# Feuille d'exercices n° 14 : correction

**Exercice 1.**

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ?
   $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -9x+7y=0\}$ $\quad$ $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-5y=1\}$
   $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0\}$ $\quad$ $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$
   $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$ $\quad$ $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|=|y|\}$

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ?
   $E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \geqslant 0\}$ $\quad$ $E_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=0\}$

3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ?
   L'ensemble $E_9$ des suites croissantes $\quad$ L'ensemble $E_{10}$ des suites monotones
   L'ensemble $E_{11}$ des suites bornées $\quad$ L'ensemble $E_{12}$ des suites convergeant vers 0
   L'ensemble $E_{13}$ des suites arithmétiques $\quad$ L'ensemble $E_{14}$ des suites géométriques
   L'ensemble $E_{15}$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 2x_n$

4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ?
   L'ensemble $E_{16}$ des fonctions positives $\quad$ L'ensemble $E_{17}$ des fonctions s'annulant en 0
   L'ensemble $E_{18}$ des fonctions continues $\quad$ L'ensemble $E_{19}$ des fonctions dérivables
   L'ensemble $E_{20}$ des fonctions $2\pi$-périodiques $\quad$ L'ensemble $E_{21}$ des $f$ telles que $f(3) = 2f(5) - 1$

**Solution.** Ici, on ne démontre que dans le cas où $E$ n'est pas un espace vectoriel. Il faut faire la preuve dans le cas positif aussi.

1. Oui
2. Non : $(0,0) \notin E$
3. Non. $(0,1) \in E$ et $(-1,0) \in E$ mais $(-1,1) \notin E$
4. Oui
5. Non. $(1,2) \in E$ mais $-(1,2) \notin E$
6. Non. $(-1,1) \in E$ et $(1,1) \in E$ mais $(0,2) \notin E$
7. Non. $(1,1,1) \in E$ mais $-(1,1,1) \notin E$
8. Oui
9. Non. Si $u$ est strict. croissante alors $-u$ est strict. décroissante
10. Non. $u_n = 2n - n^2$.
11. Oui
12. Oui
13. Oui
14. Non. $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. Mais $2^n + 3^n$ n'est pas géométrique
15. Oui
16. Non. $x^2 \geqslant 0$ mais $-x^2 \leqslant 0$
17. Oui
18. Oui
19. Oui
20. Oui
21. Non. $0 \notin E_{21}$.

**Exercice 2.** Équation du sous-espace engendré.

1. À quelle condition sur le réel $a$, a-t-on : $(1,a,2) \in \mathrm{Vect}((1,1,3),(0,1,1))$ ?

2. Déterminer de même une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c)$ pour que :
   $(a,b,c) \in \mathrm{Vect}((1,1,3),(2,-1,3),(0,1,1))$

**Solution.**

1. $(1,a,2) \in \mathrm{Vect}((1,1,3),(0,1,1)) \Leftrightarrow a=0$. On a alors : $(1,0,2)=(1,1,3)-(0,1,1)$

2. $(a,b,c) \in \mathrm{Vect}((1,1,3),(2,-1,3),(0,1,1)) \Leftrightarrow 2a+b-c=0$. Le sous-espace $\mathrm{Vect}((1,1,3),(2,-1,3),(0,1,1))$ est donc le plan d'équation cartésienne $2x+y-z=0$.

**Exercice 3.** Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Vect}((1,1,1),(2,1,-1)) = \mathrm{Vect}((1,2,4),(3,1,-3))$.

**Solution.** On résout : $x(1,1,1)+y(2,1,-1)=a(1,2,4)+b(3,1,-3)$, d'inconnue $(x,y)$, puis d'inconnue $(a,b)$. On trouve une solution pour chaque système . Donc, par double inclusion,
$\boxed{\mathrm{Vect}((1,1,1),(2,1,-1)) = \mathrm{Vect}((1,2,4),(3,1,-3)).}$

**Exercice 4.** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles suivants :

$$F=\{(x,y,z) \mid 2x+y-3z=0\} \quad \text{et} \quad G=\{(2a+b,a-b,3a-b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}.$$

Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F\cap G$.

**Solution.** $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (méthode 1) et $G$ est un espace vectoriel (méthode 2 : $G=\mathrm{Vect}((2,1,3),(1,-1,-1))$).
On trouve $\boxed{F\cap G = \mathrm{Vect}((3,0,2))}$

**Exercice 5.** Dans les cas suivants, on donne trois ensembles $E$, $F$ et $G$. Montrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $E$.

1. Soient $E$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $F$ celui des suites constantes et $G$ l'ensemble des suites convergeant vers 0.

2. Soit $E$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. On pose $F=\{f\in E \mid f(0)=f'(0)=0\}$ et $G$ l'ensemble des fonctions affines.

3. $E=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ ; $F=\{f\in E \mid \int_{-1}^1 f(t)\,dt=0\}$ et $G$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[-1,1]$.

4. $E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-u_{n+2}-u_{n+1}+u_n=0\}$ ;
   $F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}+u_n=0\}$ et $G=\{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0\}$.

**Solution.** Il faut à chaque fois montrer que :

- $F,G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ ;
- tout élément de $E$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$.

1. $F=\mathrm{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}})$ et $G$ est un espace vectoriel par la méthode 1 (à faire).
   Montrons que $E=F\oplus G$. Soit $w\in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple $(u,v)\in F\times G$ tel que $w=u+v$

   Analyse : soit $(u,v)\in F\times G$ tel que $w_n=u_n+v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   La suite $u$ est constante par hypothèse donc $w_n=u_0+v_n$. Comme $u\in E$, elle converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}$ et puisque $v_n\to 0$ par hypothèse, on a $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_0+v_n=u_0$. Ainsi $u$ est la suite constante égale à $\ell$ et $v_n=w_n-\ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   Synthèse : on pose $u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell$ et $v_n=w_n-\ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors $u\in F$ ; $v_n\to 0$ donc $v\in G$ et enfin $w=u+v$.

2. $F$ est un espace vectoriel (méthode 1) et $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto 1)$.
   Montrons que $E = F \oplus G$. Soit $h \in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$

   Analyse : soit $(f, g) \in F \times G$ tel que $h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En dérivant cette relation, on a aussi $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En évaluant ces deux dernières égalités en $x = 0$, on obtient $g(0) = h(0)$ et $g'(0) = h'(0)$. Or, $g$ est affine par hypothèse donc il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $g(x) = ax+b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Avec ce qui précède, on trouve $a = h'(0)$ et $b = h(0)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = h'(0)x+h(0)$ et $f(x) = h(x)-h'(0)x-h(0)$.

   Synthèse : on pose $g(x) = h'(0)x + h(0)$ et $f(x) = h(x) - h'(0)x - h(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien :

   - $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$ ;
   - $g \in G$ ;
   - $h = f + g$.

**Exercice 6.** Déterminer une famille génératrice pour les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2z\} \qquad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2z, x + y + z = 0\}$$

**Solution.** $\boxed{A = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1))}$ $\boxed{B = \mathrm{Vect}((1, -3, 2))}$

**Exercice 7.** Pour $A$ et $B$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une famille génératrice de $A \cap B$.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 3z\}$.
2. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 3z\}$ et $B = \mathrm{Vect}((1, 1, 2), (2, 1, 1))$.
3. $A = \mathrm{Vect}((1, 2, 2), (3, 2, 2))$ et $B = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 2))$.

**Solution.**

1. $\boxed{A \cap B = \mathrm{Vect}((5, 2, 3))}$
2. $\boxed{A \cap B = \mathrm{Vect}((7, 4, 5)))}$
3. $\boxed{A \cap B = \mathrm{Vect}((0, -1, -1))}$

**Exercice 8.** Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? Sont-elles des bases ?

1. $((1, 2, 5, 4), (2, 4, 10, 7))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $((1, 2, 3), (-5, -10, -15))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$ dans $\mathbb{R}^4$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Solution.**

1. libre, pas génératrice
2. pas libre, pas génératrice
3. libre, génératrice, base

4. pas génératrice. libre si et seulement si $\alpha \neq 1$

**Exercice 9.** Dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ? forment-ils une famille génératrice de $E$ ?

1. $u\colon x \mapsto \cos x, \quad v\colon x \mapsto \sin x, \quad w\colon x \mapsto e^x$ ;

2. $u_1\colon x \mapsto 2\cos x, \quad u_2\colon x \mapsto \cos 2x, \quad u_3\colon x \mapsto \cos^2 x, \quad u_4\colon x \mapsto \sin^2 x$

**Solution.**

1. libre, pas génératrice

2. pas libre ($u_2 = u_3 - u_4$), pas génératrice

**Exercice 10.** Dans chacun des cas suivants, montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $E$, et déterminer les coordonnées de $u$ dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$ ; $\mathcal{F} = ((-1,1,1);(1,-1,1);(1,1,-1))$ et $u = (2,3,4)$.

2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ et $u = I_2$.

**Solution.**

1. coordonnées de $u$ dans $\mathcal{F}$ : $\boxed{X_u = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}}$

2. coordonnées de $u$ dans $\mathcal{F}$ : $\boxed{X_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$

**Exercice 11.**

1. Donner une base de $F = \text{Vect}(u,v,w)$, où $u = (1,-1,1)$, $v = (0,-1,2)$ et $w = (1,-2,3)$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. Donner une base de $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x + 2y + z = 0\}$.

3. Montrer que $F = G$.

**Solution.**

1. On constate : $u + v = w$. Donc $F = \text{Vect}(u,v)$. $(u,v)$ est libre. Donc $\boxed{\text{c'est une base de } F.}$

2. $G = \text{Vect}((-2,1,0),(-1,0,1))$. La famille $((-2,1,0),(-1,0,1))$ est libre : $\boxed{\text{c'est une base de } G.}$

3. $u \in G$ et $v \in G$ car ils vérifient l'équation de $G$. Donc $F \subset G$.
   On a : $(-2,1,0) = -2u + 3v \in F$ et $(1,-2,3) = u + v \in F$. Donc $G \subset F$. Finalement : $\boxed{F = G}$

**Exercice 12.** Donner une base des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$

2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x = 2y = 3z\}$

3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + 2y - z = x - y = t = 0\}$
5. $E_5 =$ l'ensemble des suites arithmétiques dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
6. $E_6 =$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' = 0$
7. $E_7 =$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$
8. $E_8 =$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + 8\cos(4x)y = 0$

**Solution.** On cherche une famille génératrice de l'espace. On vérifie qu'elle est libre.

1. $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$
2. $(3, 3/2, 1)$
3. $(1, -1, 1, -1)$
4. $(1, 1, 3, 0)$
5. On pose $v$ la suite constante égale à 1 et $w_n = n$. Alors $(v, w)$ est une base. $(u = u_0 \times v + r \times w)$
6. $y'' = 0 \Leftrightarrow y(x) = ax + b$ avec $a$ et $b$ réels. Une base est : $(x \mapsto x, x \mapsto 1)$.
7. $(x \mapsto \cos 2x, x \mapsto \sin 2x)$
8. $(x \mapsto \exp(-2\sin(4x))$

**Exercice 13.** Compléter en une base de $\mathbb{K}^4$ la famille $((1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1))$.

**Solution.** Beaucoup de réponses possibles : $((1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0))$.

**Exercice 14.** Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, et qu'ils sont supplémentaires.

1. $E = \mathbb{R}^2$ ; $F = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ ; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } x + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$ ; $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((3, 2, 1))$.
4. $E = \mathbb{R}_2[X]$ ; $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}_6[X]$ ; $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$ et $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$.

**Solution.** On donne une base de $F$ et $G$ à chaque fois. On utilise ensuite le fait que $F \oplus G = E$ si et seulement si lorsqu'on concatène une base de $F$ et une base de $G$, on obtient une base de $E$.

1. $F = \text{Vect}((-1, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 1))$. Or $((-1, 1), (1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc $F \oplus G = E$.
2. $F = \text{Vect}((1, 1, -1))$ et $G = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Or $((1, 1, -1), (-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $F \oplus G = E$.

**Exercice 15.** Dans $E = \mathbb{R}^3$ soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.
Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

**Solution.** $u \in F \cap G \Leftrightarrow u = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) = a(1, 1, 1) \Leftrightarrow x = y = a = 0$. Donc $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.
$((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$