

CURRENT ALTERNATIVE (3)

Metoda se folosește în cazul în care numărul ochiurilor independente O este mult mai mic decât numărul laturilor rețelei L ($O \ll L$). Metoda introduce un număr O de necunoscute fictive notate cu prim, numite curenți ciclici sau curenți de ochiuri. Curenții se vor figura în interiorul ochiurilor independente printr-o săgeată. Curenții reali din laturi se vor determina ca fiind suma algebrică a curenților ciclici care traversează latura respectivă. Fiecărui ochi independent i se atribuie un curent fictiv I_k'

- 1- Se determină numărul **N** de noduri ale rețelei;
- 2- Se determină numărul **L** de laturi ale rețelei;
- 3- Se va figura pe fiecare latură câte un singur curent. Sensul curentului prin latură se va lua arbitrar. Dacă o latură conține o sursă de curent, curentul din latură este chiar curentul **J** al sursei;
- 4- Se determină numărul de subrețele **S** ;
- 5- Se determină numărul de ochiuri independente:
 $O = L - N + S$ și se vor determina acestea (un ochi nu poate avea două sau mai multe surse de curent);
- 6- Fiecărui ochi independent i se va atribui un curent ciclic $\underline{I'_{k'}}$. Sensul curentului se va alege arbitrar. Dacă un ochi are o sursă de curent, curentul ciclic va avea sensul curentului sursei de curent și va fie egal cu acesta;
- 7- Se va scrie un sistem de **O** ecuații liniare cu **O** necunoscute (curenții ciclici) de forma:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}'_2 + + \underline{Z}_{1o}\underline{I}'_o &= \underline{U}'_{e1}; \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}'_2 + + \underline{Z}_{2o}\underline{I}'_o &= \underline{U}'_{e2}; \\ &..... \\ \underline{Z}_{o1}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{o2}\underline{I}'_2 + + \underline{Z}_{oo}\underline{I}'_o &= \underline{U}'_{eo}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

8- Se vor determina coeficienții din ecuațiile (4.94).

Coeficienții cu indici egali de forma \underline{Z}_{kk} numiți și impedențe proprii ale ochiului k , se determină ca fiind suma impedențelor laturilor care formează ochiul k .

Coeficienții cu indici diferiți de forma $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj}$ numiți impedențe de cuplaj dintre ochiul k și ochiul j se determină ca fiind suma impedențelor laturilor comune celor două ochiuri luată cu semnul (+) dacă cei doi curenți ciclici trec în același sens prin latura comună și cu semnul (-) dacă cei doi curenți ciclici au sensuri opuse prin latura comună. Dacă există cuplaje magnetice între laturile ochiurilor k și j , termenul $j\omega L_{jk}$ va avea semnul plus dacă curenții ciclici au aceeași orientare față de bornele polarizate și cu semnul minus în caz contrar;

9- Termenul liber de forma \underline{U}'_{ek} se numește tensiune electromotoare a ochiului k și este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare complexe ale surselor de t.e.m. din ochiul k . Dacă tensiunile electromotoare au același sens cu sensul curentului ciclic se iau cu semnul plus (+), iar în caz contrar cu semnul minus (-).

10- Se rezolvă sistemul de ecuații (4.94), rezultând valorile complexe ale curenților ciclici. Curenții reali complecși prin laturi, vor fi egali cu suma algebrică a curenților complecși ciclici care trec prin latura respectivă, și anume: se vor lua cu semnul plus curenții ciclici care au același sens cu sensul curentului prin latură și cu semnul minus cei de sens contrar.

11- Se verifică rezultatele obținute prin bilanțul puterilor.

12- Se trec în valori instantanee valorile complexe ale curenților.

Observație . Pentru ochiurile ce conțin o sursă de curent, curentul ciclic este chiar curentul sursei și ca urmare pentru acest ochi nu se va scrie o ecuație în sistemul (4.94).

Aplicație numerică

Se dă schema electrică din figura 4.21, în care se cunosc:

$$u_{e1}=10\sqrt{2}\sin\omega t \text{ [V]}; u_{e2}=50\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ [V]}; f=50 \text{ Hz}; R_1=R_2=20 \text{ }\Omega;$$

$$L_1=L_{12}=\frac{100}{\pi} \text{ mH}; \quad L_2=L_4=\frac{200}{\pi} \text{ mH}; \quad C=\frac{1}{2\pi} \text{ mF}.$$

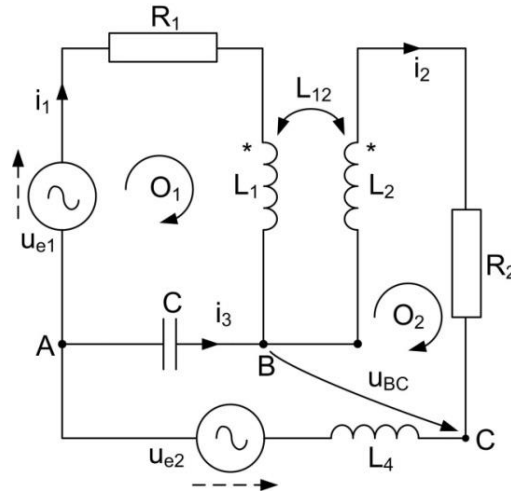


Fig.4.21. Schema electrică pentru aplicație.

- Să se determine curenții folosind metoda curenților ciclici.
- Să se verifice rezultatele prin bilanțul puterilor.

Rezolvare

Valorile complexe ale tensiunilor electromotoare vor fi:

$$\underline{U}_{e1}=10 e^{j0}=10(\cos 0+j\sin 0)=10; \quad \underline{U}_{e2}=50 e^{j(-\frac{\pi}{2})}=50[\cos(-\frac{\pi}{2})+j\sin(-\frac{\pi}{2})]=-50j;$$

$$\omega=2\pi f=2\cdot\pi\cdot 50=100\pi; \quad \omega L_1=\omega L_{12}=100\pi\cdot\frac{100}{\pi}\cdot 10^{-3}=10 \Omega;$$

$$\omega L_2=\omega L_4=100\pi\cdot\frac{200}{\pi}\cdot 10^{-3}=20 \Omega; \quad \frac{1}{\omega C}=\frac{1}{100\pi\frac{1}{2\pi}\cdot 10^{-3}}=20\Omega.$$

Impedanțele complexe proprii și mutuale vor fi:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} = 20 - 10j; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\frac{1}{j\omega C} - j\omega L_{12} = 10j;$$

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C} = 20 + 20j.$$

Ecuatiile (4.93) vor fi:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}'_2 = \underline{U}'_{e1}; \\ \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}'_2 = \underline{U}'_{e2}; \end{cases}$$

unde tensiunile electromotoare complexe ale ochiurilor vor fi:

$$\underline{U}'_{e1} = \underline{U}_{e1} = 10; \quad \underline{U}'_{e2} = -\underline{U}_{e2} = 50j.$$

Rezultă sistemul de ecuații și valorile curenților ciclici:

$$\begin{cases} (20 - 10j) \cdot \underline{I}'_1 + 10j \cdot \underline{I}'_2 = 10; \\ 10j \cdot \underline{I}'_1 + (20 + 20j) \cdot \underline{I}'_2 = 50j. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \underline{I}'_1 = 1; \quad \underline{I}'_2 = 1 + j.$$

Curenții reali prin laturi vor fi în valori complexe respective în valori instantanee:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = 1 \rightarrow i_1 = \sqrt{2} \sin \omega t \text{ [A]}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = 1 + j \rightarrow i_2 = 2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ [A]};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_2 - \underline{I}'_1 = j \rightarrow i_3 = \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ [A]}.$$

Verificarea rezultatelor prin bilanțul puterilor.

Puterile complexe debitate de surse vor fi:

$$\underline{S}_G = \underline{U}_{e1} \cdot \underline{I}'_1^* - \underline{U}_{e2} \cdot \underline{I}'_2^* = 10 \cdot 1 - (-50j)(1 - j) = 60 + 50j;$$

de unde rezultă:

$$P_G = 60 \text{ W}; \quad Q_G = 50 \text{ VAR}; \quad S_G = 10\sqrt{61} \text{ VA}.$$

Puterile complexe absorbite de consumatori:

$$\underline{S}_Z = P_Z + j Q_Z. \quad P_Z = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 = 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 60 \text{ W}.$$

$$Q_Z = \omega L_1 \cdot I_1^2 + (\omega L_2 + \omega L_4) \cdot I_2^2 - \frac{1}{\omega C} \cdot I_3^2 - 2\omega L_{12} \cdot \operatorname{Re}\{I_1 \cdot I_2^*\}; Q_Z = 10 \cdot 1 + 40 \cdot 2 - 20 \cdot 1 - 20 \cdot \operatorname{Re}\{1 \cdot (1-j)\} = 50 \text{ VAr}.$$

Diagrama de fazori este dată în figura 4.22.

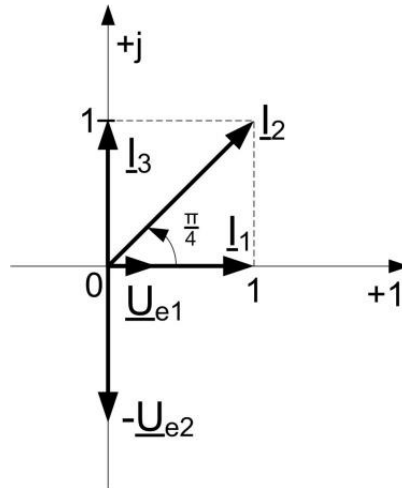


Fig.4. 22. Diagrama de fazori a curenților și a t.e.m.

4.5.5. Teorema generatorului de tensiune echivalent (Helmholtz-Thévenin).

Curentul debitat în exterior de o rețea liniară și activă, cu două borne de ieșire A și B și fără cuplaje inductive are expresia:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}}, \quad (4.95)$$

unde \underline{U}_{AB_0} este tensiunea complexă la bornele rețelei la mersul în gol între punctele A și B, iar \underline{Z}_{AB_0} este impedanța echivalentă între punctele A și B a rețelei pasivizate.

Demonstrația se bazează pe liniaritatea rețelei, adică se poate aplica teorema superpoziției. Rețeaua din figura 4.23a se poate obține prin suprapunerea rețelelor din figurile 4.23 b și c:

- o rețea activă (a) debitând pe latura exterioară în care s-a introdus un generator ideal de tensiune $\underline{U}'_e = \underline{U}_{AB_0}$ cu sens opus curentului \underline{I}_{AB} și

- o rețea (b) formată din rețeaua dată pasivizată în care s-a introdus un generator ideal de tensiune $\underline{U}'_e = \underline{U}_{AB_0}$ cu același sens ca al curentului \underline{I}_{AB} . Rezultă (conform teoremei superpoziției):

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}'_{AB} + \underline{I}''_{AB}. \quad (4.96)$$

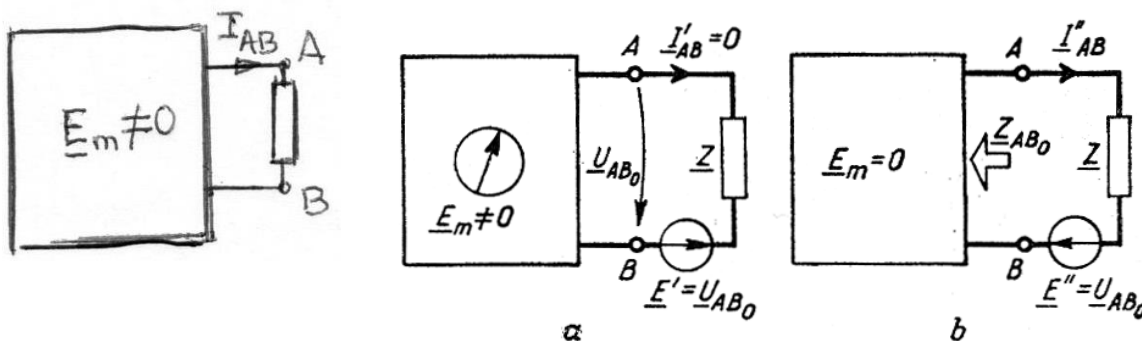


Fig.4.23 - Explicativă la demonstrarea teoremei generatorului de tensiune echivalent.

Curentul \underline{I}'_{AB} rezultă în aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul din figura (4.23 b):

$$-\underline{U}'_e = \underline{I}'_{AB} \underline{Z} - \underline{U}_{AB_0}. \quad (4.97)$$

Impunând $\underline{I}'_{AB} = 0$, rezultă relația dintre \underline{U}'_e și \underline{U}_{AB_0} :

$$\underline{U}'_e = \underline{U}_{AB_0}. \quad (4.98)$$

Curentul \underline{I}''_{AB} rezultă din aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul din figura (4.23 b):

$$\underline{U}'_e = \underline{I}''_{AB} (\underline{Z}_{AB_0} + \underline{Z}). \quad (4.99)$$

Din relațiile (4.97) și (4.98) rezultă:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}'_{AB} + \underline{I}''_{AB} = \frac{\underline{U}'_e}{\underline{Z}_{AB_0} + \underline{Z}} \cdot \cdot$$

4.5.6. Teorema generatorului de curent echivalent (Norton).

Tensiunea \underline{U}_{AB} produsă de rețea la bornele A, B ale impedanței laturei pasive AB, ($\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{\underline{Y}_{AB}}$) are expresia:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB_{sc}}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}}, \quad (4.100)$$

unde $\underline{I}_{AB_{sc}}$ reprezintă curentul debitat de rețea la mersul în scurtcircuit (la legarea bornelor A și B în scurtcircuit) și atunci $\underline{Z} = 0$; $\underline{U}_{AB} = 0$ iar \underline{Y}_{AB_0} reprezintă admitanța complexă a rețelei pasivizate.

Curentul $\underline{I}_{AB_{sc}}$ poate fi calculat cu ajutorul teoremei generatorului echivalent :

$$\underline{I}_{AB_{sc}} = \underline{I}_{AB} \Big|_{\underline{Z}=0} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}} \Big|_{\underline{Z}=0} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z}_{AB_0}} = \underline{U}_{AB_0} \underline{Y}_{AB_0}$$

unde $\underline{Y}_{AB_0} = \frac{1}{\underline{Z}_{AB_0}}$ și reprezintă admitanța echivalentă complexă a dipolului constituit de rețea (fără latura exterioară AB) după pasivizare.

Demonstrarea teoremei generatorului de curent echivalent:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z} \underline{I}_{AB} = \underline{Z} \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}} = \underline{Z} \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} \underline{Z}_{AB_0} \left(\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_{AB_0}} \right)} = \frac{\frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z}_{AB_0}}}{\underline{Z}_{AB_0} \left(\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_{AB_0}} \right)} = \frac{\underline{I}_{AB_{sc}}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}}. \quad (4.101)$$

4.6. REZONANȚA ÎN CIRCUITELE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV

În circuitele electrice de c.a. care conțin elemente reactive (bobine și condensatoare) există cazuri în care reactanța echivalentă este nulă și deci defazajul dintre tensiune și curent va fi nul. În aceste cazuri se spune că circuitul este în rezonanță. La rezonanță, puterea reactivă absorbită sau cedată de circuit este nulă, deoarece puterea reactivă absorbită de bobine este compensată de puterea reactivă cedată de condensatoare. În circuitele rezonante, amplitudinea intensității curentului absorbit de circuit are un maxim sau un minim.

4.6.1. Rezonanța în circuitele serie (rezonanța de tensiune).

Se consideră un circuit serie R, L, C la care se aplică o tensiune sinusoidală (fig.4.24a).

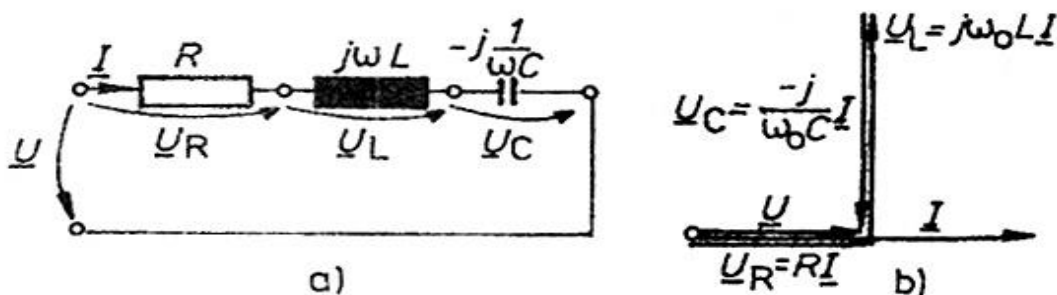


Fig.4.24 - a) Circuit serie R, L, C ; b) diagrama de fazori la rezonanță.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff, în complex, rezultă:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = (R_e + jX_e) \underline{I}.$$

Circuitul este rezonant dacă reactanța echivalentă X_e este nulă:

$$X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (4.102)$$

Din relația (4.102) se constată că rezonanța se poate realiza variind frecvența tensiunii de alimentare, valoarea inductanței sau a capacității. Frecvența și pulsația la care se produce rezonanța, sunt date de formulele lui **Thomson**:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.103 \text{ a,b})$$

Rezonanța se poate obține și variind capacitatea condensatorului sau inductanța bobinei. La rezonanță:

$$Z_e = R = Z_{e \min}, \quad I = U/R = I_{\max}, \quad \varphi = \arctg(X_e/R) = 0. \quad (4.104 \text{ a,b,c})$$

Diagrama fazorială a circuitului rezonant este dată în figura 4.24b, unde s-a luat curentul ca origine de fază. Se observă că:

$$\underline{U} = \underline{U}_R = R \underline{I}, \quad U_C = U_L. \quad (4.105 \text{ a,b})$$

Căderea de tensiune inductivă este compensată de căderea de tensiune capacitivă, motiv pentru care rezonanța serie se mai numește și rezonanța tensiunilor. Dacă $\omega_0 L = (1/\omega_0 C) \gg R$, rezultă: $U_L = U_C \gg U_R = U$, deci în circuitul rezonant apar supratensiuni care rămân un timp și după deconectarea circuitului de la rețea. Aceste tensiuni reprezintă un pericol pentru cei care vin în contact cu bornele condensatorului.

Se definește **factorul de calitate al circuitului Q**:

$$Q = \left(\frac{U_L}{U_R} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L I}{R I} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1. \quad (4.106)$$

În electronică se construiesc circuite rezonante cu factorul de calitate având valorile $Q \in (100...1000)$ pentru amplificarea tensiunilor slabe, având frecvența egală cu frecvența de rezonanță a circuitelor.

În fig.4.25a s-a reprezentat variația valorii efective a curentului în funcție de pulsația tensiunii de alimentare pentru diferite valori ale factorului de calitate Q , iar în figura 4.25b, dependența defazajului circuitului de pulsație.

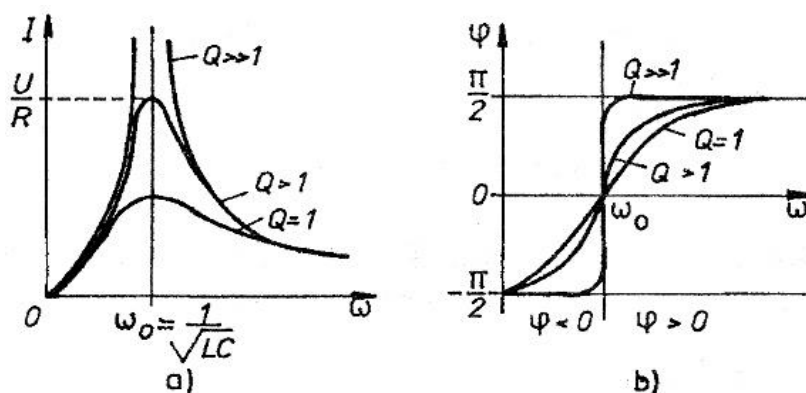


Fig.4.25. – Dependența de pulsație și de factorul de calitate : a) a valorii efective a curentului; b) a defazajului circuitului.

Pentru pulsații mai mici decât pulsația de rezonanță ($\omega < \omega_0$), circuitul are caracter capacitiv ($\omega L < 1/\omega C$, $\varphi < 0$), la rezonanță ($\omega = \omega_0$) caracter pur rezistiv ($\varphi = 0$), iar la pulsații mai mari decât pulsația de rezonanță ($\omega > \omega_0$), caracterul este inductiv ($\omega L > 1/\omega C$, $\varphi > 0$).

4.6.2. Rezonanța în circuite derivație (rezonanța de curent).

Se consideră un circuit format dintr-o bobină reală de rezistență R și inductanță L conectată în paralel cu un condensator de capacitate C (fig.4.26a). Admitanța complexă este:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_e &= \underline{Y}_b + \underline{Y}_C = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} = \\ &= \frac{R + j[\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L]}{R^2 + \omega^2 L^2} . \end{aligned}$$

Curentul absorbit de circuit este: $\underline{I} = \underline{Y}_e \underline{U}$ și are valoarea efectivă și defazajul:

$$\begin{aligned} I &= U \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} , \\ \varphi &= \arctg \frac{\omega L (1 - \omega^2 LC - R^2 C / L)}{R} . \end{aligned} \quad (4.107a,b)$$

În majoritatea cazurilor din practică $R^2 \ll \omega^2 L^2$ și se obțin:

$$\begin{aligned} I &\approx U \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 + \frac{R^2 C^2}{L^2}} , \\ \varphi &= \arctg \frac{\omega L}{R} (1 - \omega^2 LC) . \end{aligned} \quad (4.108a,b)$$

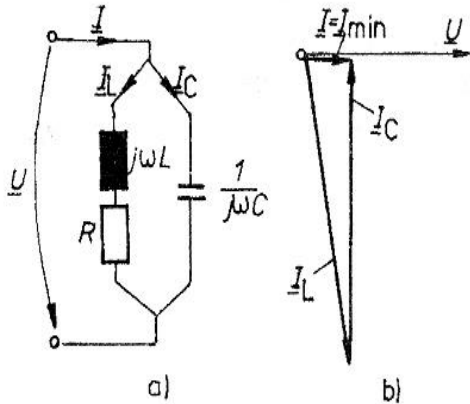


Fig.4.26 - a) Circuit rezonant derivație;b)diagrama de fazori.

Din relația (4.108b) rezultă pulsația aproximativă de rezonanță:

$$1 - \omega_0^2 LC = 0, \omega_0 = 1/\sqrt{LC} . \quad (4.109)$$

La rezonanță, curentul absorbit de circuit trece printr-o valoare minimă; impedanța printr-o valoare maximă L/RC , iar defazajul prin zero. În figura 4.26b s-a reprezentat diagrama de fazori a curenților, luându-se tensiunea ca origine de fază.

Factorul de calitate al circuitului este definit ca:

$$Q = \left(\frac{I_C}{I} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{\omega C U}{I} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.110)$$

În figura 4.27a se arată variația valorii efective a curentului absorbit de circuit, iar în figura 4.27b variația defazajului circuitului de pulsația tensiunii de alimentare.

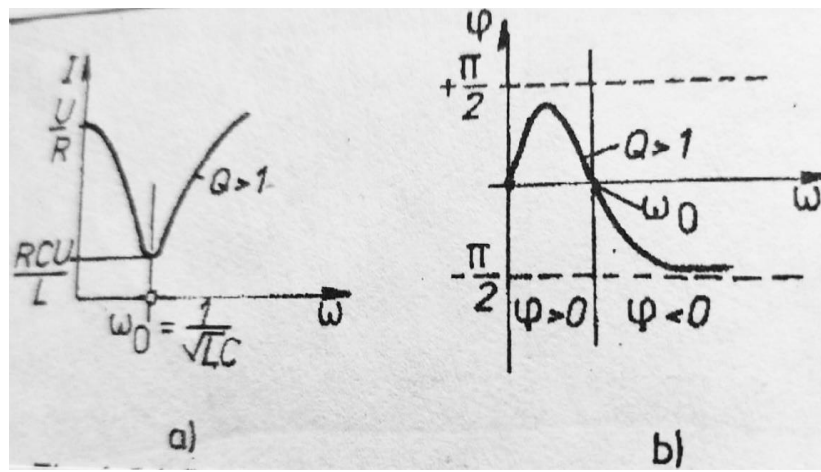


Fig.4.27. Dependența valorii efective a curentului absorbit (a) și a defazajului (b) de valoarea pulsației tensiunii de alimentare.

Fenomenul de rezonanță are numeroase aplicații în telecomunicații și electroenergetică, dintre care amintim:

- realizarea oscilatoarelor de înaltă frecvență utilizate la emițătoarele și receptoarele radio;
- realizarea telefoniei multiple, adică efectuarea concomitentă a mai multor convorbiri utilizând o singură pereche de conductoare, cu ajutorul filtrelor bazate pe circuite rezonante;
- măsurarea frecvenței și a lungimii de undă a oscilațiilor în radiotehnică;
- compensarea factorului de putere în instalațiile de alimentare a receptoarelor de energie electrică, prin montarea în paralel a unor condensatoare.

4.7. ÎMBUNĂTĂȚIREA FACTORULUI DE PUTERE

Instalațiile electrice (motoare electrice, transformatoare etc.) sunt în general receptoare cu caracter inductiv, curentul absorbit fiind defazat în urma tensiunii.

Factorul de putere k_p este definit ca raportul dintre puterea activă și puterea aparentă și are valoarea în regim sinusoidal:

$$k_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi ,$$

unde φ este unghiul de defazaj dintre tensiune și curent.

O valoare scăzută a factorului de putere din instalațiile industriale și din transportul energiei electrice are următoarele consecințe:

- creșterea pierderilor de putere în rezistența conductoarelor instalațiilor de producere, transport și distribuție a energiei electrice. Pentru o valoare dată a puterii active P , în instalațiile electrice funcționând sub tensiune constantă, pierderile de putere p cresc invers proporțional cu pătratul factorului de putere:

$$p = R I^2 = R \frac{U^2 I^2 \cos^2 \varphi}{U^2 \cos^2 \varphi} = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} , \quad (4.111)$$

unde R reprezintă rezistența liniei de transport, iar U - tensiunea liniei;

- mărirea secțiunii conductoarelor liniilor de transport și de distribuție a energiei electrice. Micșorarea factorului de putere duce pentru transmiterea aceleiași puteri active, la o mărire a valorii intensității curentului și deci la o mărire a secțiunii cablurilor și a cantității de cupru utilizat;

- mărirea puterii aparente S a generatoarelor electrice din centrale și a transformatoarelor din stațiile de transformare pentru transmiterea aceleiași puteri active:

$$S = P / \cos \varphi .$$

- creșterea căderilor de tensiune pe liniile de transport, prin creșterea intensității curentului din linii.

Pentru a înlătura aceste neajunsuri, în practică se caută să se îmbunătățească factorul de putere prin legarea în paralel cu receptorul inductiv a unor condensatoare. În figura 4.28 se indică schema de montaj a condensatorului C în paralel cu consumatorul inductiv de impedanță: $\underline{Z} = R + jX$, cu $X > 0$.

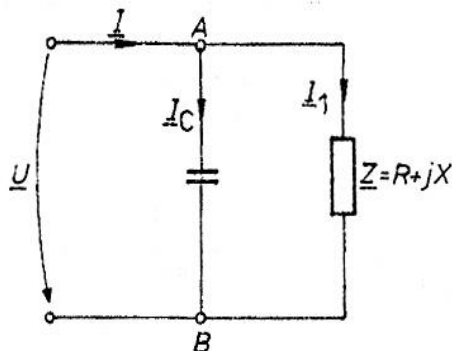


Fig.4.28 - Îmbunătățirea factorului de putere prin legarea în paralel a unui condensator.

Când condensatorul nu este legat, curentul absorbit de la rețea (curentul consumatorului) este:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R + jX} = \frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\varphi_1}. \quad (4.112)$$

Se pune problema de a găsi valoarea capacității condensatorului C pentru ca defazajul să scadă la valoarea $\varphi_2 < \varphi_1$, deci, de a îmbunătăți factorul de putere la o valoare dinainte stabilită $\cos \varphi_2$.

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului A (fig.4.28), rezultă:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_C.$$

În figura 4.29 s-a reprezentat diagrama de fazori pentru circuitul din figura 4.28 luându-se ca origine de fază tensiunea. Curentul prin condensator este defazat înaintea tensiunii cu $\pi/2$. Din figura 4.29

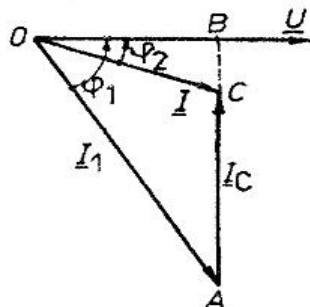


Fig.4.29 - Explicativă la calculul condensatorului.

rezultă:

$$I_C = AC = AB - BC = I_1 \sin \varphi_1 - I \sin \varphi_2 = \omega C U .$$

Condensatorul este un element de circuit pur reactiv și nu modifică puterea activă absorbită de circuit, deci putem scrie egalitatea dintre puterea activă absorbită de circuit înainte de montarea condensatorului și după montare:

$$P = U I_1 \cos \varphi_1 = U I \cos \varphi_2, \rightarrow I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1}, I = \frac{P}{U \cos \varphi_2} .$$

Înlocuind valorile curenților în relația (4.113) rezultă:

$$\omega C U = \frac{P}{U} \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{P}{U} \operatorname{tg} \varphi_2, \rightarrow C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) . \quad (4.113)$$

APLICAȚII NUMERICE

1. În nodul N al rețelei din figura 4.30a se cunosc curenții i_1 și i_2 :

$$i_1 = 6 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right); i_2 = 6 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

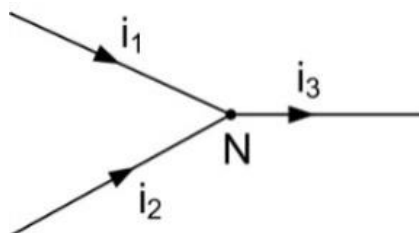


Fig.4.30a. Schema electrică pentru aplicația 1

Să se determine:

- valoarea efectivă, faza inițială și valoarea instantanee a curentului i_3 ;
- să se traseze diagrama de fazori a curenților.

Rezolvare

- Valorile complexe ale curenților vor fi:

$$i_1 = 6 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \underline{I}_1 = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) = 3(1+j).$$

$$i_2 = 6 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = 6 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 6 \sin(\omega t + \frac{3\pi}{4});$$

$$\underline{I}_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{6}{\sqrt{2}} (\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4}) = \frac{6}{\sqrt{2}} (-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3(-1 + j).$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 3(1+j) + 3(-1+j) = 6j.$$

Trecând valoarea complexă a curentului \underline{I}_3 în valoare instantanee rezultă:

- modulul curentului complex \underline{I}_3 este : $r_3 = I_3 = \sqrt{0+36} = 6.$
- argumentul curentului complex se determină din relațiile:

$$\begin{cases} \cos \alpha_3 = \frac{6}{6} = 1; \\ \sin \alpha_3 = \frac{0}{6} = 0. \end{cases} \rightarrow \alpha_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Valoarea instantanee a curentului i_3 va fi:

$$i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Cu metoda analitică curentul se determină mai greu.

Modulul și faza inițială vor fi:

$$\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} = \\ &= \sqrt{18 + 18 + 36 \cos(-\frac{\pi}{2})} = \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{I_1 \sin \alpha_1 + I_2 \sin \alpha_2}{I_1 \cos \alpha_1 + I_2 \cos \alpha_2} = \arctg \frac{\frac{6}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{6}{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{4}}{\frac{6}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{6}{\sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{4}};$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4}} = \arctg \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}.$$

$$i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) = 6\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Diagrama de fazori este redată în figura 4.30b.

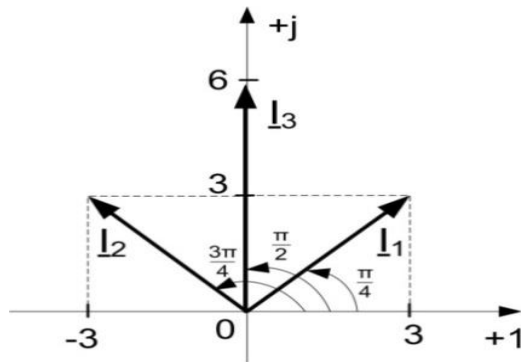


Fig.4.30.b. Diagrama de fazori

2. Se dă schema electrică din figura 4.31a. Se cunosc:

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} = 3 \, \Omega; \omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2} = \omega L_{13} = 4 \, \Omega; \omega L_3 = \frac{1}{\omega C_3} = \omega L_{12} = R_3 = 2 \, \Omega;$$

$$\omega L_4 = \frac{1}{\omega C_4} = R_1 = R_4 = 1 \, \Omega; u_{e1} = 36 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) [V]; u_{e2} = 16\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) [V].$$

Să se determine curenții din laturi folosind:

a) Metoda teoremelor lui Kirchhoff.

b) Metoda curenților ciclici.

c) Să se verifice rezultatele prin bilanțul puterilor.

Rezolvare

Valorile complexe ale tensiunilor electromotoare vor fi:

$$\underline{U}_{e1} = \frac{36}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{36}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{36}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 18(1+j);$$

$$\underline{U}_{e2} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} = 16 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = 16j.$$

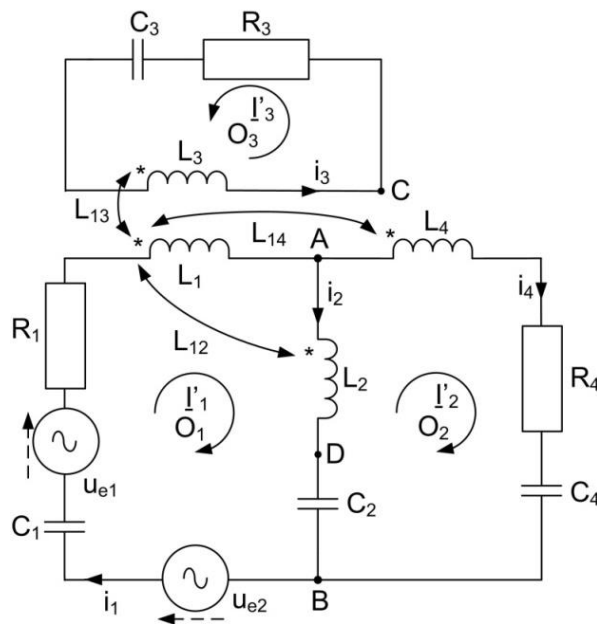


Fig. 4.31a. Pentru aplicația 2.

a) Metoda teoremelor lui Kirchhoff.

Aplicând teoremele lui Kirchhoff pentru nodul A și pentru cele trei ochiuri, se obțin ecuațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A: } \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4; \\ \text{O}_1: \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}) + \underline{I}_2 \cdot (j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}) + j\omega L_{12} \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_{13} \cdot \underline{I}_3 + j\omega L_{14} \cdot \underline{I}_4 + \\ \quad + j\omega L_{21} \cdot \underline{I}_1 = \underline{U}_{e1} + \underline{U}_{e2}; \\ \text{O}_2: \underline{I}_4 \cdot (j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C_4}) - \underline{I}_2 \cdot (j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}) - j\omega L_{21} \cdot \underline{I}_1 = 0; \\ \text{O}_3: \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}) + j\omega L_{31} \cdot \underline{I}_1 = 0. \end{array} \right.$$

Prin rezolvare rezultă: $\rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = 2(1+j); \\ \underline{I}_2 = -2+6j; \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_4 = 4(1-j). \end{cases}$

Valorile instantanee ale curenților vor fi:

$$i_1 = 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) [A]; \quad i_2 = 4\sqrt{5} \sin(\omega t + \pi - \arctg 3) [A];$$

$$i_3 = i_4 = 8 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) [A].$$

Verificarea prin bilanțul puterilor:

Puterile complexe debitate de surse:

$$\underline{S}_G = (\underline{U}_{e1} + \underline{U}_{e2}) \cdot \underline{I}_1^* = (18+34j) \cdot 2(1-j) = 104+32j;$$

$$P_G = 104 \text{ W}; Q_G = 32 \text{ VAR}; S_G = 8\sqrt{185} \text{ VA}.$$

Puterile complexe absorbite de consumatori:

$$\underline{S}_Z = P_Z + jQ_Z. \quad P_Z = R_1 \cdot I_1^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 = 8 \cdot 1 + 32 \cdot 2 + 32 \cdot 1 = 104 \text{ W};$$

$$Q_Z = (\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}) \cdot I_1^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) \cdot I_2^2 + (\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}) \cdot I_3^2 + (\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}) \cdot I_4^2 + \\ + 2\omega L_{12} \cdot \text{Re}\{\underline{I}_2^* \cdot \underline{I}_1\} + 2\omega L_{13} \cdot \text{Re}\{\underline{I}_3^* \cdot \underline{I}_1\} + 2\omega L_{14} \cdot \text{Re}\{\underline{I}_4^* \cdot \underline{I}_1\}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot \operatorname{Re}\{(2+2j) \cdot (-2-6j)\} + 8 \cdot \operatorname{Re}\{(2+2j) \cdot 4(1+j)\} + 8 \cdot \operatorname{Re}\{(2+2j) \cdot 4(1+j)\} \\
&= 4 \cdot \operatorname{Re}\{8 - 16j\} + 8 \cdot \operatorname{Re}\{1+2j - 1\} + 8 \cdot \operatorname{Re}\{1+2j - 1\} = 32 \text{ VAr}.
\end{aligned}$$

b) Metoda curenților ciclici:

Impedanțele complexe proprii și mutuale vor fi:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + 2j\omega L_{12} = 1 + 4j;$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}) + j\omega L_{12} = 2j; \quad \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = j\omega L_{13} = 4j;$$

$$\underline{Z}_{22} = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_4 + R_4 + \frac{1}{j\omega C_4} = 1; \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = 0; \quad \underline{Z}_{33} = R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = 2.$$

Sistemul de ecuațiile va fi:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}'_2 + \underline{Z}_{13} \cdot \underline{I}'_3 = \underline{U}'_{e1}; \\ \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}'_2 + \underline{Z}_{23} \cdot \underline{I}'_3 = \underline{U}'_{e2}; \\ \underline{Z}_{31} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{32} \cdot \underline{I}'_2 + \underline{Z}_{33} \cdot \underline{I}'_3 = \underline{U}'_{e3}; \end{cases}$$

unde tensiunile electromotoare complexe ale celor 3 ochiuri vor fi:

$$\underline{U}'_{e1} = \underline{U}_{e1} + \underline{U}_{e2} = 18 + 34j; \quad \underline{U}'_{e2} = 0; \quad \underline{U}'_{e3} = 0.$$

Înlocuind valorile obținute mai sus în sistemul de ecuații, se obțin ecuațiile și curenții:

$$\begin{cases} (1+4j) \cdot \underline{I}'_1 + 2j \cdot \underline{I}'_2 + 4j \cdot \underline{I}'_3 = 18 + 34j; \\ 2j \cdot \underline{I}'_1 + 1 \cdot \underline{I}'_2 + 0 \cdot \underline{I}'_3 = 0; \\ 4j \cdot \underline{I}'_1 + 0 \cdot \underline{I}'_2 + 2 \cdot \underline{I}'_3 = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{I}'_1 = 2(1+j); \\ \underline{I}'_2 = \underline{I}'_3 = 4(1-j). \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = 2(1+j); \\ \underline{I}_2 = \underline{I}'_1 - \underline{I}'_2 = -2 + 6j; \\ \underline{I}_3 = \underline{I}'_3 = 4(1-j); \\ \underline{I}_4 = \underline{I}'_3 = 4(1-j). \end{cases}$$

Au rezultat aceeași curenți ca și cei determinați prin teoremele lui Kirchhoff.

TEME DE STUDIU

Test 1.

Care este sistemul de ecuații pentru rezolvarea circuitelor de c.a. prin metoda curenților ciclici ?

Test 2.

Cum se calculează impedanțele complexe proprii și mutuale și ce semne au ?.

Test 3.

Cum se calculează t.e.m. complexe ale ochiurilor ?.

Test 4.

Cum se calculează tensiunea dintre două puncte cu ajutorul metodei generatorului de tensiune echivalent ?.

Test 5.

Cum se calculează curentul dintr-o latură cu ajutorul metodei generatorului de curent echivalent ?.

Test 6.

Ce înseamnă pasivizarea unui circuit electric ?

Test 7.

Care sunt condițiile ca un circuit să fie în rezonanță ?.

Test 8.

Care sunt avantajele unui circuit rezonant ?.

Test 9.

Care sunt frecvența respectiv pulsația de rezonanță pentru un circuit R, L, C serie ?.

Test 10.

Ce relații avem între tensiunile de pe elementele de circuit la rezonanța serie ?.

Test 11.

Ce este factorul de calitate al unui circuit rezonant serie ?.

Test 12.

Cum se mai numește circuitul rezonant serie?.

Test 13.

Care sunt frecvența respectiv pulsația de rezonanță pentru un circuit paralel R, L, C ?.

Test 14.

Ce valoare are intensitatea curentului la rezonanța serie ?.

Test 15.

Ce valoare trebuie să aibă capacitatea unui condensator care pus în paralel cu un consumator inductiv pentru ca factorul de putere să fie de o anumită valoare impusă ?.

Test 16.

Ce se întâmplă cu valoarea curentului absorbit dacă valoarea capacității condensatorului pus în paralel depășește valoarea necesară rezonanței ?.

Test 18.

Unde se folosește rezonanța serie ?

Test 19.

Unde se folosește rezonanța paralel ?