Semaine du 6 mai

Programme de colle n°26

Intégration

1) Subdivisions, fonctions en escaliers, intégrale d'une fonction continue sur un segment.
2) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f.
3) TOUT sur le calcul intégral (réviser le chapitre vu en début d'année).
4) Sommes de Riemann, méthode des rectangles.
5) Inégalité de Taylor-Lagrange.

Applications linéaires

1) Définition, noyau, image.
2) Vocabulaire : isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.
3) Espaces vectoriels isomorphes, défaut d'injectivité/surjectivité dû aux dimensions.
4) Théorème du rang.
5) Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$ (finie) alors f injective *ssi* f surjective *ssi* f bijective.
6) Projecteurs et symétries.

Questions de cours

1) Calculer certaines des intégrales suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\, dx$
   (c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{1+x+x^2}\, dx$
   (e) $I = \displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2+x^4} dx$
   (b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$
   (d) $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2}{(2-5x)^4}\, dx$
   (f) $I = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\sqrt{t}\right) dt$

2) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(e^t+1)dt$. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer le signe de F puis dresser son tableau de variations.
3) Calculer la limite des suites $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.
4) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange, l'appliquer à la fonction exponentielle puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}$.
5) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim E$ finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et S un supplémentaire de $\ker f$ dans E. Montrer que $\tilde{f}\colon \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme. En déduire le théorème du rang.
6) Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leur noyau et leur image :

   (a) $f_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
   (b) $f_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}$

7) Montrer que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ avec $p(x,y) = (2x-y, 2x-y)$ est un projecteur.
   Donner ses éléments caractéristiques.