Feuille d'exercices n° 5 : nombres complexes

Exercice 1. Écrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique : $A = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.
En déduire la valeur de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$, puis de $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

$$a = \left(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}\right)^8, \qquad b = \left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}.$$

Indication : Pour a, mettre $\dfrac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}$ sous forme algébrique. Pour b, mettre $1-i$ et $1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 3. Soient a et b deux réels. Mettre sous forme polaire $e^{ia}+e^{ib}$.
Simplifier $\dfrac{e^{ia}-e^{ib}}{e^{ia}+e^{ib}}$ si $e^{ia}+e^{ib} \neq 0$.

Exercice 4. On considère le polynôme $P = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.

1. Déterminer toutes les racines de P.
2. Calculer $\cos(5t)$ en fonction de $\cos t$.
3. En déduire que le réel $\cos \frac{\pi}{10}$ est une racine de P.
4. Déterminer $\cos \frac{\pi}{10}$. (Indication : $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} \approx 0,95$).
5. De la même façon, écrire les autres racines de P comme des cos.

Exercice 5. Calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \sin(2kx), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \sin(kx), \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \sin^k(x), \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2k \sin(kx).$$

Exercice 6. Linéariser $A = 2\cos^4 x \sin^3 x + \cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice 7. Exprimer $\sin^2(3x)$ en fonction de puissances de $\cos x$.
Exprimer $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)+\sin(8x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 8. Montrer que pour tous complexes z_1 et z_2 de $\mathbb{U}$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$, on a $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Indication : Comparer Z et $\overline{Z}$. Penser que si $z \in \mathbb{U}$, alors $\overline{z} = ...$

Exercice 9. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $Z = \dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.

Indication : Calculer $Z + \overline{Z}$. Mettre sous le même dénominateur.

Exercice 10. Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z vérifie l'une des conditions suivantes (pour chaque cas, on fera une résolution algébrique et une géométrique).

1. Z est réel ;
2. Z est imaginaire pur ;
3. Z est de module 1.

Exercice 11. On définit une application f sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ en posant $f(z) = -z\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = z$.
2. Montrer que pour tout $z \neq 1$ on a $f \circ f(z) = z$. On dit que f est une involution.
3. Calculer $|f(z)|$ en fonction de $|z|$.
4. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque ouvert de rayon 1 centré en l'origine. On appelle image de D par f l'ensemble noté $f(D)$ défini par $f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$.
   Montrer que l'on a $f(D) \subset D$.

Exercice 12. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Décrire géométriquement l'application r qui envoie $M(z)$ sur $M'(z')$ avec : $z' = -jz - ij^2$.

Indication : Les transformations du programme sont : translation, rotation, homothétie. Comment reconnaitre l'une de l'autre ? Comment trouver le centre ?

Exercice 13. À l'extérieur du quadrilatère $ABCD$ on construit les points E, F, G, H tels que le triangle ABE est rectangle isocèle en E, BCF l'est en F, CDG en G, et DAH en H. Montrer que les droites (HF) et (EG) sont perpendiculaires et que $HF = EG$. (Pour cela on calculera les affixes des points E, F, G, H en fonctions des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D.)

Indication : $\overrightarrow{EB}$ est l'image de $\overrightarrow{EA}$ par une rotation. Laquelle ? Écrire cette transformation en complexe.
Pour déterminer un angle ou une longueur, penser à l'argument, au module.

Pour s'entrainer

Exercice 14. A, B, C sont les points d'affixe a, b, c. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. ABC est un triangle équilatéral.
2. $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z| = |z-1| = \dfrac{1}{|z|}$.
2. Les points M, P, Q d'affixes z, z^2, z^4 sont distincts et alignés.
3. Les points A, M, P d'affixes $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.

Exercice 16. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $\dfrac{z}{z'} \in i\mathbb{R}$.

1. Montrer que $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 0$.
2. Montrer que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

Exercice 17. Montrer que si $|z| = 1$, on a soit $|1+z| \geq 1$, soit $|1+z^2| \geq 1$. Peut-on avoir les deux simultanément ?

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $S_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$ de deux façons :

1. en utilisant que $\sin(x)S_n$ est une somme télescopique,
2. en utilisant que $\sum_{k=1}^{n} e^{2ikx}$ est une somme usuelle.

Exercice 19. Simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10}{\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)}.$$

Exercice 20. Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et trigonométrique.

1. $z = (1 + 2i)^3$
2. $z = \dfrac{4}{1 - i}$
3. $z = (2 + i)^2 \times \dfrac{1 - i}{4 + i}$
4. $z = e^{-i\frac{37\pi}{4}}$
5. $z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$
6. $z = (1 - i\sqrt{3})^{11}$
7. $z = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^5$
8. $z = e^{(1+i)\ln(3)}$

Exercice 21. Donner toutes les formes possibles de l'équation des cercles suivants (forme complexe factorisée $|z - a| = r$ et forme cartésienne développée $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$). Préciser si nécessaire le centre et le rayon du cercle.

1. cercle de centre $A(2 - i)$ et de rayon 3,
2. cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(-1 + 2i)$ et $B(3 + 4i)$,
3. cercle d'équation cartésienne développée $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 9 = 0$,
4. cercle tangent aux axes réel et imaginaire, et passant par le point $A(6 + 7i)$.

Exercice 22. Calculer les sommes : $\begin{cases} S = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \\ T = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots \\ U = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots \end{cases}$.

Indication : Utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer $S + T + U$, $S + jT + j^2U$, $S + j^2T + j^4U$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 23. Calculer les sommes : $\begin{cases} S = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots \\ T = \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots \\ U = \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots \\ V = \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots \end{cases}$.

Exercice 24. Calculer les sommes suivantes, en fonction de n et de θ.

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$
4. $S_4 = \sum_{k=1}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta)$
5. $S_5 = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\theta)$
6. $S_6 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(k\theta)}{\cos^k(\theta)}$
7. $S_7 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)}$
8. $S_8 = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$

Exercice 25. Écrire sous forme trigonométrique, et sous forme algébrique :
$1-i\sqrt{3}$, $12-12i$, i^2, i^3, i^{2014}, i^n pour $n \in \mathbb{N}$, $z=-\sqrt{3}+i$, $z^2=(-\sqrt{3}+i)^2$, $z^3=(-\sqrt{3}+i)^3$, $z^{2014}=(-\sqrt{3}+i)^{2014}$.

Exercice 26. On considère dans le plan complexe les points $A(-3+i)$; $B(1-2i)$; $C(1+3i)$ et $D(2+2i)$. Déterminer l'affixe de chacun des objets géométriques suivants :

1. milieu du segment $[BC]$
2. vecteur $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
3. point d'intersection des droites (AC) et (BD)
4. vecteur directeur (normé) de la droite (CD), vecteur normal (normé) à la droite (AB)
5. points d'intersection du cercle de diamètre $[AD]$ et de la droite (BC)
6. centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit du triangle ABD

Exercice 27. Soit l'équation (E) : $(1+iz)^3 = i(1-iz)^3$.

1. Résoudre (E) en développant (on remarquera une racine évidente).
2. Résoudre (E) en utilisant les racines cubiques de i ; en déduire $\cot \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 28.
À quelle transformation géométrique du plan correspond l'application $z \mapsto \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)z-\sqrt{3}+i$?

Exercice 29. Montrer qu'il existe une valeur de $\alpha \in \mathbb{C}$ pour laquelle les deux racines de l'équation $z^2-(2+i\alpha)z+i\alpha+2-\alpha=0$ sont complexes conjuguées (on montrera d'abord que si c'est le cas, alors les coefficients de l'équation sont réels). Calculer alors ces racines.

Exercice 30. Résoudre l'équation $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ d'inconnue z, où $\theta \in]0,\pi[$.

Exercice 31. On considère l'équation $(z+1)^5=(z-1)^5$.

1. Résoudre cette équation en développant tout.
2. Résoudre cette même équation de façon subtile en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cot\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cot\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 32. Simplifier la somme suivante : $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.

Exercice 33. Pour tout x réel, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{k+1}\cos(kx)$.

Exercice 34. Pour quelles valeurs de l'entier n le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 35. Soit n entier supérieur ou égal à 2. On pose $\alpha=\dfrac{\pi}{n}$. Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin(k\alpha)\sin(k+1)\alpha$.