C U R S U L 11

3. ELECTRODINAMICA (1)

Electrodinamica studiază câmpul magnetic precum şi interdependenţa dintre acesta şi câmpul electric, în regim variabil.

3.1. CÂMPUL MAGNETIC ÎN VID

3.1.1. Câmpul magnetic. Linii de câmp magnetic.

Din antichitate s-a observat că unele minereuri au proprietatea de a atrage obiecte din fier. Deoarece minereurile cu această proprietate proveneau din oraşul antic Magnesia din Asia Mică, corpurile care aveau proprietatea de a atrage obiecte din fier s-au numit magneţi şi fenomenul în sine magnetism. Pământul este şi el un magnet deoarece are proprietatea de a orienta acul magnetic al busolei. Însuşirile magnetice se transmit prin contact sau prin influenţă anumitor metale sau aliaje, din care unele o păstrează definitiv. Aceste metale devin magneţi artificiali. Considerând un magnet sub formă de bară, se constată că proprietăţile magnetice se manifestă numai la capetele barei, care constituie polii magnetului. Tăind în două bara, polii nu se separă, ci apar doi magneţi, fiecare cu doi poli (fig.3.1). Acest lucru infirmă ipoteza că magnetismul s-ar datora unor sarcini magnetice.

În anul 1820 **H.Ch. Oersted** (1777-1851) a stabilit că în jurul conductoarelor parcurse de curent electric au loc fenomene magnetice, făcând legătura între magnetism şi electricitate. Fenomenele magnetice produse în urma trecerii curentului electric prin conductoare se numesc **fenomene electromagnetice**. Aceste fenomene încetează în general la anularea curenţilor electrici care le-au produs. Fenomenele magnetice cauzate de unele minereuri se numesc **fenomene magnetice naturale**.

Magnetismul natural se manifestă nelimitat şi de aceea a mai fost numit **magnetism permanent**. Există unele materiale (de exemplu oţelul) care în mod obişnuit nu au proprietăţi magnetice dar care pot căpăta proprietăţi magnetice permanente sub influenţa curentului electric sau a magnetismului permanent.

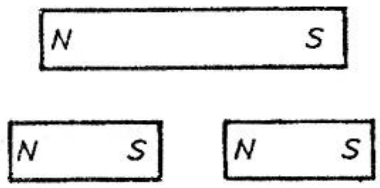


Fig.3.1. Apariţia a doi magneţi la secţionarea unui magnet în formă de bară.

În jurul corpurilor magnetizate şi a conductoarelor parcurse de curent electric, există un spaţiu cu proprietăţi speciale, de a transmite acţiuni ponderomotoare asupra acului magnetic sau asupra conductoarelor parcurse de curent electric. S-a creat un **câmp magnetic** prin intermediul căruia se transmit acţiunile ponderomotoare. Ca şi câmpul electric, câmpul magnetic este un câmp de forţe cu repartiţie continuă în spaţiu.

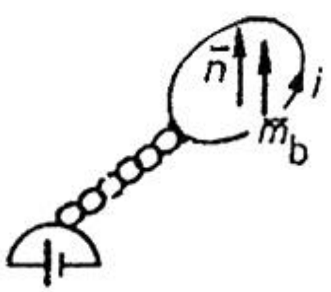


Fig.3.2. Bucla de curent.

Pentru explorarea câmpului magnetic se utilizează **bucla de curent** (fig.3.2). Spira se caracterizează prin vectorul **momentul buclei** $\overline{m}_b$, definit astfel:

$$\overline{m}_b = i\,\overline{S} = i\,S\,\overline{n}\ , \tag{3.1}$$

unde **S** este aria suprafeţei închise de spiră; $\overline{n}$ - versorul normal la suprafaţă, având sensul dat prin regula burghiului drept (sensul de înaintare a burghiului, dacă este pus perpendicular pe suprafaţa spirei și este răsucit în sensul curentului ***i***). Prin introducerea buclei într-un câmp magnetic aflat în vid, se constată că asupra ei va acţiona un cuplu, în raport cu centrul ei de masă, a cărei expresie este proporţională cu momentul buclei şi cu o mărime vectorială de stare a câmpului magnetic în vid numită **inducţia magnetică în vid**:

$$\overline{C} = \overline{m_b} \times \overline{B_v} \ , \qquad (3.2)$$

unde $\boldsymbol{B_v}$ reprezintă **inducţia magnetică în vid** şi este o mărime primitivă vectorială de stare a câmpului magnetic ce caracterizează complet câmpul magnetic în vid.

Unitatea de măsură a inducţiei magnetice este **Tesla** [**T**].

Intensitatea câmpului magnetic în vid $\boldsymbol{H_v}$ este o mărime vectorială derivată de stare a câmpului magnetic ce este definită prin relaţia:

$$\overline{H}_v = \frac{\overline{B_v}}{\mu_0} \ , \qquad (3.3)$$

unde $\boldsymbol{\mu_o}$ este o constantă universală, numită **permeabilitate magnetică a vidului** şi are valoarea:

$$\mu_o = 4\pi \, 10^{-7} \ H \ / \ m \ , \qquad (3.4)$$

unde **H** este **Henry**, unitatea de măsură a inductivităţii.

În vid, oricare dintre vectorii $\overline{H_v}$ sau $\overline{B_v}$ caracterizează complet câmpul magnetic.

Unitatea de măsură pentru intensitatea câmpului magnetic este **Amper/metru** [**A/m**].

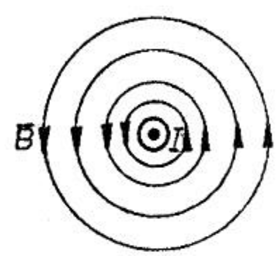


Fig.3.3. Spectrul liniilor de câmp magnetic produs de un conductor infinit lung.

Se numesc **linii de câmp magnetic**, **liniile la care în fiecare punct al lor, vectorul inducţie magnetică (intensitate a câmpului magnetic) este tangent**.

Liniile de câmp magnetic sunt linii închise. Liniile se reprezintă astfel încât numărul lor pe unitatea de suprafaţă transversală să fie proporţional cu modulul inducţiei magnetice, formând astfel spectrul câmpului magnetic.

Spectrul câmpului magnetic creat de un conductor rectiliniu, filiform şi foarte lung, străbătut de un curent electric este format din cercuri situate în plane perpendiculare pe direcţia conductorului şi având centrul pe axul conductorului (fig.3.3). Sensul liniilor este dat de regula burghiului drept (sensul în care trebuie rotit burghiul pus pe axul coductorului, pentru ca înaintarea lui să fie în sensul curentului).

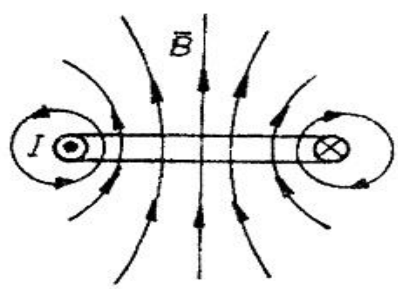


Fig.3.4. Spectrul liniilor de câmp magnetic produs de o spiră circulară.

Spectrul liniilor de câmp magnetic, creat de o spiră circulară, străbătută de un curent electric este reprezentat în figura 3.4. Liniile de câmp magnetic sunt situate în plane perpendiculare pe axul spirei trecând prin centrul ei.

Spectrul liniilor de câmp al unui solenoid străbătut de un curent electric, este dat în fig.3.5. Solenoidul este o bobină care se obţine prin înfăşurarea unui conductor pe suprafaţa laterală a unui cilindru.

Fig.3.5. Spectrul liniilor de câmp magnetic produs de un solenoid.

Câmpul magnetic din interiorul bobinei se poate considera omogen dacă lungimea bobinei este mult mai mare decât diametrul ei. Sensul liniilor de câmp magnetic este dat de regula burghiului drept (sensul în care înainteză burghiul pus pe axul bobinei când este rotit în sensul curentului).

3.1.2. Teorema Biot-Savart-Laplace.

Pe baza experienţelor efectuate de **J.B.Biot** (1774-1862) şi **F.Savart** (1791-1841), **P.S.Laplace** (1749-1827) au stabilit o relaţie generală de calcul a intensităţii câmpului magnetic în vid $\overline{H}_v$ produs de un circuit filiform închis **Γ** parcurs de curentul ***I*** (fig.3.6):

$$\overline{H}_v = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{d\,\overline{l} \times \overline{r}}{r^3}, \qquad (3.5)$$

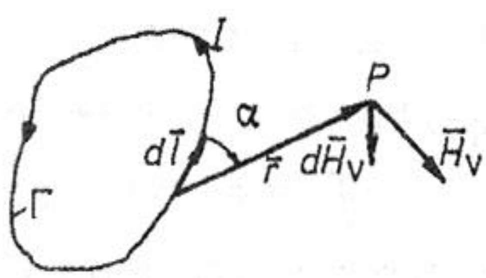


Fig.3.

3.6. Explicativă la teoreme lui Biot-Savart-Laplace.

unde I este intensitatea curentului din circuit, $d\,\overline{l}$ - elementul de lungime al circuitului Γ, considerat ca vector în sensul curentului, $\overline{r}$ - raza vectoare dirijată de la elementul $d\,\overline{l}$ la punctul P unde se calculează intensitatea câmpului magnetic. Teorema Biot-Savart-Laplace este riguros valabilă numai în regim staţionar.

Aplicaţie

Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic produsă de un conductor rectiliniu de lungime $\mathbf{l_1}$ parcurs de un curent continuu de intensitatea ***I***, într-un punct P aflat la distanţa **d** de conductor (fig.3.7).

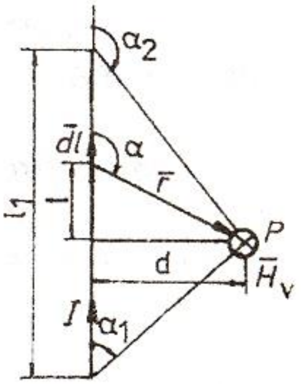


Fig.3.7. Explicativă la calculul intensităţii câmpului magnetic produs de un conductor rectiliniu finit parcurs de un curent I.

Rezolvare

Modulul intensităţii câmpului magnetic din punctul P creat de elementul $d\bar{l}$ este:

$$\left|d\overline{H}_v\right| = \left|\frac{I}{4\pi}\frac{d\bar{l}\times\bar{r}}{r^3}\right| = \frac{I}{4\pi}\frac{d\,l\sin\alpha}{r^2}\,.$$

Alegând ca variabilă unghiul α, rezultă:

$$l = d\;ctg(\pi-\alpha) = -d\;ctg\alpha\,,\quad d\,l = \frac{d}{\sin^2\alpha}\,,\quad r = \frac{d}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{d}{\sin\alpha}\quad d\,H_v = \frac{I}{4\pi d}\sin\alpha\,d\alpha\,.$$

Modulul intensităţii câmpului magnetic produs de întregul conductor în punctul P va fi:

$$H_v = \int_L d\,H_v = \frac{I}{4\pi d}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \qquad (3.6)$$

3.2. CÂMPUL MAGNETIC ÎN CORPURI

3.2.1. Caracterizarea stării de magnetizare a corpurilor.

Prin introducerea corpurilor într-un câmp magnetic, acestea trec într-o stare nouă, numită **stare de magnetizare**, în care sunt supuse unor acţiuni ponderomotoare suplimentare faţă de cele condiţionate de starea lor electrocinetică sau de starea lor de mişcare.

Starea de magnetizare a unui corp mic se caracterizează printr-o mărime vectorială de stare numită **moment magnetic** . Asupra acestui corp, introdus într-un câmp magnetic din vid, vor acţiona un cuplu **C** şi o forţă **F**, date de relaţiile:

$$\overline{C} = \overline{m} \times \overline{B}_{\mathrm{v}} \ ,$$
$$\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{grad}\left(\overline{\mathrm{m}} \cdot \overline{B}_{v}\right) . \qquad (3.7, 3.8)$$

Momentul magnetic caracterizează complet starea de magnetizare a corpurilor. Direcţia lui se numeşte **direcţia de magnetizare** a corpului, iar dreapta suport a vectorului, orientată în sensul acestuia **- axă de magnetizare**.

Din relaţiile (3.7 şi 3.8) se observă cum corpul mic tinde să se orienteze pe direcţia câmpului magnetic (dacă $\overline{m} \| \overline{B}_{v} , \rightarrow \overline{C} = 0$) şi că forţa se exercită numai în câmpuri neuniforme şi este îndreptată spre regiunile de câmp intens.

Dacă momentul magnetic se anulează în lipsa câmpului magnetic exterior, el se numeşte **moment magnetic temporar $\mathbf{m_t}$,** iar dacă la anularea câmpului magnetic exterior mai rămâne un moment magnetic, acesta se numeşte **moment magnetic permanent $\mathbf{m_p}$**. în general:

$$\overline{m} = \overline{m}_{\mathrm{t}} + \overline{m}_{p} \ . \qquad (3.9)$$

Starea de magnetizare a unui corp de dimensiuni mari, se caracterizează local printr-o mărime derivată, numită **magnetizare**, egală cu densitatea de volum a momentului magnetic:

$$\overline{\mathrm{M}} = \lim_{\Delta \mathrm{V} \to 0} \frac{\Delta \overline{\mathrm{m}}}{\Delta \mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}\, \overline{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\, \mathrm{V}} \ . \qquad (3.10)$$

Analog cu relaţia (3.9) vom avea:

$$\overline{M} = \overline{M}_{t} + \overline{M}_{p} \ . \qquad (3.11)$$

Dacă se cunoaşte magnetizaţia unui corp, momentul său magnetic va fi:

$$\overline{m} = \int_{V_{corp}} \overline{M} \; dV \; . \qquad (3.12)$$

Unitatea de măsură a momentului magnetic este **Amper metru pătrat** (**Am**^{2}) şi cea a magnetizaţiei este **Amper/metru** (**A/m**).

Magnetizarea corpurilor se poate explica prin mişcările electronilor din cadrul unui atom sau al unei molecule, pe orbite în jurul nucleului (mişcare orbitală) şi în jurul axelor proprii (mişcare de spin). Un electron în mişcarea sa orbitală constituie o buclă de curent, căreia îi corespunde un moment magnetic $\overline{m}_0$ şi la fel în mişcarea de spin îi corespunde un moment magnetic $\overline{m}_s$.

Momentul magnetic al unui atom este determinat de suma vectorială a momentelor magnetice orbitale şi a momentelor de spin.

Moleculele la care momentul magnetic rezultant este nul în lipsa unui câmp magnetic exterior se numesc **molecule nepolare**, iar moleculele la care acest moment magnetic rezultant este nenul în lipsa câmpului magnetic exterior, se numesc **molecule polare**. Chiar dacă moleculele sunt polare, în lipsa unui câmp magnetic exterior, orientările momentelor magnetice ale diferitelor molecule sunt repartizate haotic din cauza agitaţiei termice şi ca urmare magnetizarea macroscopică e nulă.

Un câmp magnetic exterior contribuie la apariţia magnetizării macroscopice prin:

- orientarea momentelor polare în sensul câmpului magnetic exterior (**magnetizare paramagnetică**)

- apariţia unui moment magnetic orbital suplimentar, la fiecare moleculă în parte sub acţiunea câmpului exterior, în sens contrar acestuia (**magnetizare diamagnetică).**

Pentru caracterizarea completă a câmpului magnetic în corpuri, nu mai este suficientă o singură mărime, inducţia magnetică în vid $\overline{B}_v$, ci sunt necesare două mărimi: inducţia magnetică $\overline{B}$ şi intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$.

Dacă considerăm o bobină având N spire străbătute de curentul de intensitate I, în interiorul bobinei se va crea un câmp magnetic. Dacă ne imaginăm că mediul din interiorul bobinei este vidul, putem scrie relaţia dintre inducţia magnetică $\overline{B} = \overline{B}_v$ şi intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}_v$:

$$\overline{B} = \overline{B}_v = \mu_0 \overline{H}_v \ . \qquad (3.13)$$

Dacă mediul din interiorul bobinei nu mai este vidul ci un mediu oarecare magnetizat, câmpul magnetic din interiorul bobinei rezultă din compunerea câmpului magnetic existent datorită curentului I din bobină şi câmpului magnetic propriu creat de mediul magnetizat, ca urmare a orientării momentelor magnetice.

Notând inducţia magnetică creată prin orientarea momentelor magnetice cu $\overline{B}_M$, iar inducţia magnetică rezultantă cu $\overline{B}$, rezultă:

$$\overline{B} = \overline{B}_v + \overline{B}_M \ . \qquad (3.14)$$

Intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ din interiorul bobinei nu depinde de starea de magnetizare a mediului (vezi legea circuitului magnetic), deci putem scrie:

$$\overline{H} = \overline{H}_v \ . \qquad (3.15)$$

3.3. RELAŢIILE FUNDAMENTALE ALE ELECTRODINAMICII

3.3.1. Legea magnetizaţiei temporare.

Legea magnetizaţiei temporare arată că **în orice punct al materialului, magnetizaţia temporară** $\overline{M}_t$ **este proporţională cu intensitatea câmpului magnetic din acel punct**:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H} \ , \qquad (3.16)$$

unde factorul $\boldsymbol{\chi_m}$ se numeşte **susceptivitate magnetică**.

3.3.2. Legea legăturii între inducţia magnetică $\overline{B}$, intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ şi magnetizaţia $\overline{M}$.

Experimental s-a dedus că: **În orice punct dintr-un corp, inducţia magnetică este proporţională cu suma vectorială dintre intensitatea câmpului magnetic şi magnetizaţie**:

$$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}) . \qquad (3.17)$$

În cazul general, magnetizaţia are atât componentă temporară M_t, cât şi componentă permanentă M_p (relaţia 3.8), deci legea legăturii devine:

$$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}_t + \overline{M}_p) = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \mu \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p . \qquad (3.18)$$

Pentru medii fără magnetizaţie permanentă vom avea:

$$\overline{B} = \mu \overline{H} = \mu_0 \mu_r \overline{H} . \qquad (3.19)$$

Coeficientul **$\mu_r = 1 + \chi_m$** se numeşte **permeabilitate magnetică relativă** a materialului, iar **$\mu = \mu_o \mu_r$ - permeabilitate magnetică absolută**.

3.3.3. Legea fluxului magnetic.

Se numeşte **flux magnetic printr-o suprafaţă S_Γ**, integrala de suprafaţă a vectorului inducţie magnetică pe suprafaţă **S_Γ**:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B} \, d\overline{S} , \qquad (3.20)$$

unde $\mathbf{d}\overline{S}$ este elementul de suprafaţă considerat ca vector, orientat după normala la suprafaţă, într-un sens arbitrar, numit sens de referinţă sau sens pozitiv convenţional al fluxului magnetic.

Unitatea de măsură a fluxului magnetic este **Weberul [Wb]**.

Experimental s-a dedus că:

Fluxul magnetic prin orice suprafaţă închisă Σ este întodeauna nul, oricare ar fi natura şi starea de mişcare a mediilor prin care trece suprafaţa Σ şi oricare ar fi variaţia în timp a inducţiei magnetice:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{B}\ d\overline{S} = 0\ . \qquad (3.21)$$

Relaţia (3.21) exprimă forma integrală a legii fluxului magnetic.

Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradski relaţiei (3.21) se obţine:

$$\int_{\Sigma} \overline{B}\ d\overline{S} = \int_{V_{\Sigma}} div\overline{B}\ dV = 0\ , \quad \rightarrow \quad div\overline{B} = 0\ . \qquad (3.22)$$

Relaţia (3.22) exprimă forma locală a legii: **în orice punct divergenţa vectorului inducţie magnetică este nulă**.

Consecinţe ale legii fluxului magnetic.

1. **<u>Fluxul magnetic depinde numai de conturul pe care se sprijină suprafaţa</u>.**

Dacă se consideră o curbă închisă **Γ** aflată într-un câmp magnetic şi două suprafeţe deschise $\mathbf{S_{\Gamma 1}}$ şi $\mathbf{S_{\Gamma 2}}$ care se sprijină pe această curbă (fig.3.8), fluxul magnetic prin suprafaţa închisă **Σ** $\mathbf{(S_{\Gamma 1} + S_{\Gamma 2})}$ este nul conform legii fluxului magnetic:

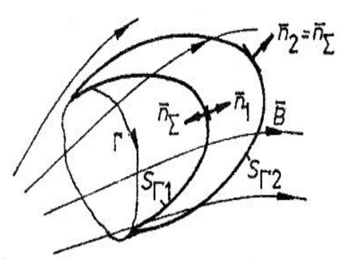


Fig.3.8. Explicativă la prima conescinţă a legii fluxului magnetic.

$$\oint_{\Sigma} \overline{B}\, d\overline{S}_{\Sigma} = \int_{S_{\Gamma 1}} \overline{B}\, d\overline{S}_{\Sigma} + \int_{S_{\Gamma 2}} \overline{B}\, d\overline{S}_{\Sigma} = - \int_{S_{\Gamma 1}} \overline{B}\, d\overline{S}_{1} + \int_{S_{\Gamma 2}} \overline{B}\, d\overline{S}_{2} = 0\ ,$$

$$\int_{S_{\Gamma 1}} \overline{B}\, d\overline{S}_{1} = \int_{S_{\Gamma 2}} \overline{B}\, d\overline{S}_{2}\ ,\ \Phi_{S_{\Gamma_1}} = \Phi_{S_{\Gamma_2}}. \qquad (3.23)$$

Conform relaţiei (3.23), fluxul magnetic are aceeaşi valoare prin toate suprafeţele deschise care se sprijină pe acelaşi contur.

2. **Liniile de câmp magnetic sunt linii închise.**

Dacă aceste linii ar porni sau ar sfârşi într-un punct, atunci fluxul magnetic printr-o suprafaţă închisă care înconjoară punctul ar fi diferit de zero.

3. **Fluxul magnetic se conservă în lungul unui tub de linii de câmp** (fig.3.9)

Aplicând legea fluxului magnetic unui tub de flux (**volumul delimitat de totalitatea liniilor de câmp care trec prin punctele unei curbe închise Γ**) rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \overline{B}\, d\overline{S}_{\Sigma} = \int_{S_1} \overline{B}\, d\overline{S}_{\Sigma} + \int_{S_2} \overline{B}\, d\overline{S}_{\Sigma} + \int_{S_l} \overline{B}\, d\overline{S}_{l} = - \int_{S_1} \overline{B}\, d\overline{S}_{1} + \int_{S_2} \overline{B}\, d\overline{S}_{2} = 0\ ,$$

$$\int_{S_1} \overline{B}\, d\overline{S}_{1} = \int_{S_2} \overline{B}\, d\overline{S}_{2},\ \ \Phi_1 = \Phi_2\ , \qquad (3..24)$$

deoarece pe suprafaţa laterală fluxul este nul ($\overline{B} \perp d\overline{S}$).

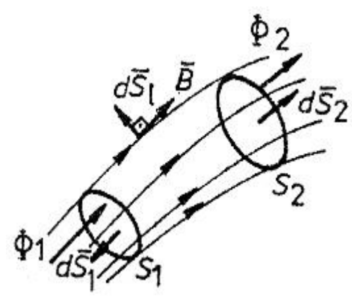


Fig.3.9 - Fluxul magnetic printr-un tub de flux.

3.3.4. Legea circuitului magnetic.

Se consideră patru circuite filiforme închise, parcurse de curenţii de conducţie $\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \boldsymbol{i_3}, \boldsymbol{i_4}$ şi o curbă închisă **Γ** care înlănţuie două din cele patru circuite (fig.3.10). Se definesc:

- **Tensiunea magnetică** între două puncte **A** şi **B** ale curbei **Γ** ca integrala de linie a vectorului intensitate a câmpului magnetic în lungul curbei **Γ**(analog cu tensiunea electrică):

$$u_{m_{AB}} = \int_{A(\Gamma)}^{B} \overline{H}\, d\bar{l}\ . \tag{3.25}$$

- **Tensiunea magnetomotoare** (t.m.m.) a curbei **Γ**, circulaţia vectorului intensitate a câmpului magnetic în lungul unei curbe închise **Γ (**analog cu tensiunea electromotoare) :

$$u_{mm_\Gamma} = \oint_\Gamma \overline{H}\, d\bar{l}\ . \tag{3.26}$$

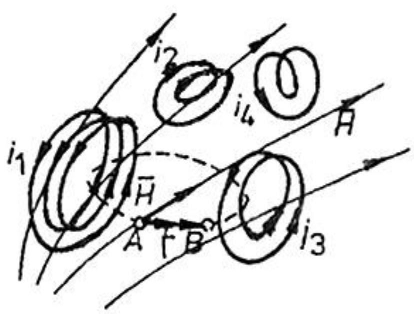


Fig.3.10. Explicativă la legea circuitului magnetic.

T.m.m. şi tensiunea magnetică depind de conturul **Γ**.

- **Solenaţia** printr-o suprafaţă deschisă S_Γ mărginită de conturul **Γ**, ca suma algebrică a curenţilor din conductoarele care trec prin suprafaţa respectivă:

$$\theta_{S_\Gamma} = \sum w_k\ i_k\ , \tag{3.27}$$

Curenţii se consideră pozitivi când sensul în care ei înlănţuie conturul **Γ** se asociază după regula burghiului drept cu sensul pozitiv de parcurgere al conturului (sensul în care se face integrarea pentru calculul t.m.m.) și negativi în caz contrar. Pentru fig.3.10, solenaţia este $\boldsymbol{\theta_{S\Gamma} = 3i_1 - 2i_3}$.

În cazul general, solenaţia se calculează cu relaţia:

$$\theta_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\ d\,\overline{S}\ . \tag{3.28}$$

Legea circuitului magnetic s-a stabilit experimental şi se poate enunţa astfel:

În orice moment, t.m.m. $u_{mm\Gamma}$, de-a lungul oricărei curbe închise Γ, este egală cu suma dintre solenaţia $\theta_{S\Gamma}$ prin conturul Γ şi derivata în raport cu timpul a fluxului electric $\Psi_{S\Gamma}$ care străbate o suprafaţă deschisă oarecare S_Γ, mărginită de acest contur:

$$u_{mm\Gamma} = \theta_{S_\Gamma} + \frac{d\,\Psi_{S_\Gamma}}{d\,t}\ . \tag{3.29}$$

Ţinând seama de relaţiile (3.26),(3.28) şi (1.23), rezultă:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \overline{H}\, d\,\overline{l} &= \int_{S_\Gamma} \overline{J}\ d\,\overline{S} + \frac{d}{d\,t}\int_{S_\Gamma} \overline{D}\ d\,\overline{S} = \\ &= \int_{S_\Gamma} \overline{J}\ d\,\overline{S} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\ d\,\overline{S} + \int_{S_\Gamma} \overline{\mathrm{v}}\ \mathrm{div}\,\overline{\mathrm{D}}\ \mathrm{d}\,\overline{\mathrm{S}} + \int_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\,(\overline{\mathrm{D}}\ \mathrm{x}\ \overline{\mathrm{v}})\ \mathrm{d}\,\overline{\mathrm{S}}\ . \end{aligned} \tag{3.30}$$

În aceste relaţii, sensul de referinţă a t.m.m. (al elementului $\mathbf{d}\,\overline{\mathrm{l}}$) este asociat cu sensul fluxului electric (al elementului $\mathbf{d}\overline{\mathrm{S}}$), conform regulii burghiului drept. Elementul $\mathbf{d}\overline{\mathrm{S}}$ este perpendicular pe suprafață și are sensul în care ar înainta burghiul pus perpendicular pe suprafață și este rotit în sensul lui $\mathbf{d}\overline{\mathrm{l}}$**.**

În relaţia (3.30) ultimele trei integrale au dimensiuni de curent şi se numesc **intensitatea curentului electric de deplasare, de convecţie şi respectiv Roentgen.** Experimental s-a dedus că în termenul al treilea din membrul drept al relaţiei (3.30) în locul inducţiei electrice $\overline{\mathrm{D}}$ este necesar să se introducă polarizaţia electrică $\overline{\mathrm{P}}$.

Din forma integrală a legii circuitului magnetic (rel.3.30) rezultă cauzele care produc câmp magnetic: curenţii electrici de conducţie (starea electrocinetică a corpurilor, prima integrală), curenţii de deplasare (variaţia în timp a câmpului electric, cea de a doua integrală), curenţii de convecţie (mişcarea corpurilor încărcate cu sarcini electrice, integrala a treia), curenţii Roentgen (mişcarea dielectricilor polarizaţi, integrala a patra).

În regim staţionar, când fluxul electric şi inducţia electrică sunt constante (dD/ dt = 0 şi $d\Psi_{S\Gamma}$ / dt = 0), legea circuitului magnetic va avea forma cunoscută şi sub numele de **teorema lui Ampére**:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\, d\overline{l} = \theta_{S\Gamma} = \int_{S\Gamma} \overline{J}\, d\overline{S}\ . \qquad (3.31)$$

Transformând integrala de linie din relaţia (3.30) într-o integrală de suprafaţă, rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\, d\,\overline{l} = \int_{S_\Gamma} rot\overline{H}\, d\,\overline{S} = \int_{S_\Gamma} \left[\overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \rho_v \overline{v} + rot\left(\overline{P} \times \overline{v}\right) \right] d\,\overline{S}\ . \qquad (3.32)$$

Din relaţia (3.32) rezultă forma locală a legii circuitului magnetic:

$$rot\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \rho_v \overline{v} + rot\left(\overline{P} \times \overline{v}\right). \qquad (3.33)$$

Pentru corpuri imobile (v = 0), forma locală a legii devine prima ecuaţie a lui Maxwell:

$$rot\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\ . \qquad (3.34)$$

În regim staţionar sau cvasistaţionar, se obţine:

$$rot\overline{H} = \overline{J}\ . \qquad (3.35)$$

Aplicaţii

1. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic creat de un conductor cilindric rectiliniu foarte lung, de secţiune circulară având raza $\mathbf{r_c}$ dacă este parcurs de un curent de intensitate ***I,*** densitatea curentului fiind constantă în secţiunea conductorului.

Se vor determina intensităţile câmpului magnetic în două puncate: P_e exterior conductorului şi P_i în interiorul conductorului. Cele două puncte se află la distanţele r_e respective r_i de axul conductorului. Din motive de simetrie cilindrică, liniile de câmp magnetic atât în interior cât şi în exterior vor fi cercuri concentrice situate în plane perpendiculare pe axul conductorului şi având centrele pe axa conductorului. Sensul curentului s-a adoptat perpendicular pe planul figurii şi îndreptat spre noi.

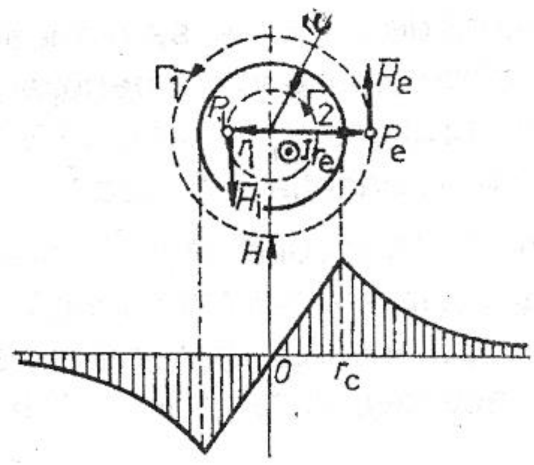


Fig.3.11. Explicativă la calculul câmpului magnetic produs de un conductor circular rectiliniu.

Pentru calculul intensităţii câmpului din exterior se utilizează teorema lui Ampére aplicată unui contur Γ_1, de forma unui cerc cu centrul pe axul conductorului şi având raza r_e (sensul de intregrare s-a considerat sensul trigonometric acelați cu sensul liniilor de câmp) :

$$\oint_{\Gamma_1} \overline{H}_e \, d\,\bar{l} = \oint_{\Gamma_1} H_e \, d\,l \cos 0 = H_e 2\,\pi\, r_e = \Theta_{S_{\Gamma_1}} = I \;.$$

Rezultă valoarea intensităţii câmpului magnetic în exterior:

$$H_e = \frac{I}{2\,\pi\, r_e} \;. \qquad (3.36)$$

Procedând analog pentru un contur circular Γ_2 ce trece prin punctul interior P_i, rezultă:

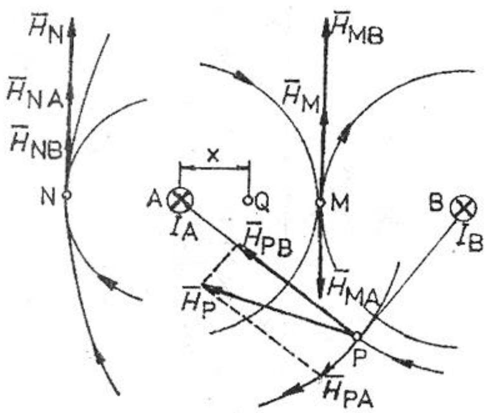
$$\oint_{\Gamma_2} \overline{H}_i \, d\,\bar{l} = \oint_{\Gamma_{21}} H_i \, d\,l = H_i 2\,\pi\, r_i = \Theta_{S_{\Gamma 2}} = \int_{S_{\Gamma_2}} \overline{J} \, d\,\overline{S} = J\,\pi\, r_i^2 = \frac{I}{\pi\, r_c^2}\pi\, r_i^2 = I\,\frac{r_i^2}{r_c^2} \;.$$

Valoarea intensităţii câmpului magnetic din interior rezultă:

$$H_i = \frac{I}{2\,\pi\, r_c^2} r_i \;. \qquad (3.37)$$

În figura 3.11 s-a reprezentat şi dependenţa intensităţii câmpului magnetic la distanţa $r > r_c$ faţă de axa conductorului. Valoarea maximă a intensităţii câmpului magnetic este la suprafaţa conductorului.

2. Se dau două conductoare rectilinii, de lungime practic infinită, aflate în aer la distanţa AB = 100 cm, parcurse de doi curenţi de acelaşi sens, având intensităţile I_A = 50A și I_B = 100A. Să se determine intensităţile câmpului magnetic în punctele:



a) M aflat în planul format de cele două conductoare la mijlocul distanţei dintre ele;

b) N aflat în planul format de cele două conductoare şi la distanţa NA = 40cm, NB = 140 cm;

c) P aflat la distanţele PA = 80 cm, PB = 60 cm.

Să se determine de asemenea locul geometric al punctelor în care intensitatea câmpului magnetic este nulă.

Fig.3.12. Explicativă la aplicaţia 2.

Rezolvare

a) Din figura 3.12 se observă că intensitatea câmpului magnetic în punctual M este egală cu suma vectorială a intensităţilor câmpurilor magnetice create de cele două conductoare parcurse de curent şi are ca modul diferenţa modulelor celor două intensităţi în punctual M (vezi aplicația 1):

$$H_M = H_{MB} - H_{MA} = \frac{I_B}{2\,\pi\,MB} - \frac{I_A}{2\,\pi\,MA} = \frac{100}{2\,\pi\,0{,}5} - \frac{50}{2\,\pi\,0{,}5} = 15{,}92\,\frac{A}{m}\,.$$

Inducţia magnetică în punctual M va fi:

$$B_M = \mu\,H_M = \mu_0\,\mu_r\,H_M = 4\,\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{50}{\pi} = 2 \cdot 10^{-5}T\,.$$

Vectorul inducţie magnetică $\overline{B}_M$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul $\overline{H}_M$.

b) Intensitatea câmpului magnetic în punctual N este egală cu suma vectorială a intensităţilor câmpurilor magnetice create de cele două conductoare parcurse de curent şi are ca modul suma modulelor celor două intensităţi în punctual N:

$$H_n = H_{NB} + H_{NA} = \frac{I_B}{2\,\pi\,NB} + \frac{I_A}{2\,\pi\,NA} = \frac{100}{2\,\pi\,1{,}4} + \frac{50}{2\,\pi\,0{,}4} = 31{,}26\;\frac{A}{m}\,.$$

Inducţia magnetică în punctual N va fi:

$$B_N = \mu\,H_N = \mu_0\,\mu_r\,H_N = 4\,\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 31{,}26 = 3{,}92\cdot 10^{-5}T\,.$$

c) Din figura 3.12 se observă că intensităţile câmpurilor magnetice create în P de curenţii I_A şi I_B sunt perpendiculare. Modulul intensităţii câmpului magnetic rezultant se obţine cu ajutorul teoremei lui Pitagora:

$$H_P = \sqrt{H_{PA}^2 + H_{PB}^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{2\,\pi\,0{,}8}\right)^2 + \left(\frac{100}{2\,\pi\,0{,}6}\right)^2} = 28{,}33\;\frac{A}{m}\,.$$

Inducţia magnetică în punctual P va fi:

$$B_P = \mu\,H_P = \mu_0\,\mu_r\,H_P = 4\,\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 28{,}33 = 3{,}56\cdot 10^{-5}T\,.$$

Pentru determinarea locului geometric al punctelor în care intensitatea câmpului magnetic este nulă, se observă din figură că în planul creat de cele două conductoare există un punct Q în care $\overline{H}_{QA} = -\overline{H}_{QB}$ şi deci intensitatea câmpului magnetic resultant este nulă. Pentru determinarea punctului Q aflat între cele două conductoare, se impune condiţia $H_{QA} = H_{QB}$:

$$\frac{I_A}{2\,\pi\,QA} = \frac{I_B}{2\,\pi\,QB} \qquad \rightarrow \frac{I_A}{x} = \frac{I_B}{AB - x} \qquad \rightarrow x = \frac{1}{3}m\,.$$

Locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu cele două conductoare, aflată între ele la distanţa de 1/3 m faţă de conductorul A, deoarece numai în punctele aflate în planul celor două conductoare câmpurile H_A şi H_B sunt coliniare şi au sensuri opuse.

3.3.5. Teoremele refracţiei liniilor de câmp magnetic la suprafaţa de separaţie a două medii.

O consecinţă importantă a legilor fluxului magnetic şi a circuitului magnetic o constituie refracţia liniilor de câmp magnetic la suprafaţa de separaţie a două medii cu permeabilităţi magnetice diferite.

a) Se consideră două medii cu permeabilităţile $\boldsymbol{\mu_1}$ şi $\boldsymbol{\mu_2}$ despărţite de o suprafaţă plană. Liniile de câmp magnetic din mediul unu care cad pe suprafaţa de separaţie sub un unghi de incidenţă $\boldsymbol{\alpha_1}$, trec în mediul doi, suferind o refracţie (fig.3.13). Mărimile care se referă la mediul unu sunt afectate de indicele 1, iar cele din mediul doi, de indicele 2.

Vectorul inducţie magnetică poate fi descompus în două componente, una normală la suprafaţa de separaţie $\boldsymbol{B_n = B\cos\alpha}$ şi una tangentă la suprafaţă $\boldsymbol{B_t = B\sin\alpha}$.

Aplicăm legea fluxului magnetic unei suprafeţe închise $\boldsymbol{\Sigma}$, de formă

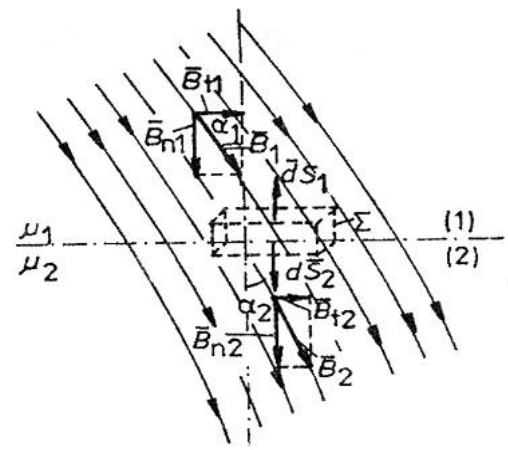


Fig.3.13. Explicativă pentru prima teoremă a refracţiei liniilor de câmp magnetic.

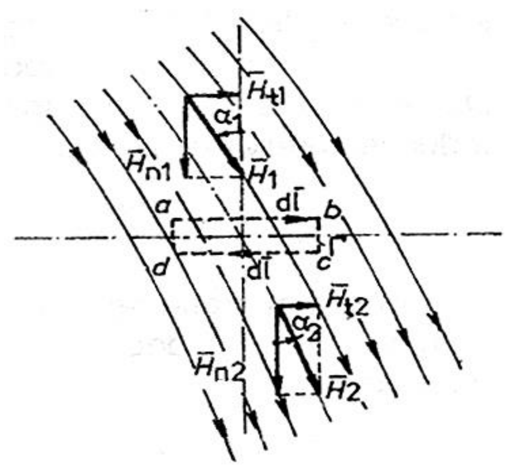


Fig.3.14. Explicativă pentru cea de a doua teoremă a refracţiei liniilor de câmp magnetic.

paralelipipedică, de înălţime foarte mică, cu suprafeţele bazelor de arie $\boldsymbol{\Delta A}$ plasate în cele două medii:

$$\int_{\Sigma} \bar{B}\, d\bar{S} = \int_{S_l} \bar{B}\, d\bar{S} + \int_{S_1} \bar{B}\, d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{B}\, d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{B}_1\, d\bar{S}_1 + \int_{S_2} \bar{B}_2\, d\bar{S}_2 = 0\ ,$$

deoarece fluxul prin suprafaţa laterală $\mathbf{S_l}$ este nul ($S_l \approx 0$).

Deoarece suprafeţele bazelor sunt foarte mici se poate considera B_1 şi B_2 constante pe suprafeţele paralelipipedului, deci:

$$\int_{S_1} B_1\, d\,S_1 \cos(180^\circ - \alpha_1) + \int_{S_2} B_2\, d\,S_2 \cos\alpha_2 = -\int_{S_1} B_{n1}\, d\,S_1 + \int_{S_2} B_{n2}\, d\,S_2 =$$

$$= -B_{n1}\Delta A + B_{n2}\Delta A = 0\ , \quad \text{de unde} \quad B_{n1} = B_{n2}\ . \tag{3.38}$$

La suprafaţa de separaţie a două medii diferite, componentele normale ale inducţiei magnetice se conservă.

b) Dacă în zona de separaţie a celor două medii se consideră un contur dreptunghiular **abcd**, foarte plat cu **l_{cd} = l_{ad} = 0**, (fig.3.14) şi aplicăm acestui contur teorema lui Ampére rezultă, ţinând seama că solenaţia este nulă (nu avem curent):

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\, d\bar{l} = \int_a^b \overline{H_1}\, d\bar{l} + \int_b^c \overline{H}\, d\bar{l} + \int_c^d \overline{H_2}\, d\bar{l} + \int_d^a \overline{H}\, d\bar{l} = \int_a^b H_1\, dl\, \cos(90^\circ - \alpha_1) +$$

$$+ \int_c^d H_2\, dl\, \cos(90^\circ + \alpha_2) = H_{t1}\, l_{ab} - H_{t2}\, l_{cd} = 0 \text{, de unde } H_{t1} = H_{t2} .$$

(3.39)

La suprafaţa de separaţie a două medii cu permeabilităţi diferite, componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului magnetic se conservă.

c) Cele două relaţii (3.38) şi (3.39) se pot restrânge dacă se scriu tangentele trigonometrice ale unghiurilor făcute de liniile de câmp şi normala la planul de separaţie:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}} = \frac{\mu_1\, H_{t1}}{B_{n1}} \ , \ tg\,\alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}} = \frac{\mu_2\, H_{t2}}{B_{n2}} \ .$$

Împărţind cele două relaţii şi ţinând seama de relaţiile (3.38) şi (3.39), rezultă:

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \ , \qquad (3.40)$$

unde $\boldsymbol{\alpha_1}$ şi $\boldsymbol{\alpha_2}$ sunt unghiurile făcute de liniile de câmp în cele două medii cu normalele la suprafaţa de separaţie.

Relaţia (3.40) permite stabilirea formei liniilor de câmp magnetic în jurul pieselor feromagnetice, la care $\boldsymbol{\mu = \mu_0 \mu_r \rangle\rangle\, \mu_0}$. La trecerea liniilor de câmp din piesă în aer:

$$\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{\mu_r}\, \mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha_2}.$$

Dacă se consideră $\boldsymbol{\mu_{rFe}} = \mathbf{10^4}$, rezultă $\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{10^4}\ \mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha_2}$, deci $\boldsymbol{\alpha_1} >> \boldsymbol{\alpha_2}$ şi se poate spune că practic liniile de câmp magnetic în aer sunt normale la suprafeţele corpurilor feromagnetice, iar în interiorul pieselor, liniile sunt tangente la suprafaţa de separaţie.

TEME DE STUDIU

Test 1.

Ce este câmpul magnetic ?.

Test 2.

Ce sunt liniile de câmp magnetic ?.

Test 3.

Ce este inducţia magnetică în vid ?.

Test 4.

Care este teorema lui Biot-Savart-Laplace ?.

Test 5.

Ce este momentul magnetic ?.

Test 6.

Ce este magnetizaţia și ce componente are ?.

Test 7.

Care este legea magnetizaţiei temporare ?.

Test 8.

Care este legea legăturii dintre inducţie, intensitate şi magnetizaţie ?.

Test 9.

Care este legea fluxului magnetic şi ce consecinţe are ?.

Test 10.

Care este unitatea de măsură pentru momentul magnetic:

- Amper /m;

- Tesla;
- Amper m^2.

Test 11.

Care este unitatea de măsură pentru inducţia magnetică:

- Coulomb /m^2;
- Tesla;
- Amper m^2.

Test 12.

Care este unitatea de măsură pentru intensitatea câmpului magnetic:

- Amper /m;
- Tesla;
- Amper m^2.

Test 13.

Cum sunt liniile de câmp magnetic:

- deschise;
- închise;
- depind de cine a produs câmpul.

Test 14.

Cum se caracterizează câmpul magnetic în corpuri?

Test 15.

Legea magnetizației temporare. Ce unități de măsură au mărimile care intervin ?

Test 16.

Legea legăturii dintre inducție intensitatea câmpului magnetic și magnetizație. Ce unități de măsură au mărimile care intervin ?

Test 17.

Legea fluxului magnetic, Conseciințe. Ce unități de măsură au mărimile care intervin ?

Test 18.

Legea circuitului magnetic. Conseciințe. Ce unități de măsură au mărimile care intervin ?

Test 19,

Teorema lui Ampere. Conseciințe. Ce unități de măsură au mărimile care intervin ?