Feuille d'exercices n° 22 : applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont elles des applications linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

1. $f_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

2. $f_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}$

3. $f_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+1, y+1) \end{array}$

4. $f_4\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$

5. $f_5\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$

6. $f_6\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$

Exercice 2. On note e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images de e_1, e_2 et e_3 soient respectivement : $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$ et $(-7,4,1)$.

1. Déterminer une expression explicite de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1,1,8)$ et de $(-2,1,1)$.
3. u est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 3. On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on considère $\phi\colon E \to E$. Dans quels cas ϕ est-elle linéaire :

1. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$
2. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$
3. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f^2(t)\,dt$
4. $\phi(f) = g$ avec $g(x) = f''(x)$

Exercice 4. Les applications suivantes sont elles des applications linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

$f_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}$

$f_2\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$

où on a posé $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire telle que $u^2 + 2u - id = 0$. Montrer que u est un automorphisme et déterminer u^{-1} en fonction de u.

Exercice 6. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$

Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 7. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P \in E, f(P) = P - XP'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau. L'application f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?

Exercice 8.

1. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(1,2) = (1,1,0)$ et $f(2,1) = (0,0,1)$. Déterminer l'image. Donner la dimension puis le noyau de f.

2. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (1,0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$. Déterminer l'image de f. Donner la dimension puis le noyau de f.

Exercice 9. On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P, associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.

2. Déterminer le noyau de f.

3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.

4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.

5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.

6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$.

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que x_1, x_2 et x_3 dans E sont non nuls et vérifient :
   $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 3x_2$ et $f(x_3) = 10x_3$.
   Montrer que (x_1, x_2, x_3) est libre.

2. Proposer un énoncé qui généralise 1).

Exercice 11. Soient f et g sont deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Ker}(f+g) \supset \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g$.

2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$; montrer que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Ker}(f \circ g) \supset \mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g$.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.

2. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.

3. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.

4. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = E \iff \mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$.

5. Montrer que : $E = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.

6. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

7. Montrer que : $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^4$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.

2. Pourquoi existe-t-il $w \in \mathbb{R}^4$ tel que la famille $(u, f(u), w)$ est libre ?
   Montrer alors que $\beta = (u, f(u), w, f(w))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer les coordonnées de $f(v)$ dans la base β, si $v \in \mathbb{R}^4$ a pour coordonnées $X_v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans la base β.

Exercice 14. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \left(\frac{3}{7}(x-y), \frac{4}{7}(y-x)\right)$. Montrer que f est une projection dont on précisera la éléments caractériques.

Exercice 15.

1. Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, -2x\right)$. Montrer que g est une symétrie. Notation : g est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
2. On note p tel que $g = 2p - I_2$. Montrer que p est le projecteur sur F, parallèlement à G.
3. Déterminer F et G.

Exercice 16. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et ϕ l'application définie par : $\forall P \in E, \quad \phi(P) = 2P - (X-1)P'$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$. L'endomorphisme ϕ est-il injectif ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(1, X)$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\phi) = E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\mathrm{Ker}(\phi)$ de direction $\mathrm{Im}(\phi)$. Que valent $\phi \circ p$ et $p \circ \phi$?

Exercice 17. Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Pour s'entrainer

Exercice 18. On considère $f((x,y)) = (x, 2x+y, y)$ et $g((x,y,z)) = (x+z, 5x-2y+z)$.

1. Vérifier que f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications linéaires.
2. Donner une base et la dimension de leur noyau puis de leur image.
3. Lesquels sont des isomorphismes.

Exercice 19. Soit $f((x,y,z)) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)$. On pose $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id})$.

1. Donner une base de F et de G.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme, où

$$f(P) = (P(0), P'(0), \cdots, P^{(n)}(0)).$$

Exercice 21. Soit f définie pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = X(P' - P'(0))$.

1. Montrer que $f\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ puis que f est linéaire.
2. Déterminer le rang de f.
3. Quelle est la dimension du noyau ? En déduire une base du noyau.

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un isomorphisme en déterminant $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.
2. Montrer que f est un isomorphisme en déterminant directement f^{-1}.
3. Dans cette question, E est supposé de dimension finie.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont en somme directe.
   b) Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id) \subset \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
   c) En déduire que : $\dim(E) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f - 2Id)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - Id)) \leqslant \dim(E)$.
   Indication : utiliser la formule de Grassman et le théorème du rang.
   d) Montrer que : $\mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id) = E$.
4. Plus généralement, établir que : $\mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id) = E$ avec E de dimension quelconque.

Exercice 23. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u^3 = Id$.

1. Montrer que u est un automorphisme en déterminant u^{-1}.
2. Montrer que la somme $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$ est directe.
3. Décomposer $\dfrac{1}{X^3 - 1}$ en éléments simples.
4. En déduire deux polynômes P et Q tels que : $1 = (X - 1)P(X) + (X^2 + X + 1)Q(X)$.
5. En utilisant la dernière relation en remplaçant X par u, en déduire que $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 24. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P \in E, f(P) = P - XP'$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y - xy' = x$. Possède-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?
2. Prouver que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau. L'application f est-elle injective ?
4. f est-elle surjective ?

Exercice 25. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\psi(P) = (X - 1)P' - P$.

1. Montrer que ψ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer le rang de ψ, la dimension et une base de $\mathrm{Ker}\psi$ puis la dimension, une base et l'équation de $\mathrm{Im}\psi$.
4. À quelle condition l'équation différentielle $(x - 1)y' - y = x^3 + x^2 + ax + b$ admet-elle une solution polynômiale de degré 3 (au plus) ?