Semaine du 1 avril

Programme de colle n°23

Polynômes

1) Définition de $\mathbb{K}[X]$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2) Structure d'espace vectoriel, sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.
3) Degré d'un polynôme, $\deg(P+Q), \deg(PQ), \deg(P \circ Q)$.
4) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
5) Racines de multiplicité k, lien avec la dérivée de P.
6) Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
7) Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.
8) Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.
9) Relation racines/coefficients de P pour la somme, le produit.
10) Décomposition en éléments simples.

Probabilité sur un univers fini

1) Définition d'une probabilité sur un univers Ω fini. Lien avec une distribution de probabilité.
2) Définition d'une variable aléatoire.
3) Équiprobabilité.
4) Probabilité conditionnelle.
5) Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
6) Loi d'une variable aléatoire.
7) Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

Questions de cours

1) Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$: $P = X^4 - 1$ et $P = X^5 - 1$.
2) Décomposer en éléments simples $R = \dfrac{X^3 + X}{X^3 - 1}$.
3) Donner et démontrer les formules pour $P(\overline{A})$, $P(B \setminus A)$ et $P(A \cup B)$.
4) Soit $A \subset \Omega$ tel que $P(A) \neq 0$. Montrer que P_A est une probabilité.
5) Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales. En déduire la formule de Bayes pour un système complet d'évènements.
6) On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre deux boules noires puis une boule rouge ?
7) On dispose de $N+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_N$: l'urne U_k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard.
   Si cette boule est blanche, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_N ?
8) On tire successivement et avec remise 3 boules dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Déterminer la loi de Y.