Semaine du 4 mars

Programme de colle n°19

Analyse asymptotique

1) Définition de $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$.
2) Règles de calcul avec les $o()$, les équivalents et les $O()$. Application au calcul de limites.
3) Développements limités : définition et unicité. Cas des fonctions paires et impaires.
4) Intégration d'un DL.
5) Formule de Taylor-Young pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.
6) DL des fonctions usuelles en 0 :
   exp, ch, sh, $x \mapsto (1+x)^a$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, cos, sin, $x \mapsto \ln(1-x)$, arctan et tan (à l'ordre 3 pour tan).
7) Addition, produit, quotient de développements limités.
8) Applications : calcul de limite, détermination d'une tangente ou d'une asymptote avec position relative de la courbe.

Dénombrement

1) Cardinal d'un ensemble fini E. Notations : $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.
2) Formules usuelles : $\text{Card}(A \cup B)$, $\text{Card}(\overline{A})$, $\text{Card}(A \setminus B)$, $\text{Card}(E \times F)$, $\text{Card}(F^E)$ et $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.
3) p-listes de E : $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
4) p-arrangements de E : $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$. Permutations de E.
5) p-combinaisons de E : $\{x_1, \dots, x_p\} \subset E$ tel que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$.

Questions de cours

1) Énoncer la formule de Taylor-Young. En déduire le $\text{DL}_n(0)$ de $\exp(x)$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2) Déterminer un équivalent en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + e^x - \ln x}{x^3 + \sqrt{x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

4) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
5) Déterminer l'équation de la tangente ainsi que la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de 0 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + 2\sin x$.
6) Nombre d'applications injectives de E dans F (avec E et F des ensembles finis).
7) Nombre d'anagrammes du mot : ANAGRAMME.