AnMate _ f _ C _ 2023 _ 10 _ 27 27.10.2023

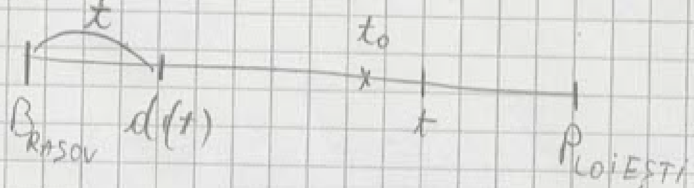
Derivată

$MM_0 \xrightarrow{M \to M_0}$ Tangenta la G_f în M_0

$m_{MM_0} \to m$ tangentei la G_f în M_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x \to x_0} m_{\text{tangentei}} \text{ la } G_f \text{ în } (x_0, f(x_0))$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$v(t_0) = ?$

$0, t$ $\quad \frac{d(t)-d(0)}{t-0}$ — viteza medie pe intervalul orar $[0, t]$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0} = \text{viteza la momentul } t_0.$$

Def.: Fie $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x_0 \in A'$.

Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$

se numește derivata lui f în x_0
și se notează $\boxed{f'(x_0)}$

Spunem că f este derivabilă în x_0, dacă
$f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2} \cdot 2} = \cos x_0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e \quad \left[(e^x)' = e^x\right]$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin x}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad // \left[(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)\right]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$ în anumite condiții

$$\boxed{(f^{-1} \circ f)(x) = x}$$ deoarece e fct. inversă

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

REZULTAT Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap A'$ astfel încât f este derivabilă în x_0.

Atunci f este continuă în x_0.

Demonstrație

f continuă în x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

Avem: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = (x) \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f continuă în $(\forall)\ x \neq 0$

f continuă în 0 ?

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) \ ?$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0 \quad \checkmark$$

$$f'(x) \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

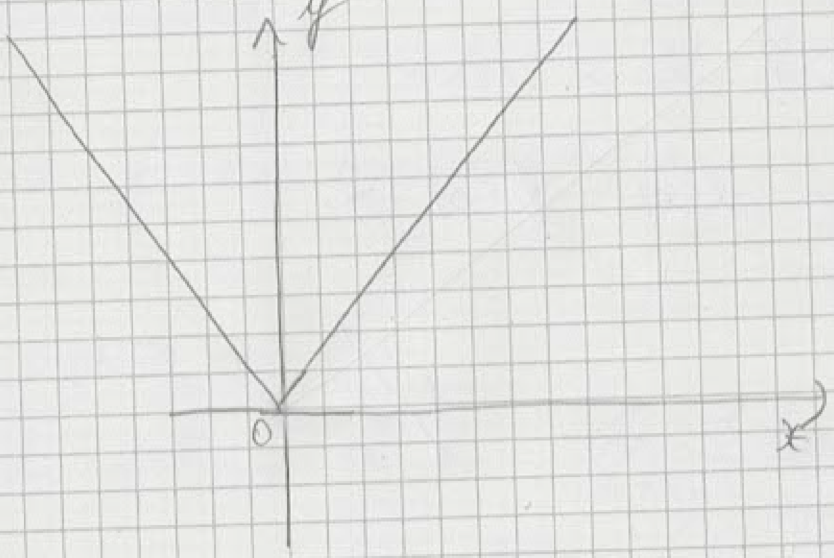
$f'(0)$? există

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -1 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$$

f nu e derivabilă în 0!



EXEMPLE 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ ex + b, & x < 1 \end{cases}$$

f continuă?

f continuă pe $\mathbb{R} - \{1\}$ $\Leftrightarrow$ $e + b = 0$

f continuă în 1?

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} ex + b = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$$

$$\boxed{e + b = 0}$$

Dacă $e + b \neq 0$, atunci f nu este derivabilă în 1 căci nu este continuă în 1.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ ex - e, & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ e, & x < 1 \end{cases}$$

$f'(1) = ?$

$$f_s'(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{ex - e}{x - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{e\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = e$$

$$f_d'(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\ln x}{x - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Dacă $e = 1$, f este derivabilă în 1,
iar dacă $f'(1)=1$

$e \neq 1$, f nu este derivabilă în 1.

3) $$(\sin^2 2x)' \xrightarrow{\text{Met. I}} (\sin 2x)(\sin 2x)$$

$\xrightarrow{\text{Met. II}}$ $(\sin 2x)^2$

$(x^2)' = 2x$

$(u(x)^2)' = 2u(u) \cdot u'(x)$

$\rightarrow \left((\sin 2x)^2\right)' = 2\sin 2x \cdot (\sin 2x)' = 2\sin 2x \cdot 2\cos 2x =$

$= 4\sin 2x \cos 2x$

4) ~~$(e$~~

$\left(e^{\operatorname{arctg} x} \cdot (x^2+1)\right)' = \left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)'(x^2+1) + e^{\operatorname{arctg} x} \cdot (x^2+1)' =$

$= 2x \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + \cancel{(x^2+1)} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2+1}} =$

$= e^{\operatorname{arctg} x}(2x+1)$

5) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continuare în 2 pag.

$f(x) = x + \ln x$

$(f^{-1})'(1)$

6) $f : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$

$f(x) = x + 1$

$(f^{-1})'(2)$

f bijectivă:

$x + 1 = y + 1$

f injectivă: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

f surjectivă: $(\forall)\ y \in (1, \infty)\ (\exists)\ x \in (0, \infty)$

$f(x) = y$

$$(\forall)\, y \in (1,\infty)\ (\exists)\, x \in (0,\infty)$$

$$x+1 = y$$

$$\Downarrow$$

$$x = y-1 \in (0,\infty)$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}: (1,\infty) \to (0,\infty)$$

$$f^{-1}(y) = y-1$$

$$f^{-1}(x) = x-1$$

$$(f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(2) = 1$$

$$(f^{-1})(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

5 continuare)

f bijectivă

$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

$x + \ln x = y \implies x$ – expresie în y!

$f'(x) = (x + \ln x)' =$

$= 1 + \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$

7) $\left(x^{1+\sin x}\right)' = 1 + \sin x \cdot x^{1+\sin x - 1} \cdot (1+\sin x)'$

by Diana

$x^{1+\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x$ by Ionuț

$\left(x^1 \cdot x^{\sin x}\right)' = \left(x \cdot x^{\sin x}\right)' =$

$= x' \cdot \left(x^{\sin x}\right) + x \cdot \left(x^{\sin x}\right)' =$

$= x^{\sin x} + \left(x^{\sin x}\right)'$ by Damian

$$x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln e^{x}$$

by Enea

$$\log_a^b = c \iff a^c = b \iff \boxed{a^{\log_a^b} = b}$$

$$x^{1+\sin x} = e^{\ln\left(x^{1+\sin x}\right)}$$

$$\|$$

$$e^{(1+\sin x)\ln x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$\left(x^{1+\sin x}\right)' = \left(e^{(1+\sin x)\ln x}\right)' =$$

$$= e^{(1+\sin x)\ln x} \cdot \left((1+\sin x)\ln x\right)'$$

$$= e^{(1+\sin x)\ln x}\left[-\cos x \cdot \ln x + (1+\sin x)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

ECUAȚIA TANGENTEI la graficul unei funcții

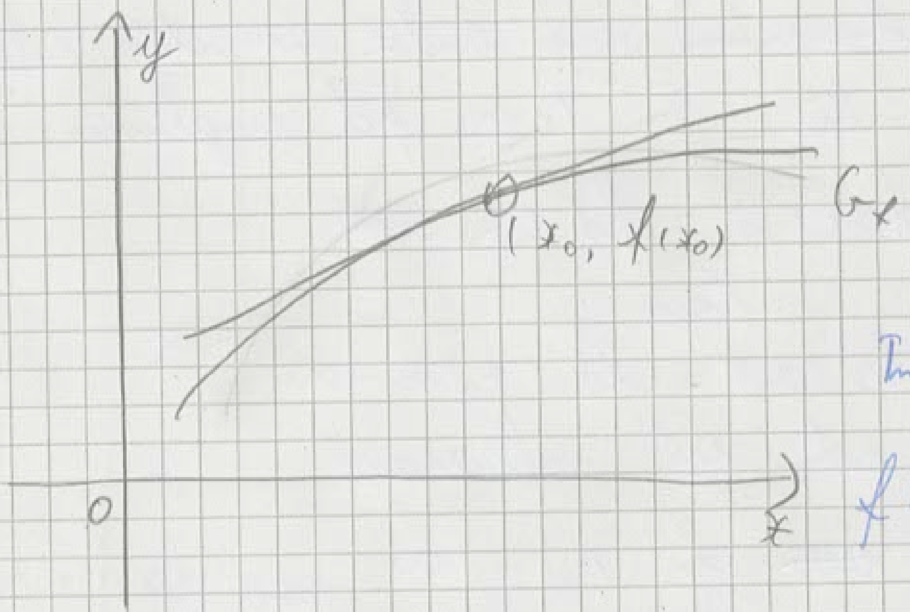
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A \cap A'$

f derivabilă în x_0

Ecuația tangentei la G_f în $(x_0, f(x_0))$ este:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$



În jurul lui x_0

$f \approx$ tangenta la G_f în $(x_0, f(x_0))$

Ex.:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^{x^2-x} \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$

Ecuația tangentei la G_f în pct. de abscisă 1

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$f'(x) = e^{x^2-x} \cdot (x^2-x)' = (2x-1)e^{x^2-x}$

$f'(1) = 1$

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A \cap A'$

f - continuă în x_0

f nu este derivabilă în x_0 și

există derivatele laterale

$$\left.\begin{array}{l} f_s'(x_0) \\ f_d'(x_0) \end{array}\right\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) Dacă cel puțin una dintre derivatele laterale este finită, x_0 s.n. pct. unghiular

2) Dacă $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = \infty$

sau

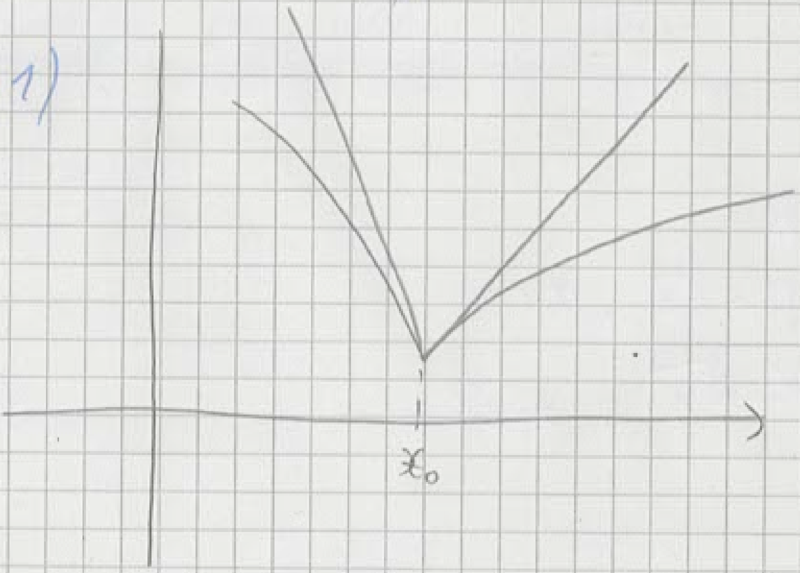
$f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = -\infty$

s.n. pct. de inflexiune

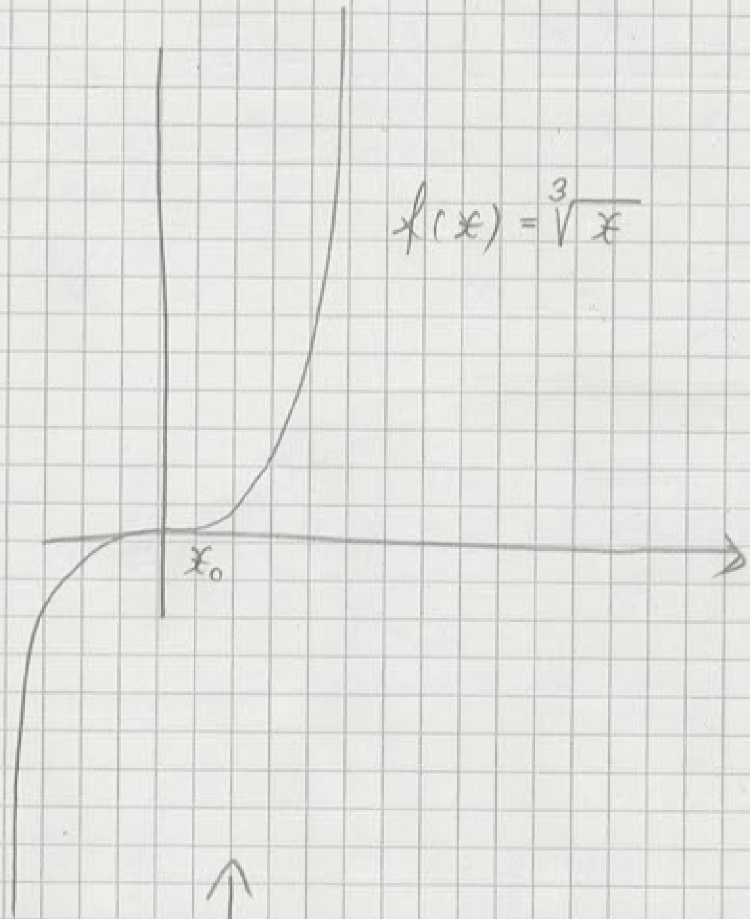
3) Dacă ~~deri~~ $f_s'(x_0) = \infty$ sau $f_s'(x_0) = -\infty$
$f_d'(x_0) = -\infty$ $\quad f_d'(x_0) = \infty$)

x_0 s.n. pct. de întoarcere

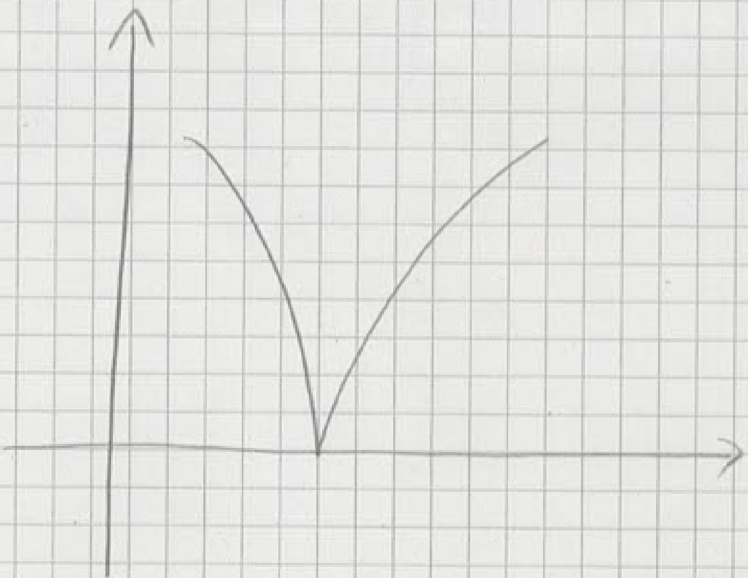
1)



2)



3)



EXEMPLU

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-\sqrt[3]{x}}{x} =$$

$$= -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

Derivatele de ordin superior

$v = d'$

$f \simeq$ polinom Taylor

$$f \simeq \underbrace{f(x_0) + f'(x)(x - x_0)}_{\text{polinom de grad 1}}$$

$$(f')' = f''$$

$$((f')')' = f'''$$

$$\vdots$$

$f^{(n)}$ — derivata de ordin n

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left((-1)(x-1)^{-2} - (-1)(x+1)^{-2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left((-1)(-2)(x-1)^{-3} - (-1)(-2)(x+1)^{-3}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = \frac{1}{2}\left((-1)(-2)\cdots(-n)(x-1)^{-n-1} - (-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-1)^{n}\cdot n\left[(x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}\right]$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$(f\cdot g)'' = f''\cdot g + f'\cdot g' + f'\cdot g' + f\cdot g'' = f''\cdot g + 2f'\cdot g + f\cdot g''$$

$$(f\cdot g)''' = f'''\cdot g + f''+g' + 2(f''\cdot g' + f'\cdot g'') + f'\cdot g'' + f\cdot g''' =$$

$$= f'''\cdot g + 3f''\cdot g' + 3f'\cdot g'' + f\cdot g'''$$

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}}$$

$$h(x) = \frac{x^3}{e^x} \qquad h^{(x)}\ ???$$

$$h(x) = \underbrace{x^3}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{g(x)}$$

$f'(x) = 3x^2$ $\qquad$ $f'''(x) = 6$

$f''(x) = 6x$ $\qquad$ $f''''(x) = 0$