Développer et réduire : utilisation du dénombrement

On explique ici en quoi le dénombrement permet d'améliorer l'efficacité de certains calculs et de retrouver rapidement des identités remarquables. Lorsqu'on souhaite développer une expression algébrique, c'est-à-dire transformer un produit de sommes en somme de produits, certains termes vont apparaitre plusieurs fois et donc on les rassemble entre eux en comptant le nombre de fois qu'ils apparaissent : on dit qu'on *réduit*.

Par exemple : $(3x^2+2x+1)(x^2-x+2) = 3x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x + 2$.

Pour obtenir directement le terme en x^2, on a énuméré toutes les façons d'obtenir du x^2 dans ce produit : $x^2 \times 1$, $x \times x$ et $1 \times x^2$. Puis, on a sommé les coefficients correspondants. On illustre cela en mettant d'une même couleur les termes qui "s'associent" pour donner du x^2 :

$$(3x^2+2x+1)(x^2-x+2) = 3x^4 - x^3 + (6-2+1)x^2 + 3x + 2.$$

Lorsque que certains facteurs (*i.e.* certaines sommes dans le produit de départ) sont longs ou que le nombre de facteurs est élevé, la méthode précédente devient vite laborieuse. Dans certains cas particuliers, le dénombrement permet toutefois de s'en sortir sans trop de calculs.

Pour commencer, il faut apprendre à compter le nombre de termes dans le développement brut d'une expression, c'est-à-dire avant de réduire. Si on considère par exemple l'expression

$$A = (a+b)(c+d+e)(f+g)$$

alors A est égal à la somme de tous les termes de la forme xyz où $x \in \{a,b\}$, $y \in \{c,d,e\}$ et $z \in \{f,g\}$. Il y a donc $2 \times 3 \times 2 = 12$ termes dans le développement brut de A (c'est le cardinal du produit cartésien des trois ensembles précédents). On comprend alors que de manière générale, lorsqu'on développe une expression, on choisit un terme dans chaque facteur/somme puis on les multiplie entre eux et on somme les valeurs issues des différents choix possibles. On en déduit en particulier les identités générales suivantes :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)\left(\sum_{k\in K} c_k\right) = \sum_{(i,j,k)\in I\times J\times K} a_i b_j c_k.$$

Exercice 1. Sans chercher à développer, déterminer le nombre de termes dans le développement brut des expressions suivantes :

$$A = (x+y+z+t)(a+b+c), \quad B = (a+b+c)^3, \quad C = (a+b)^n.$$

Dans l'expression B, on remarque que certains termes du développement brut vont apparaitre plusieurs fois. Par exemple, a^2b va apparaitre sous les formes aab, aba et baa. Ainsi, en réduisant, on a aura $3a^2b$ dans l'expression finale. Pour le terme abc, on a six possibilités pour l'obtenir : abc, acb, bac, bca, cab, cba. Ces possibilités correspondent aux différents anagrammes des mots aab et abc respectivement. On peut raisonner de même pour les différents termes du développement de B et obtenir l'identité remarquable suivante (qu'il faut savoir retrouver rapidement) :

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.$$

On retrouve aussi que la somme des coefficients est égale au nombre de termes dans le développement brut.

Plus généralement, le développement d'une expression de la forme $(x_1 + \ldots + x_r)^n$ est égal à la somme des termes de la forme $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$, avec $k_1 + \ldots + k_r = n$ (cela reste homogène), pondérée par le nombre d'anagrammes correspondants. On rappelle la propriété suivante que l'on a essentiellement démontré dans le cours sur le dénombrement.

Proposition 1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $x^k = \underbrace{xx \cdots x}_{k \text{ termes}}$. Alors le nombre d'anagrammes du mot $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$ vaut

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$

où $n = k_1 + \ldots + k_r$. Le nombre $\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r}$ est appelé coefficient multinomial.

Avec ce qui a été dit précédemment, on obtient la formule suivante appelée multinôme de Newton :

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\substack{(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r \text{ tels que} \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}.$$

Il ne faut pas chercher à apprendre cette formule mais plutôt à la *comprendre* pour pouvoir l'obtenir dans des cas particuliers.

Exercice 2. Sans calcul et sans chercher à appliquer directement la formule précédente, démontrer les identités remarquables suivantes.

1. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$
2. $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$
3. $$\begin{aligned}(a + b + c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 \\ &+ 4a^3 b + 4a^3 c + 4b^3 a + 4b^3 c + 4c^3 a + 4c^3 b \\ &+ 6a^2 b^2 + 6a^2 c^2 + 6b^2 c^2 \\ &+ 12a^2 bc + 12b^2 ac + 12c^2 ab.\end{aligned}$$