Samedi 30 septembre 2023

Devoir sur table n° 1

Mathématiques

Durée : 2h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- ENCADREZ vos résultats.
- Numérotez les copies (pas les pages).
- Justifiez vos réponses.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Bon courage !

Question de cours
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est impaire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes.

1) La fonction f ne prend que des valeurs positives.

2) La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

3) Tout réel admet un antécédent par f.

4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2(x) - \cos(2x)$.

1) Réduire au *maximum* le domaine d'étude de f. On notera I ce domaine.

2) Expliquer comment, à partir du graphe de f sur I, en déduire le graphe sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3\sin^2(x) - 1$.

4) Déterminer les variations de f sur I.

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$(E_m)\colon\ mx = \sqrt{2x+1} \qquad \text{et} \qquad (F_m)\colon\ m^2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

1) Déterminer le domaine de résolution de (E_m).

2) Montrer que (F_m) possède deux solutions : une négative qu'on note $x_1(m)$ et une positive qu'on note $x_2(m)$.

3) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a $x_1(m) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

4) Étant donné x appartenant au domaine de résolution, l'implication "$(E_m) \Longrightarrow (F_m)$" est-elle vraie en général ? Que dire de la réciproque ?

5) Résoudre (E_m). On pourra éventuellement distinguer plusieurs cas.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$, ainsi que les limites à droite et à gauche de f en 1.

3) Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

4) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}$.
   b) En déduire que la fonction $f \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$ et la calculer.
   c) Montrer que f est bijective de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ et donner f^{-1}. Qu'en déduire sur la courbe représentative de f ?

Exercice 5. On considère deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

1) Étude de la fonction g.

   a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, limites comprises.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 0$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur exacte).
   Indication : on donne $2 < e < 3$.
   c) Démontrer que a appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$.
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Étude de la fonction f.

   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.
   c) Donner les limites de f aux bornes du domaine de définition et interpréter graphiquement ces limites.
   d) Dresser le tableau de variation de f sur son domaine de définition, limites comprises.
   e) Démontrer que f admet un unique minimum local, dont la valeur est le nombre réel suivant :
   $$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$
   f) Justifier que $2 \leqslant m \leqslant 6$.
   g) Tracer l'allure du graphe de f. On fera apparaître les droites remarquables (tangentes, asymptotes).