ALGAD - 16 - S - 2023 - 11 - 29 29.11.2023

Dreapta și planul în spațiu

1. Scrieți ecuațiile canonice și parametrice ale dreptei care:

a) $A(1,3,4) \in (d)$ și are vectorul director $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{k}$

b) $A(2,1,2)$, $B(0,-3,1) \in (d)$

c) $d \parallel d' : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4}$ și $A(4,3,2) \in d$

d) $d = \pi_1 \cap \pi_2$, $(\pi_1): x+y-3=0$

$(\pi_2): x-y+z=0$

---

a) ec. canonică

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{1}$$

ec. parametrică

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3 \\ z = t+4 \end{cases}$$

b) ec. canonică

(d) $A(2,1,2)$ $B(0,-3,1)$

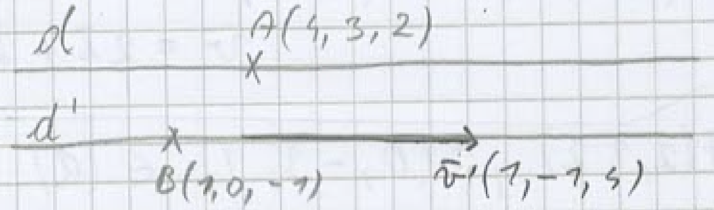
$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$\overline{AB}\ (-2,-4,-1)$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-1} = t$$

ec. parametrice $\Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = \\ z = \end{cases}$

c)



$d \parallel d' = \bar{v}$ și $\bar{v}'$ sunt coliniari

$\left.\begin{array}{l} \bar{v} = \lambda \bar{v} \\ \lambda = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}' \Rightarrow \bar{v}(1, -1, 4)$

$$d: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{4} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 4 \\ y = -t + 3 \\ z = 4t + 2 \end{cases}$$

d) $d: \begin{cases} (\pi_1): x + y - 3 = 0 \\ (\pi_2): x - y + z = 0 \end{cases}$

dăm valori lui x, y sau z
și se rezolvă sistemul

$\bar{v} \perp \bar{N}_1 \; (1, 1, 0)$

$\bar{v} \perp \bar{N}_2 \; (1, -1, 1)$

$\Rightarrow \bar{v} = \bar{N}_1 \times N_2$

Sau se află 2 puncte

REZ.:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \boxed{x = 1} \Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ -y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\Rightarrow z = 1 \Longrightarrow A(1, 2, 1) \in (d)$$

$$\boxed{x = 2} \Rightarrow \begin{cases} 2 + y - 3 = 0 \\ 2 - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -1} \Rightarrow B(2, 1, -1) \in (d)$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = (1, -1, -2)$$

$$\Rightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2} = t$$

$$\Rightarrow (d): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = -2t - 2 \end{cases}$$

② Ec. canonice și parametrice: $d: \begin{cases} (P): x + y + z = 0 \\ (Q): x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

Det. ec. planului ce trece prin $O(0, 0, 0)$ și $(\pi) \perp (d)$

③. Ec. planului (π), a.î. $(d): \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \subset (\pi)$

și $M(1, 2, 3) \in (\pi)$

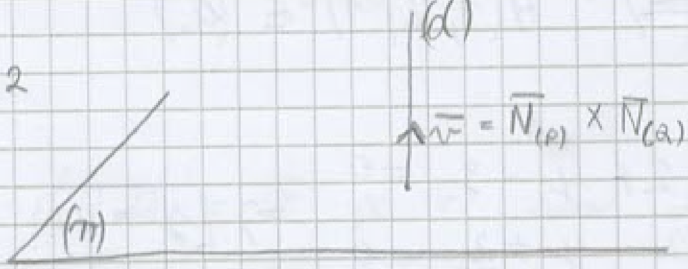
④ $M(1,-1,-2)$, $(d): \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$

Det. proiecția lui M pe (d) și simetricul lui M față de (d).

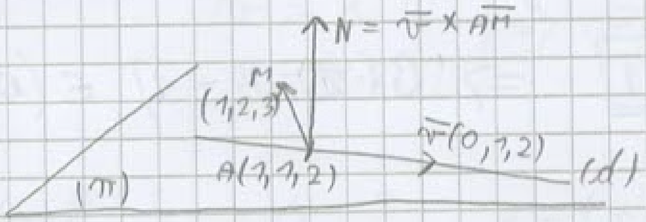
⑤ Det. simetricul $O(0,0,0)$ în raport cu planul
$(\pi): x+y+z=0$

REZ.:

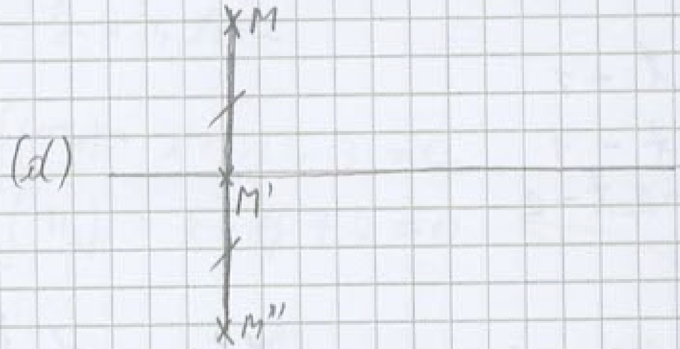
Ex. 2



Ex. 3



4.



MET. I: $\overline{MM'} \perp \overline{v}$

$M' \in d \Rightarrow M'(\ldots, \ldots, \ldots)$

MET. II: $(\pi) \perp d$, $M \in$

$M' = \pi \cap d$

$(d): \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$

$\bar{v}(2,1,-1)$

$A(-3,1,0)$

Construim $(\pi) \perp (d) \Rightarrow \bar{N}_\pi = \bar{v}(2,1,-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\pi): A(x-x_M) + B(y-y_M) + C(z-z_M) = 0$

$(\pi): 2(x-1) + y-(-1) - (z+2) = 0$

$(\pi): 2x-2+y+1-z-2=0$

$(\pi): 2x+y-z-3=0$

$M' = \pi \cap (d)$

$$\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = t+1 \\ z = -t \end{cases} \xrightarrow{(\pi)}$$

$2(2t-3) + t + 1 - (-t) - 3 = 0$

$4t - 6 + t + 1 + t - 3 = 0$

$6t - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{3}} \Rightarrow x = 3$

$y = \frac{4}{3} + 1 = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3}$

$\boxed{z = \frac{4}{3}}$

$\Longrightarrow M'\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$ proiecţia lui M pe d

M'' simetricul lui M faţă de $(d) \Rightarrow M'$ mij $[MM'']$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = \dfrac{x_M + x_{M''}}{2} \\ y_{M'} = \dfrac{y_M + y_{M''}}{2} \\ z_{M'} = \dfrac{z_M + z_{M''}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{M''} &= 2x_{M'} - x_M \\ y_{M''} &= 2y_{M'} - y_M \\ z_{M''} &= 2z_{M'} - z_M \end{aligned} =$$

$$x_{M''} = -\frac{2}{3} - 1 = \frac{-2-3}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$y_{M''} = \frac{14}{3} + \frac{3}{1} = \frac{14+3}{3} = \frac{17}{3}$$

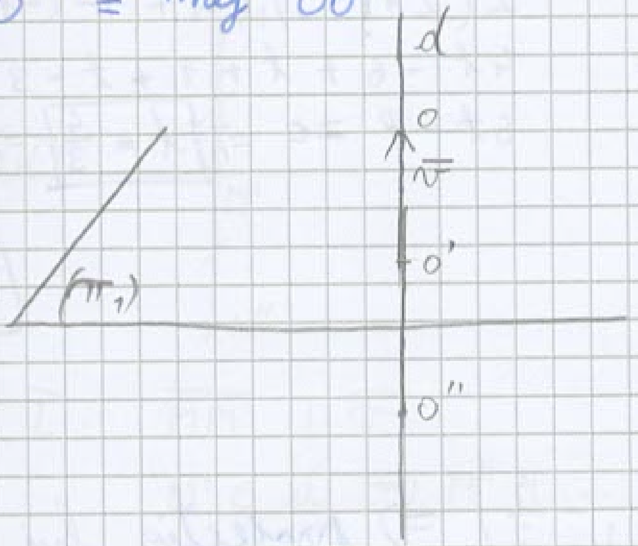
$$z_{M''} = -\frac{8}{3} + 2 = \frac{-8+6}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow M''\left(-\frac{5}{3}, \frac{17}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Ex. 5 $(\pi): x + y + z = 0 \Rightarrow O \in \pi \Rightarrow$ sim = proiecție = O

$(\pi_1)\ x + y + z = 2 \Rightarrow O \notin \pi$

$\Rightarrow O'' = $ mij OO'



$O' = (\pi_1) \cap (d)$

$O \in d$

$\bar{N}_{\pi_1}(1, 1, 1) = \bar{v} \subset d$

TEMĂ

⑥ Scrieți ec. planului (π) care:

a) $O(0,0,0) \in \pi$, $(\pi) \perp (\pi_1): x+y+z-3=0$

$(\pi) \perp (\pi_2): 3x - z - 2 = 0$

b) $A(1,1,1) \in (\pi)$, $(\pi) \perp (\pi_1): x+y+z-3=0 \Rightarrow \bar{N} \perp \bar{N}_{\pi_1}$

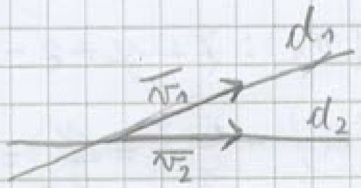
$(\pi) \parallel (d)\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4} \Rightarrow \bar{N} \perp \bar{v}$

c) $(\pi) \perp (\pi_1): x+y+z-3=0$

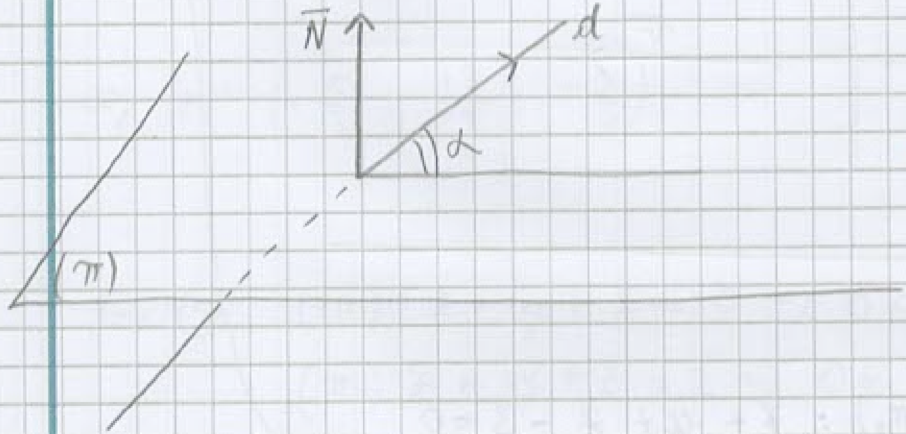
$(d) \subset (\pi_1)$

Unghiuri și distanțe în spațiu

① Unghiul dintre 2 drepte



② Unghiul dintre o dreaptă și un plan



$\cos(\widehat{\overline{N}, \overline{v}}) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

③ Unghiul dintre 2 plane

$= \sphericalangle(\overline{N_1}, \overline{N_2})$

1. Distanța dintre 2 puncte $AB = \|\overline{AB}\|$

2. Distanța de la un pct. la o dr. $= dist(M, d)$

$$dist(M, d) = h_{\square} = \frac{A_{\square}}{b} = \frac{\|\bar{v} \times \overline{AM}\|}{\|\bar{v}\|}$$

3. Dist. de la un pct. la un plan

$$dist(M, \pi) = \frac{|A \cdot x_M + B y_M + C z_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4. Distanța dintre 2 drepte necoplanare

$$distmin(d_1, d_2) = h(\bar{v}_1 \bar{v}_2, \overline{M_1 M_2})$$

$$= \frac{V(\bar{v}_1 \bar{v}_2, \overline{M_1 M_2})}{A_{\square}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)} = \frac{|(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \overline{M_1 M_2})|}{\|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\|}$$

TEMĂ

1. Fie $A(2,1,3)$, $B(1,2,3)$ două puncte, $(d): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$ o dreaptă și
$(\pi): 4x + 3z - 1 = 0$ un plan.
Calculați:
a) $dist(A, B)$, $dist(A, \pi)$, $dist(A, d)$, $dist(AB, d)$;
b) unghiurile dintre AB și d, AB și π, d și π;
c) intersecția dintre d și π.

② Se consideră punctul $M(-1, 2, -3)$, dreapta (d): →

$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ o dreaptă

și $(\pi_1): 2x - 2y - z = 0$ și $(\pi_2): 2x + y + 2z - 3 = 0$.

Determinați:

a) $dist(M, \pi_1)$, $dist(M, \pi_2)$, $dist(M, d)$

b) unghiurile dintre π_1 și π_2, d și π_1, d și π_2;

c) intersecțiile dintre d și π_1, d și π_2;

d) simetricul lui M față de d și față de π_1: $M_0 = sim_d M$, $M = sim_{\pi_1} M$