

Chapter 1

Seminar — 10 Oct. 2023, Alpha 0.1

1.1 Mulțimea numerelor reale \mathbb{R}

1.1.1 Teorie

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime

Def. Spunem că A este mărginită dacă:

$$\underbrace{m}_{\text{Margine inferioară (minorant)}} \leq a \leq \underbrace{M}_{\text{Margine superioară (majorant)}}, \forall a \in A$$

$\inf A$ = cea mai mare margine inferioară / cel mai mare minorant

$\sup A$ = cea mai mică margine superioară / cel mai mic majorant

$\min A = \inf A$, dacă $\inf A \in A$

$\max A = \sup A$, dacă $\sup A \in A$

1.2 Exerciții

1.2.1 Determinați $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$ pentru:

- a. $A = (0, 1)$
 $\inf A = 0 \in A$
 $\sup A = 1 \in A$

$$\begin{aligned}\min A &= \text{nu există} \\ \max A &= \text{nu există}\end{aligned}$$

$$\text{b. } A = (-1, 1] \cup \{2\}$$

$$\inf A = -1$$

$$\sup A = 2$$

$$\min A = \text{nu există}$$

$$\max A = 2$$

$$\text{c. } A = (-\infty, 0]$$

$$\inf A = -\infty$$

$$\sup A = 0$$

$$\min A = \text{nu există}$$

$$\max A = 0$$

$$\text{d. } A = \{x^2 - 2x + 5 | x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{Im}f = [y_v, \infty)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$y_v = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow y_v = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{Im}f = [y_v, \infty) = [4, \infty)$$

$$\inf A = \infty$$

$$\sup A = 4$$

$$\min A = 4$$

$$\max A = \text{nu există}$$

$$\text{e. } A = \{x^2 + 2x - 1 | x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im}f = [-\infty, \frac{-\Delta}{4a})$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Im}f = (-\infty, 0]$$

$$\inf A = -\infty$$

$$\sup A = 0$$

$$\min A = \text{nu există}$$

$$\max A = 0$$

$$\text{f. } A = \{x \in \mathbb{R} | 4x^2 + 3x - 1 > 0\}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 + 3x - 1$$

$$f(x) = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{8}$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\inf A = -\infty$$

$$\sup A = \infty$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{4}$	∞
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$A = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$$

$$\inf A = -\infty$$

$$\sup A = \infty$$

1.2.2 Care din următoarele mulțimi este mărginită?

a. $A = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in (0, \infty)\right\}$

$$0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \infty$$

$$\underbrace{\frac{1}{0}}_{\infty} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\infty}$$

$$A = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in (0, \infty)\right\} = (0, \infty) \Rightarrow \begin{array}{l} \inf A = 0 \text{ — mărginit} \\ \sup A = \infty \text{ — nu este mărginit} \end{array}$$

b. $A = \left\{\frac{n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

$$0 < \frac{n+1}{n+2} < 1 \Rightarrow A \text{ — mărginită}$$

c. $A = \{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\} = [-1, 1) \Rightarrow A \text{ — mărginită}$

d. $A = \left\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

$$\frac{n^2}{n+1} > 0$$

$$\frac{n^2}{n+1} < \frac{n^2}{n} = n$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \text{ — nemărginită} \Rightarrow A \text{ — nu este mărginită}$$