Feuille d'exercices n° 10 : Ensembles, applications, arithmétique

Exercice 1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier :

$$C = \overline{A \cap \overline{\overline{A \cap \overline{A \cap \overline{A}}}}} \qquad\qquad D = A \cap \overline{(A \cup B) \cap \overline{A}}$$

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, soient A, A_1 et A_2 des parties de E, et B, B_1 et B_2 des parties de F. Montrer que :

1. $f(\varnothing) = \ldots$ et $f^{-1}(\varnothing) = \ldots$
2. $f^{-1}(F) = \ldots$
3. $A \subset f^{-1}(f(A))$
4. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
5. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
6. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
7. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
8. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Exercice 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2 - 1)^2 \end{array}$.

1. Étudier f et dessiner sa courbe représentative.
2. On note $A = [0, 1]$. Déterminer $f(A)$ puis $f^{-1}(f(A))$.
3. On note $B = [-1, 1]$. Déterminer $f^{-1}(B)$ puis $f(f^{-1}(B)))$.

On peut montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Cet exercice montre que dans le cas général, il n'y a pas égalité.

Exercice 4. Soient les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définies par :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n,$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad$ si n est pair , $\quad g(n) = \frac{n}{2}, \quad$ et si n est impair, $\quad g(n) = \frac{n-1}{2}$.

1. Etudier, l'injectivité, la surjectivité, et la bijectivité de f et g.
2. Déterminer l'application $g \circ f$. Les fonctions f et g sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ?

Exercice 5. On identifie le plan muni d'un repère orthonormé et $\mathbb{C}$ de la manière usuelle.

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{2\} \\ z & \mapsto & \frac{2z+5}{z+1} \end{array}$ est bijective et expliciter f^{-1}.
2. Si D est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, montrer que $f(D)$ est inclus dans un cercle de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 3$ dont on donnera le rayon.

Exercice 6. Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$.

1. Montrer que f injective $\Rightarrow f_{|A}$ injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. Enoncer une proposition sur le modèle de la question précédente mais avec "surjective".

Exercice 7. Soient E, F et G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Montrer que : $g \circ f$ est injective implique que f est injective.
2. Montrer que : $g \circ f$ est surjective implique que g est surjective.
3. Montrer que : $g \circ f$ est injective n'implique pas que g est injective.
4. Montrer que : $g \circ f$ est surjective n'implique pas que f est surjective.

Exercice 8. Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,E)$. On suppose que les applications $f \circ h \circ g$ et $h \circ g \circ f$ sont injectives et que l'application $g \circ f \circ h$ est surjective. Montrer que les applications f, g et h sont bijectives (on pourra utiliser l'exercice 7).

Exercice 9. Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 10. Une application f de E dans E est dite idempotente si et seulement si elle vérifie : $f \circ f = f$.

1. Donnez des exemples d'applications idempotentes.
2. On note Id_E l'application identitée de E.
   Montrer que si f est idempotente et injective, alors $f = Id_E$.
   Montrer que si f est idempotente et surjective, alors $f = Id_E$.

Indication :

1. On sait que : $\forall x \in E, \quad f(f(x)) = f(x)$.

Exercice 11. Trouver le nombre d'entiers naturels qui, dans la division euclidienne par 51, ont un quotient égal au reste.

Exercice 12. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $A_n = 4n^2 - 1$ est premier ?

Pour s'entrainer

Exercice 13. Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \{(G,E)$. Montrer que si les applications $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors $f, g,$ et h sont bijectives.

Exercice 14. On pose $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, pour tout z de $\mathbb{C} - \{-i\}$.

1. L'application f est-elle une application injective de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$? Une application surjective de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$? Une application bijective de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$?
2. Déterminer les ensembles C_1 et C_2 les plus grands possibles, inclus dans $\mathbb{C}$, tels que f définisse une bijection de C_1 dans C_2.
3. Montrer que la restriction de f à l'ensemble $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ est une bijection de P dans $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Exercice 15. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que :

1. $X \subset Y \iff \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.
2. $X = Y \iff \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$.

Exercice 16. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E, et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}$.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si $A\cap B=\emptyset$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B=E$.

3. On suppose que f est bijective ; déterminer alors f^{-1}.

Exercice 17. Soit pour $z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\}$: $f(z)=\frac{z-2}{z+i}$. Déterminer (géométriquement) le lieu des points M du plan d'affixe z tels que :
a) $|f(z)|=1$. b) $f(z)\in\mathbb{R}$. c) $f(z)\in i\mathbb{R}$.

Exercice 18. On note $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \Im(z)>0\}$ et $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{-i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

2. Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que $ad-bc=1$ et h définie par $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.
   Montrer que pour tout z du domaine de définition de h on a $\Im(h(z))=\dfrac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$, puis que h définit une bijection de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

Exercice 19. On considère l'application $f : z\mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$, et on note $A=\mathbb{C}\backslash\{2\}$ et $B=\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de A vers B. Déterminer une expression simple de sa réciproque f^{-1}.

2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $f(z)\in\mathbb{U}$) et celle du disque unité $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$.

3. Déterminer les nombres complexes $z\in\mathbb{U}$ tels que $f(z)\in\mathbb{U}$.

4. Quel est l'ensemble de définition de l'application $f\circ f$? Est-elle également bijective, et si oui, vers quel ensemble ?

Exercice 20. ϕ est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\phi(z)=z^2+z+1$. L'application ϕ est elle injective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$? surjective ? bijective ?

Exercice 21. Soient E et F deux ensembles, et $f\in\mathcal{F}(E,F)$. On note $\tilde{f} : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(F) \\ A\mapsto f(A) \end{array}$

1. Montrer que $\tilde{f}$ est injective si et seulement si f est injective.

2. Montrer que $\tilde{f}$ est surjective si et seulement si f est surjective.

Exercice 22.

1. Donner un exemple qui montre que si f est une application de E dans F, si A est une partie de E et si $a\in E$, l'énoncé
$$f(a)\in f(A) \implies a\in A$$
   est - en général - faux.

2. Démontrer que si f est une injection de E sur F, alors l'énoncé précédent est vrai pour toute partie A de E et tout élément a de E.

Exercice 23.

1. Montrer que la composée de deux applications croissantes est croissante.
2. L'application réciproque d'une bijection croissante est-elle nécessairement croissante ?

Exercice 24. Soient E, F et G des ensembles. Démontrer que :

1. $E \cap F = E \Leftrightarrow E \subset F$.
2. $E \cup F = E \Leftrightarrow F \subset E$.
3. $(E \setminus F) \cup (E \setminus G) = E \setminus (F \cap G)$.

Exercice 25.

1. Léa, Léo et Léon, qui forment un groupe de colle qu'on note $\mathcal{G}$, ont colle de SI.
   On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers entre 0 et 20 et on considère l'application
   $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{N}$ qui à x associe sa note en colle.
   Donner une phrase en français la plus simple possible signifiant que φ est injective.
   φ peut-elle être surjective ?

2. Léa, Léo, Léon, Léonhard, Paul, Pauline, Paulette, Paula, Carl, Carla et Charline ont obtenu les notes respectives de A, B, C, D, F, B, D, A, B, E et C à leur devoir de Mathématiques, le devoir étant noté par la lettre A, B, C, D, E ou F, A signifiant “excellent”, … et F signifiant “très mauvais”. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des élèves cités précédemment et $\mathcal{N}$ l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F\}$ et on considère l'application $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{N}$ qui à x associe sa note au devoir.

   (a) ψ est-elle injective ? ψ est-elle surjective ?
   Une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{N}$ peut-elle être injective ?

   (b) Donner $X, Y \subset \mathcal{E}$ tels que $\mathrm{card}(X \cap Y) = 2$ et les applications $\psi_{|X}$ et $\psi_{|Y}$ sont bijectives .

3. Léa, Léo, Léon, Léonhard, Paul, Pauline, Paulette, Paula, Carl, Carla et Charline ont obtenu les notes respectives de A, B, C, D, E, B, D, A, B, E et C à leur devoir de Mathématiques, le devoir étant noté par la lettre A, B, C, D, E ou F, A signifiant “excellent”, … et F signifiant “très mauvais”. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des élèves cités précédemment et $\mathcal{N}$ l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F\}$ et on considère l'application $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{N}$ qui à x associe sa note au devoir.

   (a) ψ est-elle injective ? ψ est-elle surjective ?

   (b) On note $W = \psi(\{\text{Léa}, \text{Léo}\})$. Déterminer $\psi^{-1}(W)$.

   (c) On note $V = \psi^{-1}(\{D, E, F\})$. Déterminer $\psi(V)$.