Semaine du 26 février

Programme de colle n°18

Espaces vectoriels

1) Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^\Omega$, $\mathbb{C}^n$, etc.
2) Sous-espace vectoriel, intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
3) Somme directe, sous-espaces vectoriels supplémentaires.
4) Famille génératrice. Famille libre.
5) Base, base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Coordonnées dans une base.

Analyse asymptotique

1) Définition de $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$.
2) Règles de calcul avec les $o()$, les équivalents et les $O()$. Application au calcul de limites.

Questions de cours

1) Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ est un espace vectoriel.
2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que l'intersection et la somme de deux sous-espaces vectoriels de E sont encore des sous-espaces vectoriels.
3) Montrer que $G = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 0\}$ est un espace vectoriel et déterminer une famille génératrice de G.
4) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
5) On considère $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 2x - y + z = 0\right\}$. Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
6) Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (3, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les coordonnées de $u = (1, 1, 1)$ dans cette base.