Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 22 : correction

Exercice 1. Les applications suivantes sont elles des applications linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+1, y+1) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$

Solution.

1. $\ker f_1 = \{(0,0)\}$ et $\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^2$
2. $\ker(f_2) = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$ et $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^2$
3. ce n'est pas une application linéaire $f_3(0,0,0) \neq (0,0)$
4. $\ker(f_4) = \mathrm{Vect}(1)$ et $\mathrm{Im}(f_4) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$
5. $\ker(f_5) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f_5) = \mathbb{R}[X]$
6. ce n'est pas une application linéaire : $f((1,0)) + f((0,1)) = (1,0) + (1,0) = (1,1) \neq (2,1) = f((1,1))$

Exercice 2. On note e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images de e_1, e_2 et e_3 soient respectivement : $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$ et $(-7,4,1)$.

1. Déterminer une expression explicite de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1,1,8)$ et de $(-2,1,1)$.
3. u est-il injectif ? surjectif ?

Solution.

1. $\boxed{u(x,y,z) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) = (x - 3y - 7z, -x + 2y + 4z, 2x - y + z).}$
2. On résout $u(x,y,z) = (-1,1,8)$: $\boxed{\text{pas d'antécédent.}}$
   On résout $u(x,y,z) = (-2,1,1)$: $\boxed{(x,y,z) = (1-2z, 1-3z, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}.}$
3. $(-1,1,8)$ n'a pas d'antécédent : $\boxed{u \text{ n'est pas surjectif.}}$
   $(-2,1,1)$ a plusieurs antécédents : $\boxed{u \text{ n'est pas injectif.}}$

Exercice 3. On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère $\phi : E \to E$. Dans quels cas ϕ est-elle linéaire :

1. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$
2. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$
3. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = \int_0^{x^2} f^2(t)\, dt$
4. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = f''(x)$

Solution.

1. linéaire : soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\phi(f+\lambda g)(x) = \int_0^x (f+\lambda g) = \int_0^x f + \lambda \int_0^x g = (\phi(f)+\lambda\phi(g))(x)$ *i.e.* $\phi(f+\lambda g) = \phi(f)+\lambda\phi(g)$.

2. linéaire : même démo en remplaçant x par x^2.

3. non linéaire : pour $x \neq 0$, on a $(\phi(1)+\phi(1))(x) = 2x^2 \neq 4x^2 = \phi(2)(x)$.

4. linéaire : soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\phi(f+\lambda g) = (f+\lambda g)'' = f'' + \lambda g'' = \phi(f)+\lambda\phi(g)$.

Exercice 4. Les applications suivantes sont elles des applications linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

où on a posé $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solution.

1. Si $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$ alors $P \in \mathbb{R}_3[X]$ a 4 racines : donc $P = 0$. $\boxed{\ker(f_1) = \{0\}}$
D'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}(f_1) = 4 - 0 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Comme $\mathrm{Im}(f_1) \subset \mathbb{R}^4$, on a $\boxed{\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^4}$.

   Méthode 2 :
   Par 4 points du plan (d'abscisses distinctes), il passe un polynôme de degré au plus 3 :
   Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. On pose :
   $P = a_1 \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} + a_2 \frac{(X-1)(X-2)(X-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + a_3 \frac{(X-1)(X-3)(X-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + a_4 \frac{(X-2)(X-3)(X-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$.
   On constate que $P(i) = a_i$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^4.}$

2. $M \in \ker(f_2) \Leftrightarrow AM - MA = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix} = 0_2$
$\Leftrightarrow b = 0$ et $a = d$.

   Ainsi, $\boxed{\ker(f_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).}$
   $f_2(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\boxed{\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).}$

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire telle que $u^2 + 2u - id = 0$. Montrer que u est un automorphisme et déterminer u^{-1} en fonction de u.

Solution. $u \circ (u + 2\mathrm{Id}) = (u + 2\mathrm{Id}) \circ u = \mathrm{Id}$ donc u est inversible, d'inverse $\boxed{u^{-1} = u + 2\mathrm{Id}.}$

Exercice 6. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$
Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Solution.

- f est linéaire : soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
  $f(P+\lambda Q) = P+\lambda Q-(P+\lambda Q)' = P+\lambda Q-P'-\lambda Q' = f(P)+\lambda f(Q)$.

- $P \in \ker(f) \Leftrightarrow aX^3+bX^2+cX+d-3aX^2-2bX-c=0 \Leftrightarrow a=b=c=d=0 \Leftrightarrow P=0$.
  $\boxed{\text{Ainsi } \ker(f)=\{0\} \text{ donc } f \text{ est injective.}}$

- Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ car $\deg(f(P) \leqslant 3$. Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme.}}$

f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme.}}$
Soit $Q = \alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta \in \mathbb{R}_3[X]$. On cherche P tel que $f(P)=Q$.
Par identification, on obtient :
$P = \alpha X^3+(\beta-3\alpha)X^2+(\gamma-2\beta+6\alpha)X+\delta-\gamma+2\beta-6\alpha$.
Donc $f^{-1}(\alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta) = \alpha X^3+(\beta+3\alpha)X^2+(\gamma+2\beta+6\alpha)X+\delta+\gamma+2\beta+6\alpha$
i.e. $\boxed{f^{-1}(Q) = Q+Q'+Q''+Q'''.}$

Exercice 7. On pose $E=\mathbb{R}[X]$ et pour tout $P \in E, f(P) = P-XP'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau. L'application f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?

Solution.

1. f est bien une application de E dans E (bien penser à vérifier cette dernière condition).
   Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
   $f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)-X(P+\lambda Q)' = (P-XP')+\lambda(Q-XQ') = f(P)+\lambda f(Q)$.
   Ainsi f est linéaire donc finalement $\boxed{f \in \mathcal{L}(E).}$

2. $P \in \ker f \Leftrightarrow P = XP'$.

   Méthode 1 : on suppose par l'absurde que P possède une racine non-nulle $\alpha \in \mathbb{C}$ et on note $m \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité. α est aussi racine de P' avec multiplicité $m-1$ (éventuellement $m=1$ et α n'est pas racine de P'). Ainsi, on peut écrire $P=(X-\alpha)^m Q$ et $P'=(X-\alpha)^{m-1}\tilde{Q}$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$. On injecte dans la condition $P=XP'$ et cela donne $(X-\alpha)Q = X\tilde{Q}$ donc $\tilde{Q}(\alpha)=0$. Contradiction.

   Ainsi, P n'a que 0 comme racine donc est de la forme $P=\lambda X^m$. Avec la condition $P=XP'$ on trouve $m=1$. D'où $\boxed{\ker f = \text{Vect}(X) \text{ et } f \text{ n'est pas injective.}}$

   Méthode 2 : on résout l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}y$ sur $\mathbb{R}^*$ et on trouve $y(x)=\lambda x$.
   D'où $\boxed{\ker f = \text{Vect}(X) \text{ et } f \text{ n'est pas injective.}}$

   Méthode 3 : on pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on injecte dans $P=XP'$ ce qui donne $a_k=0$ pour $k \neq 1$.

3. $P-XP'=X$ n'admet pas de solution. $\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$

Exercice 8.

1. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(1,2) = (1,1,0)$ et $f(2,1) = (0,0,1)$. Déterminer l'image. Donner la dimension puis le noyau de f.

2. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (1,0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$. Déterminer l'image de f. Donner la dimension puis le noyau de f.

Solution.

1. La famille $((1,2),(2,1))$ est libre (2 vecteurs non colinéaires) dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f est linéaire et définie sur une base de $\mathbb{R}^2$ donc elle est définie de manière unique sur tout $\mathbb{R}^2$.
   $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1)).}$ La famille génératrice est libre (2 vecteurs non colinéaires). Donc $\mathrm{rang}(f) = 2$.
   D'après la formule du rang : $\dim\ker(f) = 2 - 2 = 0$ *i.e.* $\boxed{\ker(f) = \{(0,0)\}.}$

2. Vérifier que la famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est libre (le système est déjà échelonné). La famille est libre à 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Ainsi, f est linéaire et définie sur une base de $\mathbb{R}^3$ donc elle est définie de manière unique sur tout $\mathbb{R}^3$.
   $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(1,1,0), f(1,1,1)) = \mathrm{Vect}((0,1),(1,0),(1,1))$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2.}$
   D'après la formule du rang : $\dim\ker f = 3 - 2 = 1$. On constate : $(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$. Donc $f((1,0,0) + (1,1,0) - (1,1,1)) = (0,0)$. D'où : $(1,0,-1) \in \ker f$. Comme c'est un espace vectoriel : $\mathrm{Vect}(1,0,-1) \subset \ker f$. Or $\ker f$ est de dimension 1. Donc $\boxed{\mathrm{Vect}((1,0,-1)) = \ker(f).}$

Exercice 9. On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P, associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.

2. Déterminer le noyau de f.

3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.

4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.

5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.

6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$.

Solution.

1. Le reste de la division de AP par B est de degré $< \deg B = 4$ donc f est bien une application de $\mathbb{C}_3[X]$ dans $\mathbb{C}_3[X]$.

   Soient P_1 et P_2 deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{C}$. On écrit la division euclidienne :
   $AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg(R_i) < \deg(B)$. Donc :
   $A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$ avec $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$.
   Donc $R_1 + \lambda R_2$ est le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B.
   Donc $f(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = f(P_1) + \lambda f(P_2)$. Ainsi, f est linéaire et finalement $\boxed{f \text{ est un endomorphisme.}}$

2. Soit $P \in \ker(f)$. Le reste de la division de AP par B est nul *ssi* $B \mid AP$ *ssi* les racines de B sont des racines de AP (avec les mêmes multiplicités). Or, $B = X(X^3 - 1)$ donc ses racines sont $0, 1, j, \bar{j}$. Comme $0, j, \bar{j}$ ne sont pas des racines quatrièmes de l'unité (*i.e.* les racines de A), elles sont nécessairement des racines de P qui est de degré $\leqslant 3$. Ainsi $P = \lambda X(X-j)(X-\bar{j}) = \lambda X(X^2 + X + 1)$ et $\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}(X(X^2 + X + 1)).}$

3. D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = 4 - 1 = 3.}$
Soit $R \in \mathrm{Im}(f)$. Alors :
$R = AP - BQ = (X-1)(X+1)(X^2+1)P - (X-1)X(X^2+X+1)Q$
$\qquad = (X-1)\Big((X+1)(X^2+1)P - X(X^2+X+1)Q\Big).$
Donc $X-1$ divise R *i.e.* $R = (X-1)R_1$ avec $\deg(R_1) \leqslant 2$ car $\deg(R) \leqslant 3$.
Donc $\mathrm{Im}(f) \subset (X-1)\mathbb{C}_2[X]$. Comme ces deux espaces vectoriels ont la même dimension (3), ils sont égaux : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X].}$

4. $\boxed{\text{Les racines de } B \text{ sont : } 0, 1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}}$

5. On résout : $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = 0$. On constate que $P_k(z_j) \neq 0$ si $j = k$ et $P_k(z_j) = 0$ si $j \neq k$.
On évalue donc $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$ en chaque z_j et on obtient : $a = b = c = d = 0$. Ainsi, la famille est libre, à 4 éléments dans un espace de dimension 4 donc $\boxed{\text{c'est une base.}}$

6. On sait que $B = (X - z_k)P_k$. On écrit la division euclidienne : $AP_k = BQ_k + R_k = (X - z_k)P_kQ_k + R_k$.
Donc P_k divise R_k. Or $\deg(R) \leqslant 3$ et $\deg(P_k) = 3$ donc $R_k = \lambda_k P_k$.
Finalement $AP_k = BQ_k + R_k = (X - z_k)P_kQ_k + \lambda_k P_k$ donc $A = (X - z_k)Q_k + \lambda_k$. On évalue en z_k et on obtient $A(z_k) = \lambda_k$. Or, $A(z_k) = z_k^4 - 1 = z_k - 1$ car z_k est une racine de B donc $z_k^4 - z_k = 0$.
Ainsi, $\boxed{f(P_k) = (z_k - 1)P_k.}$

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que x_1, x_2 et x_3 dans E sont non nuls et vérifient :
$f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 3x_2$ et $f(x_3) = 10x_3$.
Montrer que (x_1, x_2, x_3) est libre.

2. Proposer un énoncé qui généralise 1).

Solution.

1. On résout : $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0_E$. En composant par f et par linéarité, on obtient :
$ax_1 + 3x_2 + 10x_3 = f(0_E) = 0_E$. On recommence : $ax_1 + 9x_2 + 100x_3 = 0_E$.
On obtient un système : $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ ax_1 + 3bx_2 + 10cx_3 = 0 \\ ax_1 + 9bx_2 + 100cx_3 = 0 \end{cases}$, d'inconnues ax_1, bx_2, c_3x_3.
On obtient : $ax_1 = bx_2 = cx_3 = 0_E$. Comme les trois vecteurs x_i sont non nuls, $a = b = c = 0$. Donc $\boxed{\text{la famille est libre.}}$

2. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs non-nuls de E tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x_i) = a_i x_i$ avec les a_i distincts deux à deux. Alors $\boxed{(x_1, \cdots, x_n) \text{ est libre.}}$

Exercice 11. Soient f et g sont deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ et $\ker(f+g) \supset \ker f \cap \ker g$.

2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$; montrer que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g$ et $\ker(f \circ g) \supset \ker f + \ker g$.

Solution.

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ avec $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et $\boxed{\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g.}$
Soit $x \in \ker f \cap \ker g$. Par définition : $f(x) = g(x) = 0_E$. Donc $f(x) + g(x) = (f+g)(x) = 0_E$ *i.e.* $x \in \ker(f+g)$ et $\boxed{\ker(f+g) \supset \ker f \cap \ker g.}$

2. Soit $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que : $y = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$. Or par hypothèse f et g commutent : $y = g \circ f(x) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. Alors $y \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g.}$

   Soit $x \in \ker f + \ker g$. Par définition, $x = x_f + x_g$ avec $x_f \in \ker f$ et $x_g \in \ker g$.
   $f \circ g(x) = f \circ g(x_f + x_g) = f(g(x_f) + g(x_g))$ par linéarité.
   $f \circ g(x) = f(g(x_f) + 0_E) = f \circ g(x_f)$ car $x_g \in \ker g$.
   Or par hypothèse f et g commutent : $f \circ g(x) = g \circ f(x_f) = g(0_E) = 0_E$ par linéarité. On reconnait : $x \in \ker(f \circ g)$. Donc $\boxed{\ker(f \circ g) \supset \ker f + \ker g.}$

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
3. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.
4. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = E \iff \mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$.
5. Montrer que : $E = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.
6. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.
7. Montrer que : $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

Solution.

1. Soit $x \in \ker(f)$. Par définition $f(x) = 0_E$. Donc : $g \circ f(x) = g(0_E) = 0_E$ par linéarité. Donc $x \in \ker(g \circ f)$: $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f).}$

2. $\Rightarrow$: On vient de montrer une inclusion donc il reste à montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \supset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$. Par définition : $g(f(x)) = 0_E$. On pose $y = f(x)$. On a $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $y \in \ker g$. Donc $y \in \ker g \cap \mathrm{Im}(f)$ *i.e.* $y = f(x) = 0_E$ par hypothèse. Ainsi, $x \in \ker f$ et on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g \circ f).}$

   $\Leftarrow$: On suppose $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = g(f(x)) = 0_E$. Donc $x \in \ker(g \circ f)$. Par hypothèse : $x \in \ker(g \circ f) = \ker f$. Donc $y = f(x) = 0_E$. D'où : $\boxed{\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\}.}$

   $\boxed{\text{On a bien l'équivalence.}}$

3. Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$. Donc $y \in \mathrm{Im}(g)$. $\boxed{\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g).}$

4. $\Rightarrow$: On vient de montrer une inclusion donc il reste à montrer que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \supset \mathrm{Im}\,(g)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Comme $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$, on peut écrire : $x = f(a) + b$ avec $b \in \ker g$. Donc $y = g(x) = g(f(a)) + g(b) = g \circ f(a)$ par linéarité.
   Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\boxed{\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g).}$

   $\Leftarrow$: On suppose $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$.
   Soit $x \in E$. Montrons que x se décompose en : $x = f(a) + b$ avec $a \in E$ et $b \in \ker g$.
   $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$. Or $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}\,(g \circ f)$. Donc $g(x) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$: il existe $a \in E$ tel que $g(x) = g \circ f(a)$.
   On considère alors $b = x - f(a)$. On constate : $g(b) = g(x) - g(f(a)) = 0_E$ donc $b \in \ker g$.
   Finalement : $x = f(a) + b$ avec $a \in E$ et $b \in \ker g$. $\boxed{\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = E}$

   $\boxed{\text{On a bien l'équivalence.}}$

5. On applique le résultat 4 avec $g = f$.

6. On applique le résultat 2 avec $g = f$.

7. On regroupe les résultats 5 et 6 :
   $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f) \iff E = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\} \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^4$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.

2. Pourquoi existe-t-il $w \in \mathbb{R}^4$ tel que la famille $(u, f(u), w)$ est libre ?
   Montrer alors que $\beta = (u, f(u), w, f(w))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer les coordonnées de $f(v)$ dans la base β, si $v \in \mathbb{R}^4$ a pour coordonnées $X_v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans la base β.

Solution.

1. On résout : $\lambda u + \mu f(u) = 0_E$ avec λ et μ réels. On compose par f ce qui, par linéarité, donne $\lambda f(u) + \mu f(f(u)) = f(0_E) = 0_E$.
   Par hypothèse, $f(f(u)) = -u$. Donc : $\lambda f(u) - \mu u = 0_E$.
   On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} \lambda u + \mu f(u) = 0_E \\ \lambda f(u) - \mu u = 0_E \end{cases}$.
   $\lambda L_1 - \mu L_2$ donne : $(\lambda^2 + \mu^2)u = 0_E$. Comme u est non nul, $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Comme λ et μ sont réels, on en déduit que $\lambda = \mu = 0$. Donc $\boxed{(u, f(u)) \text{ est libre.}}$

2. E est de dimension 4. On peut compléter la famille $(u, f(u))$ est une base $(u, f(u), w, w')$.
   En particulier $\boxed{(u, f(u), w) \text{ est une famille libre.}}$
   On résout : $au + bf(u) + cw + df(w) = 0_E$ avec a, b, c, d réels. On compose par f. Par linéarité, on obtient :
   $\begin{cases} au + bf(u) + cw + df(w) = 0_E \\ af(u) - bu + cf(w) - dw = 0_E \end{cases}$.
   On élimine $f(w)$ des équations : $cL_1 - dL_2$ donne $(ac + bd)u + (bc - ad)f(u) + (c^2 + d^2)w = 0_E$.
   Comme $(u, f(u), w)$ est libre, les coefficients sont nuls. En particulier : $c^2 + d^2 = 0$. Comme ce sont des réels : $c = d = 0$.
   On a donc $au + bf(u) = 0_E$. Or cette famille est libre. Donc : $a = b = 0$.
   Finalement, $(u, f(u), w, f(w))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, de dimension 4. Donc $\boxed{\text{c'est une base.}}$

3. On écrit : $v = xu + yf(u) + zw + tf(w)$. On compose par f. Par linéarité : $f(v) = xf(u) - yu + zf(w) - tw$.
   Les coordonnées de $f(v)$ sont : $\boxed{X_{f(v)} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -t \\ z \end{pmatrix}}$.

Exercice 14. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \left(\frac{3}{7}(x - y), \frac{4}{7}(y - x)\right)$. Montrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

Solution. On vérifie que f est linéaire et que
$f\circ f(x,y)=(\frac{3}{7}(\frac{3}{7}(x-y)-\frac{4}{7}(y-x)),\frac{4}{7}(\frac{4}{7}(y-x)-\frac{3}{7}(x-y)))=\left(\dfrac{3}{7}(x-y),\dfrac{4}{7}(y-x)\right)=f(x,y)$.
On constate : $f\circ f=f$ donc $\boxed{f \text{ est un projecteur.}}$
$u=(x,y)\in\ker f\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{7}(x-y),\dfrac{4}{7}(y-x)\right)=(0,0)\Leftrightarrow x=y$.
Donc $\ker f=\mathrm{Vect}((1,-1))$.
$f(1,0)=(3/7,-4/7)$ et $f(0,1)=(-3/7,4/7)=-f(1,0)$. Donc $\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}((3/7,-4/7))$.
f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((3/7,-4/7))$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(1,-1)$.

Exercice 15.

1. Soit $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y)=\left(-\dfrac{y}{2},-2x\right)$. Montrer que g est une symétrie.
   Notation : g est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
2. On note p tel que $g=2p-\mathrm{id}$. Montrer que p est le projecteur sur F, parallèlement à G.
3. Déterminer F et G.

Solution.

1. g est linéaire et $g(g(x,y))=(-\frac{1}{2}(-2x),-2\times -y/2)=(x,y)$.
   On constate : $g\circ g=\mathrm{id}$ donc $\boxed{g \text{ est une symétrie.}}$
2. Voir fiche de révision sur les symétries et projecteurs.
3. On calcule : $G=\ker p=\mathrm{Vect}(1,-2)$ et $F=\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}(-1/2,-1)$.
   Donc g est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(-1/2,-1)$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(1,-2)$.

Exercice 16. On note $E=\mathbb{R}_2[X]$ et ϕ l'application définie par : $\forall P\in E,\quad \phi(P)=2P-(X-1)P'$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Donner une base de $\ker(\phi)$. L'endomorphisme ϕ est-il injectif ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\phi)=\mathrm{Vect}(1,X)$.
4. Montrer que $\ker(\phi)\oplus\mathrm{Im}(\phi)=E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\ker(\phi)$ de direction $\mathrm{Im}(\phi)$. Que valent $\phi\circ p$ et $p\circ\phi$?

Solution.

1. Soit $P\in E$, alors $\deg\phi(P)\leqslant\max(\deg P,\deg P'+1)\leqslant 2$ donc ϕ est bien à valeurs dans E.

   Soient $P,Q\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
   $\phi(P+\lambda Q)=2(P+\lambda Q)-(X-1)(P+\lambda Q)'=(2P-(X-1)P')+\lambda(2Q-(X-1)Q')=\phi(P)+\lambda\phi(Q)$.
   Donc ϕ linéaire et finalement $\boxed{\text{c'est un endomorphisme de } E.}$

2. $$\begin{aligned}P=aX^2+bX+c\in\ker\phi &\Leftrightarrow 2P-(X-1)P'=0\\ &\Leftrightarrow (b+2a)X+2c+b=0\\ &\Leftrightarrow P=b(-\tfrac{1}{2}X^2+X-\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$
   $\boxed{\ker\phi=\mathrm{Vect}(-\frac{1}{2}X^2+X-\frac{1}{2}).}$ Le noyau n'étant pas réduit à 0, $\boxed{\phi \text{ n'est pas injectif.}}$

3. $\phi(1)=2,\quad\phi(X)=X+1,\quad\phi(X^2)=2X$. Donc $\mathrm{Im}\phi=\mathrm{Vect}(2,X+1,2X)=\mathrm{Vect}(1,X+1,X)$.
   $\boxed{\mathrm{Im}\phi=\mathrm{Vect}(1,X).}$

4. $(1, X, -\frac{1}{2}X^2+X-\frac{1}{2})$ est une famille échelonnée de $\mathbb{R}_2[X]$: c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc, $\boxed{\ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\phi) = E.}$

5. $\ker p = \mathrm{Im}(\phi)$ et $\mathrm{Im}p = \ker \phi$.
   Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$: $p(P) \in \mathrm{Im}p$. Donc $\phi(p(P)) = 0$. De même : $\phi(P) \in \mathrm{Im}\phi$. Donc $p(\phi(P)) = 0$.
   Finalement, $\boxed{\phi \circ p = 0 \text{ et } p \circ \phi = 0.}$

Exercice 17. Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Solution.

1. $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ p \circ q \circ q$ car p et q commutent.
   $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$ car p et q sont des projecteurs. Donc $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur.}}$

2. Par double inclusion :
   $\subset$: soit $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$: y s'écrit $y = p \circ q(x)$ pour $x \in E$.
   $y = p(q(x)) \in \mathrm{Im}p$ et $y = q(p(x)) \in \mathrm{Im}q$ car p et q commutent. Donc $y \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$.
   $\supset$: soit $y \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$: il existe x et x' dans E tels que y s'écrive $y = p(x) = q(x')$.
   On compose par p : $p(y) = p \circ p(x) = p \circ q(x')$. Comme p est un projecteur : $p \circ p(x) = p(x)$.
   Mis bout à bout, on obtient : $y = p(x) = p \circ p(x) = p \circ q(x') \in \mathrm{Im}p \circ q$.
   Finalement : $\boxed{\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).}$

3. Par double inclusion :
   $\supset$: soit $x \in \ker(p) + \ker(q)$. x s'écrit : $x = x_{\ker p} + x_{\ker q}$.
   $p \circ q(x) = q \circ p(x_{\ker p}) + p \circ q(x_{\ker q}) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \ker(p \circ q)$.
   $\subset$: soit $x \in \ker(p \circ q)$. On sait que $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}p$. On décompose x : $x = x_{\ker p} + x_{\mathrm{Im}p}$. On veut obetnir une décomposition selon $\ker p + \ker q$.
   Reste donc à montrer que $x_{\mathrm{Im}p} \in \ker q$. On a : $x_{\mathrm{Im}p} \in \mathrm{Im}p$. Donc : $x_{\mathrm{Im}p} = p(a)$ pour $a \in E$.
   $q \circ p(x) = q \circ p(x_{\ker p}) + q \circ p(p(a)) = q(0) + q \circ p(p(a)) = q \circ p(a)$ car $p \circ p = p$.
   Or : $q \circ p(x) = 0$ par hypothèse. Donc $q(p(a)) = 0_E$: $p(a) = x_{\mathrm{Im}p} \in \ker q$. Finalement : $x = x_{\ker p} + x_{\mathrm{Im}q} = x_{\ker p} + x_{\ker q} \in \ker(p) + \ker(q)$.
   Ainsi : $\boxed{\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q).}$