Semaine du 22 avril

Programme de colle n°24

Probabilité sur un univers fini

1) Définition d'une probabilité sur un univers Ω fini. Lien avec une distribution de probabilité.
2) Définition d'une variable aléatoire. Équiprobabilité. Probabilité conditionnelle.
3) Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
4) Loi d'une variable aléatoire. Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

Dimension finie

1) Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
2) Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
3) Dimension d'un espace vectoriel. Dimension de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
4) Dans E de dimension finie n, une famille libre à n éléments est une base. Une famille génératrice à n éléments est une base.
5) Dimension d'un sous-espaces vectoriel. Caractérisation des sous-espaces supplémentaires avec la dimension.
6) Formule de Grassmann.
7) Rang d'une famille de vecteurs.

Intégration

1) Révisions sur le calcul intégral.

Questions de cours

On commencera la colle par un calcul d'intégrale.

1) Donner et démontrer les formules pour $P(\overline{A})$, $P(A \setminus B)$ et $P(A \cup B)$.
2) Soit $A \subset \Omega$ tel que $P(A) \neq 0$. Montrer que P_A est une probabilité.
3) Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales. En déduire la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
4) On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre deux boules noires puis une boule rouge ?
5) On dispose de $N+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_N$: l'urne U_k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard.
   Si cette boule est blanche, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_N ?
6) On tire successivement et avec remise 3 boules dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Déterminer la loi de Y.
7) Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :
$$F_1 = \{(x,y,z) \mid x+y-2z=0\}, \qquad F_2 = \text{Vect}\,((1,1,1),(3,-1,2),(-1,3,0)).$$
8) Soit $u=(1,2,-1)$, $v=(0,2,3)$, $w=(1,0,1)$. Montrer que (u,v,w) forment une base de $\mathbb{R}^3$.
9) Soit $G = \text{Vect}\,((1,1,1),(3,-1,1))$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F=G$.