Feuille d'exercices n^{o} 1 : nombres réels

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Écrire leurs négations.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant -5$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 = \sqrt{(x^2-4)^2}$
4. $\forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ \sqrt{x^2} = -x$
5. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
6. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} > x$
7. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x} = e^x$
8. $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \ln x - \ln(2x) = 3$
9. $\exists\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) = 3$
10. $\exists\,!\ x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$
11. $\exists\,!\ x \in \mathbb{R},\ \ln x = 2$

Exercice 2. Soient A, B, C et D des assertions logiques. On sait que les implications $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow D$ sont vraies. Que peut-on déduire dans les situations suivantes :

1. On sait que B est vraie.
2. On sait que D est fausse.
3. On sait que B est fausse.

Exercice 3.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 4 > 0$.
2. Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 4 > 10$.

Exercice 4. Soient x, y et z trois réels vérifiant : $x \in [1,4], \quad 2 \leqslant y \leqslant 5, \quad |z| < 3$.
Déterminer un encadrement le plus précis possible des expressions suivantes :

1. $a_1 = 2x - 3y + 1$
2. $a_2 = \dfrac{z}{2}$
3. $a_3 = \dfrac{x}{y-1}$
4. $a_4 = \dfrac{1}{z-2}$
5. $a_5 = x(z-4)$
6. $a_6 = x(y-3)$
7. $a_7 = x^2 - 4x + 3$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $(x^3 + x + 4)^2 = (x^3 - 3x - 4)^2$
2. $|x-2| = |2x|$.
3. $|x-1| + |x+2| \leqslant 5$
4. $\sqrt{x-2} \geqslant x - 4$
5. $x^3 + x^2 + x - 14 = 0$
6. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Exercice 6. Soient x et y des réels strictement positifs.

1. Montrer que : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.
2. Montrer que : $\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y}$.
3. Montrer que : $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 7. On considère : $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. Est-ce que x existe ? Calculer x^2 et en déduire x.

Exercice 8. Montrer que pour tout x, y, z, on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 9.

1. Factorisez $x^3 - y^3$ par $x - y$.
2. Soit x et y dans $[-1, 1]$. Montrer que : $|x^3 - y^3| \leqslant 3|x - y|$.

Exercice 10.

1. Résoudre : $(E_1)\colon\ \lfloor 2x \rfloor = 7$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, résoudre : $(E_2)\colon\ \lfloor kx \rfloor = n$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et tout réel x, on a : $n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Pour s'entrainer

Exercice 11. Développez les expressions suivantes :

$$A = (2x-1)^3 \qquad B = (3x+2)(x+1) - (2x-1)(x+4) + 2x(-x+1)$$

Factorisez les expressions suivantes :

$$C = 3x^2 + 12x + 12 \qquad D = 4x^2 - 16$$

Exercice 12. Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = \frac{\frac{10}{4}}{5} \qquad B = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{2}{9} \qquad C = \frac{7\sqrt{150}}{10\sqrt{189}} \qquad D = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 10\sqrt{3})$$

Exercice 13. Soit $a > 0$. Résoudre le système d'inconnues $x \leqslant y$ ci-dessous.

$$\begin{cases} e^x e^y = a \\ xy = 1 \end{cases}$$

Exercice 14. Démontrer les inégalités :

1. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, avec $a, b, c > 0$;
2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;
3. $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$, si $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ et $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$;

   Indication : on pourra commencer par prouver que pour tout $a > 0$, $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
4. $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Exercice 15. Soient a, b, c et d des réels vérifiant : $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.

1. Montrer que si $a + c = b + d$, alors on a $a = b$ et $c = d$.
2. Montrer que si $c < d$, alors on a $a + c < b + d$.

Exercice 16. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$. Montrer que

$$| ac + bd | \leq 1.$$

Exercice 17. Soient $x, y > 0$ des réels. Démontrer que :

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \geq x^2 + y^2.$$

Indication : on pourra commencer par écrire tous les termes d'un même coté de l'inégalité, puis réduire au même dénominateur et essayer de factoriser en 2 facteurs de même signe.

Exercice 18. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \geq b$ et $c \geq d$. Démontrer que :

$$ac + bd \geq ad + bc.$$

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$
2. $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} - 3 = 0$
3. $\ln\left(\frac{1}{2}x^2 - ex + e^2\right) = 3$
4. $2x - 3 = \sqrt{x}$
5. $\sqrt{2x+4} = x + 1$
6. $e^x + \frac{m}{e^x} = 1$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre réel m.)

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2\,e^{2x} + 2\,e^x - 4 \leqslant 0$
2. $(\ln x)^2 - 5\ln x + 4 \geqslant 0$
3. $\ln(3x^2 + 5x - 2) < 0$
4. $\ln(1 - 3x) < \ln(x^2 + 1)$
5. $\ln(2x) \leqslant \ln(3 - x) - \ln(x + 1)$
6. $2x - 1 \leqslant \sqrt{x}$

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes :

1. $|x + 4| = 6$
2. $|x - 5| = |x + 2|$
3. $|x^2 - 10| = |3x|$

4. $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

5. $|2x - |x-1|| = 4$

Exercice 22. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x-3| > 4$

2. $|3x-4| \leqslant 7$

3. $|x^2-1| \leqslant 3$

4. $|x+5| < |2x|$

5. $|x-3+|x|| \geqslant |2x+1|$

Exercice 23. Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-x-8} = x-4$

2. $\sqrt{4+\sqrt{x^4+x^2}} = x-2$

3. $\sqrt{4+\sqrt{x^4+x^2}} = 2-x$

Exercice 24. En supposant que le nombre :

$$\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}$$

ait un sens, combien vaut-il ?

Exercice 25. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue x réelle : $\sqrt{5x+6} < 2+\sqrt{x+1}$.

Exercice 26. Soit x, y et z des réels positifs.

1. Montrer que : $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Pour quelles valeurs de x et y a-t-on égalité ?

2. Montrer que : $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$