Samedi 30 septembre 2023

Devoir sur table n° 1

Mathématiques

Durée : 2h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- ENCADREZ vos résultats.
- Numérotez les copies (pas les pages).
- Justifiez vos réponses.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Bon courage !

Question de cours
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est impaire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Solution. Soit $M(x, y) \in \mathcal{C}_f$. Montrons que $M'(x', y')$, le symétrique de M par rapport à l'origine, appartient aussi à $\mathcal{C}_f$. On a : $y = f(x)$, $x' = -x$ et $y' = -y$. Ainsi, $f(x') = f(-x) = -f(x)$ car f est impaire. Donc finalement, $f(x') = -y = y'$ *i.e.* $M' \in \mathcal{C}_f$.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes.

1) La fonction f ne prend que des valeurs positives.
2) La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
3) Tout réel admet un antécédent par f.
4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective.

Solution.

1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$
2) $\boxed{\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.}$
3) $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x).}$
4) Quantification de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists! x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
Négation : $\boxed{\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \neq f(x) \text{ ou } \exists (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ x \neq x' \text{ et } y = f(x) = f(x').}$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2(x) - \cos(2x)$.

1) Réduire au *maximum* le domaine d'étude de f. On notera I ce domaine.

2) Expliquer comment, à partir du graphe de f sur I, en déduire le graphe sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3\sin^2(x) - 1$.

4) Déterminer les variations de f sur I.

Solution.

1) $D_f = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = (-\sin x)^2 - \cos(2x+2\pi) = f(x)$. Donc f est π-périodique. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-\sin x)^2 - \cos(2x)$ en utilisant la parité du cosinus et l'imparité du sinus. Donc f est paire. $\boxed{\text{On peut ainsi réduire son domaine d'étude à } I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$

2) La partie du graphe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ se déduit $\boxed{\text{par symétrie d'axe } (Oy)}$. Le reste se déduit par $\boxed{\text{translation}}$ de la portion de graphe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Formule de duplication : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. D'où, $\boxed{f(x) = \sin^2 x - 1 + 2\sin^2 x = 3\sin^2 x - 1.}$

4) On dérive cette dernière identité : $f'(x) = 6\cos x \sin x \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et avec égalité en $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I.}$

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$(E_m):\ mx = \sqrt{2x+1} \qquad \text{et} \qquad (F_m):\ m^2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

1) Déterminer le domaine de résolution de (E_m).

2) On suppose $m \neq 0$. Montrer que (F_m) possède deux solutions : une négative qu'on note $x_1(m)$ et une positive qu'on note $x_2(m)$.

3) Montrer qu'alors $x_1(m) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

4) Étant donné x appartenant au domaine de résolution, l'implication "$(E_m) \Longrightarrow (F_m)$" est-elle vraie en général ? Que dire de la réciproque ?

5) Résoudre (E_m) pour tout $m \in \mathbb{R}$. On pourra éventuellement distinguer plusieurs cas.

Solution.

1) (E_m) est définie lorsque $2x + 1 \geqslant 0$ *i.e.* $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{D = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$

2) Pour $m \neq 0$, (F_m) est une équation polynomiale de degré 2.
On pose $\Delta = (-2)^2 + 4m^2 = 4(1+m^2) > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$x_1(m) = \frac{2 - 2\sqrt{1+m^2}}{2m^2} = \frac{1 - \sqrt{1+m^2}}{m^2} \quad \text{et} \quad x_2(m) = \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m^2}.$$

On a bien $\boxed{x_2(m) \geqslant \frac{1+\sqrt{1}}{m^2} > 0}$ et $1 < \sqrt{1+m^2}$ donc $\boxed{x_1(m) < 0.}$

3) On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} x_1(m) \geqslant -\frac{1}{2} &\iff 2 - 2\sqrt{1+m^2} \geqslant -m^2 \qquad \text{car } 2m^2 > 0 \\ &\iff 1 + m^2 - 2\sqrt{1+m^2} + 1 \geqslant 0 \\ &\iff \left(\sqrt{1+m^2} - 1\right)^2 \geqslant 0 \qquad \text{ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4) Rappel : si $a = b$ alors $a^2 = b^2$. La réciproque est vraie **si on suppose a et b de même signe**. Ainsi, pour $x \in D$, $\boxed{\text{on a toujours : } (E_m) \implies (mx)^2 = 2x + 1 \implies (F_m).}$

En revanche, $\boxed{\text{la réciproque n'est pas vraie en général}}$: si on prend par exemple $m = 1$ et $x = x_1(1) = 1 - \sqrt{2}$ alors (F_m) est vraie mais pas (E_m) car une racine est toujours positive.

5) On peut mettre (E_m) au carré et conserver une équivalence lorsque $mx \geqslant 0$ *i.e.* m et x de même signe. On distingue donc 3 cas.

<u>Cas $m < 0$</u> : (E_m) n'a pas de solution $x > 0$ (car une racine est toujours positive) et pour $x \leqslant 0$, on a $(E_m) \iff (F_m)$ car tout est positif. On a vu à la question 2) que sur $\mathbb{R}_-$, (F_m) a une solution : $x_1(m)$. De plus, $x_1(m) \in D$ d'après la question 3).
Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{1+m^2}}{m^2}\right\}.}$

<u>Cas $m = 0$</u> : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}.}$

<u>Cas $m > 0$</u> : cette fois on doit résoudre (E_m) seulement sur $\mathbb{R}_+$ ce qui donne $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m^2}\right\}.}$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$, ainsi que les limites à droite et à gauche de f en 1.

3) Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

4) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}$.

b) En déduire que la fonction $f \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$ et la calculer.

c) Montrer que f est bijective de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ et donner f^{-1}. Qu'en déduire sur la courbe représentative de f ?

Solution.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, f est définie en x si, et seulement si, ln est défini en x et est non nul. Or le logarithme népérien est défini sur $]0,+\infty[$ et s'annule uniquement en 1. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[.}$$

2) • Le logarithme tend vers $-\infty$ en 0, donc par passage à l'inverse,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

En composant par l'exponentielle, on conclut que $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 1}$.

• Quand $x \to 1$ par valeurs inférieures, $\ln x \to 0$ par valeurs inférieures ; par passage à l'inverse, on obtient

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{y\to -\infty} \exp(y)$ soit

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.}$$

• De même,

$$\frac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty.}$$

• Enfin, en $+\infty$, le logarithme népérien tend vers $+\infty$ donc son inverse vers 0, ce qui donne

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = \exp(0) = 1.}$$

3) Le logarithme étant dérivable et non nul sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, son inverse est dérivable sur cet ensemble ; l'exponentielle étant de plus dérivable sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}}$, d'après le théorème de composition de fonctions dérivables.

En utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, on obtient, pour tout réel $x > 0$ différent de 1,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{\ln x}\right)' \times \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) \\
&= -\frac{\ln'(x)}{(\ln x)^2} \times \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) \\
&= -\frac{1}{x(\ln x)^2} f(x).
\end{aligned}$$

Or, l'exponentielle étant toujours strictement positive, tout comme le carré du logarithme, $f'(x)$ a le même signe que x pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, donc f' est strictement négative sur $\mathcal{D}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur chacun des intervalles inclus dans $\mathcal{D}$, *i.e.* sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$ ayant été calculées à la question 2, on en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

4) a) Soit $x \in \mathcal{D}$; on veut montrer que $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}$, *i.e.* que c'est un réel strictement positif et différent de 1. Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) > 0.$$

Il reste à montrer que $f(x)$ différent de 1. Or, le seul point en lequel la fonction exponentielle atteint la valeur 1 est 0 ; on en déduit que, pour que $f(x)$ soit nul, il faudrait que $1/\ln x$ soit nul, ce qui est impossible car l'inverse d'un réel n'est jamais nul. Ainsi, $f(x) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ pour tout $x \in \mathcal{D}$: on a bien montré que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{D},\ f(x) \in \mathcal{D}}$.

b) Soit $x \in \mathcal{D}$. Alors d'après la question précédente, $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}$, qui est l'ensemble de définition de f. Ainsi f est définie en $f(x)$: autrement dit, $f(f(x))$ est bien défini, et ce pour tout $x \in \mathcal{D}$, ce qui prouve que $f \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$.
Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a alors

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= \exp\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln\left(\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{1/\ln x}\right) \\ &= \exp(\ln x) \end{aligned}$$

soit : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ f \circ f(x) = x}$.

c) Si l'on pose $g = f$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D},\ g(f(x)) = x \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(g(x)) = x \end{cases}$$

Ceci montre que f est bijective et que $f^{-1} = g$, mais on a posé $g = f$: autrement dit, f est bijective et est égale à sa propre bijection réciproque.
La courbe représentative de f^{-1} étant la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$, on en déduit que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 5. On considère deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

1) Étude de la fonction g.

   a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, limites comprises.

   b) Démontrer qu'il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 0$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur exacte).
   Indication : on donne $2 < e < 3$.

   c) Démontrer que a appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$.

   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Étude de la fonction f.

   a) Déterminer le domaine de définition de f.

   b) Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.

   c) Donner les limites de f aux bornes du domaine de définition et interpréter graphiquement ces limites.

   d) Dresser le tableau de variation de f sur son domaine de définition, limites comprises.

   e) Démontrer que f admet un unique minimum local, dont la valeur est le nombre réel suivant :
$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

   f) Justifier que $2 \leqslant m \leqslant 6$.

   g) Tracer l'allure du graphe de f. On fera apparaître les droites remarquables (tangentes, asymptotes).

Solution.

1) a) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$. g' est du signe de $x(2+x)$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g			$g(-2)$				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	-1				-1		

Justification : par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

b) On a besoin des valeurs de $g(0)$ et $g(-2)$:
$g(0) = -1 < 0$ et $g(-2) = 4e^{-2} - 1 = \dfrac{4}{e^2} - 1$.
Or $2 < e < 3$ donc $\dfrac{1}{9} < \dfrac{1}{e^2} < \dfrac{1}{4}$ donc $g(-2) = \dfrac{4}{e^2} - 1 < 0$.
D'après les variations de g, $g(x)$ est strictement négatif pour $x \leqslant 0$: g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-$.
Sur $\mathbb{R}_+$, g est continue et strictement croissante. Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1; +\infty[$.
$\boxed{\text{Donc elle s'annule une fois et une seule sur } \mathbb{R} \text{ en } a \in \mathbb{R}_+.}$

c) $g(1) = e - 1 > 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1 < \frac{\sqrt{4}}{4} - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. $\boxed{\text{Donc } a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.}$

d) D'après les variations de g :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) a) f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables.
$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2}$

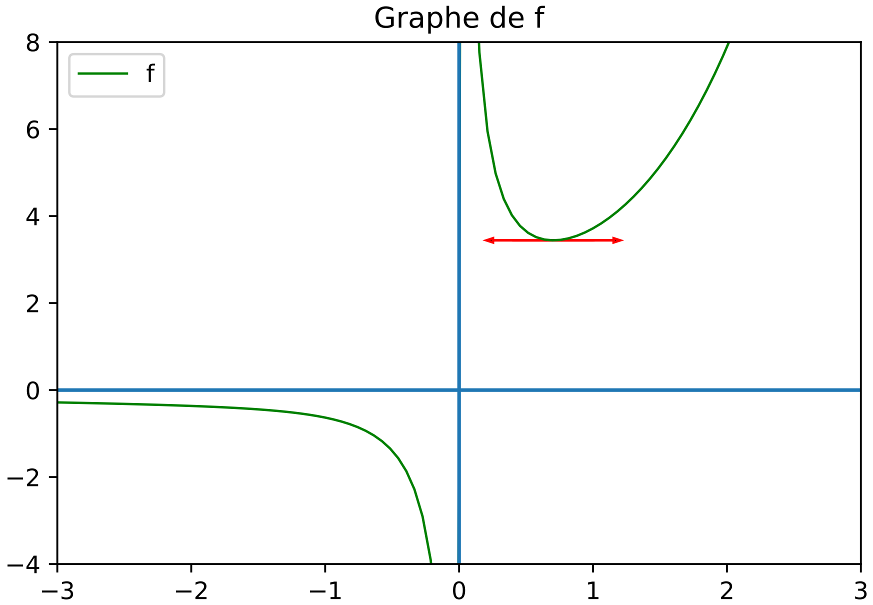
c) Toutes les limites sont des limites directes :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$
Le graphe de f admet une asymptote verticale $x = 0$.
Le graphe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

d) $\forall x \neq 0, \quad f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
Donc f' est du signe de g.

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

e) D'après les variations de f, f admet un minimum local en $x = a$ de valeur : $f(a) = e^a + \dfrac{1}{a}$.
Or a est solution de $g(a) = 0 \Leftrightarrow a^2e^a - 1 = 0$. Donc $e^a = \dfrac{1}{a^2}$
On a donc bien $\boxed{f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}}$

f) D'après la question 1c) : $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ donc $1 \leqslant \dfrac{1}{a} \leqslant 2$ et $1 \leqslant \dfrac{1}{a^2} \leqslant 4$. En sommant, on obtient $\boxed{2 \leqslant m \leqslant 6.}$



g)