Feuille d'exercices n° 24 : géométrie dans l'espace

Exercice 1.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées cylindriques $\left(2; \frac{5\pi}{3}, 5\right)$ et $\left(4, \frac{3\pi}{2}, -2\right)$.

2. Déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Exercice 2. Soient $A(0,1,2)$; $B(-1,1,1)$; $C(2;-1;2)$; $D(4;0;-1)$ quatre points de l'espace.
Calculer les quantités suivantes : AB, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.
Préciser si ces calculs permettent une conclusion géométrique.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points de l'espace, et I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées quel que soit le point M :

1. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{0}$.
3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Exercice 4.

1. Prouver la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.

2. En déduire l'identité $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

Exercice 5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Exercice 6. Dans l'espace rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on définit les vecteurs suivants : $\overrightarrow{u}(1, a, 2)$, $\overrightarrow{v}(2, 1, a)$, et $\overrightarrow{w}(a, 2, 1)$. Déterminer pour quelles valeurs du réel a la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace.

Exercice 7. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(0,-1,4)$, $B(1,-1,2)$, $C(2,-1,1)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 contenant A, B, et C.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 contenant A et la droite $\mathcal{D}$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan P_3 perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et contenant B.

4. Déterminer une équation cartésienne du plan P_4 contenant la droite $\mathcal{D}$ et parallèle à la droite (BC).

Exercice 8. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les droites D_1 définie par les équations cartésiennes $\begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$ et D_2 par les équations cartésiennes $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = a \end{cases}$ où a est un réel donné.

1. D_1 et D_2 sont-elles parallèles ?

2. Calculer la valeur de a pour que D_1 et D_2 soient coplanaires. Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection et une équation du plan P qui les contient toutes les deux.

Exercice 9.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace, dirigée par $\overrightarrow{v}$ et A un point de cette droite. Soit M un point de l'espace. Montrer que la distance entre $\mathcal{D}$ et M vaut $\dfrac{||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||}$.

2. Application : soit $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ et $M(1,1,1)$. Déterminer la distance entre $\mathcal{D}$ et M.

Exercice 10. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x+y-z=0$. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

2. Déterminer les coordonnées de l'image de M dans la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 11. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient les droites D_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$ et D_2 définie par les équations $\begin{cases} 3x+2y+4z=-8 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

1. Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer un vecteur directeur de la perpendiculaire commune Δ de D_1 et D_2.

3. Calculer la distance de D_1 à D_2.

Exercice 12. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les deux plans d'équations respectives $3x-4y+1=0$ et $2x-3y+6z-1=0$. Déterminer tous les points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercice 13. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramètrique $\begin{cases} x &= 4 + 2t \\ y &= 3 + t \\ z &= 1 + t \end{cases}$

1. Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de $\mathcal{D}$. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale. En déduire les coordonnées de H, projection orthogonale de O sur $\mathcal{D}$. Que vaut la distance de O à $\mathcal{D}$?

2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-2z=2$ contient la droite $\mathcal{D}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et de O à $\mathcal{P}'$. Retrouver la distance de O à $\mathcal{D}$.

Exercice 14. Déterminer le centre et le rayon des sphères suivantes. Étudier leur intersection avec le plan $\mathcal{P} : x+y+z-3=0$ (on donnera le centre et le rayon du cercle quand c'est possible).

1. $x^2+y^2+z^2-4y+6z+12=0$

2. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$

3. $x^2+y^2+z^2-4=0$

Exercice 15. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(6,-6,6)$ $B(-6,0,6)$ et $C(-2,-2,11)$.

1. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre B et passant par A.
2. Déterminer une équation du plan Π tangent à $\mathcal{S}$ en A.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale à Π passant par C. Déterminer les coordonnées du point D, intersection de Π avec $\mathcal{D}$.
4. Étudier l'intersection des droites (AD) et (BC) et déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.

Pour s'entrainer

Exercice 16. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre $A(1,0,0)$ et de rayon 1, et $\mathcal{D}$ la droite définie par le système d'équations $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

1. Calculer la distance de A à $\mathcal{D}$, et déterminer les points d'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$.
2. Montrer que le point $B(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ est sur $\mathcal{S}$ et écrire l'équation du plan $\mathcal{T}$ tangent à $\mathcal{S}$ au point B. Déterminer l'intersection de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équations respectives :
$\mathcal{D} : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-6}{a}$ et $\mathcal{P} : x+6y+5z-1=0$. Déterminer a pour que $\mathcal{D}$ soit parallèle à $\mathcal{P}$.

Exercice 18. Dans l'espace, que représentent séparément en coordonnées sphériques les équations :
$\rho = \rho_0$, $\quad \varphi = \varphi_0$, $\quad \theta = \theta_0$ pour $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_0 \in [-\pi, \pi]$, $\theta_0 \in [0, \pi]$ fixés ?

Exercice 19. Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ de l'espace on a :

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}) = \left((\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}) \wedge \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

Exercice 20. Dans un tétraèdre régulier de côté 1, déterminer :

1. la hauteur du tétraèdre (distance entre un sommet et son projeté orthogonal sur la face opposée),
2. le volume du tétraèdre,
3. la distance entre deux arêtes non coplanaires,
4. l'angle entre deux faces.

Exercice 21. Déterminer le centre A et le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes $x+y+z=0$, $x+y-z=2$, $x-y+z=4$ et $-x+y+z=6$ (on pourra commencer par déterminer les coordonnées des sommets du tétraèdre).

Exercice 22. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$,

1. Déterminer le centre Ω, le rayon, et l'équation de la sphère S circonscrite au tétraèdre $OABC$.
2. Déterminer la distance de Ω au plan (ABC).
3. En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 23 (Autour de la perpendiculaire commune)**.** Plaçons-nous dans l'espace. Soient deux droites $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}' = (A', \overrightarrow{u'})$ non coplanaires (rappelons que $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{u})$ signifie que $\mathcal{D}$ passe par le point A et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$).

1) Perpendiculaire commune à deux droites

1. Soit $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}$.
   Justifier que les plans $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{P}' = (A', \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v})$ sont bien définis et qu'ils sont sécants suivant une droite Δ qui rencontre orthogonalement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

2. Montrer que Δ est la seule droite sécante avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et orthogonale à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

   Δ est appelée *perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.*

2) Distance entre deux droites

1. Montrer que Δ coupe $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en deux points H et H' tels que

$$\forall M \in \mathcal{D}, \forall M' \in \mathcal{D}', \quad \| \overrightarrow{HH'} \| \leq \| \overrightarrow{MM'} \| .$$

   La distance $\| \overrightarrow{HH'} \|$ est appelée *distance des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et est notée* $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

2. Démontrer que

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{\left| \left((\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}) \mid \overrightarrow{AA'} \right) \right|}{\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} \|}.$$

3) Une application

Supposons dans cette section que

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases} .$$

1. (a) Montrer que l'on peut prendre $A(-1, 1, 0)$, $A'(0, 0, 1)$, $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$ et $\overrightarrow{u'} = (1, 3, 0)$.
   (b) Déterminer la distance entre les droites.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et une de $\mathcal{P}'$.
   (d) En déduire un système d'équations cartésiennes de Δ.
   En posant $z = \lambda$ et en résolvant le système, obtenir une équation paramétrique de Δ.
   (e) Déterminer les coordonnées de H et H' et retrouver le résultat de 1b

2. Montrer qu'il existe un couple unique de plans (Q, Q') tel que :

$$\mathcal{D} \subset Q, \quad \mathcal{D}' \subset Q' \quad \text{et} \quad Q // Q'.$$

   Former les équations cartésiennes de Q et Q'.