Curs 1 Analiză Matematică

Radu MICULESCU

Transilvania University of Brașov

octomber 2023

SISTEMUL DE NOTARE

- 20% temelele din decursul semestrului; acestea se vor încărca săptamânal pe platforma e-learning
- 20% activitatea, la seminar, din decursul semestrului
- 60% examenul final de tip grilă

SISTEMUL PRIVIND MODALITATEA DE A ADRESA ÎNTREBĂRI

- la finalul fiecărei ore de curs voi aloca 10 minute pentru întrebări
- întrebările suplimentare (ivite după studiul individual al cursului) se vor adresa la seminar

SFATURI ACADEMICE

- este extrem de important să studiați cursul și seminarul în fiecare săptămână
- cea mai nefericită strategie este aceea de a vă apuca de învățat în sesiune
- învățatul la materia Analiză Matematică se face, însoțit de întrebarea "de ce?", cu creionul/pixul în mână; în mod cert, lecturarea materialului/slide-urilor nu este suficientă, fiind nevoie ca ea să fie însoțită de conspecte, notițe și discuții (în cadrul seminarului și între dumneavoastră)
- vom studia Analiza Matematică la un cu totul alt nivel de rigoare, comparativ cu ceea ce ați făcut în liceu, i.e. vom pune un accent puternic pe înțelegerea noțiunilor; prin urmare, nu vă bazați pe ideea că materia vă este cunoscută din anii de liceu, deși o bună cunoaștere a ei vă este de folos

CE TEME VOM STUDIA?

- $\mathbb{R}$ și $\overline{\mathbb{R}}$
- șiruri
- serii
- continuitate
- limite de funcții
- **derivabilitate**
- derivate parțiale
- diferențiabilitate
- **integrabilitate**
- integrala improprie
- integrala curbilini- integrala multiplă
- șiruri de funcții
- serii de funcții
- serii de puteri

LA CE FOLOSEȘTE ANALIZA MATEMATICĂ?

Noțiunile fundamentale de **derivată, integrală și serie de puteri** constituie un instrument esențial în orice problemă de modelare matematică ce apare în:

- fizică
- chimie
- biologie
- informatică
- inginerie
- economie
- medicină
- sport
- etc

BIBLIOGRAFIE

Cursuri

Radu Miculescu, Analiză Matematică, Note de Curs, Editura Pro Universitaria, București, 2017.
M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, Analiză Matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București.
E. Păltănea, R. Păltănea, Elemente de analiză matematică și teoria aproximării, Editura Universității Transilvania din Brașov, 2009.
O. Stănășilă, Analiză Matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
M. Țena, M. Andronache, D. Șerbănescu, Matematică, manual pentru clasa a XI-a, M1, Art Grup Editorial, București, 2010.
M. Țena, M. Andronache, D. Șerbănescu, Matematică, manual pentru clasa a XII-a, M1, Art Grup Editorial, București, 2010.

BIBLIOGRAFIE

Culegeri de probleme

L. Aramă, T. Morozan, Culegere de probleme de analiză matematică, Universal Pan, 1996.

C. Chiteș, R. Miculescu, Analiză Matematică, Culegere de Exerciții și Probleme, Editura Pro Universitaria, București, 2017.

S. Chiriță, Probleme de Matematici Superioare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1989.

Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Vom semnala proprietățile definitorii ale $+$, $\cdot$ și $\leq$ pe $\mathbb{R}$.

Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{R}$

Propoziție. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *este corp comutativ.*

Mulțimi majorate/ mulțimi minorate

Definiție. *Un element* $M \in \mathbb{R}$ *se numește majorant al submulțimii* A *a lui* $\mathbb{R}$ *dacă*

$$a \leq M,$$

pentru orice $a \in A$.

Definiție. *O submulțime* A *a lui* $\mathbb{R}$ *se numește majorată (sau mărginită superior) dacă există un majorant al său.*

Remarcă. *Similar se definesc noțiunile de minorant și de mulțime minorată.*

Definiție. *O submulțime a lui* $\mathbb{R}$ *se numește mărginită dacă este majorată și minorată.*

Maximul/minimul unei mulțimi

Definiție. *Dacă pentru submulțimea A a lui $\mathbb{R}$ există un majorant al său care aparține lui A, atunci acesta este unic și se numește maximul (sau cel mai mare element al lui A sau ultimul element al lui A) și se notează cu* $\max A$.

Remarcă. *Similar se definește noțiune de minim.*

Supremumul/infimumul unei mulțimi

Definiție. *Pentru o submulțime A a lui $\mathbb{R}$ majorată și nevidă, mulțimea majoranților săi are un cel mai mic element care poartă numele de marginea superioară a lui A și care se notează cu* $\sup A$.

Așadar $\sup A$ este cel mai mic majorant al lui A.

Remarcă. *Definiția de mai sus implică așa numita axiomă a lui Cantor care afirmă că orice submulțime nevidă și majorată a lui $\mathbb{R}$ admite supremum.*

Remarcă. *Similar se definește noțiunea de margine inferioară a unei submulțimi a lui $\mathbb{R}$ minorată și nevidă, care se notează cu* $\inf A$.

Așadar $\inf A$ este cel mai mare minorant al lui A.

Proprietățile relației de ordine pe $\mathbb{R}$

Propoziție. *Relația de ordine* $\leq$ *pe* $\mathbb{R}$ *are următoarele proprietăți:*
i) este compatibilă cu structura algebrică, i.e.

a)

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;

b)

$$x \leq y \ \& \ z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz,$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;
ii) este total ordonată, i.e. pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$
iii) este complet ordonată, i.e. orice submulțime nevidă și majorată a lui $\mathbb{R}$ admite supremum.

Exemple

Să se determine $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ *și* $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Deoarece

$$0 \leq \frac{m}{1+m+n},$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulțimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulțimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deducem că

$$x \leq \frac{1}{n+2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$n \leq \frac{1}{x} - 2,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Prin urmare, mulțimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar

$$\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Deoarece

$$\frac{m}{1+m+n} \leq 1,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulțimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulțimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deducem că

$$\frac{n}{n+2} \leq x,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$n \leq \frac{2x}{1-x},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Prin urmare, mulțimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.
Așadar

$$\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

Să se arate că inegalitatea

$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$$

este valabilă pentru orice $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, *$A$ mărginită.*

Deoarece $x \leq \sup A$ pentru orice $x \in A$ și $B \subseteq A$, deducem că $\sup A$ este majorant pentru B, deci, cum $\sup B$ este cel mai mic majorant al lui B, obținem că

$$\sup B \leq \sup A.$$

Similar se arată că $\inf A \leq \inf B$.

Intervale pe $\mathbb{R}$

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ considerăm următoarele mulțimi, numite intervale:

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, unde elementele $-\infty$ și ∞ sunt exterioare lui $\mathbb{R}$ și convenim că

$$-\infty < x < \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se notează cu $\overline{\mathbb{R}}$ și poartă numele de dreapta reală încheiată.

Remarcă. *Dacă submulțimea nevidă A a lui $\mathbb{R}$ nu este mărginită superior, atunci convenim să spunem că marginea superioară a lui A este ∞ și să scriem $\sup A = \infty$. Similar, dacă submulțimea nevidă A a lui $\mathbb{R}$ nu este mărginită inferior, atunci convenim să spunem că marginea inferioară a lui A este $-\infty$ și să scriem $\inf A = -\infty$.*

Remarcă. *Intervalele pe $\overline{\mathbb{R}}$ se definesc similar celor pe $\mathbb{R}$.*

Exemplu

$$\sup\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty$$

deoarece mulțimea $\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior căci $n-1 < \frac{n^2}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Noțiunea de vecinătate a unui punct din $\overline{\mathbb{R}}$

Definiție. *Mulțimea* $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *se numește vecinătate a lui* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *dacă:*
i) cazul $x_0 \in \mathbb{R}$*: există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq V;$$

ii) cazul $x_0 = -\infty$*: există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$[-\infty, -\varepsilon) \subseteq V;$$

iii) cazul $x_0 = \infty$*: există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$(\varepsilon, \infty] \subseteq V.$$

Notație. *Vom nota mulțimea vecinătăților lui* x_0 *cu* $\mathcal{V}_{x_0}$.

Exemple

1. Deoarece $(-1,1) \subseteq (-2,\infty)$, deducem că

$$(-2,\infty) \in \mathcal{V}_0.$$

2. Deoarece nu există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(-2-\varepsilon, -2+\varepsilon) \subseteq (-2,\infty)$, deducem că

$$(-2,\infty) \notin \mathcal{V}_{-2}.$$

3. Deoarece $[-\infty,-1) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, deducem că

$$\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{V}_{-\infty}.$$

Definiție. *O funcție* $x : \mathbb{N} \to M$ *se numește șir de elemente din mulțimea* M.

Notații. *Funcția* $x : \mathbb{N} \to M$ *se notează cu*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

având în vedere faptul că

$$x(n) \overset{not}{=} x_n.$$

Dacă dorim să subliniem faptul că funcția x *are codomeniul* M*, atunci vom scrie*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M.$$

Domeniul $\mathbb{N}$ *al funcției* x *se poate înlocui cu o mulțime de forma* $\{k, k+1, ...\}$*, unde* $k \in \mathbb{N}$*, caz în care vom scrie*

$$(x_n)_{n \geq k}.$$

Șiruri monotone de numere reale

Definiție. *Un șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numește:*

- crescător dacă

$$x_n \leq x_{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*;*

- strict crescător dacă

$$x_n < x_{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*;*

- descrescător dacă

$$x_{n+1} \leq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*;*

- strict descrescător dacă

$$x_{n+1} < x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$*;*

- monoton dacă este crescător sau descrescător;

- strict monoton dacă este strict crescător sau strict descrescător.

Exemple

1. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = n^2 - 3n + 1$, este crescător deoarece

$$x_{n+1} - x_n = 2(n-1) \geq 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{2^n}{n!}$, este descrescător deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+1} \leq 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, nu este monoton deoarece

$$x_1 < x_2 > x_3.$$

Şiruri mărginite de numere reale

Definiție. *Un șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numește:*
- mărginit superior dacă $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este majorată, i.e. dacă există* $M \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$x_n \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- mărginit inferior dacă $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este minorată, i.e. dacă există* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$m \leq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- mărginit dacă $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este mărginită, i.e. există* $m, M \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$m \leq x_n \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

1. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2}$, este mărginit deoarece

$$0 \leq x_n \leq 3,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{n^2}{n+1}$, nu este mărginit superior deoarece

$$n - 1 \leq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar este mărginit inferior deoarece $0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.