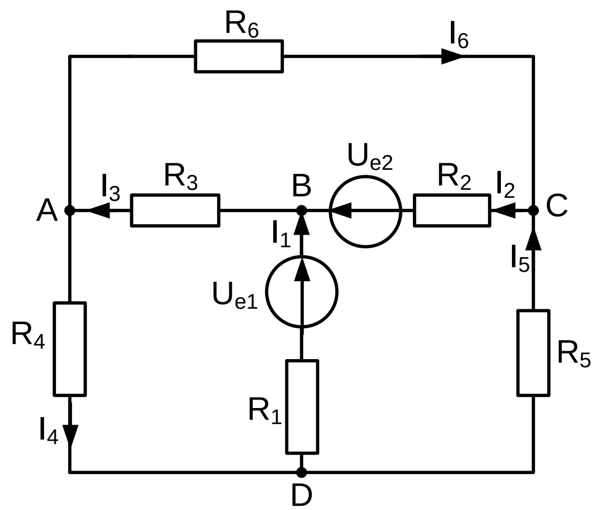

Fig. 3

Rezolvare

Rețeaua are N=4 noduri şi L=6 laturi. Se va considera nodul D ca nod de referință, având potențialul $V_D=0$.

Sistemul de ecuații care se scrie cu această metodă pentru cele 3 noduri rămase este:

$$\begin{cases} G'_{AA}V_A + G'_{AB}V_B + G'_{AC}V_C = I'_{scA}; \\ G'_{BA}V_A + G'_{BB}V_B + G'_{BC}V_C = I'_{scB}; \\ G'_{CA}V_A + G'_{CB}V_B + G_{CC}V_C = I'_{scC}. \end{cases}$$

Se determină conductanțele proprii şi de cuplaj:

$$G_{AA}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}=3, \qquad G_{BB}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=3, \qquad G_{CC}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}=3,$$

$$G_{BA}=G_{AB}=-\frac{1}{R_3}=-1, \qquad G_{CA}=G_{AC}=-\frac{1}{R_6}=-1, \qquad G_{BC}=G_{CB}=-\frac{1}{R_2}=-1.$$

Curenții de scurtcircuit vor fi:

$$I_{scA}=0\ , \qquad I_{scB}=\frac{U_{e1}}{R_1}+\frac{U_{e2}}{R_2}=28+20=48\ , \qquad I_{scC}=-\frac{U_{e2}}{R_2}=-20\ .$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin potențialele:

V_A=7V, V_B=19V, V_C=2V, V_D=0V.

Cu ajutorul potențialelor obținute, se pot calcula curenții din laturi:

$$I_1=I_{DB}=\frac{(V_D-V_B)+U_{e1}}{R_1}=(0-19)+28=9,\ \text{A},$$

$$I_2=I_{CB}=\frac{(V_C-V_B)+U_{e2}}{R_2}=(2-19)+20=3\ A,$$

$$I_3=I_{BA}=\frac{(V_B-V_A)}{R_3}=(19-7)=12A\ , \qquad I_4=I_{AD}=\frac{(V_A-V_D)}{R_4}=7A,$$

$$I_5=I_{DC}=\frac{(V_D-V_C)}{R_5}=-2A\ , \qquad I_6=I_{AC}=\frac{(V_A-V_C)}{R_6}=(7-2)=5\ A.$$

Verificare

Bilanțul puterior este:

$$U_{e1}I_1+U_{e2}I_2=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4+I_5^2R_5+I_6^2R_6$$

Înlocuind valorile curenților, se obține:

$$28 \cdot 9 + 20 \cdot 3 = 9^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 1 + 7^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 1$$

312 W = 312 W.

2. Se dă rețeaua din figura 4, în care: U_{e1}=38V, U_{e2}=10V, J= 2A, iar R_1=R_2=3Ω, R_3=1Ω, R_4=R_5=2Ω. Să se determine curenții din rețea prin metoda potențialelor de noduri. Să se verifice rezultatele prin bilanțul puterilor.

Rezolvare

Rețeaua are 2 noduri, unul fiind considerat de referință, de exmplu nodul B.

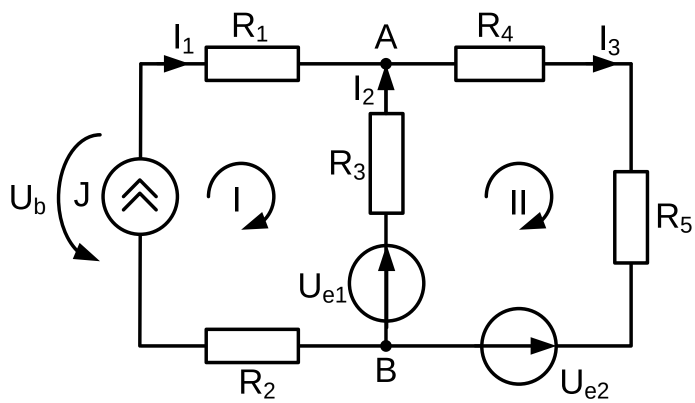

Fig. 4

Din sistemul de ecuații cu potențiale de noduri, rămâne o singură ecuație pentru nodul A:

$$G'_{11} V_1 = I'_{sd} \ ,$$

care pentru situația dată este :

$$G_{AA} V_A = I'_{scA} \ .$$

Pentru calculul conductanței proprii ochiului A, se ține cont de faptul că generatorul de curent este unul ideal, având rezistența internă infinită, deci conductanță 0.

$$G_{AA} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_4} + \frac{1}{\infty} = 1 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{5}{4},$$

$$I_{scA} = \frac{U_{e1}}{R_3} + \frac{U_{e2}}{R_4 + R_5} + J = \frac{38}{1} + \frac{10}{4} + 2 = \frac{170}{4} = \frac{85}{2}.$$

Se obține astfel:

$$V_A = \frac{\frac{85}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{85}{2} \cdot \frac{4}{5} = 34V.$$

Se poate calcula tensiunea:

$$U_{AB} = V_A - V_B = 34 - 0 = 34V.$$

Acestă tensiune este la bornele tuturor laturilor din rețea. De aceea, se pot calcula curenții necunoscuți I_2 şi I_3 cu cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff.

$$U_{e1} = R_3 I_2 + U_{AB} \Rightarrow I_2 = \frac{U_{e1} - U_{AB}}{R_3} = \frac{38 - 34}{1} = 4A,$$

$$U_{e2} = -(R_4 + R_5) I_3 + U_{AB} \Rightarrow I_3 = -\frac{U_{e2} - U_{AB}}{R_4 + R_5} = -\frac{10 - 34}{4} = 6A.$$

Verificare

$$U_{e1} I_2 - U_{e2} I_3 + U_b J = I_1^2 (R_1 + R_2) + I_2^2 R_3 + I_3^2 (R_4 + R_5)$$

Tensiunea U_b la bornele generatorului de curent se determină din aplicarea teoremei a 2-a a lui Kirchhoff ochiului I:

$$I_1 (R_2 + R_1) - U_b - I_2 R_3 = -U_{e1},,$$ de unde:

$$U_b = I_1(R_1 + R_2) - I_2 R_3 + U_{e1} = 2\cdot 6 - 4\cdot 1 + 38 = 46 \text{V}.$$

Verificarea cu bilanțul puterilor:

$$U_{e1}I_2 - U_{e2}I_3 + U_b J = I_1^2(R_1 + R_2) + I_2^2 R_3 + I_3^2(R_4 + R_5) \Leftrightarrow$$ înlocuind valorile:

$$38\cdot 4 - 10\cdot 6 + 46\cdot 2 = 4\cdot 6 + 16\cdot 1 + 36\cdot 4 \Leftrightarrow 184\ W = 184\ W.$$

TEME DE STUDIU

Test1.

Care sunt etapele de calcul pentru rezolvarea unui circuit, dacă se foloseşte metoda generatorului de curent echivalent ?.

Test 2.

Cum se pasivizează o rețea ?.

Test 3.

Cum se calculează rezistențele proprii și cele mutuale la metoda curenților ciclici ?.

Test 4.

Cum se calculează tensiunule electromotoare ale unui ochi la metoda curenților ciclici ?.

Test 5.

Cum se calculează curenții reali din laturi, prin metoda curenților ciclici ?.

Test 6.

Cum se calculează conductanțele proprii și conductanțele mutuale la metoda potențialelor de noduri ?.

Test 7.

Cum se calculează curenții de scurtcircuit cu metoda potențialelor de noduri ?.

Test 8.

Cum se calculează curenții reali din laturi cu metoda potențialelor de noduri ?.