Feuille d'exercices n° 21 : correction

Exercice 2. On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si $x \leqslant t \leqslant 2x$ alors : $\cos 2x \leqslant \cos t \leqslant \cos x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \phi(x)$.
4. Quelle est la parité de ϕ ? En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \phi(x)$.

Solution.

1. Si $x \neq 0$, entre x et $2x$, il n'y a pas 0. Donc $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est définie et continue entre x et $2x$ pour $x \neq 0$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_\phi = \mathbb{R}^*.}$
2. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sur $[0, \pi]$, cos est décroissante. Donc si $0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 2x \leqslant \pi$ alors $\boxed{\cos 2x \leqslant \cos t \leqslant \cos x.}$
3. Pour $t > 0$, on a $\dfrac{\cos(2x)}{t} \leqslant \dfrac{\cos t}{t} \leqslant \dfrac{\cos x}{t}$. En intégrant, on obtient
$$\begin{array}{cccccc} & \cos(2x)\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt & \leqslant & \phi(x) & \leqslant & \cos(x)\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \\ \iff & \cos(2x)\ln 2 & \leqslant & \phi(x) & \leqslant & \cos(x)\ln 2. \end{array}$$
Par théorème d'encadrement, on en déduit : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \ln 2.}$
4. On fait le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale, ainsi
$\phi(x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-du) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos u}{u} du = \phi(-x)$. D'où $\boxed{\phi \text{ est paire.}}$
Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = \ln 2.}$
La fonction ϕ est prolongeable par continuité en 0 (et la valeur en question n'est pas 0 comme on aurait pu le croire).

Exercice 4. Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$.

1. G est-elle dérivable ? Calculer $G'(x)$.
2. En déduire une égalité.
3. Donner une interprétation géométrique du résultat.

Solution.

1. On note F une primitive de f et H une primitive de f^{-1}.
$G(x) = F(x) - F(0) + H(f(x)) - H(0) - xf(x)$ est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables.
$G'(x) = F'(x) + f'(x)H'(f(x)) - f(x) - xf'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$

2. G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $G(x) = G(0) = \displaystyle\int_0^0 f + \int_0^{f(0)} f^{-1} - 0 = 0$ car $f(0) = 0$.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)}$

3. Considérons le rectangle R du plan dont les abscisses sont comprises entre 0 et x et les ordonnées sont comprises entre 0 et $f(x)$. Si on inverse les rôles d'abscisses et d'ordonnées, le graphe de f devient celui de f^{-1}. Ainsi, le graphe de f sépare R en deux parties. L'aire de la partie inférieure correspond à la première intégrale de l'identité précédente tandis que l'aire de la partie supérieure correspond à la deuxième intégrale. D'où le résultat.

Exercice 7. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Solution.

1. $u_0 = \Big[\ln(2+t)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$.

   $u_1 = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\Big]_0^1 = \dfrac{\ln 3}{2}$.

   $$u_2 = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)^2 + 1}dt = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3})) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n \iff 0 < 1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n \iff \dfrac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{1+t+t^n}$.

   En intégrant, on obtient $I_{n+1} \geqslant I_n$ donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

3. Sur $[0,1]$, $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$. Par passage à l'intégrale : $\boxed{u_n \leqslant \ln 2.}$

4. u est $\boxed{\text{croissante et majorée donc converge.}}$

5. On écrit $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$ donc $\boxed{\ln 2 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt.}$

6. Sur $[0,1]$, $(1+t)(1+t+t^n) \geqslant 1 \times 1 = 1$ donc $\dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leqslant t^n$.

   Par passage à l'intégrale : $\boxed{\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}.}$

7. On a donc : $0 \leqslant \ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Par théorème d'encadrement : $\boxed{u_n \to \ln 2}$

Exercice 8. On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

4. On note désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.

5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Solution.

1. $I_0 = \ln 2$, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \Big[t - \ln(1+t)\Big]_0^1 = 1 - \ln 2$
$I_2 = \displaystyle\int \frac{t(1+t)-t}{1+t}dt = \int_0^1 tdt - \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2} - I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

2. Sur $[0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$. En intégrant : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

3. $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(1+t)-t^n}{1+t}dt = \int_0^1 \left(t^n - \frac{t^n}{1+t}\right)dt = \int_0^1 t^n - I_n$. Donc $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - I_n}$

4. Pour $k \geqslant 1$: $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^{k+1}(I_k + I_{k-1})$. Par passage à la somme :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(I_k + I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_k - (-1)^k I_{k-1} = (-1)^{n+1}I_n - (-1)^1 I_0$
puisque la somme est télescopique. Ainsi $\boxed{S_n = I_0 + (-1)^{n+1}I_n.}$

5. Comme $I_n \to 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \ln 2}$

Exercice 9. Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

3. $u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$

4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

5. $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$

Solution.

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}}$. On reconnait une somme de Riemann qui converge vers :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}}dt = \Big[\arcsin(t/2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{6}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{6}.}$

2. $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+2k/n}}$. On reconnait une somme de Riemann qui converge vers :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2t}}dt = \left[\sqrt{1+2t}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$. Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}-1.}$

3. $u_n = n\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1+k/n)^2}$. On reconnait une somme de Riemann qui converge vers :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1$. Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$

4. $u_n = \sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{n+i} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}$. On reconnait une somme de Riemann qui converge vers :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2$. Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2.}$

5. $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{(2n)!}{n!}\right) - n\ln n\right) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) - n\ln n\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.
On reconnait une somme de Riemann qui converge vers :
$\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)dt = \Big[(1+t)\ln(1+t)-(1+t)\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1$
Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{e}}$.

Exercice 10. Montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2n\sqrt{n}}{3}$.

Solution. $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$. On reconnait une somme de Riemann appliquée à $f(t)=\sqrt{t}$, continue sur $[0,1]$. Donc la somme converge vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}$. $\boxed{\text{D'où } S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n\sqrt{n}}{3}.}$

Exercice 11.

1. Calculez les dérivées successives de $f(s)=\ln(1+s)$.
2. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur $[a,b]$
3. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Solution.

1. $f^{(k)}(t) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$ si $k \geqslant 1$ (par récurrence) et $f^{(0)}(t)=f(t)$.
2. $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \underset{t\in[a,b]}{\mathrm{Max}}|f^{n+1}(t)|\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
avec : $f^{n+1}(t) = \dfrac{(-1)^n(n)!}{(1+t)^{n+1}}$. En valeur absolue, sur $[a,b]$, le max est obtenu en $t=a$.
Ainsi : $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \dfrac{1}{(1+a)^{n+1}}\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}$.
On met à part le terme $k=0$ et on remplace $f^{(k)}(a)$. Après simplification, on a :
$\boxed{\left|f(b) - \ln(1+a) - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(1+a)^k}(b-a)^k\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)(1+a)^{n+1}}.}$

3. On se place en $a = 0$ et $b = 1$:
$\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)}$ *i.e.* $\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)}$.
Comme $\frac{1}{n+1} \to 0$, par théorème d'encadrement :
$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = \ln 2.}$

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles.

1. On note $P(\lambda) = \int_{[a,b]} (\lambda f + g)^2$. Donner le signe de P.
2. Montrer que P est un polynôme. Quel est son dégré ?
3. En déduire que $\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$. C'est ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution.

1. Comme $a < b$ et qu'un réel au carré est positif, on a $\boxed{P(\lambda) \geqslant 0.}$
2. On développe : $P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2$. C'est un polynôme de degré 2.
3. P est un polynôme de degré deux positif, donc $\Delta \leqslant 0$. Ainsi,
$\Delta = 4\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 - 4\int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2 \leqslant 0$. Donc $\boxed{\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2.}$