Semaine du 27 mai

Programme de colle n°29

Géométrie dans l'espace

1) Coordonnées cartésiennes, cylindriques.
2) Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte et calcul en coordonnées.
3) Plan, droite dans l'espace : équation cartésienne, équation paramétrique.
4) Distance d'un point à un plan, d'un point à une droite.
5) Sphère dans l'espace, équation cartésienne.
6) Problèmes d'intersection.

Matrices et applications linéaires

1) Matrice d'une application linéaire.
2) Opérations sur les matrices/applications linéaires.
3) Matrice de changement de base.
4) Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Questions de cours

1) Soit $\mathcal{P}$ le plan engendré par $\vec{u}(1,1,1)$ et $\vec{v}(1,2,-1)$ et passant par $A(2,3,4)$.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2) Soit $\mathcal{P}\colon x+y+z+2=0$ un plan. Donner un vecteur normal et un point de $\mathcal{P}$ puis déterminer deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
3) Les systèmes suivants caractérisent-ils une droite ? Si oui, donner un vecteur directeur et un point de la droite.

$$(S_1)\colon \left\{\begin{array}{l} x+2y+z-2=0 \\ -3x-6y-3z+3=0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\colon \left\{\begin{array}{l} x+2y+z-2=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{array}\right.$$

4) On admet que les applications suivantes sont linéaires. Pour chacune, donner sa matrice dans les bases canoniques des espaces vectoriels :

(a) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ x+y \\ 3x+2y+8z \\ y-9z \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) $$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x+y & x-y \\ 3x+7y & -x+8y \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) $$g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (2x-3y+z, x-y+z) \end{array}$$

(d) $$\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

5) Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Soient p le projecteur sur F, parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G. Déterminer les matrices de p et s dans une base adaptée.
6) Soient $f,g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définis par $f(x,y,z)=(x+y-z, 2x+z, 2x+y-z)$ et $g(x,y,z)=(2x+y+z, -x-z, -x-y)$. On note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique. Montrer que f est un automorphisme (déterminer f^{-1}) et que g est un projecteur.
7) Montrer que $\mathcal{B}=((1,0,-1),(1,-1,0),(-1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{C}$ la base canonique.
   Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$. En déduire les coordonnées de $u=(1,2,3)$ dans $\mathcal{B}$.