[redacted]

EXERCICES DE RÉVISION

Calculs de dérivées

1. Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes :
a) $f(x) = \sin(\sin x)$ **b)** $f(x) = \ln|\sin x|$ **c)** $f(x) = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$
d) $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ **e)** $f(x) = e^{\cos x}$ **f)** $f(x) = e^{(e^x)}$
g) $f(x) = 2^{x^2}$ **h)** $f(x) = x^x$ **i)** $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$
j) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **k)** $f(x) = \cos\sqrt{1+x^2}$ **l)** $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

2. Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Indication : on pourra calculer les premières dérivées pour deviner la formule générale et la démontrer par récurrence.

Limites

3. Déterminer les limites suivantes :
a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{-x+x^2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{x}$

Intégration

4. Calculer les primitives suivantes (au besoin, préciser l'**intervalle** sur lequel on travaille) :
a) $\int \frac{1}{2}x^2+3x-4\,dx$ **b)** $\int 1-t^2\,dt$ **c)** $\int \frac{3u-1}{2u}\,du$ **d)** $\int x\sqrt{x}\,dx$ **e)** $\int \sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$
f) $\int \sin^2 u\,du$ **g)** $\int \cos^2 u\,du$ **h)** $\int \frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}}\,dx$ **i)** $\int \frac{y^2}{y^3+2}\,dy$ **j)** $\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$
k) $\int xe^{-x}\,dx$ **l)** $\int x^2e^{2x}\,dx$ **m)** $\int u\sin u\,du$

5. Calculer les intégrales suivantes :
a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3-4x^2+x}{x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-3}^0 |z^2-z-2|\,dz$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 3\theta)\,d\theta$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$
e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t)\,dt$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(4t)\cos(2t)\,dt$ **g)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\sin(5x)\,dx$
h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$ **i)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg} t}\,dt$ **j)** $\displaystyle\int_0^2 ue^{u^2}\,du$ **k)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+2}\,dx$

6. a) Démontrer que, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin t + \cos t > 0$. On note $f : \begin{array}{|lcl} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin t}{\sin t + \cos t} \end{array}$.
b) Démontrer qu'il existe deux réels a, b tels que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on ait $f(t) = a + b\dfrac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$.
c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt$.

7. a) Déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel $x \neq \pm 1$, on ait $\dfrac{4x-5}{x^2-1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.
b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1}\,dx$.

8. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\sin x \leqslant x$, puis $1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$. Et pour $x \leqslant 0$?

9. En encadrant e^t pour $t \in [0, 1]$, démontrer que l'on a $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + ex$ pour tout $x \in [0, 1]$.

10. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on a $e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Études de fonctions

11. Soit $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 4x^2 + 1 \end{array}$.
a) Étudier les variations de f et représenter son graphe.
b) Écrire l'équation de la tangente à f aux points d'abscisse 0, 1, aux points où la tangente est horizontale et aux points où elle est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
c) Discuter, en fonction du paramètre $b \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = b$.

12. Étudier les fonctions définies par les formules suivantes et les représenter

a) $f(x) = |x^3 - x^2|$ b) $f(x) = |x^4 - 1|$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

Logarithmes, exponentielles

13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$ b) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(x+7)$ c) $\ln\big((x-3)(x+1)\big) = \ln(x+7)$
d) $\ln x + \ln(2x-1) = \ln(14 - x^2)$ e) $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ f) $\ln(2x^2 - 3x - 5) \leqslant 2\ln 2$
g) $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leqslant 2\ln 2$

14. Évaluer les nombres suivants :

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 \frac{1}{2}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ d) $\log_8 4$ e) $\log_{\sqrt{2}} 4$ f) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$

15. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$. Montrer que, pour tout réel x, on a $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$; en déduire la résolution de l'équation $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$

Suites

16. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, 1[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$.
b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln(n+k) - \ln(n+k-1).$$

c) En déduire l'encadrement $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln \frac{2n}{n}$, valable pour tout entier $n \geqslant 1$.
d) Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite.

17. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

18. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1}.$$

Démontrer que les deux suites convergent vers une même limite.

Calculs algébriques

19. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^n$. On simplifiera le résultat en utilisant la forme exponentielle $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et en factorisant par « l'arc moitié ».

20. On note $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la forme exponentielle $re^{\mathrm{i}\theta}$ de j puis calculer

a) j^2 b) j^3 c) $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$ d) j^{3n} e) j^{3n+1}

Coefficients binomiaux

21. Démontrer les relations

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n-3}{p} + 3\binom{n-3}{p-1} + 3\binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3}.$$

22. Calculer de deux façons $(1+\mathrm{i})^8$: en utilisant la formule du binôme et en utilisant la forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$. En déduire une expression simple de $S_1 = \binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8}$ et de $S_2 = \binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7}$.

23. Utiliser l'identité $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ (p, q entiers) pour démontrer l'égalité

$$\binom{p+q}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{q}{p-i} = \binom{p}{0}\binom{q}{p} + \binom{p}{1}\binom{q}{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}\binom{q}{1} + \binom{p}{p}\binom{q}{0}.$$

Équations

24. Résoudre les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z - 4 = 0$ b) $z^2 - 7z + 1 = 0$ c) $2z^2 + 3z + 4 = 0$ d) $z^2 + z + 1 = 0$

25. Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ -6x + 5y = -19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\log_{10} x - 3\log_{10} y = 9 \\ -6\log_{10} x + 5\log_{10} y = -19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 9 \\ -6e^x + 5e^y = -19 \end{cases}$

26. Résoudre les équations

a) $(1+i)z - i\bar{z} = 1$ b) $z + \bar{z} = 1 + i$

27. Résoudre les systèmes d'équations

a) $\begin{cases} z_1 + 4z_2 = 1 + i\sqrt{2} \\ iz_1 + \sqrt{2}z_2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+i)z_1 + z_2 = i\sqrt{3} \\ 2z_1 + (1-i)z_2 = 1 + i \end{cases}$ c) $\begin{cases} i\sqrt{2}a - b = i \\ -2a + 4b = 1 - i \end{cases}$

28. Même exercice pour les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 5x - 4y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - y - z = 6 \\ x + 6y + 3z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

29. Résoudre les systèmes d'équations $\begin{cases} \ln(xy) = 5 \\ (\ln x \cdot \ln y)^2 = 36 \end{cases}$ et $\begin{cases} xy = 14 \\ e^x e^y = e^{-9} \end{cases}$.

30. Discuter et résoudre l'équation $e^{2x} + (m-3)e^x + 2 - 2m = 0$ en fonction du paramètre m.

31. a) Factoriser le polynôme $2x^3 - 13x^2 - 10x + 21$ en en trouvant une racine évidente.

b) Résoudre les équations $2(\ln x)^3 - 13(\ln x)^2 - 10\ln x + 21 = 0$ et $10 + 13e^x - 2e^{2x} = 21e^{-x}$.

32. Résoudre les équations

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ b) $4(\ln x)^4 - 37(\ln x)^2 + 9 = 0$ c) $4e^{4x} - 37e^{2x} + 9 = 0$.

Nombres complexes et trigonométrie

33. Écrire sous forme algébrique les complexes suivantes. Lorsqu'elles sont simples à déterminer, on pourra s'aider de la forme exponentielle des nombres complexes.

a) $(1-i)^4$ b) $(1+2i)^2$ c) $i(i+2)(2i+1)^2$ d) $\frac{1+2i}{3+i}$ e) $\frac{1+i}{11+2i}$

f) $\frac{1}{1+i}$ g) $\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4}$ h) $\frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$

34. Calculer le module des nombres complexes

a) $4+i$ b) $4-i$ c) $1+4i$ d) $1-4i$.

Que dire des images de ces nombres les unes par rapport aux autres ?

Calculer aussi le module de

e) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ f) $1 - i\sqrt{2}$ g) $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{2})$

35. Calculer le module et un argument des nombres complexes

a) $3+3i$ b) $\sqrt{3}+i$ c) $1+i\sqrt{3}$ d) $i-1$ e) -4 f) $\sqrt{3}-i$

g) $\sqrt{2}(i-1)$ h) $i\sqrt{3}-1$

36. Exprimer $\cos 3\theta$ et $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$. Même question pour $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ et $\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.

37. Linéariser les expressions suivantes :

a) $\sin^3\theta$ b) $\cos^3\theta$ c) $\cos^2\theta\sin\theta$ d) $\cos\theta\sin^2\theta$

38. Résoudre l'équation $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$ à l'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ en appliquant la méthode exposée dans le polycopié.

CORRIGÉ DES EXERCICES DE RÉVISION

Calculs de dérivées

1. a) L'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. L'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = \sin\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = \sin x$, donc on a
$$f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = \cos x \cdot \cos(\sin x).$$

b) La fonction n'est pas définie en les points en lesquels la fonction sinus s'annule, donc elle est définie en tous les points x vérifiant $x \not\equiv 0\ [\pi]$. Pour $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(x) = \ln|u(x)|$, avec $u(x) = \sin x$, donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

c) La fonction n'est pas définie en les points x en lesquels
– $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ n'est pas défini, *i.e.* $\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, soit $x \equiv \pi\ [2\pi]$
– $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$, *i.e.* $\frac{x}{2} \equiv 0\ [\pi]$, soit $x \equiv 0\ [2\pi]$
Finalement, la fonction est définie en tous les points x vérifiant $x \not\equiv 0\ [\pi]$. Pour $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(x) = \ln|u(x)|$, où $u(x) = \operatorname{tg} v(x)$, où $v(x) = \frac{x}{2}$, donc on a $u'(x) = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, puis

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

(qui est bien définie en les points x vérifiant $x \not\equiv 0\ [\pi]$).

d) La fonction est définie en tout point x vérifiant $1 + x + x^2 > 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1 - 4 < 0$, donc il est de signe constant, positif. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. On a $f(x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = 1 + x + x^2$, d'où
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1+2x}{1+x+x^2}.$$

e) On a ici $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = \cos x$, donc

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -\sin x \cdot \mathrm{e}^{\cos x}.$$

f) On a encore $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = \mathrm{e}^x$, donc

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}.$$

g) On a par définition $f(x) = \mathrm{e}^{x^2\ln 2} = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = \ln 2 \cdot x^2$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a
$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (2\ln 2)x \cdot 2^{x^2}.$$

h) Par définition toujours, on a $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = x\ln x$: la fonction est définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $x > 0$, on a $u'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \ln x$, d'où

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (1+\ln x)x^x.$$

i) L'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. L'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$, donc on a

$$f'(x) = 2u(x)u'(x) = 2\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{4(1+x)}{(1-x)^3}.$$

j) On veut maintenant que l'expression sous le radical soit définie (*i.e.* que $x \neq 1$) et positive, *i.e.* que $1 - x$ et $1 + x$ soient de même signe, ou encore que le produit $(1-x)(1+x)$ soit positif. Ceci arrive si, et seulement si, x appartient à l'intervalle $[-1,1]$. Donc $\mathscr{D}_f = [-1,1[$. L'expression de $f(x)$ est cette fois de la forme $f(x) = \sqrt{u(x)}$ (avec la même fonction u que précédemment), donc on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}.$$

Remarquons que $f'(-1)$ n'est pas défini, ce qui n'est pas surprenant : on a $u(-1) = 0$, et la fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0.

k) On a ici $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos(u(x))$, où $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, d'où

$$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) = -\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}.$$

l) Pour tout réel x, on a $x^2 < x^2+1$, donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$ et, par suite, $x + \sqrt{x^2+1} > |x| + x \geqslant 0$, donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$, d'où $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. On a alors $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$, où $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, donc

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}},$$

puis

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. Pour tout réel $x \neq 1$, on a $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, d'où

$$f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3}, \quad f'''(x) = 6(1-x)^{-4}\ldots$$

Il semble que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$ (qui est aussi égal à $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$). Démontrons-le par récurrence.

– Pour $n = 1$, la propriété est vraie.

– Soit $n \geqslant 1$. Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons qu'elle l'est au rang $n+1$. On a, par hypothèse de récurrence, $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$, donc

$$f^{(n+1)}(x) = \big(f^{(n)}\big)'(x) = n!(-1)(-n-1)(1-x)^{-n-2} = (n+1)!(1-x)^{(-n-2)},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier n.

Limites

3. a) On écrit

$$\frac{\sin 2x}{-x+x^2} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{-x+x^2} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{-1+x}.$$

On en déduit que $\dfrac{\sin 2x}{-x+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$.

b) On écrit maintenant

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x}.$$

Les deux facteurs tendent vers 1 lorsque x tend vers 0, donc $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

c) Écrivons enfin

$$\frac{\sin(\sin 2x)}{x} = \frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times 2.$$

Comme $\sin 2x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, la première expression est du type $\frac{\sin u}{u}$, avec u qui tend vers 0, donc cette quantité tend vers 1. On a donc $\dfrac{\sin(\sin 2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$.

Intégration

4. a) La primitive cherchée est définie sur $\mathbb{R}$; on a

$$\int \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$$

(rappelons que l'on a ainsi trouvé *une* primitive ; les autres s'obtiennent en ajoutant une constante).

b) La primitive est encore définie sur $\mathbb{R}$; on a

$$\int 1 - t^2\,\mathrm{d}t = t - \frac{1}{3}t^3.$$

c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle. On cherche une primitive sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Sur un tel intervalle, on a

$$\int \frac{3u-1}{2u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{3}{2} - \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\ln|u|$$

(formule valable sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ grâce à la valeur absolue).

d) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, donc (sur $\mathbb{R}_+$), on a

$$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}.$$

e) Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + 2\sqrt{t}.$$

f) On commence par linéariser $\sin^2 u$, ce qui peut se faire soit en utilisant la formule $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$ (avec $a = b = u$), soit la formule $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$, soit la relation $\sin u = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2\mathrm{i}}$ (que l'on élève au carré). Cette dernière méthode est la plus efficace en géneral, mais ici, la seconde donne directement le résultat : $\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, d'où

$$\int \sin^2 u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1-\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}.$$

g) En écrivant $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$, on obtient

$$\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}.$$

h) La fonction à intégrer n'est définie qu'en les réels x vérifiant $x^5 + 3 > 0$, *i.e.* $|x| > \sqrt[5]{3}$. Posons $u(x) = x^5 + 3$: on a, sur chacun des intervalles $]-\infty, -\sqrt[5]{3}[$ et $]\sqrt[5]{3}, +\infty[$:

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int \frac{5x^4}{2\sqrt{3+x^5}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{u(x)} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5+3}.$$

i) La fonction est définie en chaque réel y vérifiant $y^3 \neq -2$, *i.e.* sur chacun des intervalles $]-\infty, -\sqrt[3]{2}[$, $]-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}[$ et $]\sqrt[3]{2}, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, on reconnaît la forme $\frac{u'(y)}{u(y)}$:

$$\int \frac{y^2}{y^3+2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int \frac{3y^2}{y^3+2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\ln|y^3+2|.$$

j) Ici encore, on reconnaît la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$: sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$$

(la valeur absolue est ici inutile car on a $e^x + 2 > 0$ pour tout réel x).

k) Intégrons par parties $\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$: on a

$$\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -(1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

l) Intégrons encore par parties $\int x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$: on trouve

$$\int x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x} - \int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Une nouvelle intégration par parties (on dérive x et on intègre e^{2x}) donne alors

$$\int x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2 - 2x + 1}{4}\mathrm{e}^{2x}.$$

m) Intégrons par parties $\int u \sin u \, du = \int f(u)g'(u)\, du$, avec $f(u) = u$ et $g(u) = -\cos u$: on obtient

$$\int u \sin u \,\mathrm{d}u = -u\cos u + \int \cos u \,\mathrm{d}u = -u\cos u + \sin u.$$

5. a) On a

$$\int_2^4 \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 x - 4 + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 4x + \ln x\right]_2^4 = -2 + \ln 2.$$

b) Les racines du trinôme $z^2 - z - 2$ sont $a = -2$ et $b = 1$, entre lesquelles le signe du trinôme est négatif. On a donc

$$\int_{-3}^{0} |z^2 - z - 2|\,\mathrm{d}z = \int_{-3}^{-2} (z^2 - z - 2)\,\mathrm{d}z + \int_{-2}^{0} (-z^2 + z + 2)\,\mathrm{d}z = \frac{59}{6}.$$

c) On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 3\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\theta - \frac{\sin 3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

d) On linéarise :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

e) Facile :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t)\,\mathrm{d}t = \big[-\cos t + \sin t\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

f) On linéarise en utilisant la formule $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(4t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(6t) + \sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 6t}{6} - \frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{7}{24}.$$

g) Même principe : on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

h) Commençons par linéariser en écrivant

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta\cos^2\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^4 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}}{16} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\theta} - 2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 4 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} - 2\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\theta}}{64} \\
&= \frac{\cos 6\theta}{32} - \frac{\cos 4\theta}{16} - \frac{\cos 2\theta}{32} + \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{64} - \frac{1}{48}.$$

i) On a

$$\frac{1 + \mathrm{tg}^2\, t}{\mathrm{tg}\, t} = \frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin' t}{\sin t} - \frac{\cos' t}{\cos t},$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \mathrm{tg}^2\, t}{\mathrm{tg}\, t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(\sin t) - \ln(\cos t)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

j) Ici, c'est la forme $f'(u)\mathrm{e}^{f(u)}$:

$$\int_0^2 u\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^2 2u\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u = \big[\mathrm{e}^{u^2}\big]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^4 - 1}{2}.$$

k)

$$\int_0^1 \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

6. a) Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin t + \cos t \geqslant 0$ (somme de deux termes positifs). Pour avoir l'égalité à 0, il faudrait que les deux termes soient simultanément nuls, ce qui est impossible.
b) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$a + b\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} = \frac{(a+b)\cos t + (a-b)\sin t}{\sin t + \cos t}.$$

On cherche donc deux nombres a et b tels que $a + b = 0$ et $a - b = 1$: le couple $(a, b) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ convient.
c) En posant $u(t) = \sin t + \cos t$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln(\cos t + \sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

7. a) Pour tout réel $x \neq \pm 1$, on a

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{(a+b)x + (b-a)}{x^2-1}.$$

On cherche donc deux réels a, b tels que $a + b = 4$ et $a - b = 5$: le couple $(a, b) = (\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ convient.
b) On a donc

$$\int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^5 \left(\frac{9}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[9\ln(x+1) - \ln(x-1)\Big]_3^5 = \frac{9}{2}\ln 3 - 5\ln 2.$$

8. La méthode la plus naturelle, le résultat à démontrer étant donné, consiste à introduire la fonction $f : t \mapsto \sin t - t$ et à étudier ses variations pour démontrer qu'elle ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$. Mais il est préférable d'intégrer une inégalité connue pour en déduire une nouvelle.
Pour tout réel t (positif si l'on veut), on a $\cos t \leqslant 1$. Par suite, pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout réel $t \in [0, x]$, on a aussi $\cos t \leqslant 1$. Intégrons cette inégalité entre 0 et x (on peut car les bornes sont rangées dans l'ordre : $0 \leqslant x$) : on obtient

$$\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t,$$

soit $\sin x - 0 \leqslant x - 0$, qui est l'inégalité cherchée (valable pour tout réel $x \geqslant 0$ donc). Attention ! Notre démonstration n'est pas valable dans le cas où $x \leqslant 0$ (les bornes d'intégration seraient alors rangées à l'envers). D'ailleurs, pour $x \leqslant 0$, on a $-x \geqslant 0$, donc $\sin(-x) \leqslant (-x)$, soit $-\sin x \leqslant -x$, *i.e.* $\sin x \geqslant x$: c'est l'autre inégalité qui est vérifiée (à cause de l'imparité des deux fonctions).
Continuons. Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout réel $t \in [0, x]$, on a $\sin t \leqslant t$, d'où

$$\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t,$$

i.e. $1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$. Même si notre démonstration est encore en défaut pour $x \leqslant 0$, le résultat est cette fois-ci encore vrai pour $x \leqslant 0$ (grâce à la *parité* des deux fonctions cette fois-ci).

9. Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$ (par croissance de la fonction exponentielle). Pour tout réel $x \in [0, 1]$, cette inégalité est vérifiée pour tout $t \in [0, x]$, ce qui permet d'intégrer :

$$\int_0^x 1\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant \mathrm{e}x, \qquad \textit{i.e.} \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + \mathrm{e}x.$$

10. – Pour $n = 1$, l'inégalité s'écrit $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel $x \geqslant 0$; inégalité qui a déjà été démontrée.
– Soit $n \geqslant 1$. Supposons la propriété vérifiée au rang n et démontrons-la au rang $n+1$, *i.e.* démontrons que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Pour cela, considérons un réel $x \geqslant 0$. On sait que, pour tout réel $t \in [0, x]$, on a $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}$. Intégrons (on a bien $0 \leqslant x$) : on obtient

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \left(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t,$$

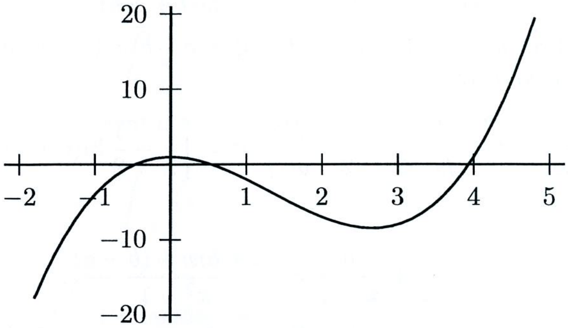
soit

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

qui est l'inégalité à démontrer. Par récurrence, celle-ci est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

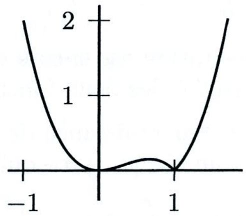
Études de fonctions

11. a) Pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x-8)$, qui est positif pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant \frac{8}{3}$ (donc f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[\frac{8}{3}, +\infty[$) et négatif pour $x \in [0, \frac{8}{3}]$ (donc f est décroissante sur cet intervalle). Son graphe est le suivant :

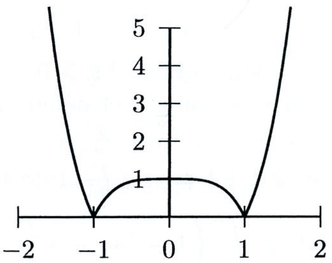


b) L'équation générale de la tangente au point d'abscisse a est $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.
– Aux points d'abscisse 0 et 1, les équations sont respectivement $y = 1$ et $y = -5x + 3$.
– La tangente est horizontale aux points d'abscisse a vérifiant $f'(a) = 0$, *i.e.* $a = 0$ et $a = \frac{8}{3}$; les équations des tangentes sont respectivement $y = 1$ et $y = -\frac{229}{27}$.
– La tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ aux points a vérifiant $f'(a) = 1$; le calcul donne $a = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$, d'où les équations $y = x - \frac{137+38\sqrt{19}}{27}$ et $y = x - \frac{137-38\sqrt{19}}{27}$.
c) Les variations de la fonctions montrent que
– pour $b < f(\frac{8}{3}) = -\frac{229}{27}$, l'équation a une unique solution
– pour $b = -\frac{229}{27}$, l'équation a deux solutions
– pour $b \in]f(\frac{8}{3}), f(0)[=]-\frac{229}{27}, 1[$, l'équation a trois solutions
– pour $b = 1$, l'équation a deux solutions
– pour $b > 1$, l'équation a une unique solution.

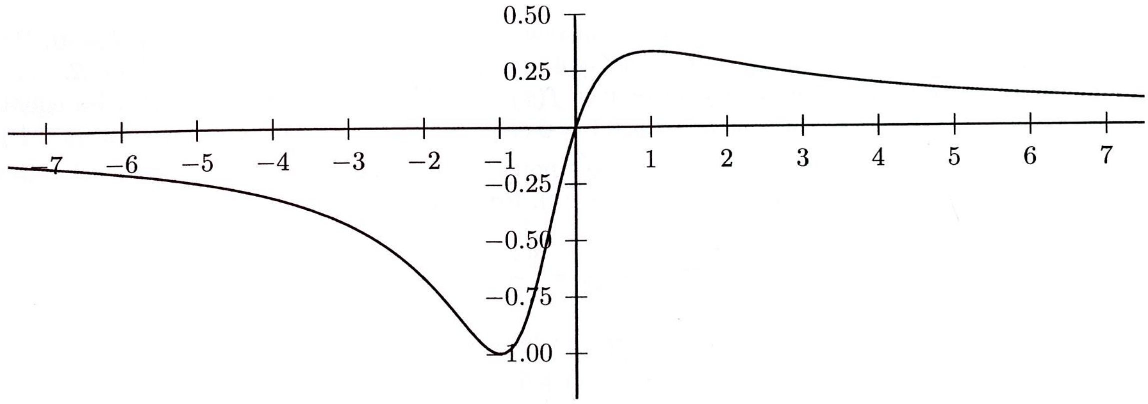
12. a) La quantité $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ est du signe de $x - 1$, donc on a $f(x) = x^3 - x^2$ pour $x \geqslant 1$ et $f(x) = x^2 - x^3$ pour $x \leqslant 1$.
– Pour $x < 1$, on a $f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$, donc f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, croissante sur l'intervalle $[0, \frac{2}{3}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{2}{3}, 1]$.
– Pour $x > 1$, on a $f'(x) = x(3x-2) > 0$, donc f est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Le graphe est le suivant :



b) La quantité $x^4 - 1$ est négative (ou nulle) lorsque $x^4 \leqslant 1$, *i.e.* pour $x \in [-1, 1]$; on a alors $f(x) = 1 - x^4$. Pour $x \notin [-1, 1]$, on a $f(x) = x^4 - 1$.



c) Pour tout réel x, on a $x^2 + x + 1 > 0$ (discriminant négatif par exemple), donc la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$, du signe de $1 - x^2$. Le graphe est



Logarithmes, exponentielles

13. a) L'équation n' a de sens que pour $x > 0$ et $x > 1$. Elle est alors équivalente à $\ln\big(x(x-1)\big) = \ln 6$, soit $x(x-1) = 6$, qui admet pour solutions $x = 3$ et $x = -2$. Seule la première solution est acceptable, donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{3\}$.

b) L'équation n'a de sens que pour $x > 3$; elle est alors équivalente à $\ln\big((x-3)(x+1)\big) = \ln(x+7)$, soit à $(x-3)(x+1) = x+7$, *i.e.* $x^2 - 3x - 10 = 0$, qui admet -2 et 5 pour solutions, dont seule la première est acceptable, donc $\mathscr{S} = \{5\}$.

c) L'équation n'a de sens que pour $x > -7$ et $(x-3)(x+1) > 0$. La deuxième inégalité équivalent au fait que x soit strictement inférieur à -1 ou strictement supérieur à 3, l'équation n'a finalement de sens que pour $x \in]-7,-1[\cup]3,+\infty[$. Elle est alors équivalente à $(x-3)(x+1) = x+7$, qui admet toujours pour solutions -2 et 5, toutes deux acceptables maintenant. Donc $\mathscr{S} = \{-25\}$.

d) L'équation n'a de sens que pour $x \in]\frac{1}{2}, \sqrt{14}[$. On trouve $\mathscr{S} = \{\frac{7}{3}\}$.

e) L'équation n'a de sens que pour $x > 0$. Posons alors $X = \ln x$: il s'agit de résoudre $2X^2 + X - 6 = 0$, qui admet pour solutions $\frac{3}{2}$ et -2. Il faut ensuite résoudre les équations $\ln x = \frac{3}{2}$ et $\ln x = -2$ on trouve finalement $\mathscr{S} = \{e^{\frac{3}{2}}, e^{-2}\}$.

f) L'inéquation n'a de sens que pour x vérifiant $2x^2 - 3x - 5 > 0$. Les deux racines de ce trinôme sont -1 et $\frac{5}{2}$, donc l'inéquation n'a de sens que pour $x \in]-\infty,-1[\cup]\frac{5}{2},+\infty[$. Elle est alors équivalente à $2x^2 - 3x - 5 \leqslant 4$, soit $2x^2 - 3x - 9 \leqslant 0$. Les deux racines de ce trinôme sont $-\frac{3}{2}$ et 3, donc l'inéquation $2x^2 - 3x - 9 \leqslant 0$ est équivalente à $x \in [-\frac{3}{2}, 3]$. Finalement, on a $\mathscr{S} = [-\frac{3}{2}, -1[\cup]\frac{5}{2}, 3]$.

g) On trouve cette fois-ci $\mathscr{S} =]\frac{5}{2}, 3]$.

14. a) On a

$$\log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$$

(ou, plus simplement, $\log_2 4$ est le nombre a vérifiant $2^a = 4$: c'est bien sûr $a = 2$).

b)

$$\log_2 \tfrac{1}{2} = -\log_2 2 = -1$$

(c'est le nombre a vérifiant $2^a = \frac{1}{2}$).

c)

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -\log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2} = -1.$$

d)

$$\log_8 4 = \frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2^3} = \frac{2\ln 2}{3\ln 2} = \frac{2}{3}.$$

e)

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = \frac{\ln 4}{\ln\sqrt{2}} = \frac{2\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} = 4.$$

f)

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = \frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln\sqrt{3}} = \frac{-\ln 3}{\frac{1}{2}\ln 3} = -2.$$

15. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$2f(x)^2 - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = f(2x).$$

L'équation $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$ est donc équivalente à l'équation $2f(x)^2 - 6f(x) + 4 = 0$. Posons $X = f(x)$: il faut résoudre l'équation $2X^2 - 6X + 4 = 0$. Ses solutions sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.
Il faut ensuite résoudre les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 2$. Pour cela, posons $y = e^x$: les équations s'écrivent $y + \frac{1}{y} = 2$ et $y + \frac{1}{y} = 4$, soit $y^2 - 2y + 1 = 0$ et $y^2 - 4y + 1 = 0$. Les solutions sont $y_1 = 1$ pour la première équation, $y_2 = 2 + \sqrt{3}$ et $y_3 = 2 - \sqrt{3}$ pour la seconde. Les solutions de l'équation initiale sont donc $x_1 = 0$, $x_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x_3 = \ln(2 - \sqrt{3})$. Remarquons que $x_3 = -x_2$: en effet,

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = y_3.$$

Ce résultat était prévisible : la fonction $x \mapsto f(2x) - 6f(x) + 5$ est paire. Par suite, si un réel x vérifie $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$, on a aussi $f(-2x) - 6f(-x) + 5 = 0$.

Suites

16. a) Définissons les fonctions f et g sur l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$f(x) = \ln(1 + x) - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = -\ln(1 - x) - x.$$

Elles sont dérivables, de dérivées données, pour $x \in [0, 1[$, par

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante et g décroissante. Comme elles vérifient $f(0) = g(0) = 0$, on a $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, ce qui est l'encadrement à démontrer.
b) Appliquons l'encadrement à $x = \frac{1}{n+k}$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$), qui est bien dans l'intervalle $[0, 1[$: on obtient

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{n+k}\right),$$

soit, après réduction au même dénominateur (et en utilisant que $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$) :

$$\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)$$

qui s'écrit encore

$$\ln(n + k + 1) - \ln(n + k) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln(n + k) - \ln(n + k - 1).$$

c) En ajoutant les encadrements pour k variant de 1 à n, les termes se simplifient deux à deux. Il reste l'encadrement

$$\ln(2n + 1) - \ln(n + 1) \leqslant S_n \leqslant \ln(2n) - \ln(n),$$

soit

$$\ln \frac{2n+1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln \frac{2n}{n}.$$

d) Comme $\ln \frac{2n+1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$ et $\ln \frac{2n}{n} = \ln 2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$, le théorème des gendarmes permet de conclure : la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et sa limite est égale à $\ln 2$.

17. Démontrons la propriété par récurrence.
– Pour $n = 1$, elle s'écrit $S_1 \leqslant 1$, ce qui est vrai (car $S_1 = 1$).
– Soit $n \geqslant 1$ un entier. Supposons la propriété vraie au rang n. Alors

$$S_{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 + \frac{1}{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 + \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0,$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
La suite est d'autre part croissante (pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$). Mais la majoration précédente ne suffit pas à conclure à la convergence de la suite, car $2 - \frac{1}{n}$ n'est pas une constante. Il faut continuer à majorer : pour tout entier $n \geqslant 1$, on a aussi $S_n \leqslant 2$ (qui est une constante), donc la suite converge (et sa limite est inférieure ou égale à 2 ; ce n'est pas 2).

18. Démontrons que les deux suites sont adjacentes.
– Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+k-1}$. Par somme (pour k variant de 1 à n), on en déduit que $u_n \leqslant v_n$.
– Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,
\end{aligned}$$

donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. De même, on calcule $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$, donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Enfin, on a $v_n - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Les deux suites sont adjacentes ; elles convergent donc toutes les deux, et ont la même limite.

Calculs algébriques

19. On reconnaît une somme géométrique de raison i, différente de 1, donc

$$\begin{aligned}
1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^n &= \frac{1 - \mathrm{i}^{n+1}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)\mathrm{i}\pi}{2}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)\mathrm{i}\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)\mathrm{i}\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\frac{-(n+1)\mathrm{i}\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{4}}}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{n\mathrm{i}\pi}{4}} \cdot \frac{2\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{n\mathrm{i}\pi}{4}} \cdot \sin\frac{(n+1)\pi}{4}
\end{aligned}$$

20. On remarque que $\mathrm{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, donc
a) $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. On remarque que c'est aussi le conjugué de j.
b) $\mathrm{j}^3 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.
c) $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = \frac{1-\mathrm{j}^3}{1-\mathrm{j}} = \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}{1-\mathrm{j}} = 0$.
d) $\mathrm{j}^{3n} = (\mathrm{j}^3)^n = 1^n = 1$.
e) $\mathrm{j}^{3n+1} = \mathrm{j} \cdot \mathrm{j}^{3n} = \mathrm{j}$.

Coefficients binomiaux

21. La première relation est la relation de PASCAL. Écrivons-la au rang $n-1$ et sommons : on obtient

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}\\
&= \left[\binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1}\right] + \left[\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}\right]\\
&= \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}.
\end{aligned}$$

Recommençons avec la nouvelle égalité :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}\\
&= \left[\binom{n-3}{p} + 2\binom{n-3}{p-1} + \binom{n-3}{p-2}\right] + \left[\binom{n-3}{p-1} + 2\binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3}\right]\\
&= \binom{n-3}{p} + 3\binom{n-3}{p-1} + 3\binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3}.
\end{aligned}$$

22. La première façon de calculer consiste à écrire $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$, donc

$$(1+\mathrm{i})^8 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\right)^8 = (\sqrt{2})^8\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 16.$$

La seconde façon consiste à developper grâce à la formule du binôme et à regrouper parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})^8 &= \binom{8}{0} + \binom{8}{1}\mathrm{i} + \binom{8}{2}\mathrm{i}^2 + \binom{8}{3}\mathrm{i}^3 + \binom{8}{4}\mathrm{i}^4 + \binom{8}{5}\mathrm{i}^5 + \binom{8}{6}\mathrm{i}^6 + \binom{8}{7}\mathrm{i}^7 + \binom{8}{8}\mathrm{i}^8\\
&= \binom{8}{0} + \binom{8}{1}\mathrm{i} + \binom{8}{2}(-1) + \binom{8}{3}(-\mathrm{i}) + \binom{8}{4} + \binom{8}{5}\mathrm{i} + \binom{8}{6}(-1) + \binom{8}{7}(-\mathrm{i}) + \binom{8}{8} = S_1 + \mathrm{i}S_2.
\end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que $S_1 = 16$ et $S_2 = 0$.

23. Il suffit de remarquer que $\binom{p+q}{p}$ est le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^{p+q}$. Or, dans le produit $(1+x)^p(1+x)^q$, on peut obtenir un terme de degré p en multipliant un terme de degré 0 avec un terme de degré p, ou un terme de degré 1 avec un terme de degré $p-1$... ou un terme de degré p avec un terme de degré 0. Le résultat en découle.

Équations

24. a) $\mathscr{S} = \{1 \pm \sqrt{5}\}$ **b)** $\mathscr{S} = \{\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}\}$ **c)** $\mathscr{S} = \{\frac{-3\pm i\sqrt{23}}{4}\}$ **d)** $\mathscr{S} = \{\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$

25. a) La manipulation $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ conduit au système *équivalent*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ - 4y = 8 \end{cases}$$

qui admet pour unique solution le couple $(x, y) = (\frac{3}{2}, -2)$.

b) Posons $X = \log_{10} x$ et $Y = \log_{10} y$: il faut résoudre le système $\begin{cases} 2X - 3Y = 9 \\ -6X + 5Y = -19 \end{cases}$, qui admet pour unique solution le couple $(X, Y) = (\frac{3}{2}, -2)$, donc le système initial admet pour unique solution le couple $(x, y) = (10^{\frac{3}{2}}, 10^{-2})$.

c) Posons $X = \mathrm{e}^x$ et $Y = \mathrm{e}^y$: il faut résoudre le système $\begin{cases} 2X - 3Y = 9 \\ -6X + 5Y = -19 \end{cases}$, qui admet pour unique solution le couple $(X, Y) = (\frac{3}{2}, -2)$, donc le système initial n'admet aucune solution (il n'existe aucun réel x vérifiant $\mathrm{e}^x = -2$).

26. Cherchons les solutions z sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) L'équation s'écrit encore $(x - 2y) + \mathrm{i}x = 1$ soit, en séparant parties réelle et imaginaire : $x - 2y = 1$ et $y = 0$. L'équation admet une unique solution : $z = 1$.

b) L'équation n'admet aucune solution : pour tout nombre complexe z, le nombre $z + \bar{z}$ est un réel (donc ne peut être égal à $1 + \mathrm{i}$).

27. a) La manipulation $L_2 \leftarrow L_2 - \mathrm{i}L_1$ conduit au système équivalent

$$\begin{cases} z_1 & + & 4z_2 & = & 1 + \mathrm{i}\sqrt{2} \\ & & (\sqrt{2} - 4\mathrm{i})z_2 & = & 1 \end{cases}$$

dont la solution est $z_2 = \frac{6+\sqrt{2}+\mathrm{i}(4+3\sqrt{2})}{18}$, $z_1 = \frac{-6-4\sqrt{2}+\mathrm{i}(-16+6\sqrt{2})}{18}$ (n'hésitez pas à faire le calcul pour vous entraîner !).

b) La manipulation $L_2 \leftarrow L_2 - (1 - \mathrm{i})L_1$ conduit au système équivalent

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})z_1 & + & z_2 & = & \mathrm{i}\sqrt{3} \\ 0 & + & 0 & = & (1 - \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}) \end{cases}$$

qui n'admet aucune solution.

c) La manipulation $L_2 \leftarrow L_2 - \mathrm{i}\sqrt{2}L_1$ conduit au système équivalent

$$\begin{cases} \mathrm{i}\sqrt{2}a & - & b & = & \mathrm{i} \\ & & (4 + \mathrm{i}\sqrt{2})b\mathrm{i} & = & 1 + \sqrt{2} - \mathrm{i} \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $b = \frac{(4+3\sqrt{2})-\mathrm{i}(6+\sqrt{2})}{18}$, $a = \frac{(-1+6\sqrt{2})-\mathrm{i}(3+2\sqrt{2})}{18}$.

28. Travaillons par équivalences en éliminant successivement les inconnues. Détaillons le premier exemple :

a)

$$\begin{cases} 5x & - & 4y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} & & -14y & + & 6z & = & -14 \\ & & -y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 14L_2$$

$$\iff \begin{cases} & & & & -36z & = & 0 \\ & & -y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \end{cases}$$

qui donne immédiatement pour unique solution le triplet $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.
b) La même méthode conduit à l'unique solution $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.
c) Le système se découple en deux, l'un portant uniquement sur x, z et v, l'autre sur y, t et u. Le deuxième système n'admet aucune solution, donc le système initial non plus.

29. Le premier système n'a de sens que pour $x, y > 0$. Posons alors $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: le système est équivalent à $\begin{cases} X + Y = 5 \\ (XY)^2 = 36 \end{cases}$, soit à

$$\begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = -6 \end{cases}.$$

Ce premier sous-système admet pour solutions évidentes $X = 2, Y = 3$ et $X = 3, Y = 2$. De plus, ce sont les seules solutions de ce sous-système : en effet, remplaçant Y par $5 - X$ dans la deuxième équation, on constate que X doit être solution d'une équation du deuxième degré, donc ne peut prendre que deux valeurs possibles. Si l'on ne voit pas ces solutions évidentes, on peut toujours résoudre cette équation pour les trouver.
De même, le deuxième sous-système admet pour uniques solutions les couples $(X, Y) = (-1, 6)$ et $(X, Y) = (6, -1)$. Le système initial (en x, y) admet donc quatre solutions, qui sont

$$\mathscr{S} = \{(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3), (\mathrm{e}^3, \mathrm{e}^2), (\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^6), (\mathrm{e}^6, \mathrm{e}^{-1})\}.$$

Le deuxième système a un sens pour tous x, y réels. Il est équivalent au système $\begin{cases} xy = 14 \\ x + y = -9 \end{cases}$, qui admet pour solutions les deux couples $(-2, -7)$ et $(-7, -2)$ (même méthode que ci-dessus).

30. Posons $X = \mathrm{e}^x$: l'équation devient $X^2 + (m-3)X + 2 - 2m = 0$, dont on cherche les solutions strictement positives. Le discriminant est

$$\Delta = (m-3)^2 - 4(2 - 2m) = (m+1)^2,$$

donc l'équation en X a toujours deux solutions, éventuellement confondues (pour $m = -1$). Ces solutions sont

$$X_1 = \frac{3 - m + (m+1)}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{3 - m - (m+1)}{2} = 1 - m.$$

La solution $X_1 = 2$ est strictement positive, quelle que soit la valeur de m, donc le réel $x = \ln 2$ est toujours solution de l'équation initiale. Si de plus m est strictement inférieur à 1, la solution X_2 est strictement positive, donc l'équation initiale admet une autre solution : $x = \ln(1 - m)$. Cette solution est confondue avec la première lorsque $m = -1$.

31. a) Le réel $x = 1$ est racine évidente du polynôme, donc on peut le factoriser sous la forme

$$2x^3 - 13x^2 - 10x + 21 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Développons : on obtient l'égalité

$$2x^3 - 13x^2 - 10x + 21 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c,$$

d'où l'on déduit, par identification des coefficients, que $a = 2$, $b = -11$ et $c = -21$, *i.e.* que

$$2x^3 - 13x^2 - 10x + 21 = (x - 1)(2x^2 - 11x - 21).$$

On peut aussi trouver cette factorisation (partielle) plus rapidement en remarquant que les coefficients a et c sont immédiats à trouver (il suffit d'examiner le terme de plus haut degré et le terme constant) ; on pouvait donc chercher cette factorisation *a priori* sous la forme $(x - 1)(2x^2 + bx - 21)$.
Continuons la factorisation : il faut maintenant trouver les racines du polynôme $2x^2 - 11x - 21$. Son discriminant est $\Delta = (-11)^2 - 4(2)(-21) = 289 = 17^2$, donc ses racines sont $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 7$. On a donc la factorisation finale

$$2x^3 - 13x^2 - 10x + 21 = (x - 1)(x - 7)(2x + 3).$$

b) Pour la première équation, posons $X = \ln x$: l'équation devient $X^3 - 13X^2 - 10X + 21 = 0$, dont les solutions sont $X = 1$, $X = 7$ et $X = -\frac{3}{2}$ d'après la question précédente. Les solutions de l'équation en x sont donc $x = \mathrm{e}$, $x = \mathrm{e}^7$ et $x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.
Pour la deuxième équation, multiplions par e^x et posons $X = \mathrm{e}^x$: l'équation devient encore $X^3 - 13X^2 - 10X + 21 = 0$, dont les solutions sont toujours $X = 1$, $X = 7$ et $X = -\frac{3}{2}$. La solution $X = -\frac{3}{2}$ est cette fois-ci à exclure (on ne peut pas avoir $\mathrm{e}^x = -\frac{3}{2}$) ; on trouve comme solutions $x = 0$ et $x = \ln 7$.

32. a) Posons $X = x^2$: l'équation devient $4X^2 - 37X + 9 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1225 = 35^2$, donc les solutions de la nouvelle équation sont $X_1 = 9$ et $X_2 = \frac{1}{4}$. L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc $\mathscr{S} = \{-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\}$.
b) Posons $X = \ln x$: l'équation devient $4X^4 - 37X^2 + 9 = 0$, dont l'ensemble des solutions est $\{-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\}$. L'ensemble des solutions de cette nouvelle équation est donc $\mathscr{S}' = \{e^{-3}, e^{-\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{2}}, e^3\}$.
c) Posons maintenant $X = e^x$: l'équation devient encore $4X^4 - 37X^2 + 9 = 0$, dont on ne cherche que les solutions strictement positives : ce sont $\frac{1}{2}$ et 3. Les solutions de la dernière équation sont donc $-\ln 2$ et $\ln 3$.

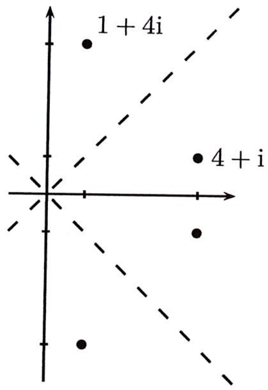
Nombres complexes et trigonométrie

33. a) On peut développer la somme par la formule du binôme, ou remarquer que $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$. On a alors $(1-i)^4 = 4e^{-i\pi} = -4$.
b) $(1+2i)^2 = -3 + 4i$.
c) $i(i+2)(2i+1)^2 = -5 - 10i$.
d) $\frac{1+2i}{3+i} = \frac{1+i}{2}$.
e) $\frac{1+i}{11+2i} = \frac{13+9i}{125}$.
f) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$.
g) Le mieux est de passer (partiellement) par la forme trigonométrique : on écrit

$$\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4} = \frac{\left(-\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^4 (i-1)}{\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4} = \frac{4e^{-i\pi}(i-1)}{4e^{i\pi}} = -1 + i.$$

h) $\frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

34. a) $|4+i| = \sqrt{17}$; les trois autres modules sont aussi égaux à $\sqrt{17}$. Les deux premiers points sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = 0$; les deux derniers aussi. Le troisième est symétrique du premier par rapport à la droite d'équation $y = x$ (permutation des deux coordonnées) ; le second et le quatrième par rapport à la droite d'équation $y = -x$.



e) $|\sqrt{2} + i\sqrt{3}| = \sqrt{5}$ **f)** $|1 - i\sqrt{2}| = \sqrt{3}$ **g)** $\left|\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{2})\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

35. a) $|3+3i| = 3\sqrt{2}$. Pour l'argument, on écrit

$$3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},$$

donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ est un argument. Une autre façon de trouver l'argument consiste à chercher un réel θ vérifiant

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b)

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

donc le module est égal à 2 et $\frac{\pi}{6}$ est un argument.
c) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

d) $\mathrm{i}-1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$
e) $-4=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$
f) $\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$
g) $\sqrt{2}(\mathrm{i}-1)=2\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$
h) $\mathrm{i}\sqrt{3}-1=2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

36. Calculons, pour tout réel θ, la quantité $Z=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta$.On a

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+\mathrm{i}\sin\theta\big[3\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\big] \end{aligned}$$

d'où, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=4\cos^2\theta-1$$

(pour $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$ pour cette dernière formule).
De même, en exprimant $Z'=\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta$, on trouve

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^4 \\ &= \cos^4\theta+4\mathrm{i}\cos^3\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta-4\mathrm{i}\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta \\ &= \cos^4\theta-6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)^2+\mathrm{i}\sin\theta\big[4\cos^3\theta-4\cos\theta(1-\cos^2\theta)\big] \end{aligned}$$

d'où

$$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}=8\cos^3\theta-4\cos\theta.$$

37. Passons à nouveau par la forme exponentielle :
a)

$$\sin^3\theta=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3=-\frac{1}{4}\times\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

b)

$$\cos^3\theta=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{4}\times\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

c)

$$\cos^2\theta\sin\theta=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{4}\times\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{1}{4}\sin\theta$$

d)

$$\cos\theta\sin^2\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{1}{4}\times\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}{2}=-\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{1}{4}\cos\theta$$

38. On écrit

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=2\big(\cos\theta\cos\tfrac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\tfrac{\pi}{3}\big)=2\cos\big(\theta-\tfrac{\pi}{3}\big).$$

L'équation est donc équivalente à $\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$, dont les solutions sont les réels θ vérifiant $\theta-\frac{\pi}{3}\equiv\pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, *i.e.* les réels de la forme $\theta=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.