Feuille d'exercices n^o 26 : moments de variable aléatoire

Exercice 1. Une urne contient 2 boules vertes et 8 boules bleues. Un joueur tire successivement 5 boules avec remise. S'il tire une boule bleue il gagne 2 points et dans le cas contraire il perd trois points. Soit X le nombre de points obtenus par le joueur en une partie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. On définit la variable aléatoire Y par :

- $Y = X$ si $X \neq 0$,
- Y prend une valeur au hasard dans $[\![1, n]\!]$ si $X = 0$.

Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.

Exercice 3. Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0.
Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1 et calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de probabilité de X_n, puis $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 4. Une urne contient 2 boules bleues et $n - 2$ boules rouges.
On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule bleue et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $E(X)$.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Exercice 5. Une pièce de monnaie truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On effectue n lancers successifs de celle-ci.

1. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
2. Soit Y le rang du premier Pile obtenu (on pose $Y = 0$ si l'on n'obtient aucun Pile).
   Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$.
Application : on tire quatre dés équilibrés à six faces. On note X la valeur minimale obtenue.
Déterminer $E(X)$.

Exercice 7. On choisit un numéro N au hasard dans $[\![1;n]\!]$ puis, si $N=k$ on tire un numéro X au hasard dans $[\![1;k]\!]$.

1. Déterminer la loi de X (on ne cherchera pas à calculer les sommes).
2. En déduire, en inversant les sommes, l'espérance de X.
3. Calculer sa variance.
4. Déterminer l'espérance de NX.

Exercice 8. Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi $\mathcal{B}(p)$. Pour $i \in [\![1,n-1]\!]$, on pose $Y_i = X_iX_{i+1}$

1. Donner la loi de Y_i.
2. Montrer que si $|i-j|>1$ alors Y_i et Y_j sont indépendantes.
3. Pour $i \in [\![1,n-2]\!]$, calculer $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+1})$.

Exercice 9. On utilise un dé cubique parfait. On cherche le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du « 1 » diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

1. Lorsqu'on a effectué n lancers, on note X le nombre de 1 obtenus, et F la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers. Exprimer F en fonction de X et de n.
2. Traduire à l'aide d'une inégalité ce que l'on cherche dans l'énoncé.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver la valeur de n que l'on cherche.

Exercice 10. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i. Démontrer que pour tout $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Pour s'entrainer

Exercice 11. Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise.
On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros.

1. Déterminer les lois des couples (X_1,X_2) et (X_1,Y).
2. Quelles sont les lois marginales de X_1 et Y ?
3. Soit $Y_2 = \mathrm{Min}(X_1,Y)$.
   (a) Quelle est la loi marginale de Y_2 ?
   (b) Déterminer la loi du couple (X_1,Y_2)
4. Quelle est la loi de X_1 conditionnée par Y ?

Exercice 12. Une urne contient 2 boules bleues et 4 boules vertes. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.
Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 13. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 14. Une urne contient des boules vertes et des boules bleues, indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(X = i, Y = j)$$

est l'évènement : "les i premières boules tirées sont bleues, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)$ème est bleue" ou "les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont bleues et la $(i+j+1)$ème est verte".
On note p la proportion de boules vertes.

1. (a) Déterminer X et Y pour le tirage suivant : BBBVVBVBB ...
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
   (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.
   (d) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.
2. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:
$$P(X = i, Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$
3. (a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Etablir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1, Y = 1)$).
   (b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 15. On choisit un numéro N au hasard dans $[\![1; n]\!]$ puis, si $N = k$ on tire un numéro X au hasard dans $[\![1; k]\!]$.

1. Déterminer la loi de X (on ne cherchera pas à calculer les sommes)
2. En déduire, en inversant les sommes, l'espérance de X.
3. Calculer sa variance.

Exercice 16. Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun. On note X (resp. Y) le nombre de pile obtenus respectivement par A, B.
Calculer la probabilité que A et B obtiennent le même nombre de fois pile.

Exercice 17. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou $n = 26$) qui contient donc 2 rois rouges. On envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.
Premier protocole :
Les cartes sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. A chaque fois que le joueur découvre une carte, il paie 1 euro et lorsqu'il découvre le premier roi rouge il gagne a euros (où $a \in \mathbb{N}^*$).
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

2. En déduire $E(G_1)$.

Deuxième protocole :
Cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.
X désigne toujours le rang d'apparition du premier roi rouge et on note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$

3. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$

Comparaison des deux protocoles :
Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur.

Exercice 18. Soit $(X_1, \cdots, X_{n+1})$ une famille de variable aléatoire réelle de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$

1. Quelle est la loi de Y_i ?

2. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.