Feuille d'exercices n° 9 : primitives et équations différentielles

Exercice 1. Donner une primitive de la fonction $f : t \mapsto \cos^4(t)$.

Exercice 2. Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{(1-3e^x)}$
3. $f(x) = 2x\sqrt{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{1+2x}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

Exercice 3. Calculer les primitives ou les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int (t^2-t)e^t \, dt$
2. $\displaystyle I_2 = \int_1^2 (3s^2+3)\ln s \, ds$
3. $\displaystyle\int \arccos x \, dx$
4. $\displaystyle I_4 = \int_0^1 \cos(2x)e^x \, dx$

Indication : Faire des intégrations par parties, parfois plusieurs.
Pour la quatrième, faire deux intégrations par parties. Retrouver I_4 dans le résultat.

Exercice 4. Calculer une primitive pour les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-2x+2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{4x-7}{x^2+x-2}$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle I_1 = \int_1^e \frac{\ln t}{t+t(\ln t)^2} \, dt$ en posant : $x = \ln t$
2. $\displaystyle I_2 = \int_1^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ en posant : $s = \sqrt{t^2-1}$
3. $\displaystyle I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ en posant : $t = e^x$

Indication : Pour la troisième, $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} - \dfrac{1}{x+1}$

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

1. $xy' - 2y = x^3$
2. $x^2y' - xy = 4$ avec $y(-1) = 1$
3. $y'\cos x + y\sin x = 1 + \sin x$
4. $\begin{cases} z' = \dfrac{x+z}{x} \\ z(-1) = 3 \end{cases}$
5. $xy' + (1-x)y = \dfrac{xe^x}{x^2+1}$ avec $y(-1) = 3$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

1. $\begin{cases} y'' + 9y = x^2 + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \ddot{u} - 4\dot{u} + 3u = e^{3t} \\ u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0. \end{cases}$
3. $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{sh}x.$

Exercice 8. Résoudre l'équation du second ordre suivante : $xy'' - y' = 0$

Indication : Faire un changement de fonctions : $z = y'$

Exercice 9. Résoudre l'équation suivante : $(E)\colon y''' - y'' - y' + y = 0$ en posant : $z = y' - y$.

Exercice 10. Soient deux fonctions X et Y de la variable t, vérifiant le système : $(S)\colon \begin{cases} X' = 4X + Y \\ Y' = -4X + e^t \end{cases}$.
Montrer que X est une fonction deux fois dérivable, et vérifie l'équation : $X'' - 4X' + 4X = e^t$.
Résoudre le système (S) avec les conditions $X(0) = Y(0) = 1$.

Indication : Dériver la première équation et remplacer Y' par sa valeur.

Exercice 11. Une équation de Ricatti.
Soit (E) l'équation différentielle : $(E) \quad y' = y + y^2$.
Pour résoudre (E) on effectue le changement de fonction inconnue défini par $z = \dfrac{1}{y}$.

1. Déterminer l'équation différentielle (F) que vérifie z.
2. Résoudre (F).
3. En déduire la résolution de (E).

Exercice 12. On considère l'équation suivante : $(E)\colon yy'' - (y')^2 + xy^2 = 0$. La résoudre en posant (quand c'est possible) $z = \dfrac{y'}{y}$.

Exercice 13. Une équation de Bernoulli.
Soit (E) l'équation différentielle suivante : $(1 + t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$.
On cherche les solutions y strictement positives. On pose $z = \sqrt{y}$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire (E_1) que vérifie z.
2. Résoudre (E_1).
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 14. Soit l'équation différentielle $(E)\colon z' = z \sin x - z^2 \sin x$, sur $\mathbb{R}$.
Pour résoudre (E) on effectue le changement de fonction inconnue défini par $y = \dfrac{1}{z}$.
Déterminer l'équation différentielle que vérifie y, la résoudre, et en déduire la résolution de (E).

Exercice 15. Soit l'équation différentielle $(E)\colon x^2(1 - x)y'' - x(1 + x)y' + y = 0$.

1. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{1 - x}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Résoudre (E) en posant $y = z(x)f(x)$, et en résolvant l'équation différentielle du second degré vérifiée par z.

Exercice 16. On veut résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}_+^*$: $(E)\colon 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.

1. On pose $t = \sqrt{x}$ et $y(x) = y(t^2) = z(t)$. Déterminer une équation différentielle (E_1) que vérifie z.
2. Résoudre (E_1).
3. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

Exercice 17. Résolution d'une équation d'Euler.
On cherche à résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E)\colon x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$$

1. Soit y une solution de (E) sur $]0,+\infty[$. Montrer que la fonction définie par $z(t) = y(e^t)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Indication : Dériver $z(t) = y(e^t)$) par rapport à t (attention, c'est une composée). Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$ (attention, il y a un produit). Sachant que y vérifie (E), trouver une équation que vérifie z.

Exercice 18. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x$.

Indication : Dériver l'égalité : $f'(x) = 2f(-x) + x$ et trouver une équation différentielle d'ordre deux que vérifie f.

Pour s'entrainer

Exercice 19. Résoudre les équations suivantes sur le plus grand intervalle possible.

1. $y' = y\tan x + \cos x$
2. $\begin{cases} y'\ln t = \dfrac{y}{t} + 1 - \ln t \\ y(2) = 0 \quad \text{puis } y(1/2) = 0 \end{cases}$
3. $(1+x^2)y' + xy = x$
4. $xy' + y = \arctan(x)$
5. $x^2(1+x)y' + y = x$
6. $(x^2+x+2)y' + x^2y = x^3 + x^2 + x + 2$
7. $y = y'\tan x + \cos x$

Exercice 20. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\sqrt{2}\sin^2 t}$
3. $\displaystyle\int_2^3 \cos(2x)e^x\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan x\,dx$

Exercice 21. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}\,dx \quad \text{(on posera } s = \sqrt{x+2}\text{)} \qquad\qquad I_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \quad \text{(on posera } x = \cos(2t)\text{)}$$

Exercice 22. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 23. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(y)f(x)$$

Exercice 24. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{\sin x}$. (indication : on pensera aux formules avec l'arc moitié.)

Exercice 25. Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin\theta \cos\theta + 1 = 0$.
   Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle (dans $\mathbb{R}$) : $(E) \quad \cos^2 \theta y'' - 2 \sin\theta \cos\theta y' + y = 00$.

3. Déterminer les solutions éventuelles vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 26. Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Exercice 27. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2 y' + xy = 1$.
Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Conclure.

Exercice 28. Résoudre les équations différentielles suivantes ; étudier les éventuels recollements des solutions.

1. $y'' = y + xe^x - e^{-x}$
2. $y' = y + \cos x + \sin x$
3. $y'' - 2y' + y = \mathrm{ch} x$
4. $y'' + 4y = \sin(at)$
5. $y'' + y = \cos^2 t$
6. $xy' \ln x = (3 \ln x + 1) y$
7. $y'' + 2y' + y = 2x \cos x \mathrm{ch} x$
8. $iy' + y = \sin x$ avec $y(0) = 1$
9. $(x^2 - 1) y' + xy = x^3 - x$
10. $y' \sin x = 2y \cos x$
11. $2x(1 + \sqrt{x}) y'' + (1 + 2\sqrt{x}) y' = 0$
12. $y'(3x^2 - 2x) = y(6x - 2)$
13. $y' - y \tan x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$
14. $x(x^2 - 1) y' + 2y = x^2$.
15. $x^2 y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
    limite des solutions en 0^+ ?
16. $2xyy' = x^2 + y^2$ avec $y(1) = 2$.
17. $\frac{1}{2}(1 - x^2) y'' + xy' - y = 0$.

Exercice 29. Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \mathrm{sh}(x) - 2x\mathrm{ch}(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2) e^{2x}$.
5. $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2 y + x^2 = 0$
   (déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$).
8. $\sqrt{1 - x^2} y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n \quad (n \in \mathbb{N})$.
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2 e^x + x e^{3x}$
    (en imposant de plus $y(0) = 1$).
12. $\mathrm{ch}(x) y' - \mathrm{sh}(x) y = \mathrm{sh}^3(x)$.

Exercice 30. Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2) \sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \dfrac{y'}{y}$).