À rendre pour le 22 avril 2024

Devoir maison n° 5

Correction

Exercice 1. On considère un cercle $\mathscr{C}$ du plan euclidien dont on note A son centre et $r > 0$ son rayon. On considère également B un point du plan tel que $AB > r$ et on pose $AB = a$. Le but de cet exercice est de montrer que par le point B passent exactement deux tangentes au cercle. On utilisera la définition suivante.

« Une droite $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ si l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ est exactement un point. »

1) Justifier qu'il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $(x-a)^2+y^2 = r^2$. Faire un dessin. Dans la suite, on se place dans ce repère.

2) On considère une droite $\mathscr{D}$ du plan. Montrer que $\mathscr{D}$ passe par B si et seulement elle possède une équation cartésienne de la forme $x = 0$ ou $y = \alpha x$ où α est un réel.

3) Montrer, avec les notations de la question précédente, que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\mathscr{D}$ possède une équation cartésienne de la forme $y = \alpha x$ où $\alpha = \pm\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$.

4) Conclure l'exercice.

5) À présent, on souhaite redémontrer le résultat en utilisant que les tangentes d'un cercle sont toutes les droites passant par un point du cercle et normales au rayon issu de ce point. On va tout d'abord **démontrer** cette dernière propriété. On ne s'en servira qu'une fois la propriété établie.

   a) Soit $\mathscr{D}$ une droite tangente au cercle $\mathscr{C}$. On note M l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. Montrer que les droites (AM) et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.

   b) Réciproquement, soit $M \in \mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ la droite passant par M et orthogonale à (AM). Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$.

   c) On cherche toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par B. Montrer que le problème revient à trouver tous les points $M \in \mathscr{C}$ tels que les droites (AM) et (BM) sont orthogonales.

   d) Montrer que l'ensemble des points M vérifiant la propriété précédente correspond à l'intersection de $\mathscr{C}$ avec un autre cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

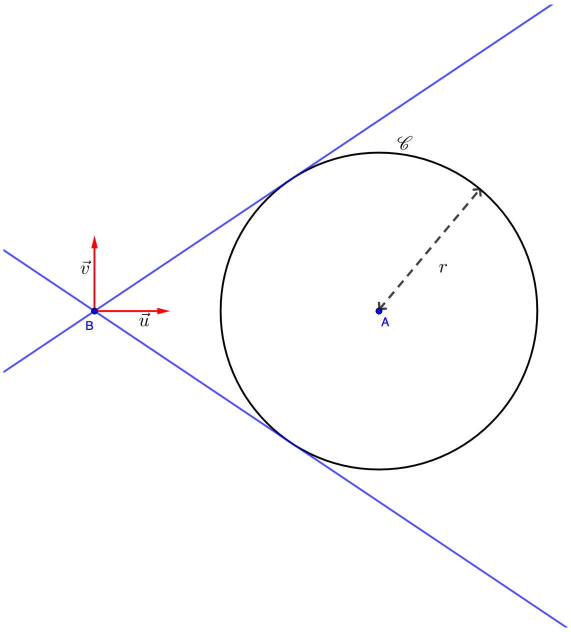
   e) Conclure de nouveau.

Solution.

1) On pose $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|}$ et on considère $\vec{v}$ un vecteur unitaire normal à $\vec{u}$.

   Dans le repère $\boxed{\mathscr{R} = (B, \vec{u}, \vec{v})}$, on a en coordonnées $A(a, 0)$ et $B(0, 0)$ donc $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $(x - a)^2 + y^2 = r^2$.

À noter que dans cette question, il y avait une ambigüité et on pouvait prendre pour origine tout point sur le cercle de centre A et de rayon a : ceci pouvait gêner pour la question suivante.



2) On sait que la droite $\mathscr{D}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b, c des réels. En injectant les coordonnées, on obtient que $\mathscr{D}$ passe par B *ssi* $c = 0$. De plus, $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $b \neq 0$, on pose $\alpha = -a/b$ donc $y = \alpha x$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$. Si $b = 0$ alors $a \neq 0$ et donc $x = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

3) On considère un point M du plan de coordonnées (x_M, y_M). Si $\mathscr{D}$ a pour équation $x = 0$, le point M appartient à l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ si et seulement si $x_M = 0$ et $(x_M - a)^2 + y_M^2 = r^2$ et on aurait $a^2 + y_M^2 = r^2$ ce qui est impossible car $a > r$. On se place dans le cas où $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \alpha x$. Dans ce cas, M appartient à l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ si et seulement si $y_M = \alpha y_M$ et $(x_M - a)^2 + y_M^2 = r^2$. Or,
$$(x_M - a)^2 + (\alpha x_M)^2 = r^2 \iff (1 + \alpha^2)x_M^2 - 2ax_M + a^2 - r^2 = 0.$$
Cette dernière équation d'inconnue x_M possède une unique solution si et seulement si
$$\Delta = (-2a)^2 - 4(1 + \alpha^2)(a^2 - r^2) = 0 \iff \alpha = \pm\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$
Ainsi, M est l'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ si et seulement si $\alpha = \pm\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$.

$$\boxed{\text{En conclusion, } \mathscr{D} \text{ est tangente à } \mathscr{C} \text{ si et seulement si } \alpha = \pm\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}.}$$

4) Avec les notations de la question précédente, une droite $\mathscr{D}$ passant par B est tangente au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si elle possède une équation cartésienne de la forme
$$y = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}x \quad \text{ou} \quad y = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}x.$$
Les deux équations précédentes donnent deux droites différentes (vecteurs normaux non colinéaires).

$$\boxed{\text{En conclusion, il existe exactement deux tangentes au cercle passant par } B.}$$

5) a) Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. Dans un repère bien choisi, on a les équations cartésiennes suivantes.
$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{D} : y = AH.$$

Ainsi, $M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ si et seulement si $x^2 = r^2 - AH^2$ et $y = AH$.
Si $AH = d(A, \mathscr{D}) < r$ alors la droite et le cercle ont deux points d'intersection. De même, si $AH > r$ alors l'intersection est vide. Finalement, $AH = r$ et on obtient alors $H = M$. D'où, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}$ est normal à $\mathscr{D}$.

b) Toujours dans un repère bien choisi, on a

$$\mathscr{C}\colon x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}\colon y = AM = r.$$

L'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ donne un seul point : $x = 0$ et $y = r$. D'où $\boxed{\mathscr{D} \text{ est tangente à } \mathscr{C}.}$

c) La tangente à $\mathscr{C}$ issue d'un point $M \in \mathscr{C}$ passe par M et a comme vecteur normal $\overrightarrow{AM}$. Elle contient donc le point B si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux *i.e.* les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires. Trouver les tangentes passant par B revient donc à trouver les points M du cercle qui vérifient cette dernière propriété.

d) D'après le cours, l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$. Son centre est donc I, le milieu de $[AB]$, et son rayon est $r' = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.
Ainsi, l'ensemble des points $M \in \mathscr{C}$ tel que (AM) et (BM) sont perpendiculaires est l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

e) Dans le repère de la question 1, on a

$$\mathscr{C}\colon (x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{C}'\colon \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Ainsi, $M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rl} x^2 + y^2 - 2ax &= r^2 - a^2 \\ x^2 + y^2 - ax &= 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x^2 + y^2 - 2ax &= r^2 - a^2 \\ ax &= a^2 - r^2 \end{array}\right.$$

On trouve alors : $x = \dfrac{a^2 - r^2}{a}$ et $y = \pm\dfrac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$. En particulier il y a bien deux points d'intersection donc deux tangentes recherchées.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des solutions positives de l'équation

$$(E): \quad \tan x = x$$

puis de calculer la limite de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. Montrer de plus que : $n\pi \leqslant x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

   b) Montrer que $x_n \sim n\pi$.

   c) Montrer que $x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ et en déduire que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.

   d) Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ et conclure que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E_n) : $\tan y = 2n \tan\left(\frac{y}{2n}\right)$ d'inconnue y. Dans cette question, on va montrer que (E_n) admet exactement n solutions dans $[0, n\pi[$ que l'on notera :

$$0 = y_0(n) < y_1(n) < \cdots < y_{n-1}(n).$$

Par ailleurs, on pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1} X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} X^k$.

a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que E_n admet **au moins** une solution dans $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.

b) En utilisant la formule de De Moivre, montrer que pour tout $t \not\equiv \frac{\pi}{4n}\ [\frac{\pi}{2n}]$ et $t \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a

$$\tan(2nt) = \frac{P(\tan^2 t)}{Q(\tan^2 t)} \tan t.$$

c) En utilisant cette dernière relation avec une valeur de t bien choisie, montrer si $y \in [0, n\pi[$ est une solution de (E_n) alors le réel $\alpha = \tan^2\left(\frac{y}{2n}\right)$ est une racine du polynôme

$$R = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{2n+1}{2k+1} X^k.$$

d) Conclure.

3) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\alpha_k = \tan^2\left(\frac{y_k(n)}{2n}\right)$.

a) Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$.

b) Justifier que $\widetilde{R} = X^n R\left(\frac{1}{X}\right)$ définit bien un polynôme dont on précisera le degré. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{10}.$$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))}$.

4) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $I_k =]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ réalise une bijection de I_k dans un intervalle J à préciser.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} f(y_k(n))$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} y_k(n) = x_k$.

c) Montrer également que $y_k(n) > x_k$ pour tout $n > k$.

5) On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n > N+1$, on pose : $S_N(n) = \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))}$.

a) Établir que : $0 \leqslant S_N(n) \leqslant \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{(k\pi)^2}$.

b) En déduire que : $0 \leqslant S_N(n) \leqslant \frac{1}{N\pi^2}$. *Indication* : on pourra utiliser que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour tout $k > 1$.

6) À l'aide des résultats précédents, montrer finalement que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{10}$.

Solution.

1) a) Posons $f(x) = \tan x - x$. La fonction f est définie et dérivable sur $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et sur cet intervalle, on a : $f'(x) = \tan^2 x \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = n\pi$.

Ainsi, f est <u>strictement croissante</u> et <u>continue</u> sur <u>l'intervalle</u> donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I_n dans $\left]\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}+n\pi} f, \lim\limits_{\frac{\pi}{2}+n\pi} f\right[= \mathbb{R}$. En particulier, 0 possède un unique antécédent par f *i.e.* $\boxed{(E) \text{ possède une unique solution } \mathbf{dans\ I_n} \text{ que l'on note } x_n.}$

De plus, on remarque que $f(n\pi) = -n\pi \leqslant 0$ et $\lim\limits_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et ainsi $\boxed{n\pi \leqslant x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}.}$

b) Pour $n \neq 0$, on divise par $n\pi$ l'encadrement précédent : $1 \leqslant \dfrac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$ *i.e.* $\boxed{x_n \sim n\pi.}$

c) $x_n - n\pi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$. Ainsi, $\boxed{x_n - n\pi = \arctan x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}}$ car $x_n \to +\infty$. Puisque $\tan y \underset{y \to 0}{\sim} y$, on obtient

$$x_n - n\pi - \tfrac{\pi}{2} \sim \tan(x_n - n\pi - \tfrac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\tan(x_n)} = \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}$$

en utilisant la question précédente.

d) On raisonne comme précédemment,

$$x_n - n\pi - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{n\pi} \sim \tan(x_n - n\pi - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{n\pi}) = \frac{-1}{\tan(x_n + \frac{1}{n\pi})}.$$

Or, $\tan(x_n + \frac{1}{n\pi}) = \dfrac{\tan(x_n) + \tan(\frac{1}{n\pi})}{1 - \tan(x_n)\tan(\frac{1}{n\pi})} = \dfrac{1 + \frac{\tan(\frac{1}{n\pi})}{x_n}}{\frac{1}{x_n} - \tan(\frac{1}{n\pi})}$. Le numérateur tend vers 1 (limite directe) et au dénominateur, on a le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_n} - \tan(\tfrac{1}{n\pi}) &= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} - \frac{1}{n\pi} + o(\tfrac{1}{n^2}) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o(\tfrac{1}{n})\right) - \frac{1}{n\pi} + o(\tfrac{1}{n^2}) \\
&= -\frac{1}{2n^2\pi} + o(\tfrac{1}{n^2}).
\end{aligned}$$

Finalement, $\tan(x_n + \frac{1}{n\pi}) \sim -2n^2\pi$ et donc $\boxed{x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \sim \dfrac{1}{2n^2\pi}}$ ce qui donne le développement asymptotique voulu.

2) a) On fixe $k \in [\![1, n-1]\!]$. Posons $f_n(y) = \tan y - 2n \tan\left(\frac{y}{2n}\right)$.

La fonction f_n est <u>continue</u> sur <u>l'intervalle</u> $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.

Par ailleurs, $f_n(k\pi) = -2n\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) < 0$ (car $0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$) et $\lim\limits_{y \to k\pi + \frac{\pi}{2}} f_n(y) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{f_n \text{ s'annule au moins une fois sur } [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[.}$

On a ainsi trouvé au moins n solutions à (E_n) (la première étant trivialement 0).

b) D'après la formule de De Moivre et le binôme de Newton, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2nt) + i\sin(2nt) = (\cos t + i\sin t)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (\cos t)^{2n-p}(i\sin t)^p.$$

Puisque i^p est réel *ssi* p est pair, en identifiant partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(2nt) &= \sum_{\substack{p=0\\ p \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{p} (\cos t)^{2n-p}(i\sin t)^p \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} (\cos t)^{2n-2k}(\sin t)^{2k} \\
&= (\cos t)^{2n} Q(\tan^2 t) \\
\sin(2nt) &= \frac{1}{i} \sum_{\substack{p=0\\ p \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{p} (\cos t)^{2n-p}(i\sin t)^p \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1} (\cos t)^{2n-2k-1}(\sin t)^{2k+1} \\
&= (\cos t)^{2n} P(\tan^2 t)\tan t.
\end{aligned}$$

La factorisation par $(\cos t)^{2n}$ n'étant possible que si $\cos t \neq 0$. Si, de plus, $\cos(2nt) \neq 0$, alors

$$\boxed{\tan(2nt) = \frac{\sin(2nt)}{\cos(2nt)} = \frac{P(\tan^2 t)}{Q(\tan^2 t)} \tan t.}$$

c) Soit $y \in [0, n\pi[$ une solution de (E_n). Prenons $t = \frac{y}{2n}$ dans la relation précédente. Alors,

$$\tan(y) = \frac{P(\tan^2 t)}{Q(\tan^2 t)} \tan t$$

et d'un autre côté, d'après (E_n), $\tan y = 2n \tan t$. Si $y = 0$ *i.e.* $t = 0$ alors $\alpha = \tan^2 t = 0$ qui est bien une racine de R (son coefficient constant est nul). Sinon, on peut simplifier la relation précédente par $\tan t$ et donc

$$2n = \frac{P(\tan^2 t)}{Q(\tan^2 t)} \iff 2nQ(\alpha) - P(\alpha) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}
2nQ - P &= (-1)^n 2nX^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\left[2n\binom{2n}{2k} - \binom{2n}{2k+1}\right]}_{\text{nul si } k=0} X^k \\
&= (-1)^n 2nX^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[2n\frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k)!} - \frac{(2n)!}{(2n-2k-1)(2k+1)!}\right] X^k \\
&= (-1)^n 2nX^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 2k\ \frac{(2n)!(2n+1)}{(2n-2k)!(2k+1)!}\ X^k \\
&= 2R
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

d) La fonction tan est strictement croissante et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc, par composée, $y \mapsto \tan^2(\frac{y}{2n})$ est strictement croissante et en particulier injective sur $[0, n\pi[$. Ainsi, des solutions distinctes $y_1, y_2, \dots$ de (E_n) correspondent via cette fonction à des racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ de R. Puisque ce dernier est de degré n, il possède au plus n racines et donc $\boxed{(E_n) \text{ possède au plus } n \text{ solutions dans } [0, n\pi[.}$

On a bien prouvé que (E_n) possède exactement n solutions dans $[0, n\pi[$ que l'on numérote de manière croissante : $0 = y_0(n) < y_1(n) < \dots < y_{n-1}(n)$.

3) a) On a vu à la question précédente que les $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont des racines distinctes du polynôme R. Puisque ce dernier est de degré n, les $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont en fait toutes les racines de R et sont de multiplicité 1. En particulier, en posant $R = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)\binom{2n+1}{2n-1}}{(-1)^n n \binom{2n+1}{2n+1}} = \frac{(n-1)\binom{2n+1}{2}}{n} = (n-1)(2n+1).$$

b) Avec les notations précédentes :

$$X^n R(\tfrac{1}{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n} a_{n-k'} X^{k'}$$

en posant $k' = n - k$. Ainsi, $\boxed{\widetilde{R} \text{ est bien un polynôme,}}$ il s'agit en fait du polynôme obtenu en renversant l'ordre dans les coefficients de R (par exemple, $R = X^2 + 2X + 3$ donnerait $\widetilde{R} = 3X^2 + 2X + 1$). De plus, ici $a_{n-n} = a_0 = 0$ donc $\boxed{\deg \widetilde{R} = n - 1.}$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\widetilde{R}(\frac{1}{\alpha_k}) = \frac{1}{\alpha_k^n} R(\alpha_k) = 0$. Ainsi, les $(\frac{1}{\alpha_k})_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont exactement les racines de $\widetilde{R}$ (et toutes de multiplicité 1) et alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k} = -\frac{a_{n-(n-2)}}{a_{n-(n-1)}} = -\frac{a_2}{a_1} = -\frac{(-1)^2 2\binom{2n+1}{5}}{(-1)\binom{2n+1}{3}} = \frac{2\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}}{\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!}} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{10}.$$

c) Les $(y_k(n))_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ étant des solutions de (E_n), on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2n \tan(\frac{y_k(n)}{2n}))^2} = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}.$$

4) a) La fonction f est définie et dérivable sur I_k. Pour tout $x \in I_k$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin(2x)}{2x^2 \cos^2 x}.$$

Or, pour tout $y > 0$, $y > \sin y$ (inégalité classique vue plusieurs fois en cours et à savoir redémontrer rapidement à l'aide d'une étude de fonction) donc $f' > 0$.

Ainsi, f est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur I_k donc $\boxed{\text{elle réalise une bijection}}$ de I_k dans $J =]\lim\limits_{k\pi} f, \lim\limits_{k\pi + \frac{\pi}{2}} f[= \mathbb{R}_+^*$.

b) On a vu à la question 2 que pour tous $n > k > 0$, $y_k(n) \in I_k$. Aussi, $f(y_k(n)) = \dfrac{2n \tan(\frac{y_k(n)}{2n})}{y_k(n)}$.

Puisque la suite $(y_k(n))_{n>k}$ est bornée (quand n varie), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_k(n)}{2n} = 0$ donc en utilisant que $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on obtient

$$f(y_k(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n\frac{y_k(n)}{2n}}{y_k(n)} = 1.$$

D'où, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_k(n)) = 1}$ et ainsi, puisque f^{-1} est continue,

$$\boxed{y_k(n) = f^{-1}(f(y_k(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(1) = x_k}$$

car $f(x_k) = 1$ d'après (E).

c) D'après l'étude de fonction faite à la question 1, $\tan x > x$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$f(y_k(n)) = \frac{\tan(\frac{y_k(n)}{2n})}{\frac{y_k(n)}{2n}} > 1$$

et donc $\boxed{y_k(n) > f^{-1}(1) = x_k}$ par croissance stricte de f^{-1}.

5) a) On sait que $y_k(n) > x_k \geqslant k\pi$ d'après les questions 1 et 4c) donc, par croissance de $\tan^2$,

$$0 \leqslant \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(x_k)} = \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{(k\pi)^2}$$

b) $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{(k\pi)^2} \leqslant \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{N\pi^2}$,

la dernière somme étant télescopique. D'où le résultat.

6) On remarque que pour tout $n > N+1$, on a : $S_N(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))}$.

En utilisant les questions 3c) et 4b) ainsi que la continuité de tan, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} S_N(n) = \frac{1}{10} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tan^2(x_k)} = \frac{1}{10} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2}.$$

N étant toujours fixé, on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'encadrement de la question 5b), ce qui donne

$$0 \leqslant \frac{1}{10} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2} \leqslant \frac{1}{N\pi^2}.$$

Enfin, on fait tendre N vers $+\infty$ dans cette dernière relation. Le théorème des gendarmes assure alors

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{10}.}$$

Remarque : le membre de gauche de l'égalité précédente se note aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x_k^2}$.