Feuille d'exercices n° 19 : probabilités

Exercice 1.

1. Soient A, B, C trois évènements. Calculer $P(A \cup B \cup C)$ à l'aide de probabilités d'intersection d'évènements.

2. Une urne contient une boule bleue, une boule verte et une boule rouge. On tire successivement avec remise n boules de l'urne.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces n tirages ?

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur au cours de ces n tirages ?

Exercice 2. Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une carte autre que l'As de Coeur par un second As de Coeur. Une personne tire simultanément 3 cartes ?

1. Quelle est la probabilité qu'elle s'aperçoive de la supercherie ?

2. Même question si elle tire 8 cartes.

3. À partir de combien de cartes a-t-elle au moins une chance sur deux de voir la supercherie ?

   Indication : $44 < \sqrt{1985} < 45$.

Exercice 3. On choisit au hasard un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ (avec $n \geqslant 3$). Déterminer la probabilité que ce sous-ensemble :

1. contienne 1 et 2 ;

2. ne contienne ni 1 ni 2 ;

3. contienne 1 ou 2.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et x un réel. On définit la famille (p_1, p_2, p_3, p_4) avec : $p_1 = x^3$, $p_2 = -x^2 + 1$, $p_3 = -x^2 + \frac{1}{3}$ et $p_4 = \frac{1}{6}(x - x^2)$.
Déterminer x pour que la famille $(p_i)_i$ définisse une distribution de probabilités sur Ω.

Exercice 5. Une urne contient 6 boules qui sont vertes ou bleues. Six joueurs tirent successivement une boule dans l'urne. Le premier à tirer une boule verte a gagné. On note X la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparation de la première boule verte.
Dans les deux cas suivants, qui a le plus de chance de gagner ?

1. Dans l'urne, il y a 4 boules bleues et 2 boules vertes.

2. Dans l'urne, il y a 5 boules bleues et 1 boule verte.

Exercice 6. On dispose de $N + 1$ urnes U_0, U_1, $\dots$, U_N : l'urne U_k contient k boules bleues et $N - k$ boules vertes. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue (événement B) ? Que pensez-vous du résultat ?

2. Sachant que la boule est bleue, quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans U_N ?

Exercice 7. Un lot de 100 dés contient 25 dés truqués tels que la probabilité d'obtenir 6 en les lançant est 1/2. On prend un dé au hasard, on le lance, et on obtient 6.
Quelle est la probabilité pour que ce dé soit truqué ?

Exercice 8. Une urne contient 2 boules bleues et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule bleue. Déterminer la loi de X.

Exercice 9. Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cachent un billet de 5 euros. On fixe un entier $n \in [\![0, 25]\!]$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de billets découverts. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 10. Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules bleues obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Conjecturer la loi de X_n et démontrer ce résultat.

Exercice 11. Deux escargots A et B font la course sur une feuille de salade.
On sait que si A est en tête au centimètre n, il le sera à nouveau au centimètre $n+1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et si B est en tête au centimètre n, il le sera à nouveau au centimètre $n+1$ avec une probabilité $\frac{3}{4}$.
On suppose de plus que l'escargot A est en tête au départ et qu'il n'y a jamais égalité au bout d'un nombre entier de centimètres. On note A_n l'évènement "A est en tête au centimètre n" et on pose $p_n = P(A_n)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n. En déduire p_n en fonction de n.

Exercice 12. On dispose de trois urnes numérotées de 1 à 3. Dans chaque urne, il y a 6 jetons portant des numéros de 1 à 3.
Dans l'urne 1, il y a 3 jetons n° 1, 1 jeton n° 2, 2 jetons n° 3.
Dans l'urne 2, il y a autant de jetons de chaque numéro.
Dans l'urne 3, il n'y a que des n° 3.
À l'instant n, on pioche un jeton dans une urne.
À l'instant $n+1$, on piochera dans l'urne du numéro du jeton.
Tous les tirages se font avec remise. A l'instant $t = 0$, on pioche un jeton dans l'urne 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du jeton tiré à l'instant n.
On note aussi $a_n = P(X_n = 1)$, $b_n = P(X_n = 2)$ et $c_n = P(X_n = 3)$.

1. Donner $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$.
2. Que valent $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)$, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3)$?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$.
4. Montrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
5. En déduire l'expression de a_n puis celle de b_n en fonction de n.
6. Que vaut c_n ?
7. Quand n tend vers l'infini, quelles sont les limites des trois suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) ? Était-ce attendu ?

Exercice 13. Une urne contient une boule numérotée 1 et une boule numérotée 0. On effectue des tirages successifs dans l'urne, jusqu'à ce que l'on tire la boule n° 0. A chaque tirage, si on obtient une boule n° 1, alors on la remet dans l'urne et on ajoute une boule numérotée 1 de plus.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i le numéro de la boule tirée au $i$ème tirage.
G_i : "la boule n° 0 apparait pour la première fois au tirage i" et T_i : "le numéro des i premières boules est 1".

1. Déterminer $P(T_i)$ pour $i \geqslant 1$.

2. Calculer $P(G_i)$.

3. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{i}\frac{1}{i+1}$, calculer $\sum_{i=1}^{n} P(G_i)$. Quelle est la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$? (Interprétation.)

Exercice 14. On jette $2n+1$ fois une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de piles que de faces ?

2. Soit $k \in [\![n+1, 2n+1]\!]$. Quelle est la probabilité d'obtenir le $(n+1)$-ième pile au k-ième lancer ?

3. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{k-1}{n} \frac{1}{2^k}$ puis $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n} \frac{1}{2^i}$.

Pour s'entrainer

Exercice 15. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$.

1. Pour quel(s) $x \in \mathbb{R}$ peut-on définir une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant $P(\{a,c\}) = 3x$ et $P(\{c\}) = 3x^2$?

2. Que vaut alors $P(\{a,b\})$?

Exercice 16. On dispose d'un damier carré de 4 lignes et 4 colonnes. On répartit au hasard 4 jetons indiscernables sur 4 cases différentes du damier.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. Aucun des jetons ne se situe sur une des diagonales ;

2. Trois jetons exactement sont sur une même diagonale ;

3. Chaque ligne et chaque colonne contient un jeton.

Exercice 17. Quatre urnes contiennent des boules :

- l'urne 1 contient 4 boules rouges, 1 boules blanche
- l'urne 2 contient 3 boules rouges, 2 boules blanches
- l'urne 3 contient 2 boules rouges, 3 boule blanches
- l'urne 4 contient 1 boule rouge, 4 boules blanches

On choisit au hasard une urne et de celle-ci l'on tire une boule au hasard. Si la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne 3 ?

Exercice 18. Un élève a le choix entre quatre chemins A, B, C, D pour aller au lycée. La probabilité pour qu'il choisisse A (resp. B, C) est $1/3$ (resp. $1/4, 1/12$). La probabilité d'arriver en retard en passant par A (resp. B, C) est $1/20$ (resp. $1/10, 1/5$). En passant par D, on n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité pour que l'élève choisisse D ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité pour qu'il soit passé par C ?

Exercice 19. On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n ;
- si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.

On note p_n la probabilité de lévènement A_n : "à l'instant n, l'appareil est en panne".

1. Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.
2. Exprimer p_n en fonction de p_0.
3. Etudier la convergence de la suite (p_n).

Exercice 20. On considère un jeu de 32 cartes. Les cartes sont alors réparties en quatre couleurs, chaque couleur étant composée de huit hauteurs (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7).

1. (a) On tire successivement quatre cartes avec remise. Dénombrer :
   (b) Le nombre de tirages possibles.
   (c) Le nombre de possibilités d'avoir quatre As.
   (d) Le nombre de possibilités d'avoir exactement un coeur.
   (e) Le nombre de possibilités d'avoir au moins deux coeurs.
   (f) Le nombre de possibilités d'avoir exactement 1 coeur et exactement une dame.
   (g) Le nombre de possibilités d'avoir exactement 1 coeur ou exactement une dame.
2. Mêmes questions avec un tirage successif de 4 cartes sans remise.
3. Mêmes questions avec un tirage simultané de 4 cartes.

Exercice 21. On considère un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n. On appelle poignée de jetons tout sous- ensemble de l'ensemble des n jetons, y compris l'ensemble vide. Combien y a-t-il de poignées :

1. au total ?
2. contenant le jeton numéro 1 ?
3. contenant exactement 2 jetons ?
4. contenant au moins 2 jetons ?
5. contenant un nombre pair de jetons ?