C U R S U L 1 3

3. E L EC T R O D I N A M I C A (3)

3.6. INDUCTANŢE (INDUCTIVITĂŢI)

Se consideră un circuit închis **C** (fig.3.31), străbătut de un curent cu intensitatea ***i*.** Fluxul magnetic $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{S\Gamma}}$, care străbate orice suprafaţă deschisă mărginită de conturul **Γ**, este:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\, d\,\overline{S}\ .$$

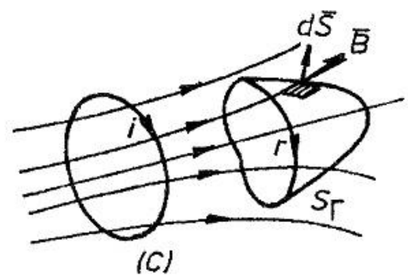

Fig.3.31. Explicativă la definirea inductanţei.

Intensitatea câmpului magnetic H, creat de curentul ***i*** din circuitul **C**, este proporţională cu valoarea intensităţii curentului ***i*** şi dacă mediul este neferomagnetic, inducţia magnetică ***B*** şi fluxul magnetic vor fi și ele proporţionale cu ***i***.

Deci putem scrie:

$$\Phi_{S_\Gamma} = L\ i\ , \quad L = \frac{\Phi_{S_\Gamma}}{i}\ . \tag{3.57}$$

Mărimea *L* definită ca raportul dintre fluxul magnetic care străbate orice suprafaţă limitată de conturul unui circuit şi intensitatea curentului care-l produce, se numeşte inductanţă sau inductivitatea circuitului. Inductanţa unui circuit depinde de forma, dimensiunile şi poziţia relativă a circuitelor, precum şi de valoarea permeabilităţii magnetice a mediului. Pentru medii liniare, inductanţa este constantă, iar pentru medii feromagnetice ($\boldsymbol{\mu}$ dependent de ***H****,* deci de ***i***), inductanţa circuitului este funcţie de curent.

Unitatea de măsură pentru inductanţă este **Henry [H]**.

3.6.1. Inductanţe proprii şi inductanţe mutuale.

Se consideră două circuite cu $\mathbf{N_1}$ şi $\mathbf{N_2}$ spire (fig.3.32) şi se presupune că numai primul circuit este străbătut de curent (curentul $\boldsymbol{i_1}$). Se notează cu $\boldsymbol{\Phi_{f11}}$ fluxul magnetic fascicular produs de circuitul 1 care trece printr-o spiră a circuitului 1 şi cu $\boldsymbol{\Phi_{f21}}$ fluxul magnetic fascicular produs de circuitul 1 care străbate o spiră a circuitului 2. Prin convenţie, fluxurile se notează cu doi indici, primul arată circuitul prin a cărui suprafaţă se calculează fluxul, iar al doilea indice arată circuitul care a produs fluxul respectiv.

Se consideră, de asemenea, că sensul de referinţă al fiecăruia dintre fluxuri să fie asociat după regula burghiului drept cu sensul de referinţă de pe circuitul înlănţuit de acest flux. Rezultă că fluxul $\boldsymbol{\Phi_{f11}}$ este mereu pozitiv, iar fluxul $\boldsymbol{\Phi_{f21}}$ poate fi pozitiv sau negativ.

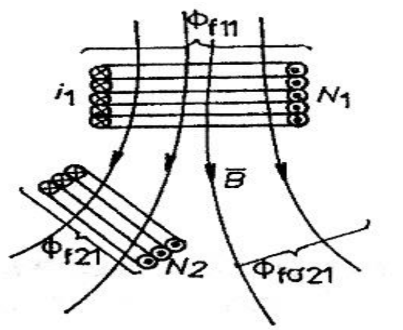

Fig.3.32. Explicativă la calculul inductanţelor proprii şi mutuale.

Fluxul magnetic fascicular de dispersie (de scăpări) al circuitului 1 faţă de circuitul 2, $\boldsymbol{\Phi_{\sigma f21}}$, este fluxul magnetic fascicular produs de circuitul 1 care nu străbate circuitul 2.

Se numeşte **inductanţă proprie $\boldsymbol{L_{11}}$** a circuitului 1, **raportul pozitiv dintre fluxul total $\boldsymbol{\Phi_{11}}$ ce străbate circuitul 1 şi intensitatea curentului $\boldsymbol{i_1}$ care-l produce:**

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{f11}}{i_1} > 0 \;. \tag{3.58}$$

La fel se poate defini inductanţa proprie a circuitului 2, considerându-se $\boldsymbol{i_2 \neq 0}$ şi $\boldsymbol{i_1 = 0}$:

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_1} = N_2 \frac{\Phi_{f22}}{i_2} > 0 \;. \tag{3.59}$$

Deoarece intensitatea câmpului magnetic produs de un circuit este proporţională cu numărul de spire **N**, rezultă că fluxul magnetic fascicular este proporţional cu **N**, iar inductanţa proprie va fi proporţională cu pătratul numerelor de spire, $\mathbf{N^2}$.

Se defineşte **inductanţa mutuală L_{21}** între circuitele 1 şi 2 ca **raportul dintre fluxul total Φ_{21} produs de circuitul 1 care străbate circuitul 2 şi intensitatea curentului i_1 care îl produce**:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = N_2 \frac{\Phi_{f21}}{i_1} \gtreqless 0 \,. \qquad (3.60)$$

Analog se defineşte inductanţa mutuală între circuitele 2 şi 1:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = N_1 \frac{\Phi_{f12}}{i_2} \gtreqless 0 \,. \qquad (3.61)$$

Se poate demonstra că inductanţele mutuale sunt egale pentru medii liniare.

Dacă nu există fluxuri magnetice de dispersie:

$$|L_{12}| = |L_{21}| = M = \sqrt{L_{11}\ L_{22}} \,. \qquad (3.62)$$

Circuitele electrice care au inductanţe mutuale diferite de zero se numesc **circuite cuplate magnetic**.

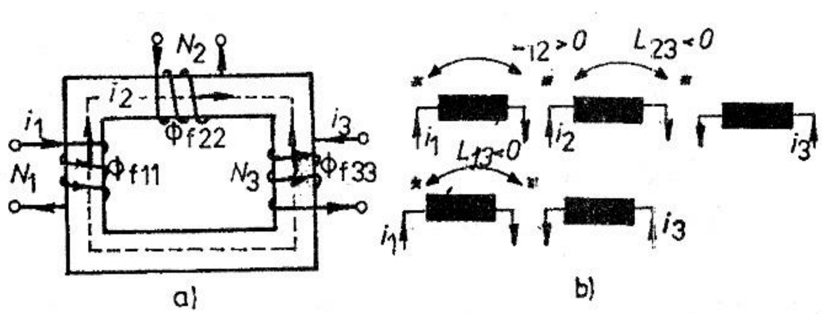

Fig.3.33. a) Bobine cuplate magnetic; b) simbolizarea lor în schemele electrice.

În figura 3.33a se arată cuplajul între trei bobine şi semnele inductanţelor mutuale. Între circuitele 1 şi 2 fluxul mutual $\boldsymbol{\Phi_{12} > 0}$ şi deci $\boldsymbol{L_{12} > 0}$, între circuitele 1 şi 3, $\boldsymbol{\Phi_{13} < 0}$ şi deci $\boldsymbol{L_{13} < 0}$, iar între circuitele 2 şi 3, $\boldsymbol{\Phi_{23} < 0}$ și deci $\boldsymbol{L_{23} < 0}$. În schemele electrice pentru a putea determina semnul inductanţelor mutuale, se adoptă următoarea convenţie: cele două bobine au câte o bornă însemnată cu asterisc (bornă polarizată), dacă sensurile curenţilor prin cele două bobine sunt orientate în acelaşi mod faţă de aceste borne, inductanţa mutuală este pozitivă (***L_{12}*** din figura 3.33b), iar în caz contrar, inductanţa mutuală este negativă (***L_{23}***, ***L_{13}*** din figura 3.33b).

Aplicaţii

1. Inductanţa proprie a unui tor.

Se consideră un tor omogen (fig.3.34) având N spire uniform distribuite, parcurse de curentul *I*.

Fluxul magnetic total din bobină este:

$$\Phi = N\,\Phi_f = N\frac{U_m}{R_m} = \frac{N^2 I\,\mu\,S}{\pi\,D}.$$

Inductanţa proprie a torului va fi:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\,\Phi_f}{I} = N\frac{U_m}{I\,R_m} = \frac{N^2\mu\,S}{\pi\,D} = \frac{N^2}{R_m} = N^2\Lambda_m. \quad (3.63)$$

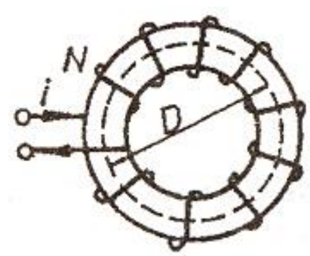

Fig.3.34. Tor circular uniform bobinat.

2. Inductanţa unei linii electrice bifilare.

Se consideră două fire rectilinii ale unei linii electrice, paralele (fig.3.35), parcurse de curenţi de sensuri contrare având intensitatea egală cu ***I***. Conductoarele au secţiunea circulară de rază **a**. Distanţa dintre axele celor două conductoare este **d**.

Intensitatea câmpului magnetic produs de unul dintre conductori, la distanţa **r** de conductor este:

$$H = \frac{I}{2\,\pi\,r}.$$

Fluxul magnetic prin suprafaţa S dintre cele două conductoare, pe lungimea l, produs de curentul *I* din conductorul 1, va fi:

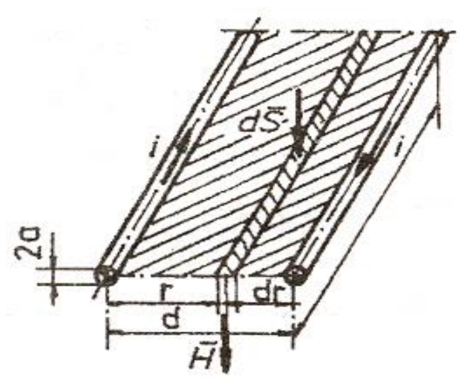

Fig.3.35. Explicativă la calculul inductanţei liniei electrice bifilare.

$$\Phi = \int_S \overline{B}\, d\,\overline{S} = \int_S B\, d\,S\, \cos 0 = \mu_0 \int_a^{d-a} H\, l\, d\, r = \frac{\mu_0\, I\, l}{2\,\pi} \ln \frac{d-a}{a}\,.$$

Fluxul magnetic dat de cei doi curenți prin suprafaţa S dintre conductoare, va fi dublu deoarece curenţii prin cele două conductoare sunt egali şi pentru că au sensuri contrare, fluxurile au însă acelaşi sens:

$$\Phi_t = 2\,\Phi = \frac{\mu_0\, I\, l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \cong \frac{\mu_0\, I\, l}{\pi} \ln \frac{d}{a}\,.$$

Inductanţa liniei bifilare va fi:

$$L_l = \frac{\Phi_t}{I} = \frac{\mu_0\, l}{\pi} \ln \frac{d}{a}\,. \tag{3.64}$$

3.6.2. Inductanţe utile şi inductanţe de dispersie.

Fluxul magnetic fascicular produs de un circuit nu trece în totalitate prin alt circuit (fig.3.32). Partea din fluxul fascicular care străbate şi alt circuit se numeşte **flux magnetic fascicular util**, iar restul, **flux magnetic de dispersie (de scăpări)**:

$$\Phi_{f\,\sigma 21} = \Phi_{f\,11} - |\Phi_{f\,21}| > 0\,. \tag{3.65}$$

Inductanţa de scăpări (dispersie) a circuitului 1 faţă de circuitul 2 este partea din inductanţa proprie a circuitului 1, corespunzătoare fluxului de scăpări a circuitului 1 faţă de circuitul 2:

$$L_{\sigma 21} = N_1 \frac{\Phi_{f\,\sigma 21}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{f\,11}}{i_1} - N_1 \left|\frac{\Phi_{f\,21}}{i_1}\right|\,. \tag{3.66}$$

Ţinând seama de relaţiile (3.58) şi (3.60), relaţia (3.66) devine:

$$L_{\sigma 21} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2} |L_{21}| > 0\,. \tag{3.67}$$

Analog se obţine:

$$L_{\sigma 12} = L_{22} - \frac{N_2}{N_1} |L_{12}| > 0\,. \tag{3.68}$$

Inductanţa utilă a circuitului 1 faţă de circuitul 2, reprezintă partea din inductanţa proprie a circuitului 1, corespunzătoare fluxului util faţă de circuitul 2:

$$L_{u\,21} = \frac{N_1}{N_2} | L_{21} | > 0 \ . \qquad (3.69)$$

Analog se defineşte inductanţa utilă a circuitului 2 faţă de circuitul 1:

$$L_{u\,12} = \frac{N_2}{N_1} | L_{12} | > 0 \ . \qquad (3.70)$$

Din relaţiile (3.67)...(3.70) rezultă:

$$L_{11} = L_{u\,21} + L_{\sigma 21} \ , \quad L_{22} = L_{u\,12} + L_{\sigma 12} \ . \qquad (3.71)$$

În tehnică se utilizează anumiţi coeficienţi care definesc gradul de scăpări (dispersie), cum este de exemplu **coeficientul de cuplaj k**:

$$k = \sqrt{\frac{L_{21}\ L_{12}}{L_{11}\ L_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_{11}\ L_{22}}} \ . \qquad (3.72)$$

Bobinele necuplate magnetic au $L_{12} = 0$ și k = 0, iar cele cuplate complet, fără flux magnetic de dispersie, au k = 1.

3.6.3. Relaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi.

Cunoscând inductivităţile proprii şi mutuale ale unui sistem de circuite, se poate calcula fluxul magnetic prin orice circuit, dacă se dau intensităţile curenţilor din toate circuitele.

Dacă se ţine seama de definiţia dată pentru inductivitate, fluxul magnetic total prin circuitul **j**, produs de curentul din circuitul **k,** este :

$$\Phi_{jk} = L_{jk}\, I_k \ ,$$

iar fluxul magnetic total prin circuitul **j**, produs de toţi curenţii, se poate calcula cu metoda superpoziţiei (dacă mediul este liniar), ca fiind suma fluxurilor produse de fiecare curent electric în parte, adică:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{jk} = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, I_k ,$$

unde **n** este numărul circuitelor.

Explicit ,dacă $i_1, i_2, ... i_n$ sunt curenţii din cele **n** circuite electrice, fluxurile totale $\Phi_1, \Phi_2, ...\Phi_n$ ce trec prin cele **n** circuite au expresiile liniare şi omogene:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}\, i_1 + L_{12}\, i_2 + ...L_{1n}\, i_n , \\ \Phi_2 &= L_{21}\, i_1 + L_{22}\, i_2 + ...L_{2n}\, i_n , \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_n &= L_{n1}\, i_1 + L_{n2}\, i_2 + ...L_{nn}\, i_n . \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \Phi_j = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, i_k .$$

3.6.4. Tensiunea electromotoare de inducţie proprie şi de inducţie mutuală.

Un circuit electric, având inductivitatea proprie ***L*,** dacă este străbătut de un curent variabil *i*, va avea fluxul total propriu $\boldsymbol{\Phi = L\, i}$ tot variabil în timp. Conform legii inducţiei electromagnetice, în circuit se va induce o t.e.m. de valoare instantanee:

$$u_{eL} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L\, i) = -L\frac{di}{dt} , \tag{3.73}$$

relaţie valabilă dacă circuitul este imobil și inductanța proprie este constantă.

T.e.m. indusă într-un circuit electric datorită variaţiei în timp a curentului propriu al circuitului, se numeşte t.e.m. de inducţie proprie sau de autoinducţie.

Dacă două circuite sunt cuplate magnetic, având inductivităţile mutuale $\boldsymbol{L_{12} = L_{21} = M}$ şi dacă circuitul 2 este străbătut de curentul variabil în timp $\boldsymbol{i_2}$, fluxul magnetic produs de circuitul 2 prin circuitul 1 va fi: $\boldsymbol{\Phi_{12} = L_{12}\, i_2}$ și este de asemenea variabil şi va induce în circuitul 1 o t.e.m. de inducţie mutuală:

$$u_{e1M} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{12}\, i_2) = -\, L_{12}\frac{d i_2}{dt} \, . \qquad (3.74)$$

În scrierea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff pentru circuite electrice cuplate magnetic şi având curenţi variabili în timp, se va ţine seama şi de t.e.m. de autoinducţie şi de inducţie mutuală.

3.7. ENERGIA ŞI FORŢELE ÎN CÂMPUL MAGNETIC

3.7.1. Energia câmpului magnetic produs de circuite electrice parcurse de curenţi

Se consideră **n** circuite filiforme străbătute de curenţii $\boldsymbol{i_1, i_2 \ldots i_n}$, conţinând şi surse de t.e.m. $\boldsymbol{u_{e1}, u_{e2}, \ldots, u_{en}}$ (fig.3.36). Conform legii conservării energiei, energia totală debitată de surse $\mathbf{dW_G}$ în intervalul de timp **dt** va fi egală cu suma pierderilor de energie prin efect Joule-Lenz, $\mathbf{dQ_R}$, în rezistenţele circuitelor, a creşterii energiei câmpului magnetic a sistemului $\mathbf{dW_m}$ şi a lucrului mecanic **dL** efectuat de forţele magnetice în acelaşi interval de timp **dt**:

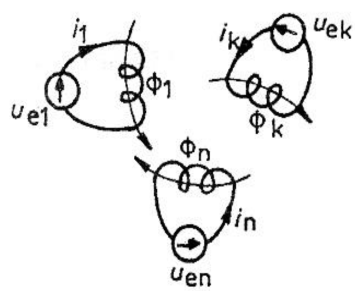

Fig.3.36. Explicativă la calculul energiei. câmpului magnetic.

$$dW_G = dQ_R + dW_m + dL \, , \quad \sum_{k=1}^{n} u_{ek}\, i_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} R_k\, i_k^2 \, dt + dW_m + dL \, . \qquad (3.75)$$

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff din electrocinetică, circuitului **k,** se obţine:

$$u_{ek} - \frac{d\Phi_k}{dt} = R_k\, i_k \, , \quad u_{ek} = R_k\, i_k + \frac{d\Phi_k}{dt} \, .$$

Înmulţind relaţia de mai sus cu $\boldsymbol{i_k dt}$ şi adunând pentru cele **n** circuite rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ek}\, i_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} R_k\, i_k^2 \, dt + \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\Phi_k \, . \qquad (3.76)$$

Înlocuind relaţia (3.76) în relaţia (3.75) se obţine:

$$dW_m + dL = \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\Phi_k \, . \tag{3.77}$$

Considerând circuitele imobile, **dL = 0**, şi rezultă:

$$dW_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\Phi_k \, . \tag{3.78}$$

Fluxul total $\boldsymbol{\Phi_k}$ care străbate circuitul **k** este în regim cvasistaţionar:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \, i_j \, .$$

Pe baza legii conservării energiei, se poate afirma că energia magnetică $\mathbf{W_m}$ nu depinde de ordinea stabilirii curenţilor în circuite. Presupunem că se ajunge în starea finală $\boldsymbol{i_k}$, $\boldsymbol{\Phi_k}$ printr-o creştere proporţională a tuturor curenţilor de la valoarea iniţială zero, la starea finală, astfel că la un moment dat curentul va fi: $\boldsymbol{i'_k=\lambda \, i_k}$ cu $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{[0,1]}$. Fluxurile fiind proporţionale cu curenţii, rezultă că fluxurile magnetice vor fi în acelaşi moment $\boldsymbol{\Phi'_k=\lambda \, \Phi_k}$, iar $\boldsymbol{d\Phi'_k= \Phi_k \, d\lambda}$.

Suma variaţiilor de energie din momentul iniţial, în care nu exista câmp magnetic,deci energia câmpului era zero, până în momentul final, este energia magnetică $\mathbf{W_m}$ a sistemului:

$$W_m = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} i_k \, \Phi_k \, \lambda \, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} i_k \, \Phi_k \int_0^1 \lambda \, d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \, \Phi_k \, . \tag{3.79}$$

Energia înmagazinată de câmpul magnetic al unui sistem de circuite parcurse de curenţi electrici, este egală cu semisuma produsului dintre curenţii din circuite şi fluxurile totale ce străbat suprafeţele limitate de contururile circuitelor respective.

Energia magnetică se poate exprima şi în funcţie de curenţi şi inductanţe:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} i_k \, i_j \, . \tag{3.80}$$

Energia magnetică a unui sistem de circuite parcurse de curenţi este repartizată în tot volumul în care există câmpul. Se defineşte **densitatea de volum a energiei magnetice** $\mathbf{w_m}$:

$$w_m = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta V} = \frac{dW_m}{dV} \, . \tag{3.81}$$

În cazul unei bobibe toroidale (fig.3.34), energia magnetică produsă de bobina torului alimentată cu curentul i va fi:

$$W_m = \frac{i\,\Phi}{2} = \frac{1}{2}\frac{l\,H}{N}\,N\,S\,B = \frac{1}{2} l\,S\,H\,B = \frac{1}{2} H\,B\,V\,, \qquad (3.82)$$

unde l este lungimea medie a bobinei, S – secţiunea bobinei, V volumul miezului bobinei în care este concentrat câmpul magnetic. Rezultă densitatea de volum a energiei câmpului magnetic (s-a ținut seama că inducția și intensitatea câmpului magnetic sunt coliniare în miez):

$$w_m = \frac{H \cdot B}{2} = \frac{\overline{H}\cdot\overline{B}}{2}\,. \qquad (3.83)$$

Energia totală a câmpului magnetic se poate determina astfel:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \overline{H}\,\overline{B}\,dV\,. \qquad (3.84)$$

Relaţiile (3.83) şi (3.84) sunt valabile şi în cazurile generale.

3.7.2. Teoremele forţelor generalizate în câmpul magnetic.

Dacă configuraţia geometrică a sistemului de circuite din fig.3.36 este fixă, cu excepţia unui singur circuit ce se poate deplasa pe direcţia coordonatei generalizate $\mathbf{x_k}$ sub acţiunea componentei

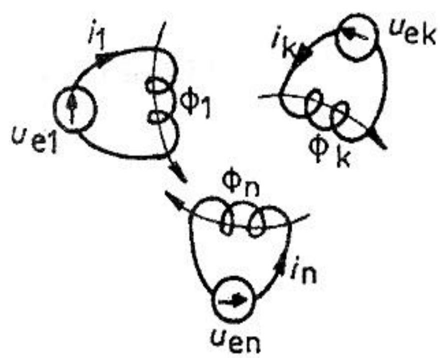

Fig. 3.36. Explicativă la forțele din

câmpul magnetic.

forţei generalizate $\mathbf{X_k}$ **pe direcția coordonatei generalizate**, rezultă din relaţia (3.77):

$$dW_m + X_k\,dx_k = \sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Phi_k\,. \qquad (3.85)$$

a) Dacă se consideră fluxurile magnetice constante, rezultă că $d\Phi_k = 0$ şi relația (3.85) devine:

$$d W_m + X_k \, d x_k = 0 \,, \Rightarrow \quad X_k = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{\Phi_k = \text{const.}} . \qquad (3.86)$$

Componenta forţei generalizate X_k pe direcţia coordonatei generalizate, este egală cu derivata cu semn schimbat a energiei câmpului magnetic în raport cu coordonata generalizată,, dacă energia este exprimată în funcţie de coordonatele generalizate şi fluxurile magnetice, când fluxurile magnetice sunt constante prin circuite.

b) Dacă se consideră curenţii electrici constanţi, $d i_k = 0$ şi rezultă din relația (3.79) prin diferenţiere:

$$d W_m = d\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot \Phi_k\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (d i_k \cdot \Phi_k + i_k \cdot d\Phi_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot d\Phi_k \,, \qquad (3.87)$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot d\Phi_k = 2 \, d W_m \,.$$

Înlocuind relaţia (3.87) în relaţia (3.85) rezultă:

$$d W_m = X_k \, d x_k \,,$$

de unde se obţine:

$$X_k = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{i_k = \text{const.}} . \qquad (3.88)$$

Componenta forţei generalizate X_k pe direcţia coordonatei generalizate x_k, care tinde să mărească coordonata generaliztă x_k, este egală cu derivata în raport cu coordonata generalizată x_k a energiei câmpului magnetic, dacă energia este exprimată în funcţie de coordonatele generalizate şi curenții din circuite.

Aplicații

1. 1. **Forța portantă a unui electromagnet**.

2. Forța portantă a unui electromagnet este forța necesară pentru a îndepărta armătura mobilă de polii electromagnetului (fig. 3.37). Se notează cu x lungimea întrefierului. Forța portantă se determină din teorema forțrlor generalizate. Dacă folosim relația 3.86 (s-a considerat permeabilitatea magnetică a circuitului infinită) rezultă:

$$F = X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi_k = \text{const.}} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = \frac{\Phi^2}{2L}\frac{dL}{dx} .$$

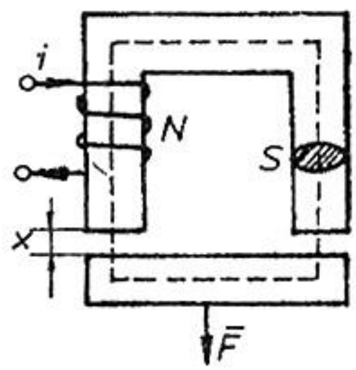

Fig.3.37. Explicativă la calculul forţei portante.

.

Inductanţa electromagnetului este (3.63):

$$L = \frac{N^2}{R_{me}} = \frac{N^2 \mu_o S}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + 2x} \approx \frac{N^2 \mu_o S}{2x} .$$

Înlocuind în relaţia (3.86), rezultă forţa portantă:

$$F = X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi = \text{const.}} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = \frac{\Phi^2}{2L^2}\frac{dL}{dx} .$$

Derivând inductanţa în raport cu **x**, rezultă forţa portantă:

$$X = F = -\frac{\Phi^2}{2Lx} = -\frac{i^2 L}{2x} . \qquad (3.89)$$

Semnul minus al forţei portante, arată că această forţă este de atracţie (îndreptată în sens opus sensului creşterii lui **x**).

Acelaşi rezultat s-ar fi obţinut şi dacă se exprima energia câmpului magnetic în funcţie de curent şi s-ar fi folosit relaţia (3.88) pentru determinarea forţei portante.

2. Cuplul exercitat asupra unei bobine mobile aflate într-un câmp magnetic produs de altă bobină fixă exterioară (fig.3.38).

Se consideră o bobina fixă 1 foarte lungă de lungime l, având N_1 spire străbătute de curentul i_1. În interiorul bobinei va exista un câmp magnetic de inducţie :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l} .$$

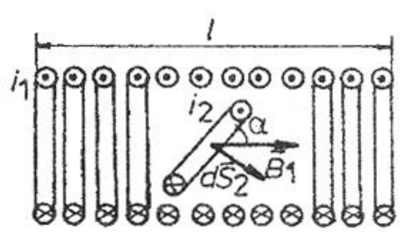

Fig.3.38. Explicativă la calculul cuplului dintre două bobine.

Asupra bobinei 2 mobile, având suprafaţa unei spire S_2 străbătută de curentul i_2, aflată în interiorul bobinei 1, se vor exercita forţe electrodinamice ce vor produce un cuplu ce tinde să o rotească astfel încât spirele sale să îmbrăţişeze fluxul maxim. Cuplul activ de rotaţie dat de aceste forţe va fi:

$$C_a = X = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \alpha}\right)_{i=constan} = i_1 \cdot i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}, \qquad (3.90)$$

deoarce energia magnetică produsă de cele două bobine are expresia:

$$W_m = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + \frac{1}{2}L_{12}\, i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_{21}\, i_1 i_2 = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_{12}\, i_1 i_2, \qquad (3.91)$$

şi numai inductanţa mutuală $\mathbf{L_{12}}$ este funcţie de unghiul $\boldsymbol{\alpha}$.

Inductanţa mutuală este:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 S_2 \sin\alpha}{i_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2 \sin\alpha}{l}.$$

Derivând relaţia de mai sus în raport cu $\boldsymbol{\alpha}$ şi înlocuind în relaţia care dă cuplul, rezultă:

$$C_a = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2 i_1 i_2 \cos\alpha}{l}, \qquad (3.92)$$

de unde se vede că valoarea cuplului de rotaţie este proporţional cu produsul intensităţilor curenţilor prin cele două bobine. Acest cuplu este folosit la aparatele electrodinamice pentru a indica puterea absorbită de un circuit. Bobina 1 este cuplată în serie în circuit ($i_1 = I$), iar bobina 2 este legată în paralel ($i_2 = k\ U$). Ca urmare cuplul activ al aparatului va fi proporțional cu produsul dintre intensitatea curentului din circuit şi tensiunea aplicată, deci cu puterea absorbită.

3.7.3. Forţele electromagnetice.

În prezenţa câmpurilor magnetice, conductoarele parcurse de curenţi electrici de conducţie, sunt supuse unor forţe numite forţe electromagnetice. Se consideră un conductor de o formă oarecare parcurs de curentul electric $\boldsymbol{i}$ şi aflat într-un câmp magnetic de inducţie $\boldsymbol{B}$. Se consideră o deplasare virtuală $d\overline{r}$ a unui element de conductor $d\overline{l}$, produsă de forţa $d\overline{F}$ (fig.3.39). Din teorema forţelor generalizate, rezultă:

$$d\,F = d\left(\frac{\partial W_m}{\partial r}\right) = \frac{d^2 W_m}{d\,r}\ . \qquad (3.93)$$

Variaţia energiei magnetice are expresia (deoarece curentul i este constant):

$$d^2 W_m = i\, d^2\Phi = i\, \overline{B}\, d^2\overline{S} = i\, \overline{B}\,(d\overline{r} \times d\overline{l}) = i(d\overline{l} \times \overline{B})\, d\overline{r}\ .$$

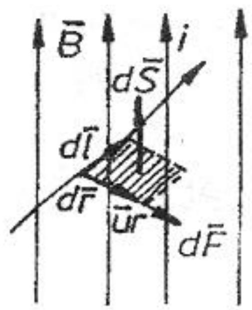

Fig.3.39.Explicativă la calculul forţei electromagnetice.

Înlocuind în (3.93) relaţia de mai sus, se obţine forţa ce se exercită asupra elementului **dl**:

$$dF = i\,(d\overline{l} \times \overline{B})\,\frac{d\overline{r}}{dr} = i\,(d\overline{l} \times \overline{B})\,\overline{u}_r\ , \qquad (3.94)$$

$$d\overline{F} = dF\,\overline{u}_r = i\,(d\overline{l} \times \overline{B})\ .$$

Forţa exercitată asupra întregului contur este:

$$\overline{F} = i\int_L d\overline{l} \times \overline{B}\ . \qquad (3.95)$$

Direcţia forţei este perpendiculară pe planul format de vectorii **d**$\overline{l}$ şi $\overline{B}$, iar sensul corespunde sensului de înaintare al burghiului drept, dacă se roteşte elementul **d**$\overline{l}$ peste $\overline{B}$ cu un unghi mai mic de 180°.

În cazul unui conductor rectiliniu de lungime **l**, aflat într-un câmp magnetic omogen de inducţie magnetică $\overline{B}$, forţa va fi:

$$\overline{F} = i(\overline{l} \times \overline{B})\ , \quad F = Bil\ \sin\alpha\ . \qquad (3.96)$$

În relaţia de mai sus, **l** reprezintă lungimea conductorului, iar **α** unghiul făcut de liniile de câmp magnetic cu conductorul.

Dacă liniile de câmp magnetic sunt şi perpendiculare pe conductor, forţa este:

$$F = B\ i\ l\ . \qquad (3.97)$$

3.7.4. Forţele electrodinamice.

Forţele electrodinamice sunt forţele care se exercită între două conductoare parcurse de curent electric de conducţie. Se consideră două două conductoare rectilinii, paralele şi de lungime **l** foarte mare în raport cu distanţa **d** dintre ele (fig.3.40). Conductoarele sunt parcurse de curenţii $\boldsymbol{i_1}$ şi $\boldsymbol{i_2}$. Curentul $\boldsymbol{i_1}$

din conductorul **1** stabileşte în jurul său un câmp magnetic ale cărui linii de câmp sunt cercuri aflate cu centrul pe axa conductorului și în plane perpendiculare pe conductor. Sensul liniei de câmp magnetic este dat de regula burghiului: sensul în care trebuie rotit burghiul pus pe axul conductorului ca să înainteze în sensul curentului. Ca urmare în orice punct situat pe cel de al doilea conductor există un câmp magnetic de inducţie magnetică B_{21}, normal pe planul conductoarelor ce are sensul din figură și având valoarea:

$$B_{21} = \frac{\mu i_1}{2\pi d} \quad . \qquad (3.98)$$

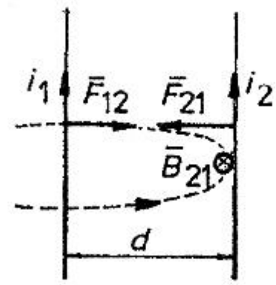

Fig.3.40. Explicativă la calculul forţelor electrodinamice.

Conductorul **2** parcurs de curentul $\boldsymbol{i_2}$ se află în câmpul magnetic de inducţie B_{21} şi asupra lui va acţiona forţa electromagnetică (3.97):

$$F_{21} = B_{21} i_2 \; l = \mu \frac{i_1 i_2 \; l}{2\pi d} \quad . \qquad (3.99)$$

Forţele electrodinamice sunt forţe de atracţie dacă curenţii care străbat cele două conductoare sunt de acelaşi sens şi de respingere în caz contrar și aparţin planului format de cele două conductoare paralele.

Pe baza relaţiei (3.99) se defineşte amperul:

Amperul este intensitatea unui curent electric constant care, menţinut în două conductoare paralele, rectilinii, cu lungimea infinită şi cu secţiune circulară neglijabilă, aşezate în vid, la o distanţă de un metru unul de altul, ar produce între aceste conductoare o forţă de 2.10^{-7} newtoni pe o lungime de un metru.

Aplicaţie.

Trei bare onductoare paralele, infinit lungi, montate la distanţa **d** unul de altul şi în acelaşi plan, sunt fixate pe izolatoare ca în figura 3.41. La un scurtcircuit, curenţii din bare sunt $I_2 = I_3 = I_1/2$ şi au sensurile din figură. Se cere să se determine forţele la care sunt supuse izolatoarele, distanţa dintre două izolatoare ale aceleaşi bare este **a**.

Rezolvare

Forţele electrodinamice ce acţionează asupra izolatoarelor barelor 1, 2 şi 3 au ţinând seama de sensurile lor din figura 3.41, următoarele module:

$$F_1 = F_{12} + F_{13} = \mu_0 \frac{I_1 I_2 a}{2\pi d} + \mu_0 \frac{I_1 I_3 a}{4\pi d} = \mu_0 \frac{3 I_1^2 a}{8\pi d},$$

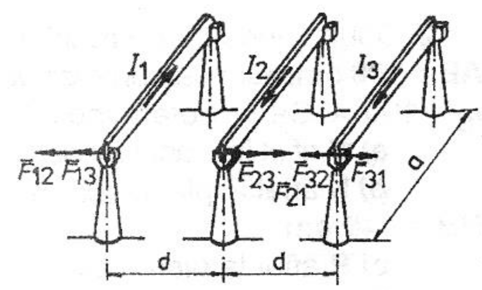

Fig.3.41. Explicativă la calculul forţelor dintre trei bare parcurse de curenţi.

$$F_2 = F_{21} + F_{23} = \mu_0 \frac{I_1 I_2 a}{2\pi d} + \mu_0 \frac{I_2 I_3 a}{2\pi d} = \mu_0 \frac{3 I_1^2 a}{8\pi d},$$

$$F_3 = F_{31} - F_{31} = \mu_0 \frac{I_3 I_2 a}{2\pi d} - \mu_0 \frac{I_1 I_3 a}{4\pi d} = 0 .$$

Se observă că asupra conductorului 3 forţa rezultantă este nulă. Izolatoarele sale nu sunt solicitate. Conductoarele 1 şi 2 sunt supuse la forţe egale.

TEME DE STUDIU

Test 1.

Cum se definește inductivitatea proprie a unui circuit. Ce unitate de măsură are ?

Test 2.

Cum se definește inductivitatea mutuală a două circuite. Ce unitate de măsură are. Cum se stabilește semnul ?

Test 3.

Calcuați inductivitatea unei linii electrice bifilare.

Test 4.

Ce sunt inductivitățile utile și cele de scăpări. Unități de măsură.

Test 5.

Care sunt relațiile lui Maxwell pentru inductivități ? Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 6.

Care este expresia tensiunii electromotoare de inducție proprie ?. Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 7.

Care este expresia tensiunii electromotoare indusă mutual ?. Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 8.

Ce aparat electric, foarte mult utilizat în aplicaţii, funcţionează pe baza tensiunii electro-motoare indusă mutual ?.

Test 9.

Care este expresia energiei câmpului magnetic produs de n circuite parcurse de curenţi electrici ?. Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 10.

Care este unitatea de măsură a inductanţelor ?.

- Amper / metru ;
- Henry ;
- Henry / metru.

Test 11.

Care este unitatea de măsură a tensiunii electromotoare indusă mutual ?.

- Voltul;
- Amperul;
- Henry.

Test 12.

Ce semn au inductanţele de scăpări ?.

- numai plus;
- numai minus;
- depinde de poziţia bobinei.

Test 13.

Cum se calculează energia câmpului magnetic produs de circuite parcurse de curenți. Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 14.

Care este expresia densității de volum a energiei magnetice. Unități de măsură pentru mărimile care intervin.

Test 15.

Ce este forța electromagnetică . De cine depinde și cum se stabilește direcția și sensul forței ?. Unități de măsură pentru mărimile ce intervin.

Test 16.

Ce este forța electrodinamică . De cine depinde și cum se stabilește direcția și sensul forței ?. Unități de măsură pentru mărimile ce intervin.