Feuille d'exercices n^{o} 15 : analyse asymptotique

Exercice 1. Classer les familles de fonctions suivantes par ordre de négligeabilité au voisinage de $+\infty$:

1. $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\ln x}{x}$, $\dfrac{1}{x\ln x}$, $\dfrac{\ln x}{x^2}$
2. x, x^2, $x\ln x$, $\sqrt{x}\ln x$, $\dfrac{x^2}{\ln x}$

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes. En déduire le comportement en $+\infty$.

1. $u_n = \dfrac{(n+2)^3}{4n^2+2}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2+1000}{n^3+3n+1}$
3. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{4n+(-1)^{n+1}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$
5. $u_n = n^2 + 2^n + 5\ln n$
6. $u_n = \dfrac{4n^2+3^n}{2^n+\frac{n}{2}}$
7. $u_n = \dfrac{n^2+e^{-2n}+\sqrt{n^5}}{\ln(2n)+2n-3}$
8. $u_n = (n+3\ln(n))e^{-(n+1)}$
9. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
10. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
11. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$
12. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$
13. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$
14. $u_n = \dfrac{n^2+n!+25^n}{(n+2)!+30^n}$
15. $u_n = n\sin\dfrac{1}{n^2}$
16. $u_n = \dfrac{n\ln n}{3+\cos n e^{-n}}$
17. $u_n = \dfrac{e^n+n^2}{e^{-n^2}+\frac{1}{n^3}}$
18. $u_n = \dfrac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}$
19. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2+2^n)}$
20. $u_n = \ln(e^n+n) - \dfrac{n}{2}$
21. $u_n = \sqrt{n+1+n\ln n} - \sqrt{n}$
22. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$

Exercice 3. Déterminer les développements limités suivants.

1. À l'ordre 2 en $a>0$ de $f : x \mapsto e^x$
2. À l'ordre 2 en $a>0$ de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$
3. À l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \ln\dfrac{1+x}{1-x-x^2}$
4. À l'ordre 1 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-\sin x}{\ln(1+x)}$
5. À l'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$
6. À l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$
7. À l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \ln\dfrac{1}{\cos x}$
8. À l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto (\ln(1+x))^2$
9. À l'ordre 4 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+x^2}$
10. À l'ordre 4 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\tan x - x)}{\ln(1+x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ avec $a>0$ et $b>0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x$
7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \ln(e^n+n) - n$
9. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$

Exercice 5. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.

3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 6. Déterminer, si elles existent, les asymptotes au courbes représentatives des fonctions suivantes en $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$:

1. $f(x) = xe^{1/x}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
3. $f(x) = (x+1)e^{1/x^2}$
4. $f(x) = x^3 \ln(1 + 1/x^2)$
5. $f(x) = x^2(\ln(1+x) - \ln x)$
6. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$
7. $f(x) = \ln(e^x + x)$
8. $f(x) = x/(e^x - 1)$

Exercice 7.

1. Montrer l'encadrement : $\forall x > 0, \quad \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2. Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que (H_n) tend vers $+\infty$.

3. Montrer l'équivalence : $H_n \sim \ln n$.

4. Montrer enfin que $(H_n - \ln n)$ converge vers un réel γ de $]0, 1[$ *i.e.* : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 \in [0, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{1+n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in [0, 2]$.

2. Montrer que (u_n) converge vers 1.

3. On veut déterminer deux réels a et b tels que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   En partant de $u_n = 1 + o(1)$, déterminer a et b.

Pour s'entrainer

Exercice 9. Soit $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ existe, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On pose $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ pour $x > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x)$.

Exercice 10. Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué.

1. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ au voisinage de 0.

2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.

4. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.

5. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

6. $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.

7. $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$ en $+\infty$ (on donnera un développement asymptotique avec trois termes).

Exercice 11.

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.

3. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.

4. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$.

5. Conclure que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 12. Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 13. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = u_n + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sont adjacentes (au moins à partir d'un certain rang).

Exercice 14. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$. Déterminer la limite en 0 de la fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{f(-x)}{f(x)}$.

Exercice 15. On considère les fonctions

$$f\colon x \mapsto (x-2)e^x \quad \text{et} \quad g\colon x \mapsto f(x) + x^4.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre trois des fonctions f et g en 0. En déduire que les courbes de f et g ont la même tangente en 0. On notera, par la suite, T cette tangente commune.

2. Étudier la position relative des courbes de f et de g par rapport à T au voisinage de 0.

3. Étudier la position relative de la courbe de f par rapport à T (globalement).

4. La courbe de g est-elle au-dessous de T sur $]-\infty, 0]$?

Exercice 16. On considère la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. En déduire un développement limité à l'ordre 2 en 1 de f.

3. Etudier la position relative de la courbe de f et de sa tangente en 1 au voisinage de 1.

4. En étudiant la fonction $g\colon x \mapsto f(x) - x$, montrer que la courbe de f est au-dessous de sa tangente en 1.

Exercice 17. Montrer que $e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \sim \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 18. Comparer (négligeabilité, domination, équivalence) les suites u, v, w et x définies par :
$u_n = n^{\ln^2 n}$ $\quad v_n = (n^2)^{\ln n}$ $\quad w_n = (\ln n)^{n \ln n}$ $\quad x_n = (n \ln n)^n$.

Exercice 19. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage d'un point x_0 en lequel
$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Donner, en fonction de la parité de n et du signe de $f^{(n)}(x_0)$, la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en $x = x_0$ au voisinage de x_0

Exercice 20 (Intégrales de Wallis)**.** Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
8. Déterminer un équivalent simple de I_n.

Exercice 21. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un réel A tel que

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right| \leq \frac{A}{n^2}.$$

En déduire deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\ dx \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 22. Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+3}e^{-\frac{1}{x}}$.
Déterminer l'allure de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 23. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n.
3. Prouver par récurrence que $u_n \leq n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.