

Programme de colle n°5

Calcul algébrique

- 1) Notation \sum, \prod .
- 2) Sommes classiques (à connaître par coeur) : $\sum_{k=m}^n 1, \sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2, \sum_{k=0}^n k^3, \sum_{k=0}^n q^k$.
- 3) Calcul de sommes, de sommes télescopiques, de sommes doubles, de sommes triangulaires.
- 4) Factorisation de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$ (pour n impair).
- 5) Factorisation d'un polynôme P par $(X - \alpha)$ quand $P(\alpha) = 0$.
- 6) Coefficients binomiaux.
- 7) Formule de Pascal, formule du binôme de Newton.
- 8) Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.

Nombres complexes

- 1) Forme algébrique et interprétation géométrique.
- 2) Conjugué, module, argument, forme polaire.
- 3) Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- 4) Formules de Moivre et d'Euler.

Questions de cours

- 1) Résoudre : $\sin t = \cos 3t$.
- 2) Résoudre : $|\sin \theta| < \frac{1}{2}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.
- 3) Preuve par récurrence de : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 4) Démontrer la formule pour $\sum_{k=0}^n q^k$ pour *tout* $q \in \mathbb{R}$.
- 5) Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$.
- 6) Calculer la somme : $S_5 = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1+3^{2k}}{2^{k+2}}$.
- 7) Calculer la somme : $S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$.
- 8) En considérant la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
- 9) Montrer que $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$. En déduire l'inégalité triangulaire.
- 10) Montrer que $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$. En déduire l'identité du parallélogramme : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.