Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 21 : intégration

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose $g(x) = f(x) - \ln x$. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 2. On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si $x \leqslant t \leqslant 2x$ alors : $\cos 2x \leqslant \cos t \leqslant \cos x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \phi(x)$.
4. Quelle est la parité de ϕ ? En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} \phi(x)$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer G'.

1. $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} f(t) dt$.
2. $G(x) = \displaystyle\int_0^x (x - t) f(t) dt$.
3. $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x + t) f(t) dt$.

Exercice 4. Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - x f(x)$.

1. G est-elle dérivable ? Calculer $G'(x)$.
2. En déduire une égalité.
3. Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\, dt$.

1. Calculer I_0.
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_n$.
3. Donner une relation entre I_n et I_{n+1}.
4. En déduire une expression de I_n sous forme d'une somme.
5. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 6. On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Déterminer le sens de variation de I_n.

3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que pour $x \in [1, e]$, on a $0 \leq \ln x \leq \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geq 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.
6. En déduire un équivalent simple de (I_n) en $+\infty$.

Exercice 7. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 8. On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.
5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 9. Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
3. $u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$
5. $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$

Exercice 10. Montrer que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n\sqrt{n}}{3}$.

Exercice 11.

1. Calculez les dérivées successives de $f(s) = \ln(1+s)$.
2. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur $[a, b]$
3. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles.

1. On note $P(\lambda) = \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + g)^2$. Donner le signe de P.
2. Montrer que P est un polynôme. Quel est son dégré ?
3. En déduire que $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$. C'est ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour s'entrainer

Exercice 13. Soit f une application continue sur $[a,b]$.
Montrer que si $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$, alors f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 14. Étudier les variations de $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{4x} e^{-t^2}\ dt$.

Exercice 15. Soit f une fonction telle que $\forall k \leq n$, $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\ dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0;1]$.

Exercice 16. On considère une fonction f strictement positive sur le segment $[a;b]$.
Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}\ dx \geq (b-a)^2$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 17. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\ dx = \int_0^1 f(x)^3\ dx = \int_0^1 f(x)^4\ dx$.

Exercice 18.

1. Montrer que : $\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Soit $x > 0$. En posant $t = \frac{1}{s}$, calculer $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\arctan t}{1+t^2}\ dt$.
3. Retrouver le résultat précédent en dérivant la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\arctan t}{1+t^2}\ dt$.

Exercice 19. Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} e^{-t^2}\ dt$
- $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\ dt$
- $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt$

Exercice 20. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)x}dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$
4. $\displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q dx$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

5. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^5}{2+x^4} dx$

6. $\displaystyle\int_0^x \sin\left(\sqrt{t}\right) dt$ $x > 0$ (poser $t = s^2$)

7. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ (poser $x = \cos u$)

Exercice 21. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes puis calculer les intégrales.

1.
- $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \cosh(x)\cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \mathrm{argsh}(3x)$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{th}(x)$

2.
- $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5 \ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3 \ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x) \ dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \cosh^2(x)\sinh^2(x) \ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x) \ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x) \ dx$

3.
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-3x-4} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} \ dx$
- $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} \ dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^4+x^2+1)^2} \ dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \ dx$

Exercice 22. Etudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{2-\cos x} \ dx, \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{2-\cos x} \ dx, \qquad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{2+\cos x} \ dx.$$

1. Justifier l'existence de ces intégrales.
2. Montrer que $I_n = J_n + (-1)^n K_n$.
3. Montrer que $I_{n+1} - 4I_n + I_{n-1}$.
4. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 24. On considère la suite de terme général : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{1/n}(x) \ dx$.

1. Montrer $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.