Semaine du 13 novembre

Programme de colle n°7

Nombres complexes

1) Forme algébrique et interprétation géométrique.
2) Conjugué, module, argument, forme polaire et exponentielle complexe.
3) Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
4) Formules de Moivre et d'Euler.
5) Applications :
   (a) linéarisation de $\cos^p t \sin^q t$,
   (b) calcul de $\cos(nt)$ en fonction des puissances de $\cos t$,
   (c) factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$ par $e^{i\theta/2}$,
   (d) calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.
6) Résolution dans $\mathbb{C}$ de $e^z = a$.
7) Condition en terme d'affixe pour que trois points soient alignés ou forment un triangle rectangle.
8) Écriture complexe d'une translation, rotation, homothétie.

Fonctions usuelles

Définition et toute l'étude des fonctions suivantes.

1) Fonctions hyperboliques : ch, sh et th.
2) Fonctions hyperboliques réciproques : argch, argsh et argth.
3) Fonctions trigonométriques réciproques : arccos, arcsin, arctan.

Questions de cours

1) Linéariser $\cos^4 t$.
2) Écrire $\cos(5t)$ en fonction de $\cos t$ en utilisant la formule de Moivre.
3) Soient $z_1 = 4(1+i)$ et $z_2 = (-\sqrt{3}+i)$.
   Donner la forme polaire et algébrique de : z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
   En déduire la valeur exacte de $\cos(7\pi/12)$, $\sin(7\pi/12)$ puis $\cos(\pi/12)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $e^z = 1+i$.
5) Après l'avoir définie, montrer que argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
6) Après l'avoir définie, montrer que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7) Montrer de deux façons différentes que : $\forall x \in [-1,1] \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.
8) Donner à l'aide de la fonction arctan la forme polaire de $z = -3+4i$.
9) Résoudre : $\operatorname{ch}(x) = 3$.
   Déterminer explicitement les solutions puis donner leurs valeurs à l'aide de la fonction argch.