Feuille d'exercices n^o 25 : correction

Exercice 1. Déterminer la matrice dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes (on admet qu'elles sont linéaires) :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+z \\ -x+6y-3z \end{pmatrix} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$

5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & (2X+2)P - XP' \end{array}$

6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$

7. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$
   avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Alors $AM - MA = \begin{pmatrix} -4y+3z & -3x+2y+3t \\ 4x-2z-4t & 4y-3z \end{pmatrix}$.
   Donc $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & \text{le reste de la division euclidienne de } (X^3-1)P \text{ par } X^3 - X \end{array}$$

1. Vérifier que f est linéaire et vérifier que f est bien à valeur dans $\mathbb{K}_2[X]$.

2. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Solution.

1. f est linéaire : soitent $P_1, P_2 \in \mathbb{K}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Écrivons les divisions euclidiennes :
$(X^3-1)P_1 = (X^3+X)Q_1 + R_1$ et $(X^3-1)P_2 = (X^3+X)Q_2 + R_2$ avec $\deg(R_i) < 3$.
Alors : $(X^3-1)(P_1+\lambda P_2) = (X^3+X)(Q_1+\lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$, avec $R_1 + \lambda R_2$ de degré inférieur à R_1 et R_2, donc inférieur strict à 3. C'est donc le reste de la division euclidienne de $(X^3-1)(P_1+\lambda P_2)$ par X^3+X. Ainsi, $f(P_1+\lambda P_2) = f(P_1) + \lambda f(P_2)$ d'où $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$
f est à valeur dans $\mathbb{K}_2[X]$: le reste de la division euclidienne par X^3+X est un polynôme de degré inférieur strict à 3, donc dans $\mathbb{K}_2[X]$.

2. On calcule $f(1), f(X), f(X^2)$ en effectuant la division euclidienne. On trouve alors la matrice :
$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On cherche $f(P) = f(a+bX+cX^2) = 0$. Matriciellement, cela s'écrit : $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout le système homogène et on obtient : $a = 0, b = c$. Donc $P \in \ker f \Leftrightarrow P = b(X+X^2)$.
$\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}(X+X^2)}$ (un vecteur non nul, donc c'est une base du noyau.)
D'après la formule du rang : $\mathrm{rang}(f) = \dim \mathbb{K}_2[X] - \dim\ker f = 3 - 1 = 2$.
On sait : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-X, -X^2+X) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-X)$.
On obtient une famile génératrice de deux vecteurs dans un espace de dimension deux.
Ainsi, $\boxed{(X-1, X^2-X) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f.}$

Exercice 5.

1. Démontrer que les familles $\mathcal{U} = \big((X+1)^2, X+1, X^2+X+1\big)$ et $\mathcal{V} = \big(X, (X-1)^2, 1\big)$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{U}$.

Solution.

1. La matrice qui contient les coordonnées dans la base canonique de la famille $\mathcal{U}$ est $P_{\mathcal{C},\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $\det(P_{\mathcal{C},\mathcal{U}}) = -1 \neq 0$ donc la matrice est inversible. Ainsi, $\boxed{\mathcal{U} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{U}}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{U}$.

   La matrice qui contient les coordonnées dans la base canonique de la famille $\mathcal{V}$ est $P_{\mathcal{C},\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a $\det(P_{\mathcal{C},\mathcal{V}}) = 1 \neq 0$ donc la matrice est inversible. Ainsi $\boxed{\mathcal{V} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{V}}$ est la matrice de passage de la base canonique à$\mathcal{V}$.

2. Par propriété sur les matrices de passages (une sorte de relation de Chasles finalement) :
$P_{\mathcal{V},\mathcal{U}} = P_{\mathcal{V},\mathcal{C}} P_{\mathcal{C},\mathcal{U}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{V}}^{-1} P_{\mathcal{C},\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$.
On considère $\mathcal{B} = (X^2 + 2X - 1, -X + 1, X^2 + X - 1)$ une famille de E.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

2. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$ et celle de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

3. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(P) = XP'$. Déterminer M, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ puis M', la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

5. En déduire N^n où $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. La matrice des coordonnées dans la base canonique de la famille $\mathcal{B}$ est $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $\det(P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}) = -1 \neq 0$ donc la matrice est inversible. Ainsi $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

2. $\boxed{P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$

3. Dans la base canonique : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(Q) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(Q)$

   $\boxed{\text{Les coordonnées de } Q \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.}$
   On constate qu'effectivement $Q = (X^2 + 2X - 1) + 3(-X + 1)$.

4. On calcule l'image de la base canonique par f : $f(1) = 0, f(X) = X, f(X^2) = 2X^2$.
   Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   On note $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$. La matrice dans la base B est $M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M' = N.}$

5. $N = P^{-1}MP$. Donc $N^n = P^{-1}M^nP$ avec $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ car M est diagonale.

   Ainsi, $\boxed{N^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2^n & 0 & 2^n \\ 2^n - 2 & 1 & 2^n - 1 \end{pmatrix}.}$

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - I_3)(A + 3I_3) = 0$. En déduire que : $\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad f^2(u) = -2f(u) + 3u$.
2. On note $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et $G = \ker(f + 3\mathrm{id})$. Pour $u_F \in F$, que vaut $f(u_F)$?
3. Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
4. Donner la dimension du G. En déduire celle de F.
5. Soit (u_1, u_2) une base de F et (u_3) une base de G. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Solution.

1. Faire le calcul matriciel. En terme d'application linéaire cela donne $(f - \mathrm{id}) \circ (f + 3\mathrm{id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ soit $f^2 + 2f - 3\mathrm{id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On évalue ensuite en $u \in E$ ce qui donne le résultat souhaité.
2. $(f - \mathrm{id})(u_F) = 0$ donc $\boxed{f(u_F) = u_F.}$
3. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Montrons par analyse-synthèse qu'il se décompose de manière unique comme $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in \ker(f - id)$ et $u_G \in \ker(f + 3id)$.
   Analyse : si $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in \ker(f - id)$ et $u_G \in \ker(f + 3id)$ alors
   $f(u) = f(u_F) + f(u_G) = u_F - 3u_G$. Par soustraction, on obtient : $u - f(u) = 4u_G$.
   Donc $u_G = \frac{1}{4}(u - f(u))$ et $u_F = u - u_G = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$.
   Synthèse : on pose $u_G = \frac{1}{4}(u - f(u))$ et $u_F = u - u_G = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$.
   On vérifie :

   (a) $u_F + u_G = u$;

   (b) $f(u_F) = \frac{3}{4}f(u) + \frac{1}{4}f^2(u) = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$ car $f^2(u) = -2f(u) + 3u$ donc $u_F \in F$;

   (c) $f(u_G) = \frac{1}{4}(f(u) - f^2(u)) = -\frac{3}{4}(u - f(u)) = -3u_G$. Donc $u_G \in G$.

   Finalement, on a bien : $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3.}$
4. On résout $AX = -3X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve $X = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$ donc $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 1))$ et $\boxed{\dim G = 1.}$
   Comme $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, $\dim F = \dim \mathbb{R}^3 - \dim G$: $\boxed{\dim F = 2}$
5. F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Donc, si on concatène leurs bases, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$: $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$
   $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ car $F = \ker(f - \mathrm{id})$.
   $f(u_3) = -3u_3$ car $G = \ker(f + 3\mathrm{id})$.

   Donc la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$

Exercice 9. Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant la valeur de α.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Solution. On a toujours : pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\text{rang}(M)$ plus petit que p et n.
$\boxed{\text{rang}(A) = 1}$, $\boxed{\text{rang}(B) = 1}$, $\boxed{\text{rang}(C) = 2}$
Pour D : si $\alpha = 1, \text{rang}(D) = 1$, si $\alpha = -2$, $\text{rang}(D) = 2$, sinon $\text{rang}(D) = 3$.

Exercice 10. Donner le rang des familles suivantes :

1. (a, b, c, d) où $a = (1, 2, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 1, 1)$ et $d = (1, -1, 0)$.

2. (a, b, c, d) où $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (2, 3, 4, 1)$, $c = (3, 4, 1, 2)$ et $d = (4, 1, 2, 3)$.

3. (a, b, c) où $a = (0, -r, q)$, $b = (r, 0, -p)$ et $c = (-q, p, 0)$ avec $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

Solution. Mettre les coordonnées des vecteurs dans une matrice et déterminer le rang de la matrice obtenue.

1. $d = a - 2b$. $\boxed{\text{rang}(a, b, c, d) = 3}$

2. $\boxed{\text{rang}(a, b, c, d) = 4}$

3. $\boxed{\text{Si l'un des coefficients } p, q, r \text{ est non nul, } \text{rang}(a, b, c) = 2. \text{ Si tous les coefficients sont nuls, } \text{rang}(a, b, c) = 0.}$
   Rem : On constate : $pa + qb + rc = (0, 0, 0)$. Donc : $\text{rang}(a, b, c) \leqslant 2$.
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & r \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & -p & 0 \\ -r & 0 & p \\ 0 & r & -q \end{pmatrix}.$$
   Si $q \neq 0$: $A \sim \begin{pmatrix} q & -p & 0 \\ 0 & r & -q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Si $r \neq 0$, $\text{rang}(a, b, c) = 2$. Si $r = 0$ alors $\text{rang}(a, b, c) = 2$ car $q \neq 0$.
   Si $q = 0$: faire la discussion.

Exercice 11. Soit $m \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & m & -m^2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de A, en fonction de m.

2. Pour quelles valeurs de m le déterminant est-il nul ?

3. En déduire le rang de A en fonction de m.

Solution.

1. $\det(A) = m^2 \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 - m^2 \\ 0 & 1 + m & -m - m^2 \end{vmatrix} = m^2(1 - m^2)(m + 1)$.
   Donc $\boxed{\det(A) = m^2(1 - m)(1 + m)^2.}$

2. $\boxed{\text{Si } m \in \{-1, 0, 1\}, \text{ alors } \det(A) = 0}$.

3. $\boxed{\text{Si } m \notin \{-1,0,1\}, \text{ alors } \mathrm{rang}(A) = 3}$. Si $m = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\mathrm{rang}(A) = 1.}$

   Si $m = 1$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\mathrm{rang}(A) = 2.}$

   Si $m = -1$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\mathrm{rang}(A) = 1.}$

Exercice 12.

1. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p < n$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
   Montrer que AB n'est pas inversible. BA peut-elle être inversible ?

2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À-t-on $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(BA)$?

Solution.

1. On note $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ les applications linéaires associées respectivement à A et B. Comme $p < n$, f ne peut pas être surjective. Donc $f \circ g$ non plus et ainsi $f \circ g$ n'est pas bijective. Sa matrice associée ne peut donc pas être inversible *i.e.* $\boxed{AB \text{ n'est pas inversible.}}$

   En revanche, BA peut être inversible. Exemple : $n = 2$, $p = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible mais $\boxed{BA = (1) \text{ est inversible.}}$

2. Non. Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = B$ et $BA = 0_2$.

   Donc $\boxed{\mathrm{rang}(AB) = 1 \neq \mathrm{rang}(BA) = 0.}$

Exercice 13. Calculer les déterminants suivants (on demande la réponse sous forme factorisée) :

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

2. $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

3. $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$

4. $D = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$

5. $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

6. $D = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix}$

Solution.

1. $D = 2$

2. $D = 40$

3. $D = ab(a+b)$

4. $D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ a & b-a & c-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)$

5. $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$
   $D = a(b-a)(c-b)(d-c)$.
6. $D = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ c-a & b(c-a) & c^2-a^2 \\ c-b & a(c-b) & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & b & a+c \\ 1 & a & b+c \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & b & a+c \\ 0 & a-b & b-a \end{vmatrix}$
   $D = (c-a)(c-b)(b-a) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & b & a+c \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)(bc+ac+ab)$.

Exercice 14. On considère $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(1,1,1)$ deux vecteurs de l'espace. À l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} a+b & a+2b & 3a-c \\ 2a+b & 2a+2b & 6a-c \\ 3a+b & 3a+2b & 9a-c \end{vmatrix} = 0.$$

Solution. Dans l'espace, on considère les vecteurs de coordonnées suivantes : $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(1,1,1)$.
On considère la famille : $\mathcal{F} = (a\vec{u} + b\vec{v}, a\vec{u} + 2b\vec{v}, 3a\vec{u} - c\vec{v})$. Cette famille vit dans $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être une base de l'espace. Donc son produit mixte est nul. En coordonnées, cela donne : $\begin{vmatrix} a+b & a+2b & 3a-c \\ 2a+b & 2a+2b & 6a-c \\ 3a+b & 3a+2b & 9a-c \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 15. Pour $m \in \mathbb{K}$, on note f_m l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme.

Solution. $\det(A_m) = m^3 - m^2 = m^2(m-1)$. Donc $\boxed{A_m \text{ est un automorphisme si et seulement si } m \neq 0 \text{ et } m \neq 1.}$

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Si $x \in E$ est tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Donner la matrice de f dans cette base.

Solution.

1. Déjà fait dans le cours sur les applications linéaires.
2. On calcule l'image de la base par f : $f(x) = f(x), \quad f(f(x)) = f^2(x), \quad \cdots f(f^{n-1}(x)) = f^n(x) = 0$
   $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$