

NOM :

Test n° 2

Exercice 1 (Nombres complexes). Mettre sous forme polaire et algébrique (dans l'ordre que l'on veut) les nombres complexes suivants

1. $z_1 = (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})^4$

2. $z_2 = \frac{(i+1)^5}{(i-1)^4}$

$$z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} (e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) \right)^4 = (2i)^4 \sin^4\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_2 = \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^5}{(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^4} = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i.$$

Exercice 2 (Dérivation). Dériver les fonctions suivantes en précisant le domaine de validité. On simplifiera au maximum son résultat.

1. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

2. $g(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

3. $h(x) = \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$

$$D_{f'} = \mathbb{R}, D_{g'} =]-1, 1[\text{ et } D_{h'} = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}; \quad h'(x) = \frac{\sin x \cos x (4 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2}.$$

Exercice 3 (Intégration). Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

2. $I_2 = \int_1^e x \ln x \, dx$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}} dt$
(poser $x = \sqrt{t+1}$)

$$I_1 = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On intègre par parties : } I_2 = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}} dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)^3}{x} 2x dx \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{2}} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) dx \\ &= 2 \left(\frac{2^{7/2}}{7} - 3 \frac{2^{5/2}}{5} + 3 \frac{2^{3/2}}{3} - \sqrt{2} \right) - 2 \left(\frac{1}{7} - 3 \frac{1}{5} + 3 \frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}. \end{aligned}$$