Samedi 9 mars 2024

Devoir sur table n° 5

Mathématiques

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- Justifiez vos réponses.
- **ENCADREZ** vos résultats.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Numérotez les copies doubles.
- Bon courage !

Questions de cours

1) On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques sont définis respectivement par

$$\mathcal{S}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, M^T = M \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, M^T = -M \right\}.$$

   a) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel. On admet le résultat pour $\mathcal{A}_n$.

   b) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Donner les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre 5 en 0.
On calculera **explicitement** les factorielles et on détaillera le calcul pour $h(x)$.

$$f(x) = \arctan x, \qquad g(x) = \ln(1+x), \qquad h(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Exercice 1. On considère des codes à six chiffres entre 0 et 9. Pour chaque question, il faut compter le nombre de codes vérifiant une certaine condition. On justifiera systématiquement et on simplifiera au maximum ses résultats (on ne demande pas d'applications numériques poussées).

1) Le nombre total de codes.

2) Ceux commençant par un chiffre 1.

3) Ceux ayant au moins un chiffre 1.

4) Ceux contenant exactement deux chiffres pairs.

5) Ceux contenant au moins une séquence de trois (mais pas quatre) chiffres identiques.
Exemple : 000444 *convient mais pas* 100004.

Exercice 2.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; AM = MA \right\}.$$

   a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   b) Montrer que A^k est dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas particulier où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note aussi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E.

   b) Calculer A^2 et déterminer les coordonnées de A^2 dans la base $\mathcal{B}$.

3) On pose

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et $F = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

   a) Justifier que $F = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$. En déduire une base de F.

   b) Déterminer $F \cap E$. En donner une base.

   c) Donner un supplémentaire de $F \cap E$ dans E. Justifier.

Problème : calcul d'une intégrale

Dans ce problème, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x \ln x}{1 + x}.$$

1) a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.

   b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

   c) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, déterminer la valeur de $g'(0)$.

2) a) Montrer que l'équation $1 + x + \ln x = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ et que $\dfrac{1}{2e} < \alpha < \dfrac{1}{e}$. On rappelle que $\ln 2 = 0,69...$

   b) Montrer que $g(\alpha) = -\alpha$.

3) a) Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand $x \to +\infty$.

   b) Montrer que $g(x) \underset{+\infty}{=} \ln x - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} + o\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$.

4) Dresser le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ et tracer son graphe en faisant apparaitre deux tangentes remarquables ainsi que les points d'abscisses α et 1.

On cherche à déterminer une valeur approchée de α. Pour cela, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2e}$ et $u_{n+1} = -g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est bien définie et appartient à $[\frac{1}{2e}, \alpha]$.

   b) Justifier qu'il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que : $\forall x \in [\frac{1}{2e}, \alpha], \quad |g'(x)| \leqslant C$.
   On admet par la suite qu'on peut prendre $C = \dfrac{1}{e}$.

   c) En déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_n$ et déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} et α aient leurs cinq premières décimales en commun. On donne : $\ln(10) \leqslant 2,31$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6) Montrer que f_k est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)dt$ est bien définie.

7) Montrer que si $k > 1$ alors f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

8) Déterminer une primitive de f_k sur $]0, +\infty[$ puis une primitive F_k de f_k sur $[0, +\infty[$.

9) En déduire la valeur de I_k.

On pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ (celle-ci est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$).

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall t \in [0, 1], \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(t) = -g(t) + (-1)^n t^n g(t)$.

11) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| J - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leqslant \alpha \int_0^1 t^n dt$$

puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = J$.

Dans la suite du problème, on cherche à calculer la limite précédente. On note $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ la fonction cotangente (lorsqu'elle est bien définie). Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, m]\!]$, on pose

$$\alpha_k = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$

ainsi que $S_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

12) a) Montrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. En déduire que l'inégalité

$$\cot^2 x \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \cot^2 x$$

est valable sur un intervalle à préciser.

b) Montrer que : $\dfrac{\pi^2}{(2m+1)^2} S_m \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2m+1)^2}(m + S_m)$.

13) a) En utilisant la formule de De Moivre, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\big((2m+1)x\big) = \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j \sin^{2j+1}(x) \cos^{2m-2j}(x).$$

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, le réel α_k est racine du polynôme

$$P_m(X) = \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j X^{m-j}.$$

puis que $S_m = \dfrac{m(2m-1)}{3}$.

14) Établir que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15) On pose $A_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$ et $B_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$. Calculer $A_m - B_m$ puis déterminer finalement la valeur de J.