# C U R S U L 17

## 4. CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV (4)

## 4.8. CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE

Transmiterea energiei electromagnetice de la locul de producere a acesteia (centrale electrice) la locurile de utilizare se face prin linii electrice. În cazurile cele mai simple, transmisia se face cu o linie electrică cu două conductoare alimentate la plecare cu o tensiune electromotoare (t.e.m.) alternativă. Acest sistem de transmisie reprezintă sistemul monofazat. În cazul în care linia electrică are 3 sau 4 conductoare, alimentate de trei t.e.m. alternative de aceeaşi frecvenţă dar defazate între ele, transmisia se realizează printr-un sistem trifazat.

Circuitele trifazate realizează un transport de energie electrică mai economic şi permit folosirea în acţionările electrice a motoarelor asincrone trifazate, mai simple şi mai economice decât cele monofazate.

### 4.8.1. Sisteme trifazate simetrice

**Se numeşte sistem trifazat, un ansamblu de trei mărimi sinusoidale de acelaşi fel, de aceeaşi frecvenţă şi defazate între ele cu acelaşi unghi**. Dacă mărimile au valorile efective egale şi sunt defazate astfel încât fiecare să fie defazată în urma precedentei cu **2π/3**, sistemul se numeşte **sistem trifazat simetric direct**.

Valorile instantanee ale unui astfel de sistem vor fi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\beta) \\ a_2 &= \sqrt{2}\,A\sin\left(\omega t+\beta-\frac{2\pi}{3}\right) \\ a_3 &= \sqrt{2}\,A\sin\left(\omega t+\beta+\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{4.114}$$

Dacă mărimile au valorile efective egale dar fiecare este defazată înaintea precedentei cu **2π/3**, sistemul se numeşte **sistem trifazat simetric invers**.

Valorile lor instantanee sunt:

$$a_1 = \sqrt{2}\ A\sin(\omega t + \beta)$$
$$a_2 = \sqrt{2}\ A\sin\left(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (4.115)$$
$$a_3 = \sqrt{2}\ A\sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right).$$

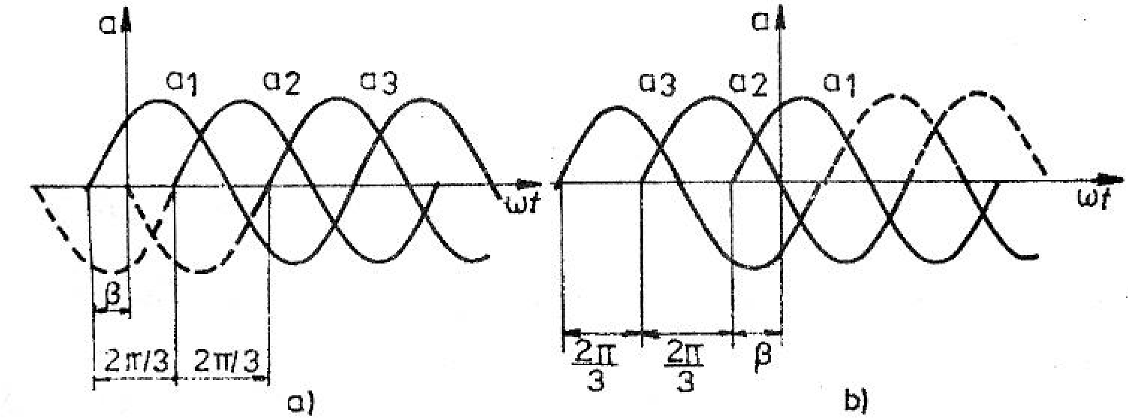


Fig.4.32 - a) Sistem trifazat simetric de succesiune directă; b) sistem trifazat simetric de succesiune inversă.

În figura 4.32a sunt reprezentate mărimile unui sistem trifazat simetric direct, iar în figura 4.32b cele ale unui sistem trifazat simetric invers, în funcţie de timp.

În continuare se vor trata numai sistemele trifazate simetrice de succesiune directă.

Imaginile în complex ale mărimilor sistemului trifazat simetric direct sunt:

$$\underline{A}_1 = Ae^{j\beta}, \quad \underline{A}_2 = Ae^{j(\beta - \frac{2\pi}{3})}, \quad \underline{A}_4 = Ae^{j(\beta + \frac{2\pi}{3})}. \qquad (4.116)$$

Se notează cu **a** numărul complex:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (4.117)$$

numit **operator de rotaţie** sau **operatorul lui Steinmetz.** Acest operator are modulul egal cu unitatea şi argumentul **2π/3**. Înmulţirea unui fazor cu **a**, înseamnă rotirea acestui fazor cu **2π/3** radiani în sens trigonometric (fig.4.33).

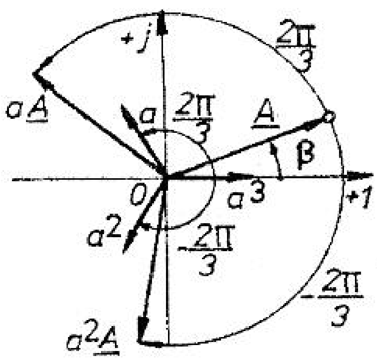


Fig.4.33 - Fazorii unui sistem trifazat simetric direct.

Pentru operatorul lui Steinmetz sunt valabile relaţiile:

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$a^3 = 1, \quad 1 + a + a^2 = 0. \qquad (4.118)$$

Cu ajutorul operatorului lui Steinmetz, mărimile sistemului trifazat simetric direct se scriu în complex astfel:

$$\underline{A}_1 = Ae^{j\beta}, \quad \underline{A}_2 = a^2\underline{A}_1, \quad \underline{A}_3 = a\underline{A}_1. \qquad (4.119)$$

Adunând relaţiile 4.119, rezultă:

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \underline{A}_1(1 + a^2 + a) = 0. \qquad \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0. \qquad (4.120)$$

adică suma mărimilor unui sistem trifazat simetric direct este nulă atât în complex, cât şi în valori instantanee.

În planul complex, cele trei mărimi simetrice directe se reprezintă prin trei fazori egali ca modul, dar rotiţi cu **2π/3** radiani în sens invers trigonometric (fig.4.33).

### 4.8.2. Producerea tensiunilor electromotoare trifazate simetrice

Dacă se fixează pe acelaşi ax trei cadre dreptunghiulare identice, bobinate cu ***N*** spire fiecare, având planurile decalate succesiv cu câte **2π/3** (fig.4.34) şi dacă se rotesc cu turaţie constantă ***n*** (rot/s) în jurul unei axe paralele cu una din laturi, într-un câmp magnetic omogen de inducţie magnetică $\boldsymbol{B}_0$, perpendicular pe axa de rotaţie, se obţine un sistem trifazat simetric de t.e.m.

Vom studia pentru început t.e.m. indusă în cadrul dreptunghiular **1**, unde pentru simplificare s-a figurat în figura 4.34 doar o singură spiră.

Dacă unghiul făcut de normala $\mathbf{n_1}$ la planul spirei **1** este la momentul $t$ = **0**, $\boldsymbol{\alpha_0 = \pi n t + \alpha_1}$, iar $A_s$ este aria spirei, fluxul magnetic instantaneu prin cele $N$ spire ale cadrului **1** este:

$$\Phi_1 = N\, A_s\, B_0 \cos\left(2\,\pi\, n\, t + \alpha_1\right)\ , \tag{4.121}$$

iar t.e.m. instantanee indusă în cadru va fi:

$$u_{e1} = -\frac{d\,\Phi_1}{d\,t} = 2\pi n N A_s B_0 \sin(2\pi n t + \alpha_1) = \\ = \sqrt{2}\, U_e \sin(\omega t + \alpha_1). \tag{4.122}$$

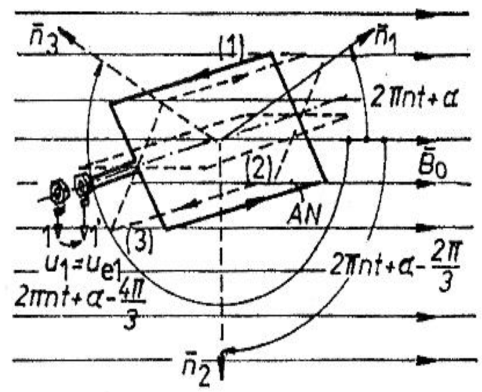


Fig.4.34 - Producerea unui sistem trifazat simetric de tensiuni electromotoare.

Această t.e.m. are pulsaţia, faza iniţială şi valoarea efectivă:

$$\omega = 2\,\pi\, f = 2\,\pi\, n\,,\ \alpha = \alpha_1 = (\,\bar{n}_1\,,\bar{B}_0\,)_{t=0}\,, \\ U_e = 4{,}44\ f\ N\ \Phi_{f\,0}\ , \tag{4.123a,b,c}$$

în care $\boldsymbol{\Phi_{f0} = A_s\, B_0}$ este valoarea maximă a fluxului fascicular al unei spire.

T.e.m. $\boldsymbol{u_{e1}}$ poate alimenta un circuit exterior prin două perii (**1** şi **1**') în contact cu inelele colectoare, fixate pe axul de rotaţie şi conectate la capetele înfăşurării cadrului.

În cazul celor trei cadre dreptunghiulare, fluxurile magnetice instantanee care vor traversa cele trei cadre vor diferi numai prin unghiurile făcute de normalele planurilor cadrelor respective cu direcţia liniilor de câmp magnetic în momentul iniţial ($t$ = 0). Aceste unghiuri vor fi respectiv:

$$\alpha_1 = \alpha\ ,\ \ \alpha_2 = \alpha - \frac{2\,\pi}{3}\ ,\ \ \alpha_3 = \alpha - \frac{4\,\pi}{3} = \alpha + \frac{2\,\pi}{3}\ . \tag{4.124}$$

Pentru t.e.m. induse în cele trei cadre se vor obţine expresiile:

$$u_{e1} = \sqrt{2}\, U_e \sin(\omega\, t + \alpha)\,,\ u_{e2} = \sqrt{2}\, U_e \sin(\omega\, t + \alpha - \frac{2\,\pi}{3})\ , \\ u_{e3} = \sqrt{2}\, U_e \sin(\omega\, t + \alpha - \frac{4\,\pi}{3}) = \sqrt{2}\, U_e \sin(\omega\, t + \alpha + \frac{2\,\pi}{3})\ . \tag{4.125}$$

în care t.e.m. efectivă $\boldsymbol{U_e}$ este dată de relaţia (4.123c), pulsaţia $\boldsymbol{\omega}$ de relaţia (4.123a), iar faza iniţială $\boldsymbol{\alpha}$ de relaţia (4.123b). Relaţiile (4.125) arată că t.e.m. induse în cele trei cadre formează un sistem trifazat simetric direct.

Generatoarele de curent alternativ trifazat (generatoarele sincrone) se construiesc pe baza acestui principiu, cu următoarele deosebiri mai importante:

- în locul celor trei cadre dreptunghiulare există trei înfăşurări mai complexe, decalate între ele în spaţiu, numite faze;
- înfăşurările sunt fixe, iar câmpul magnetic inductor este un câmp magnetic învârtitor obţinut pe cale mecanică.

### 4.8.3. Conexiunile reţelelor trifazate

#### 4.8.3.1.Conexiunea independentă.

Fiecare fază a unui generator trifazat poate alimenta câte un receptor independent, deci, generatorul poate alimenta trei receptoare monofazate diferite prin intermediul a şase conductoare de legătură (fig.4.35).

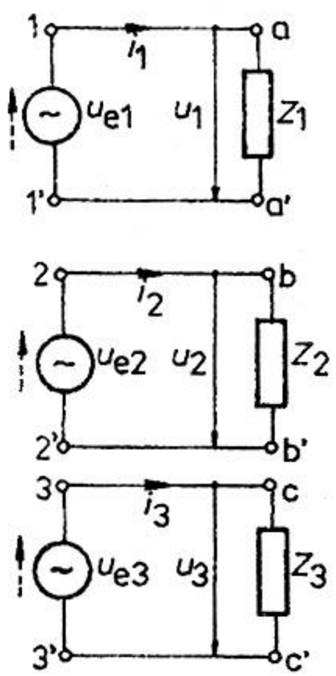

Fig.4.35 – Conexiunea independentă.

Se spune că în acest caz, fazele generatorului funcţionează independent.

Dacă impedanţele complexe ale receptorului trifazat sunt egale (**receptorul este echilibrat**):

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = Z\,e^{j\varphi}\ , \qquad (4.126)$$

rezultă că şi curenţii din cele trei circuite vor avea aceleaşi valori efective şi aceleaşi defazaje faţă de t.e.m. care i-au produs:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I\ ,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi\ . \qquad (4.127)$$

În cazul unor t.e.m. ce formează un sistem simetric direct şi a unui receptor echilibrat, curenţii din cele trei faze ale generatorului vor forma de asemeni un sistem trifazat simetric direct:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2}\ I\ \sin(\omega t + \alpha - \varphi)\ , \\ i_2 &= \sqrt{2}\ I\ \sin(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3})\ , \\ i_3 &= \sqrt{2}\ I\ \sin(\omega t + \alpha - \varphi + \frac{2\pi}{3})\ . \end{aligned} \qquad (4.128)$$

Puterea transmisă de un conductor la un factor de putere egal cu unitatea este:

$$P = \frac{U_k \ I_k}{2} \ , \ \text{pentru}(k=1,2,3) \qquad (4.129)$$

Fiecare circuit independent se mai numeşte **circuit monofazat**. Acest sistem de trei circuite monofazate independente nu este utilizat în practică, deoarece prin conexiuni speciale se poate micşora numărul conductoarelor necesare transmisiei energiei electrice la trei sau patru, obţinându-se astfel un circuit (reţea) trifazat, la care puterea transmisă pe un conductor este mai mare decât cea transmisă în conexiunea independentă (rel.4.129).

### 4.8.3.2. Conexiunea în stea

Se leagă împreună bornele 1',2',3' ale generatorului, formând un punct **O** - numit **neutrul sau nulul generatorului** și respectiv bornele a',b',c' ale receptorului, formând un punct **N** - numit **neutrul sau nulul receptorului**. Cele trei linii de întoarcere a'1', b'2'și c'3' ale celor trei circuite monofazate se pot înlocui printr-un singur conductor **NO**, numit **conductor neutru**. Conductoarele a1,b2,c3 se numesc **conductoare de linie**. Se obține astfel un sistem trifazat cu conexiunea în stea atât la generator cât și la receptor (fig.4.36). Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff nodului **N**, rezultă curentul din conductorul neutru:

$$i_0 = i_1 + i_2 + i_3 . \qquad (4.130)$$

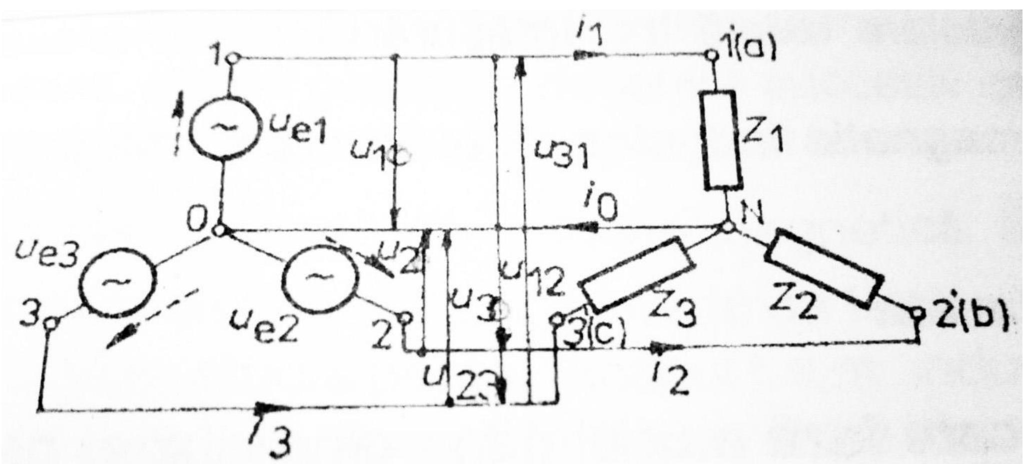


Fig.4.36.- Tensiunile și curenții la conexiunea stea.

Dacă sistemul de t.e.m. este simetric iar receptorul este echilibrat, sistemul de curenți absorbiți de receptor este un sistem simetric și conform relației (4.120) curentul din conductorul neutru este nul:

$$i_0 = 0. \qquad (4.131)$$

Pe baza relației (4.131), se deduce că pentru sistemele trifazate în stea, cu receptor trifazat echilibrat și tensiuni la borne simetrice, conductorul neutru poate lipsi. În acest caz, transportul energiei electrice se va face numai cu ajutorul a trei conductoare.

La conexiunea stea se disting două sisteme de tensiuni:

- **tensiunile de fază** $u_{10}, u_{20}, u_{30}$ dintre un conductor de linie și conductorul de nul (tensiunile pe cele trei impedanțe ale receptorului);

- **tensiunile de linie** $u_{12}, u_{23}, u_{31}$ dintre două conductoare de linie. Aceste tensiuni se mai numesc și tensiuni între faze, deoarece conductoarele de linie se mai numesc în terminologia curentă, faze.

Din figura 4.36 rezultă că tensiunile de linie sunt egale cu diferențele tensiunilor de fază respective:

$$u_{12} = u_{10} - u_{20}, \quad u_{23} = u_{20} - u_{30}, \quad u_{31} = u_{30} - u_{10}. \tag{4.132}$$

Trecând în complex relațiile (4.132), se obține:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10}. \tag{4.133}$$

Din relațiile (4.123) și (4.124) rezultă că suma tensiunilor de linie în valori instantanee sau în complex este nulă indiferent dacă sistemul este simetric sau nu:

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0, \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \tag{4.134}$$

Pe baza relațiilor (4.134) se pot reprezenta în planul complex, fazorii corespunzători acestor tensiuni de fază și de linie (fig.4.37). Dacă sistemul de tensiuni de fază este simetric direct, triunghiul 1,2,3 este echilateral și tensiunea de linie complexă $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{12}}$ va fi:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = \underline{U}_{10} - a^2\underline{U}_{10} = \underline{U}_{10}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,\underline{U}_1 e^{j\frac{\pi}{6}}. \tag{4.135}$$

Din figură se observă că și sistemul tensiunilor de linie este un sistem simetric direct.

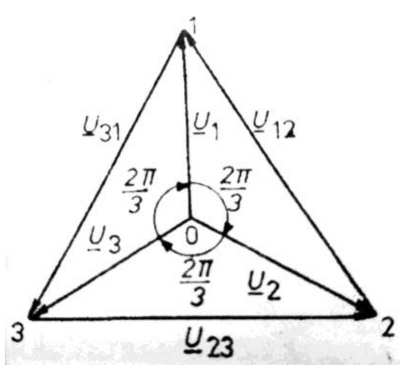


Fig.4.37 - Diagrama de fazori la conexiune stea.

Fazorul tensiunii de linie $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{12}}$ se obține amplificând cu $\sqrt{3}$ fazorul tensiunii de fază $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{10}}$ și rotindu-l cu un unghi de $\pi$ **/6** radiani în sens trigonometric.

Introducând notațiile:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_1, \quad U_{10} = U_{20} = U_{30} = U_f, \tag{4.136}$$

rezultă din (4.135) pentru sisteme simetrice:

$$U_l = \sqrt{3}\,U_f. \tag{4.137}$$

La conexiune stea cu receptor echilibrat, alimentată cu un sistem simetric de tensiuni, valoarea efectivă a tensiunilor de linie este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decât valoarea efectivă a tensiunilor de fază.

Conexiunea în stea cu fir neutru permite obținerea a două sisteme de tensiuni diferite, permițând funcționarea receptoarelor construite pentru tensiuni nominale diferite (de exemplu 400/230 V).

Rețeaua care nu are conductor neutru, nu dispune decât de sistemul de tensiuni de linie. Tensiunile de linie standardizate în România sunt: 400V; 1, 3, 6, 10, 15, 35, 60, 110, 220 și 400 kV.

**Curenții care străbat conductoarele de linie se numesc curenți de linie (*I*l)**, iar **curenții din fazele generatorului sau receptorului se numesc curenț de fază (*I*f)**. În cazul conexiunii în stea, curenții de fază sunt egali cu curenții de linie. Dacă avem un sistem simetric de curenți:

$$I_l = I_f\,, \tag{4.138}$$

adică valoarea efectivă a curenților de linie este egală cu valoarea efectivă a curenților de fază, pentru conexiunea stea echilibrată, alimentată cu tensiuni simetrice.

### 4.8.3.3. Conexiunea triunghi

Dacă se leagă sfârşitul unei faze a generatorului cu începutul fazei următoare (**1**' cu **2**, **2**' cu **3**, **3**' cu **1**), iar borna de sfârşit a fiecărui receptor la borna de început a receptorului de pe faza următoare (***a***' cu ***b***, ***b***' cu ***c***, ***c***' cu ***a***) se obţine şi la generator şi la receptor (fig.4.38) conexiunea triunghi. În acest caz tensiunile de linie sunt egale cu tensiunile pe fazele generatorului sau receptorului.

În cazul sistemelor simetrice şi receptor echilibrat, este adevărată relaţia:

$$U_1 = U_f\;. \tag{4.139}$$

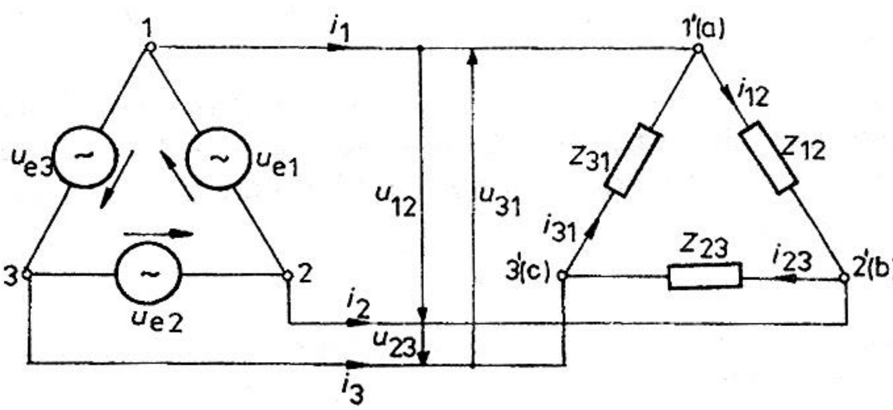

Fig.4.38 - Tensiunile şi curenţii la conexiunea triunghi.

Între **curenţii de linie** (***i***1 , ***i***2 , ***i***3) ce străbat conductoarele de linie şi **curenţii de fază** (***i***12 ***i***23, ***i***31) ce străbat impedanţele consumatorului, există următoarele relaţii deduse din prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată nodurilor **1**(***a***), **2**(***b***), **3**(***c***) de la receptor:

$$i_1 = i_{12} - i_{31}\;,\quad i_2 = i_{23} - i_{12}\;,\quad i_3 = i_{31} - i_{23}\;. \tag{4.140}$$

Trecând în complex relaţiile (4.140) rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \ , \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \ , \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \ . \qquad (4.141)$$

Pe baza relaţiilor (4.140) şi (4.141) rezultă că suma curenţilor de linie în valori instantanee sau în complex este nulă indiferent dacă sistemul este simetric sau nu:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \ , \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \ . \qquad (4.142)$$

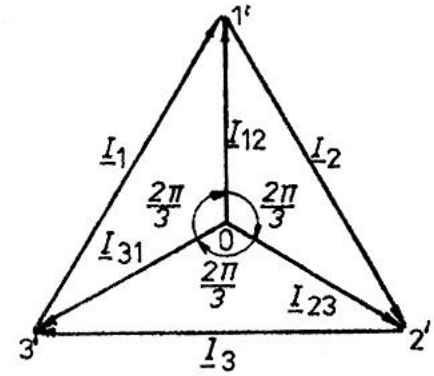

Fig.4.39 - Diagrama de fazori a curenţilor la conexiunea triunghi.

Pe baza relaţiilor (4.142) se pot reprezenta în planul complex fazorii corespunzători acestor curenţi (fig.4.39). Dacă sistemul de curenţi de fază este simetric direct, triunghiul 1,2,3 este echilateral şi curenţii de linie vor forma şi ei un sistem simetric direct. Curentul $\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{1}}$ va fi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}(1 - a) = \\ = \underline{I}_{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,\underline{I}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}} \ . \qquad (4.143)$$

Fazorul curentului de linie $\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{1}}$ este defazat în urma fazorului curentului de fază $\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{12}}$ cu $\boldsymbol{\pi/6}$ radiani, iar modulul său este de $\sqrt{3}$ ori mai mare.

În cazul unui sistem simetric de curenţi, există următoarele relaţii între valorile efective ale curenţilor de linie $\boldsymbol{I_l}$ şi de fază $\boldsymbol{I_f}$:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_{l1} \ , \quad \mathrm{I}_{12} = \mathrm{I}_{23} = \mathrm{I}_{31} = \mathrm{I_f} \ , \quad \mathrm{I}_l = \sqrt{3}\,\mathrm{I_f} \ . \qquad (4.144)$$

Se pot realiza şi conexiuni în triunghi la generator şi în stea la receptor sau invers.

Sistemele trifazate prezintă numeroase avantaje faţă de cele monofazate:

- transmiterea energiei electrice se face în condiţii mai economice;

- au posibilitatea de a dispune la utilizare de două sisteme de tensiuni diferite pentru consumatorii monofazaţi (conexiunea în stea cu fir neutru);

- permit producerea câmpurilor magnetice învârtitoare care sunt utilizate la funcţionarea celor mai simple şi mai economice motoare electrice de curent alternativ, motoarele asincrone.

## 4.9. PUTERILE ÎN REȚELELE TRIFAZATE

Calculul puterilor în sistemele trifazate se face după aceleaşi principii ca la curentul alternativ monofazat. Puterile activă, reactivă şi aparentă absorbite de receptorul trifazat vor fi egale cu sumele puterilor active, reactive sau aparente absorbite de fiecare fază în parte.

**4.9.1. Conexiunea stea.**

Considerăm un **receptor conectat în stea**, cu tensiunile de fază $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, care formează, în general, un sistem nesimetric şi curenţii de fază (de linie) $\boldsymbol{i_1}$, $\boldsymbol{i_2}$, $\boldsymbol{i_3}$ nesimetrici, defazaţi faţă de tensiunile corespunzătoare cu unghiurile $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, putem scrie expresiile puterilor activă, reactivă şi aparentă absorbite de receptor:

$$\begin{aligned} P &= U_{10}\, I_1 \cos\varphi_1 + U_{20}\, I_2 \cos\varphi_2 + U_{30}\, I_3 \cos\varphi_3 [W], \\ Q &= U_{10}\, I_1 \sin\varphi_1 + U_{20}\, I_2 \sin\varphi_2 + U_{30}\, I_3 \sin\varphi_3 [VAr], \\ S &= U_{10}\, I_1 + U_{20}\, I_2 + U_{30}\, I_3 [VA], \end{aligned} \tag{4.145}$$

unde $\boldsymbol{U_{10}}$, $\boldsymbol{U_{20}}$, $\boldsymbol{U_{30}}$ sunt valorile efective ale tensiunilor de fază iar $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$, $\boldsymbol{I_3}$ sunt valorile efective ale curenţilor de fază (linie).

**4.9.2. Conexiunea în triunghi.**

Fie $\boldsymbol{u_{12}}$, $\boldsymbol{u_{23}}$, $\boldsymbol{u_{31}}$ tensiunile pe fazele receptorului (egale cu tensiunile de linie), iar $\boldsymbol{i_{12}}$, $\boldsymbol{i_{23}}$, $\boldsymbol{i_{31}}$ curenţii de fază şi $\varphi_{12}$, $\varphi_{23}$, $\varphi_{31}$ defazajele respective. Puterile activă, reactivă şi aparentă absorbite de receptorul trifazat vor avea expresiile:

$$\begin{aligned} P &= U_{12} I_{12} \cos\varphi_{12} + U_{23}\, I_{23} \cos\varphi_{23} + U_{31}\, I_{31} \cos\varphi_{31} [W], \\ Q &= U_{12} I_{12} \sin\varphi_{12} + U_{23}\, I_{23} \sin\varphi_{23} + U_{31}\, I_{31} \sin\varphi_{31} [VAr], \\ S &= U_{12}\, I_{12} + U_{23}\, I_{23} + U_{31}\, I_{31} [VA], \end{aligned} \tag{4.146}$$

unde $\boldsymbol{U_{12}}$, $\boldsymbol{U_{23}}$, $\boldsymbol{U_{31}}$ sunt valorile efective ale tensiunilor de fază (de linie), iar $\boldsymbol{I_{12}}$, $\boldsymbol{I_{23}}$, $\boldsymbol{I_{31}}$ valorile efective ale curenţilor de fază.

Dacă sistemele de tensiuni şi curenţi sunt simetrice, vom avea următoarele relaţii:

- pentru conexiunea în stea:

$$U_{10} = U_{20} = U_{30} = U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}, \ I_1 = I_2 = I_3 = I_f = I_l, \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi \ ; \tag{4.147}$$

- pentru conexiunea în triunghi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_f = U_l, \quad I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}, \quad \varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31} = \varphi . \tag{4.148}$$

Ţinând seama de relaţiile (4.147) şi (4.148) rezultă pentru conexiunea în stea:

$$P = 3\,U_f\,I_f\,\cos\varphi = 3\frac{U_l}{\sqrt{3}}\,I_l\,\cos\varphi = \sqrt{3}\,U_{10}\,I_l\,\cos\varphi\,[W],$$

$$Q = \sqrt{3}\,U_{10}\,I_l\,\sin\varphi\,[VAr], \qquad S = \sqrt{3}\,U_{10}\,I_l\,[VA];$$

iar pentru conexiunea triunghi:

$$P = 3\,U_f\,I_f\,\cos\varphi = 3\,U_l\,\frac{I_l}{\sqrt{3}}\,\cos\varphi = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\,\cos\varphi\,[W],$$

$$Q = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\,\sin\varphi\,[VAr], \qquad S = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\,[VA].$$

Comparând expresiile obţinute pentru conexiunile stea şi triunghi, se constată că în sistemele simetrice şi echilibrate, calculul puterilor se face cu aceleaşi relaţii, indiferent de conexiune:

$$P = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\,\cos\varphi,[W]\quad Q = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\sin\varphi,[VAr]\quad S = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\,[VA]. \tag{4.149}$$

În sistemele simetrice, echilibrate, se pot folosi relaţiile cunoscute de la circuitele monofazate.

Puterea complexă, în cazul reţelelor trifazate, poate fi scrisă sub forma:

- pentru conexiunea în stea cu fir neutru:

$$\underline{S} = \underline{U}_{10}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_{20}\,\underline{I}_2^* + \underline{U}_{30}\,\underline{I}_3^*\,, \tag{4.150}$$

- pentru conexiunea în triunghi:

$$\underline{S} = \underline{U}_{12}\,\underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23}\,\underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31}\,\underline{I}_{31}^*\,, \tag{4.151}$$

unde partea reală reprezintă puterea activă absorbită, iar partea imaginară, puterea reactivă.

Pentru sisteme simetrice, puterile absorbite pe cele trei faze vor fi egale şi ca urmare puterea complex absorbită va fi pentru cele două conexiuni:

$$\underline{S} = 3\,\underline{U}_{10}\,\underline{I}_1^*\,, \quad \underline{S} = 3\,\underline{U}_{12}\,\underline{I}_{12}^*\,. \tag{4.152}$$

**Observaţie**. Puterea activă în sistemul trifazat dezechilibrat cu fir neutru se poate măsura cu ajutorul a trei wattmetre ca în figura 4.40, spre deosebire de sistemul trifazat echilibrat sub tensiuni la borne simetrice unde se montează un singur wattmetru (bobina de tensiune este alimentată între fază şi nul). Puterea activă absorbită de receptor este egală cu de trei ori indicaţia wattmetrului.

În cazul sistemelor trifazate fără fir neutru se poate demonstra că se poate măsura puterea şi cu ajutorul a numai două wattmetre conectate ca în figura 4.41. Puterea absorbită fiind egală cu suma algebrică a indicaţiilor celor două wattmetre (se ţine seama şi de semnul puterilor).

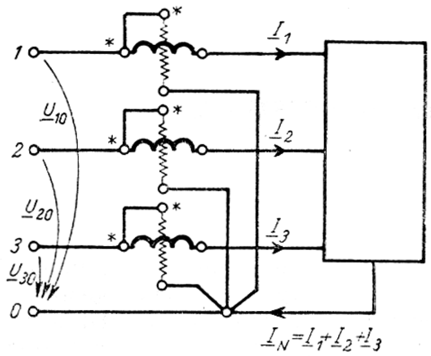


Fig.4.40. Schema de măsurare cu trei wattmetre a puterii active pentru circuite cu patru conductoare.

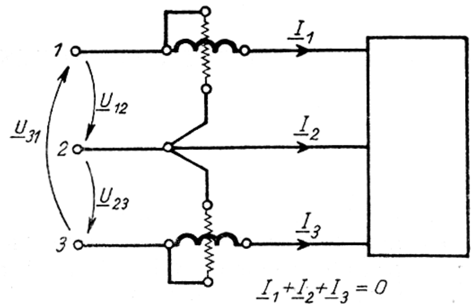


Fig. 4.41. Schema de măsurare a puterii active cu două wattmetre pentru circuite cu trei conductoare.

### 4.9.3. Definiţii şi notaţii.

* Se numesc ***curenţi de linie*** curenţii care străbat conductoarele de alimentare şi ***curenţi de fază*** curenţii care parcurg receptoarele.

* ***Tensiunea de fază*** este tensiunea dintre o bornă a unei faze şi un punct neutru iar ***tensiunea de linie*** este tensiunea dintre două borne sau conductoare de fază.

În cadrul acestui paragraf se utilizează următoarele notaţii:

$U_f$ — valoarea efectivă a tensiunilor de fază ale reţelei;

$U_l$ — valoarea efectivă a tensiunilor de linie ale reţelei;

$U_r$ — valoarea efectivă a tensiunilor de fază aplicate receptorului;

$I_l$ — valoarea efectivă a intensităţilor curenţilor de linie ai reţelei;

$I_f$ — valoarea efectivă a intensităţilor curenţilor de fază ai reţelei.

Un receptor trifazat este alimentat simetric dacă tensiunile de alimentare de fază sau de linie formează un sistem simetric. Dacă nu se precizează felul sistemului simetric se consideră implicit sistem simetric direct.

Receptor trifazat este echilibrat dacă impedanţele complexe ale celor trei faze sunt egale:

- pentru conexiunea stea: $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3$.
- pentru conexiunea triunghi: $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{23}=\underline{Z}_{31}$.

## 4.10. REZOLVAREA REȚELELOR TRIFAZATE

### 4.10.1. Rețele trifazate cu conexiune triunghi.

Se consideră o rețea trifazată cu conexiunea triunghi, unde tensiunile $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ şi $\underline{U}_{31}$ sunt date de relaţiile (4.184) şi impedanţele receptorului sunt egale (figura 4.42). Pentru calculul curenţilor de fază se observă că tensiunile de linie sunt aplicate receptorului. Aplicând teorema lui a doua a lui Kirchhoff, rezultă:

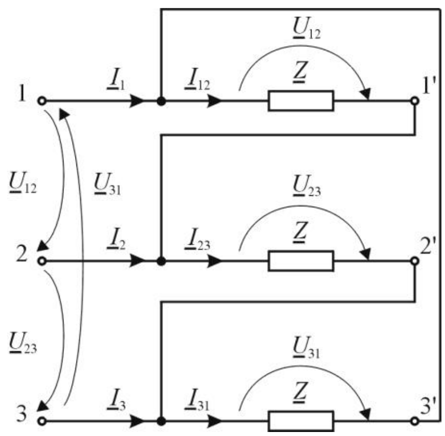


Fig. 4.42 - Receptor echilibrat cu conexiunea triunghi.

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{U_l \, e^{j\alpha}}{Z \, e^{j\varphi}} = \frac{U_l}{Z} e^{j(\alpha-\varphi)}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{a^2 \underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a^2 \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{12} \,, \qquad (4.153)$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{a\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{12} \,.$$

Curenții de fază formează un sistem simetric direct având valorile efective:

$$\left|\underline{I}_{12}\right| = \left|\underline{I}_{23}\right| = \left|\underline{I}_{31}\right| = \frac{U_l}{Z} \,.$$

Curenţii de fază sunt defazaţi în urma tensiunilor de linie corespunzătoare cu unghiul φ dat de valoarea impedanţei. Expresiile valorilor instantanee ale celor trei curenţi sunt:

$$i_{12} = \frac{U_l}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - \varphi). \tag{4.154}$$

$$i_{23} = \frac{U_l}{Z}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right). \tag{4.155}$$

$$i_{31} = \frac{U_l}{Z}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right). \tag{4.156}$$

Pentru calculul intensităţilor curenţilor de linie se aplică teorema I a lui Kirchhoff, pe rând, nodurilor 1, 2, 3. Rezultă:

$$\begin{gathered}\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} - a\,\underline{I}_{12} = (1-a)\underline{I}_{12} = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}.\\ \underline{I}_1 = \frac{U_l}{Z}e^{j(\alpha-\varphi)}\,e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{U_l}{Z}\sqrt{3}\,e^{j\left(\alpha-\varphi-\frac{\pi}{6}\right)}.\end{gathered} \tag{4.157}$$

$$\begin{gathered}\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = a^2\underline{I}_{12} - \underline{I}_{12} = a^2(1-a)\underline{I}_{12} = a^2\,\underline{I}_1.\\ \underline{I}_2 = \frac{U_l}{Z}e^{j\left(\alpha-\varphi-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{U_l}{Z}\sqrt{3}\,e^{j\left(\alpha-\varphi+\frac{7\pi}{6}\right)}.\end{gathered} \tag{4.158}$$

$$\begin{gathered}\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = a\underline{I}_{12} - a^2\,\underline{I}_{12} = a(1-a)\underline{I}_{12} = a\,\underline{I}_1.\\ \underline{I}_3 = \frac{U_l}{Z}e^{j\left(\alpha-\varphi-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{U_l}{Z}\sqrt{3}\,e^{j\left(\alpha-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}.\end{gathered} \tag{4.159}$$

Din relaţiile (4.157)…(4.159) se observă că şi curenţii de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$ formează un sistem simetric direct.

De asemenea se observă ca modulele curenţilor de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$ sunt de $\sqrt{3}$ ori mai mari decât modulele curenţilor de fază $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ şi $\underline{I}_{31}$. Deci există relaţia:

$$I_l = \sqrt{3}\, I_f \; . \tag{4.160}$$

Expresiile valorilor instantanee ale intensităţilor curenţilor de linie sunt:

$$i_1 = \frac{U_l}{Z}\sqrt{6}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{\pi}{6}\right), \tag{4.161}$$

$$i_2 = \frac{U_l}{Z}\sqrt{6}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi + \frac{7\pi}{6}\right), \tag{4.162}$$

$$i_3 = \frac{U_l}{Z}\sqrt{6}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.163}$$

În figura 4.43 este prezentată diagrama de fazori a tensiunilor şi curenţilor pentru o reţea simetrică cu receptor echilibrat cu conexiunea în triunghi. Fazorii tensiunilor de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{23}$ formează un triunghi echilateral având vârfurile în punctele 1, 2 şi 3.

Fazorii curenţilor de fază $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ respectiv $\underline{I}_{31}$ au originea în centrul cercului circumscris triunghiului echilateral având vârfurile în punctele 1, 2. şi 3.

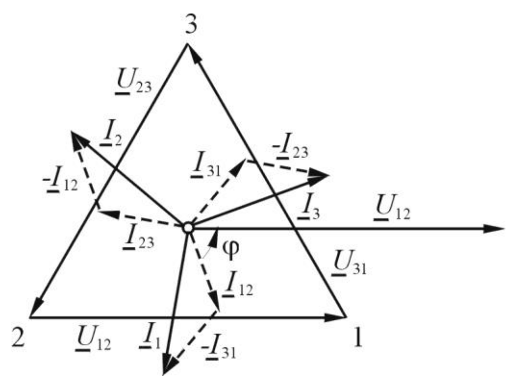


Fig.4.43. - Diagrama de fazori a tensiunilor şi curenţilor pentru conexiunea triunghi.

Aceşti fazori sunt defazaţi în urma fazorilor tensiunilor de linie cu unghiul φ. Ţinând seama de relaţiile (4.161)…(4.163) s-au construit fazorii curenţilor de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$.

<u>Observaţie.</u> Se poate transfigura triunghiul în stea ( $\underline{Z}_Y = \underline{Z}_\Delta / 3$) și să se rezolve rețeaua cu ajutorul schemei echivalente în stea obținută folosind formulele cunoscute. Pentru aceasta se vor introduduce nişte tensiuni de fază fictive:

$$\underline{U}_{10} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6}.$$

**TEME DE STUDIU**

Test 1.

Care sunt caracteristicile unui sitem trifazat de mărimi electrice ?.

Test 2.

Ce este un sistem trifazat simetric de succesiune directă ?.

Test 3.

Ce este un sistem trifazat simetric de succesiune inversă ?.

Test 4.

Ce este operatorul lui Steinmetz şi ce proprietăţi are ?.

Test 5.

Cum apare în diagramele de fazori un sistem simetric de susccesiune directă ?.

Test 6.

Cum apare în diagramele de fazori un sistem simetric de susccesiune inversă ?.

Test 7.

Cum se obţin sistemele trifazate simetrice de tensiuni electromotoare:

- de succesiune directă ?
- de succesiune inversă ?

Test 8.

Care este principiul de funcţionare a unui generator electric sincron ?.

Test 9.

Cum se poate realiza o conexiune independentă a unui generator trifazat sincron ?.

Test 10.

Ce sunt fazele unui generator sincron ?.

Test 11.

Care sunt dezavantajele conexiunii independente ?.

Test 12.

Cum se obține conexiunea stea?. Câte feluri de conexiune stea există?

Test 13.

Ce relație există între tensiunile (curenții) de fază și cele de linie la conexiunea stea ?.

Test 14.

Ce relație există între tensiunile (curenții) de fază și cele de linie la conexiunea triunghi ?.

Test 15.

Cum se calculează puterile absorbite de o rețea trifazată echilibrată alimentată simetric în stea ?.

Test 16.

Cum se calculează puterile absorbite de o rețea trifazată echilibrată alimentată simetric în triunghi ?.

Test 17.

Se dau trei mărimi electrice de forma:

$$u_{e1} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha),\ u_{e2} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}),\ u_{e3} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3})$$

Explicaţi de ce sistemul este:

a- simetric direct?

b- simetric invers?

c- nu este simetric.

Test 18.

Se dau trei mărimi electrice de forma:

$$u_{e1} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha),\ u_{e2} = 220\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}),\ u_{e3} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3})$$

Explicaţi de ce sistemul este:

a-simetric direct?

b-simetric invers?

c-nu este simetric.

Test 14.

Se dau trei mărimi electrice de forma:

$$u_{e1} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha),\ u_{e2} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}),\ u_{e3} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3})$$

Explicaţi de ce sistemul este:

a- simetric direct?

b-simetric invers?

c-nu este simetric.

Test 15.

Se dau trei mărimi electrice de forma:

$$u_{e1} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha),\ u_{e2} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}),\ u_{e3} = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3})$$

Explicaţi de ce sistemul este:

a-simetric direct?

b-simetric invers?

c-nu este simetric.

Test 16.

Cum se rezolvă  o rețea trifazată cu conexiune triunghi dacă este alimentată ssimetric și receptorul este echilibrat?