Feuille d'exercices n° 7 : suites numériques

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4, \\ u_1 = 10, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 2 \times 3^n$.

Exercice 2. Calculer le terme général pour chacune des suites suivantes.

1. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = -3u_n$. Calculer : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
2. $u_3 = 10$ et $\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+1} = u_n + 5$. Calculer : $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k$ pour $p \leqslant n$.
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$
4. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
5. $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, \quad 4u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0$
6. $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$

Exercice 3. Expliciter u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = v_{n-1} + \dfrac{1}{3^n} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = a \\ w_n = w_{n-1}^2 \end{cases}$$

Indication : Commencer par calculer u_1, u_2, u_3 et conjecturer une formule pour u_n.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 1}$ et $u_0 = 1$.

1. Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant \frac{1}{3}$.
3. Montrer que u est décroissante.
4. En déduire que u converge.
5. On pose $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et calculer v_n puis u_n.
6. Trouver la limite de u.

Exercice 5. Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{4^n}$
2. $u_n = (-n+2)e^{-n}$
3. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
4. $u_n = \sqrt{n^4 + 1} - n$
5. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$
6. $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$

7. $u_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n - \cos(n)}$

Exercice 6. Étudier la convergence des suites suivantes données par leur terme général et donner leur limite éventuelle :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}, \qquad c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Indication : Pour a_n, partir de $0 \leqslant k \leqslant n$ pour encadrer $\dfrac{n}{n^2+k}$. Passer à la somme. En déduire la limite de a_n par encadrement.

Exercice 7. On pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que la suite H ne converge pas.
3. Montrer finalement que H tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour la limite ℓ de u dans le cas où la suite convergerait ?
2. Montrer que u est croissante.
3. On suppose que $u_0 \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$. En déduire que u converge.
4. Que se passe-t-il si $u_0 > 1$?

Exercice 9. On considère la suite : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier la fonction $g(x) = 1 + \ln x - x$. En déduire que la suite u est monotone.
3. Montrer que la suite converge et donner la valeur de sa limite.

Exercice 10. La suite (u_n) est définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1-u_n)^2$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.
Soit la fonction $f\colon x \mapsto (1-x)^2$.

1. Étudier rapidement f sur $[0,1]$ et montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$.
3. On pose $g = f \circ f$. Montrer que g est croissante sur $[0,1]$.
4. On définit les suites v et w par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, pour tout n. Montrer que (v_n) est croissante, et (w_n) décroissante.
5. Montrer que (v_n) tend vers 1. Est-ce que (w_n) peut converger vers 1 ? Que peut-on dire pour (u_n) ?

Exercice 11. On définit les suites u et v par : $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Étudier rapidement les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$.
2. Montrer que u et v sont adjacentes. Leur limite commune est la constante d'Euler, notée γ, et on ne sait toujours pas si $\gamma \in \mathbb{Q}$.

Exercice 12. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a$ et $0 < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Indication :

1. Par récurrence, montrer que : "$u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$".
2. Calculer $v_{n+1} - u_{n+1}$.
3. Signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. Utiliser le théorème de la limite monotone pour montrer que les deux suites convergent. Vérifier ensuite que les deux limites ℓ et ℓ' sont égales.

Exercice 13. Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On note v et w les suites définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes et que (u_n) converge.

Pour s'entrainer

Exercice 14.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.
   En déduire le signe de g.
2. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.
   (a) Démontrer que pour tout entier n, u_n est définie et $u_n > 0$.
   (b) Quel est le sens de variation de u ? (Penser à se servir de la question 1.)
   (c) La suite u est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 15. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

1. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$.
2. Étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$.
3. Quel est le sens de variation de (u_n) ?
4. Prouver par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $]-1;2]$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$.
On considère la suite définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.
2. La suite u est-elle monotone ?
3. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution $\ell \in [1/2, 1]$.
4. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1/2; 1]$.
5. Prouver qu'il existe un réel $M < 1$ tel que pour tout $x \in [1/2; 1],\ |f'(x)| \leqslant M$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n |1/2 - \ell|$.
7. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 17. Soit la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1. Etude de $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. Calculer f', f''. Construire le tableau de variation de f ; préciser $f([0, 1])$.
2. Justifier : $\forall x \in [0, 1],\ \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
3. Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0, 1]$ une unique solution α.
4. Etude de (u_n). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.
   Justifier :
   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|.$$
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant (2/3)^n$. Conclure.
5. Écrire un programme en pseudo-code qui affiche une valeur approchée de α à moins de 10^{-6} près.

Exercice 18. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \geqslant 0$ et la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^3}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n, u_n \geqslant 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x + x^3}{2}$.
   (a) Déterminer les variation de f.
   (b) Déterminer pour tout réel x positif le signe de $f(x) - x$.
3. Si la suite converge vers ℓ, quelles sont les valeurs possibles de ℓ.
4. (a) Que dire de la suite si $u_0 = 0$? Et si $u_0 = 1$?
   (b) On suppose que $u_0 \in]0; 1[$. Montrer que (u_n) décroit.
   Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
5. On suppose maintenant que $u_0 > 1$. Montrer que pour tout $n, u_n > 1$. Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$