Feuille d'exercices n° 3 : trigonométrie

Exercice 1. Montrer que :
$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq \tan(x).$$

Exercice 2. Réduisez l'intervalle d'étude des fonctions suivantes :
$$f(x) = \sin(4x), \qquad g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad h(x) = \sin(x) + \sin(2x).$$

Exercice 3. Soit $f(x) = \sin^2(x) + \cos x$.

1. Réduire l'intervalle d'étude en étudiant la périodicité et la parité.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations sur $[0, \pi]$.
4. Tracer la courbe de f.
5. Vérifier que pour tout x réel, $f(\pi + x) = f(\pi - x)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 4. On pose $f(x) = 2\cos x + \sin(2x)$. On souhaite réduire au maximum l'intervalle d'étude de f.

1. Déterminer la périodicité de f.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. En déduire un centre de symétrie de la courbe représentative de f.
3. Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 5. On pose $f(x) = 2\cos 2x + \sin(x)$. On souhaite réduire au maximum l'intervalle d'étude de f.

1. Déterminer la périodicité de f.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. En déduire un axe de symétrie de la courbe représentative de f.
3. Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 6. Soient a et b des réels de $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ vérifiant $\cos a = \frac{3}{5}$, et $\sin b = -\frac{3}{5}$.
Calculer $\sin a, \cos b, \cos(a+b), \tan a, \tan(a+b)$.

Exercice 7. a et b sont deux réels de $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui vérifient : $\tan a = 2$ et $\tan b = 1/7$.
Calculer $\tan(2a+b)$, et déterminer la valeur de $2a+b$.

Exercice 8. Calculer, par deux méthodes, la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
Vérifier qu'on obtient le même résultat.

Exercice 9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice 10. Factoriser :
$$A = \sqrt{2}\cos x - \sqrt{6}\sin x, \quad B = 1 + 2\cos x + \cos 2x.$$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes. On donnera le nombre de solutions sur le cercle trigonométrique.

1. $\sin 5x = \sin 3x$
2. $\cos(2x + \frac{\pi}{12}) + \cos 3x = 0$
3. $\cos(x + \frac{\pi}{12}) + \sin(3x + \frac{\pi}{12}) = 0$
4. $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$
5. $\tan 3x \tan 2x = 1$
6. $\cot(3x - \pi/4) = \tan(x + \pi/4)$
7. $\sqrt{3}\tan(x - \pi/6) = 1$
8. $\tan 2x = 3\tan x$.
9. $\sqrt{3}\cot x = 2\cos x$
10. $2\sin x \tan x + \tan^2(x/2) = 0$
11. $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x = 0$
12. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$

Exercice 12. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|\cos x| < \frac{1}{2}$
2. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \tan x < \sqrt{3}$
3. $\cos x(1 + 2\sin x) > 0$
4. $-\frac{1}{2} < \sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $0 \leqslant \sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant -\sqrt{2}$
6. $-1 < \cos x - \sin x < 0$
7. $\sin 2x \leqslant 1 + \cos 2x$
8. $\sqrt{3}\cot x > 2\cos x$
9. $\tan x + \cot x > \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Exercice 13. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos(x) + \cos(2x)$.

1. Réduire l'intervalle d'étude de f.
2. Résoudre $f(x) = 0$.
3. Faire l'étude de f puis tracer son graphe.

Exercice 14. Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \dfrac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.
2. Déterminer la limite de $P_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour s'entrainer

Exercice 15. On considère l'équation (E): $\tan^2(3x) - 2\sqrt{2}\tan(3x) + 1 = 0$.

1. Déterminer le domaine de résolution de (E).
2. Résoudre : $X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$.
3. En constatant : $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}$.
4. Déterminer la valeur exacte de $\tan\dfrac{3\pi}{8}$.
5. Résoudre (E).

Exercice 16. Montrer que : $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan(x/2)$, en précisant les valeurs pour lesquelles cette formule est valide.

Exercice 17. Montrer l'inégalité

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ :\ x - \sin(x) \leqslant \tan(x) - x.$$

Exercice 18. Écrire en fonction de $x/2$:

$$A = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}, \qquad C = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}.$$

Exercice 19. Simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10}{\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)}$$

Exercice 20. Après avoir réduit l'intervalle d'étude, étudier les fonctions suivantes :

$$f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x) \qquad g(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$$

Indication : Pour réduire l'intervalle d'étude de g, on calculera $g(\pi/2 - x) - g(x)$ puis $g(x - \pi/2) + g(-x)$.

Exercice 21. Montrer que si $x - y = \frac{\pi}{2}$ alors $\cos^2 x + \cos^2 y = \sin^2 x + \sin^2 y = 1$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{3} - 4\cos^2 t \geqslant 1 + 3\sin t$.

Exercice 23. Sachant que $a + b + c = \pi$:

1. Factoriser $\sin a - \sin b + \sin c$.
2. Montrer que $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$.

Exercice 24. Sachant que $\cot \alpha = 5$, calculer $\tan 5\alpha$.

Exercice 25.

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h) \leq h \leq \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h\cos(h) \leq \sin(h) \leq h$, puis calculer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\dfrac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\dfrac{1-\cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction cos.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Exercice 26. Calculer, à l'aide de radicaux et de deux façons différentes, les nombres $\tan(\frac{\pi}{12})$ et $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 27. À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{\pi}{24}$.

Exercice 28. Transformer les expressions suivantes en produits :
$A = \cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$
$B = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(7x) + \sin(8x)$

Exercice 29. Factoriser :

$$A = \cos^2 2x - \cos^2 x, \qquad B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x, \qquad C = \tan 2x - \tan x$$

$$D = \tan x + \tan 3x, \qquad E = \sin x + \sin 2x + \sin 3x, \qquad F = 1 + \tan x \tan 2x$$

Exercice 30. Résoudre l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$

Exercice 31. Résoudre l'équation $\sqrt{3} + \tan x = 1 - \sqrt{3}\tan x$.
Indication : penser que $\sqrt{3} = \tan(\frac{\pi}{3})$ et utiliser une formule d'addition.

Exercice 32. Résoudre l'équation d'inconnues x et y :

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y.$$

Indication : penser que $x + y = \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}$ et utiliser les transformations de sommes en produits.

Exercice 33. Résoudre les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 1$;
2. $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$;
3. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$;
4. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 34. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(3x - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$;
2. $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(x)$;
3. $\tan(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$;
4. $\sin(2x + 3) = \frac{1}{2}$;
5. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 3 - \sin(\frac{x}{2})$;
6. $\sin(\frac{\pi + x}{2}) = \frac{1}{2}$;
7. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$;
8. $\cos x \leq -\frac{1}{2}$;
9. $\sqrt{3}\cos(x) \leq 3\cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

Exercice 35. Résoudre les équations :

1. $\cos 2x + \cos x = 0$;
2. $\sin x + \cos 3x = 0$;
3. $\sin 5x - \sin x = 0$.

Exercice 36. Résoudre les (in)équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\cos(2x) + \cos x = 0$;
2. $\sin x + \cos(3x) = 0$;
3. $\sqrt{3} + \tan x = 1 - \sqrt{3}\tan x$;
4. $\tan(x)\tan(2x) = 1$;
5. $\cos(2x) > \cos(x) - 1$;
6. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \geqslant 0$;
7. $\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$;
8. $\sin(x) = \cos^2(x)$;
9. $\sin(2x) + \cos(2x) > 0$;
10. $2\sin(x) - \cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
11. $\sin(x+y) = \cos(2x - y)$;
12. $2x - \sin(x) + 2\pi = 0$;
13. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(5x) + \sin(6x) \geq 0$.