À rendre pour le 26 février 2024

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4 (facultatif)

Correction

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^4$. On considère les sous-espaces suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y \text{ et } x + t = 0\}, \quad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0\}, \quad H = \mathrm{Vect}((1,0,1,-1)).$$

1) Montrer de **deux façons différentes** que G est un espace vectoriel.

2) Parmi les inclusions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi :

$$F \subset G, \qquad G \subset F, \qquad H \subset G, \qquad G \subset H.$$

3) Déterminer une base pour chacun des espaces F, G et H.

4) Montrer que $F \oplus H = G$.

Solution.

1) Méthode 1 :
- $G \subset \mathbb{R}^4$ par définition ;
- $(0,0,0,0) \in G$;
- soient $\lambda \in \mathbb{R}$, (x,y,z,t) et (x',y',z',t') dans G.

Alors $(x,y,z,t) + \lambda(x',y',z',t') \in G$ car $x + \lambda x' + t + \lambda t' = x + t + \lambda(x' + t') = 0 + \lambda \times 0 = 0$.
Donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \text{ et en particulier un espace vectoriel.}}$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} u = (x,y,z,t) \in G &\iff x + t = 0 \\ &\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \\ t = -\alpha \end{cases} \\ &\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \ u = \alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{G = \mathrm{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)) \text{ est un espace vectoriel.}}$

2) Si $(x,y,z,t) \in F$ alors en particulier $x + t = 0$ *i.e.* $(x,y,z,t) \in G$. Ainsi $\boxed{F \subset G.}$
$(1,0,0,-1)$ appartient à G mais pas à F donc $\boxed{G \text{ n'est pas inclus dans } F.}$
$(1,0,1,-1) \in G$ et G est un sous-espace vectoriel (donc stable par combinaison linéaire), ainsi $\boxed{H = \mathrm{Vect}((1,0,1,-1)) \subset G.}$
$(1,1,0,-1)$ appartient à G mais n'est pas colinéaire à $(1,0,1,-1)$ donc n'appartient pas H. Ainsi, $\boxed{G \text{ n'est pas inclus dans } H.}$

3) Pour F : on a

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+t=0 \end{cases} \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \\ t=-\alpha \end{cases}$$

Ainsi $F=\mathrm{Vect}((1,1,0,-1),(0,0,1,0))$, autrement dit, la famille $((1,1,0,-1),(0,0,1,0))$ est génératrice de F. Puisqu'il s'agit de deux vecteurs non-colinéaires, cette famille est aussi libre et donc c'est une base de F.

Pour G : on a vu que $((1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$ est une famille génératrice de G. Montrons qu'elle est libre. Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$.

$$x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)=0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ -x=0 \end{cases}$$

Ainsi $x=y=z=0$ et donc la famille est libre et finalement c'est une base de G.

Pour H : $((1,0,1,-1))$ est une famille génératrice de H et puisqu'il s'agit d'un seul vecteur non-nul, c'est aussi une famille libre donc finalement une base de H.

4) Puisque $F=\mathrm{Vect}((1,1,0,-1),(0,0,1,0))$ et $H=\mathrm{Vect}((1,0,1,-1))$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}=((1,1,0,-1),(0,0,1,0),(1,0,1,-1)$ est une base de G. Soient $u=(a,b,c,d)\in G$ et $x,y,z\in\mathbb{R}$.

$$x(1,1,0,-1)+y(0,0,1,0)+z(1,0,1,-1)=u \iff \begin{cases} x+z &=a \\ x &=b \\ y+z &=c \\ -x-z &=d \end{cases} \iff \begin{cases} x &=b \\ y &=-a+b+c \\ z &=a-b \\ z &=-d-b \end{cases}$$

Le système admet donc une unique solution car $a=-d$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de G et F et H sont supplémentaires dans G (mais pas dans $\mathbb{R}^4$).

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, on considère les deux sous-espaces suivants :

$$F=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0=u_1=0\right\}, \qquad G=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n\right\}.$$

1) Déterminer une base de G.

2) Montrer que F est un espace vectoriel.

3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Solution.

1) On explicite les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant : $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$.
Équation caractéristique : $r^2=4r-4 \Leftrightarrow r=2$.

Donc il existe deux réels λ et μ tels que : $u_n = 2^n(\lambda + \mu n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $G = \text{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
La famille $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc génératrice de G. De plus, elle est libre car les deux suites ne sont pas colinéaires. D'où, $\boxed{((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ est une base de } G.}$

2) - $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- La suite nulle vérifie $u_0 = u_1 = 0$ donc elle est dans F.
- Soient u et v dans F et λ un réel.
$(u + \lambda v)_0 = u_0 + \lambda v_0 = 0$ car $u_0 = v_0 = 0$.
$(u + \lambda v)_1 = u_1 + \lambda v_1 = 0$ car $u_1 = v_1 = 0$.
Donc F est stable par combinaison linéaire.
Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ donc en particulier un espace vectoriel.}}$

3) Soit $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrons par analyse-synthèse que w s'écrit de manière unique $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
Analyse : soient $u \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w_n = u_n + v_n = u_n + 2^n(\lambda + \mu n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $w_0 = u_0 + 2^0\lambda = \lambda$ car $u \in F$. De même, $w_1 = u_1 + 2(\lambda + \mu) = 2\lambda + 2\mu$.
On trouve : $\lambda = w_0$ et $\mu = \dfrac{w_1}{2} - \lambda = \dfrac{w_1}{2} - w_0$.
Donc $v_n = 2^n(w_0 + n(\dfrac{w_1}{2} - w_0))$ et ainsi $u_n = w_n - v_n = w_n - 2^n(w_0 + n(\dfrac{w_1}{2} - w_0))$.
Synthèse : on pose $v_n = 2^n(w_0 + n(\dfrac{w_1}{2} - w_0))$ et $u_n = w_n - v_n = w_n - 2^n(w_0 + n(\dfrac{w_1}{2} - w_0))$.
- On a bien $w = u + v$.
- v est dans G car combinaison linéaire des deux suites qui engendrent l'espace.
- $u_0 = w_0 - 2^0(w_0 + 0 \times (\dfrac{w_1}{2} - w_0)) = 0$ et $u_1 = w_1 - 2^1(w_0 + (\dfrac{w_1}{2} - w_0)) = 0$. Ainsi, $u \in F$.
Finalement, $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Exercice 3. Soient E, F et G trois ensembles.

Partie A

Dans cette partie, on considère deux applications $f\colon E \to F$ et $g\colon G \to F$. On suppose que g est injective. On va, entre autres, montrer l'équivalence suivante :

$$\exists h \in \mathcal{F}(E, G),\ g \circ h = f \quad \Longleftrightarrow \quad f(E) \subset g(G).$$

1) On suppose dans cette question l'existence d'une fonction $h\colon E \to G$ telle que $g \circ h = f$.

   a) Montrer que $f(E) \subset g(G)$.

   b) Montrer que la fonction h est unique : si $h_1, h_2 \in \mathcal{F}(E, G)$ vérifient $g \circ h_1 = g \circ h_2 = f$ alors $h_1 = h_2$.

2) On suppose à présent que $f(E) \subset g(G)$.

   a) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe **un unique** $z_x \in G$ tel que $f(x) = g(z_x)$. On pose $h(x) = z_x$.

   b) Que vaut $g \circ h$?

c) Montrer que h est injective si et seulement si f est injective.

d) Montrer que h est surjective si et seulement si $f(E) = g(G)$.

Partie B

Dans cette partie on considère deux applications $f\colon E \to F$ et $g\colon E \to G$. On suppose que f est surjective. On va, entre autres, montrer l'équivalence suivante :

$$\exists h \in \mathcal{F}(F,G),\ h \circ f = g \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ g(x) = g(x')\Big).$$

1) On suppose dans cette question l'existence d'une fonction $h\colon F \to G$ telle que $h \circ f = g$.

a) Montrer que : $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ g(x) = g(x')$.

b) Montrer que la fonction h est unique.

2) On suppose à présent que : $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ g(x) = g(x')$.

a) Justifier que pour tout $y \in F$, il existe **un unique** $z_y \in G$ pour lequel il existe un antécédent de y par f qui soit aussi un antécédent de z_y par g. On pose $h(y) = z_y$.

b) Que vaut $h \circ f$?

c) Montrer que h est surjective si et seulement si g est surjective.

d) Montrer que h est injective si et seulement si : $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \ \Leftrightarrow\ g(x) = g(x')$.

Solution.

Partie A

1) a) Soit $y \in f(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ donc, par hypothèse, $y = g(h(x))$ qui est bien un élément de $g(G)$ car $h(x) \in G$. D'où l'inclusion.

b) Soit $x \in E$. On a $g(h_1(x)) = f(x) = g(h_2(x))$ donc $h_1(x) = h_2(x)$ par injectivité de g.
Ainsi, $h_1 = h_2$.

2) a) Soit $x \in E$. On sait que $f(x) \in f(E) \subset g(G)$ par hypothèse. Il existe donc $z \in G$ tel que $f(x) = g(z)$. Montrons que cet élément z est unique. On considère $z' \in G$ tel que $f(x) = g(z')$. Alors, $g(z) = f(x) = g(z')$ donc $z = z'$ par injectivité de g. Ainsi, il existe un unique élément de G dont l'image par g vaut $f(x)$. On note $h(x)$ cet élément.

b) Par construction, $g(h(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$ donc $g \circ h = f$.

c) Sens direct : supposons que h est injective. Alors $f = g \circ h$ est injective en tant que composée de fonctions injectives. Histoire de bien faire les choses, on va remontrer ce résultat. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a $g(h(x)) = g(h(x'))$ donc $h(x) = h(x')$ par injectivité de g et finalement $x = x'$ par injectivité de h. D'où, f est injective.

Sens réciproque : supposons que f est injective. Alors $g \circ h$ injective implique que h est injective (c'est aussi un résultat du cours). En effet, soient $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$. Alors, $g(h(x)) = g(h(x'))$ *i.e.* $f(x) = f(x')$ donc $x = x'$ par injectivité de f.

d) Sens direct : supposons que h est surjective et montrons que $f(E) = g(G)$. On sait déjà par hypothèse que $f(E) \subset g(G)$ donc il suffit de montrer l'autre inclusion. Soit $y \in g(G)$. Il existe

$z \in G$ tel que $y = g(z)$. Puisque $h\colon E \to G$ est surjective, il existe aussi $x \in E$ tel que $z = h(x)$. Ainsi, $y = g(h(x)) = f(x) \in f(E)$. D'où, $g(G) \subset f(E)$.

Sens réciproque : supposons que $f(E) = g(G)$ et montrons que h est surjective. Soit $z \in G$. Alors $g(z) \in g(G) = f(E)$ donc il existe $x \in E$ tel que $g(z) = f(x)$. Or, $f(x) = g(h(x))$ donc $z = h(x)$ par injectivité de g. Ainsi, h est surjective.

Partie B

1) a) Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $h(f(x)) = h(f(x'))$ *i.e.* $g(x) = g(x')$.

   b) Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{F}(F, G)$ telles que $h_1 \circ f = g = h_2 \circ f$. Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors, $h_1(y) = h_1(f(x)) = g(x) = h_2(f(x)) = h_2(y)$. D'où $h_1 = h_2$.

2) a) Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On pose $z = g(x)$. L'élément x est à la fois un antécédent de y par f et un antécédent de z par g donc z vérifie la propriété souhaitée. Montrons à présent qu'il est unique. Soit $z' \in G$ tel qu'il existe $x' \in E$ vérifiant $f(x') = y$ et $g(x') = z'$. On a $f(x) = y = f(x')$ donc, par hypothèse, $g(x) = g(x')$ *i.e.* $z = z'$. Ainsi, il existe un unique élément de G qui possède un antécédent par g qui soit aussi un antécédent de y par f. On note $h(y)$ cet élément.

   b) Soient $x \in E$ et $y = f(x)$. Par construction, $h(y)$ est l'image par g de n'importe quel antécédent de y par f. Puisque x est un antécédent de y par f, on a $h(f(x)) = h(y) = g(x)$. D'où, $h \circ f = g$.

   c) Sens direct : supposons que h est surjective. Alors $g = h \circ f$ est surjective en tant que composée de fonctions surjectives. On remontre ce résultat. Soit $z \in G$. Par surjectivité de h, il existe $y \in F$ tel que $z = h(y)$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $z = g(x)$ et g est surjective.

   Sens réciproque : supposons que g est surjective. Alors, $h \circ f$ surjective implique que h est surjective. Une fois de plus on remontre ce résultat du cours car cela ne fait jamais de mal de réviser. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g, il existe $x \in E$ tel que $z = g(x) = h(f(x))$. Ainsi $z = h(y)$ avec $y = f(x) \in F$ donc h est surjective.

   d) Sens direct : supposons que h est injective. Soient $x, x' \in E$. On sait déjà par hypothèse que si $f(x) = f(x')$ alors $g(x) = g(x')$. Réciproquement, si on suppose que $g(x) = g(x')$ *i.e.* $h(f(x)) = h(f(x'))$ alors, comme h est injective, on a $f(x) = f(x')$. D'où l'équivalence souhaitée.

   Sens réciproque : supposons que "$f(x) = f(x') \Leftrightarrow g(x) = g(x')$" pour tous $x, x' \in E$ et montrons que h est injective. Soient $y, y' \in F$ tels que $h(y) = h(y')$. Par surjectivité de f, il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a donc $h(f(x)) = h(f(x'))$ *i.e.* $g(x) = g(x')$ donc, par hypothèse, $f(x) = f(x')$ *i.e.* $y = y'$. D'où, h est injective.