Feuille d'exercices n° 19 : correction

Exercice 3. On choisit au hasard un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$ (avec $n \geqslant 3$). Déterminer la probabilité que ce sous-ensemble :

1. contienne 1 et 2 ;

2. ne contienne ni 1 ni 2 ;

3. contienne 1 ou 2.

Solution.

1. Il y a 2^n parties dans $[\![1,n]\!]$. Dénombrer les parties qui contiennent 1 et 2 revient à dénombrer les parties de $[\![3,n]\!]$: il y en a 2^{n-2}. Donc $p_1 = \dfrac{2^{n-2}}{2^n} = \dfrac{1}{4}$.

2. Dénombrer les parties qui ne contiennent ni 1 ni 2 revient à dénombrer les parties de $[\![3,n]\!]$: il y en a 2^{n-2}. Donc $p_2 = \dfrac{1}{4}$.

3. $P(\text{contient 1 ou 2}) = P(\text{contient 1}) + P(\text{contient 2}) - P(\text{contient 1 et 2})$.
   Donc $p_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et x un réel. On définit la famille (p_1, p_2, p_3, p_4) avec : $p_1 = x^3$, $p_2 = -x^2 + 1$, $p_3 = -x^2 + \dfrac{1}{3}$ et $p_4 = \dfrac{1}{6}(x - x^2)$.
Déterminer x pour que la famille $(p_i)_i$ définisse une distribution de probabilités sur Ω.

Solution. $(p_1, \cdots, p_4)$ est une distribution de probabilités si et seulement si $p_i \geqslant 0$ et la somme des probabilités vaut 1.
On commence par résoudre : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = x^3 - \dfrac{13}{6}x^2 + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{4}{3} = 1 \Leftrightarrow P(x) = 6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$.
On constate que 2 est solution évidente *i.e.* $P(2) = 0$. On factorise : $P(x) = (x-2)(6x^2 - x - 1)$.
Les racines de P sont donc $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -\dfrac{1}{3}$.
Pour $x = x_1$, $p_2 < 0$. Pour $x = x_3$, $p_1 < 0$. Pour $x = x_2$:
$p_1 = \dfrac{1}{8}$, $p_2 = \dfrac{3}{4}$, $p_3 = \dfrac{1}{12}$ et $p_4 = \dfrac{1}{24}$ donc elles sont toutes positives.
Ainsi, avec $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient une distribution de probabilités.

Exercice 5. Une urne contient 6 boules qui sont vertes ou bleues. Six joueurs tirent successivement sans remise une boule dans l'urne. Le premier à tirer une boule verte a gagné. On note X la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparation de la première boule verte.
Dans les deux cas suivants, qui a le plus de chance de gagner ?

1. dans l'urne, il y a 4 boules bleues, 2 boules vertes.

2. dans l'urne, il y a 5 boules bleues et 1 boule verte.

Solution. On a $(X = i)$: "c'est le joueur i qui gagne".
On note aussi B_j : "on tire une boule bleue au j-ième tour" et V_j : "on tire une boule verte au j-ième tour"

1. $P(X=1) = P(V_1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{15}$.
   D'après la formule des probabilités composées :
   $P(X=2) = P(B_1 \cap V_2) = P(B_1)P_{B_1}(V_2) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$.
   $P(X=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap V_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(V_3) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{15}$.
   $P(X=4) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap V_4) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$.
   $P(X=5) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap V_5) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{15}$.
   $P(X=6) = 0$. Donc c'est le joueur 1 qui a le plus de chance de gagner.

2. $P(X=1) = P(V_1) = \dfrac{1}{6}$
   D'après la formule des probabilités composées :
   $P(X=2) = P(B_1 \cap V_2) = P(B_1)P_{B_1}(V_2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{6}$.
   $P(X=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap V_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(V_3) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.
   De même : $P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = \dfrac{1}{6}$. Donc tous les joueurs ont la même probabilité de gagner.

Exercice 7. Un lot de 100 dés contient 25 dés truqués tels que la probabilité d'obtenir 6 en les lançant est 1/2. On prend un dé au hasard, on le lance, et on obtient 6.
Quelle est la probabilité pour que ce dé soit truqué ?

Solution. On note T et S les évènements "le dé est truqué" et "obtenir 6".
D'après l'énoncé : $P(T) = \dfrac{1}{4}$, $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$ et $P_T(S) = \dfrac{1}{2}$, $P_{\overline{T}}(S) = \dfrac{1}{6}$.
D'après la formule de Bayes :

$$P_S(T) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{P(T)P_T(S)}{P(T)P_T(S) + P(\overline{T})P_{\overline{T}}(S)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8. Une urne contient 2 boules bleues et $n-2$ boules rouges.
On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule bleue. Déterminer la loi de X.

Solution. $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
On note B_i : "tirer une boule bleue au ième tirage" et R_i : "tirer une boule rouge au ième tirage".
$P(X=1) = P(B_1) = \dfrac{2}{n}$, $\quad P(X=2) = P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{2}{n-1} = \dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}$.
D'après la formule des probabilités composées :
$P(X=3) = P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-3}{n-1} \times \dfrac{2}{n-2} = \dfrac{2(n-3)}{n(n-1)}$.
En général : $P(X=k) = P(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k) = \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{n-k}{n-k+2} \times \dfrac{2}{n-k+1}$.
Après simplification, il reste : $P(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

Exercice 9. Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cachent un billet de 5 euros. On fixe un entier n ($n \in [\![0, 25]\!]$) et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de billets découverts. Déterminer la loi de X_n.

Solution. On commence par le cas où $2 \leqslant n \leqslant 23$. $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
On est en situation d'équiprobabilité.

$P(X_n = 0) = \dfrac{\text{nb cas fav}}{\text{nb cas possibles}} = \dfrac{\binom{23}{n}}{\binom{25}{n}} = \dfrac{(25-n)(24-n)}{25 \times 24}$.
$P(X_n = 2) = \dfrac{\binom{23}{n-2}}{\binom{25}{n}} = \dfrac{n(n-1)}{25 \times 24}$.
$P(X_n = 1) = \dfrac{2 \times \binom{23}{n-1}}{\binom{25}{n}} = \dfrac{2n(25-n)}{25 \times 24}$.
On constate que les formules sont encore vraies pour $n = 0, 1, 24, 25$.

Exercice 12. On dispose de trois urnes numérotées de 1 à 3. Dans chaque urne, il y a 6 jetons portant des numéros de 1 à 3.
Dans l'urne 1, il y a 3 jetons n° 1, 1 jeton n° 2, 2 jetons n° 3.
Dans l'urne 2, il y a autant de jetons de chaque numéro.
Dans l'urne 3, il n'y a que des n° 3.
A l'instant n, on pioche un jeton dans une urne. A l'instant $n+1$, on piochera dans l'urne du numéro du jeton.
Tous les tirages se font avec remise. A l'instant $n = 1$, on pioche un jeton dans l'urne 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du jeton tiré à l'instant n.
On note aussi $a_n = P(X_n = 1)$, $b_n = P(X_n = 2)$ et $c_n = P(X_n = 3)$.

1. Donner $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$.
2. Que valent $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)$, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3)$?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$.
4. Montrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
5. En déduire l'expression de a_n puis celle de b_n en fonction de n.
6. Que vaut c_n ?
7. Quand n tend vers l'infini, quelles sont les limites des trois suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) ? Était-ce attendu ?

Solution.

1. D'après les données du problème : $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$.
   $a_1 = 1/2, b_1 = 1/6, c_1 = 1/3$ (remarque : $a_1 + b_1 + c_1 = \dfrac{3+1+2}{6} = 1$.)
2. $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = \dfrac{1}{3}$
3. D'après la formule des probabilités totales relative au système complet d'événements $(X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3)$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) \\
&= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) \\
&= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + 0; \\
b_{n+1} &= P(X_{n+1} = 2) \\
&= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 3) \\
&= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + 0.
\end{aligned}$$

4. $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1}$.
   On remplace b_{n+1} par $\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n$ puis b_n par $3a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n$.
   On trouve $a_{n+2} = \frac{5}{6}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n$

5. $a_n = \frac{2}{3}(2/3)^n + \frac{1}{3}(1/6)^n$ et $b_n = \frac{1}{3}(2/3)^n - \frac{1}{3}(1/6)^n$

6. $(X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3)$ est un système complet d'événement, donc $a_n + b_n + c_n = 1$.
   $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - (2/3)^n$

7. Comme $2/3$ et $1/6$ sont dans $]-1, 1[$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

   Ce résultat est assez intuitif puisqu'on peut s'attendre à ce qu'un jeton 3 soit tiré et donc qu'on soit réduit à ne tirer que des jetons 3 par la suite.