Exercice 11. Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P = X^5 + 32$
2. $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
3. $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$
4. $P = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$
5. $P = X^{2n} - 2X^n \cos t + 1$

Solution.

1. On résout dans $\mathbb{C}$: $z^5 = -32 = (-2)^5$. On trouve 5 racines : $-2e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
   Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $X^5 + 32 = (X + 2)(X + 2e^{i\frac{2\pi}{5}})(X + 2e^{i\frac{4\pi}{5}})(X + 2e^{-i\frac{4\pi}{5}})(X + 2e^{-i\frac{2\pi}{5}})$.
   Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on met les racines conjuguées ensemble. On obtient :
   $X^5 + 32 = (X + 2)(X^2 + 4\cos(2\pi/5)X + 4)(X^2 + 4\cos(4\pi/5)X + 4)$.

   D'un autre côté, on a l'identité remarquable

   $$X^5 + 32 = X^5 - (-2)^5 = (X + 2)(X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 16).$$

   Donc en posant $X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 16 = (X^2 + 4aX + 4)(X^2 + 4bX + 4)$, en développant et en identifiant les coefficients, on trouve

   $$\begin{cases} a + b & = -\frac{1}{2} \\ ab & = -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \textit{i.e. } a \text{ et } b \text{ sont racines de } X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.$$

   On calcule alors les valeurs possibles pour a et b et puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$, on en déduit leurs valeurs par unicité de la décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

   $$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

2. On constate : $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$.
   On factorise $X^5 - 1$: on résout $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$. Les racines sont $e^{2i\pi k/5}$ avec $k \in [\![0, 4]\!]$.
   Factorisation dans $\mathbb{C}$: $X^5 - 1 = (X - 1)(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{6i\pi/5})(X - e^{8i\pi/5})$.
   Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on met les racines conjuguées ensemble : $e^{2i\pi/5}$, $e^{8i\pi/5}$ et $e^{4i\pi/5}$, $e^{6i\pi/5}$.
   On obtient : $X^5 - 1 = (X - 1)(X - 2\mathrm{Re}(e^{2i\pi/5})X + 1)(X - 2\mathrm{Re}(e^{4i\pi/5})X + 1)$.
   Ainsi,
   $P = (X - e^{2i\pi/5})(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{6i\pi/5})(X - e^{8i\pi/5})$.
   $P = (X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1)$.

3. -1 est racine évidente de P.
   Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X + 1)(X^2 + X + 1)$.
   Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X + 1)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})$

4. On pose $Y = X^2$. Alors $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = Y^3 + 2Y^2 + 2Y + 1$ qu'on a déjà factorisé à la question précédente donc $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - e^{2i\pi/3})(X^2 - e^{-2i\pi/3})$.
   Factorisation dans $\mathbb{C}$: $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = (X - i)(X + i)(X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X + e^{-i\pi/3})$.
   Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on associe les racines conjuguées.
   Factorisation dans $\mathbb{R}$: $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

5. On pose $Y = X^n$. On a $Y^2 - 2\cos(t)Y + 1 = (Y - e^{it})(Y - e^{-it})$.
   On revient à X donc on cherche les racines de $X^n - e^{it}$ et $X^n - e^{-it}$.

On trouve $z = e^{i\frac{(2k\pi+t)}{n}}$ ou $z = e^{i\frac{(2k\pi-t)}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Factorisation dans $\mathbb{C}$: $X^{2n} - 2X^n \cos t + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{(2k\pi+t)}{n}}\right)\left(X - e^{i\frac{(2k\pi-t)}{n}}\right)$.

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on associe les racines conjuguées. Or, $e^{-i\frac{(2k\pi+t)}{n}} = e^{i\frac{(2(n-k)\pi-t)}{n}}$.

Factorisation dans $\mathbb{R}$: $X^{2n} - 2X^n \cos t + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k\pi+t)}{n}\right) X + 1\right)$.

Exercice 12. Soit $P = X^3 - X^2 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.
Déterminer λ pour que P ait une racine double ; factoriser alors P.

Solution. Soit a une racine double de P.
$0 = P'(a) = 3a^2 - 2a$ donc $a = 0$ ou $a = 2/3$.
Si $a = 0$: $0 = P(0) = \lambda$. Dans ce cas $\lambda = 0$ et $P = X^2(X-1)$.
Si $a = \frac{2}{3}$: $P(2/3) = 0$ alors $\lambda = 4/27$ et $P = (X-2/3)^2(X+1/3)$.

Exercice 13. Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 11X + \lambda$ ait deux racines dont la différence est 2 ; factoriser alors P.

Solution. On note a et $a-2$ deux racines de P et b la troisième. Donc $P = (X-a)(X-a+2)(X-b)$.
On développe $P = X^3 + (-2a+2-b)X^2 + (a^2+2ab-2a-2b)X + ab(-a+2)$.
Par identification : $(-2a+2-b) = -6$ et $(a^2+2ab-2a-2b) = 11$ et $ab(-a+2) = \lambda$.
$a^2 - 6a + 9 = 0$ donc $a = 3$ et $b = 2$ et $\lambda = -6$.
$P = (X-3)(X-1)(X-2)$

Exercice 18.

3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

4. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Solution.

3. Analyse : soit P tel que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

   Si P est constant (disons égal à λ) alors $\lambda(X+4) = \lambda X$ donc $\lambda = 0$ *i.e.* P est nul.

   Sinon, considérons une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de P (théorème de d'Alembert-Gauss).
   On a $\alpha P(\alpha+1) = (\alpha+4)P(\alpha) = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha+1$ est racine de P. Si α n'est pas un entier négatif on montre alors par récurrence que $\alpha + n$ est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. P aurait alors une infinité de racine donc serait nul, ce qui est exclu. Ainsi α est un entier négatif.

   De la même manière, on a $(\alpha-1+4)P(\alpha-1) = (\alpha+3)P(\alpha) = 0$ donc $\alpha = -3$ ou $\alpha - 1$ est racine de P. Si α n'est pas un entier $\geqslant -3$ alors $\alpha - n$ est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. On aurait encore une infinité de racine donc $P = 0$, ce qui est exclu. Ainsi, α est un entier supérieur ou égal à -3.

   Finalement $\alpha \in \{-3, -2, -1, 0\}$. Or, en évaluant $(X+4)P(X) = XP(X+1)$ en -4 et 0 on trouve que -3 et 0 sont racines de P et donc -2 et -1 aussi d'après ce qui précède. L'ensemble des racines de P est donc exactement $\{-3, -2, -1, 0\}$ autrement dit le polynôme est de la forme

   $$P = \lambda X^p (X+1)^q (X+2)^r (X+3)^s$$

où $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$ sont les multiplicités des racines et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En injectant cela dans la relation sur P on obtient

$$\lambda X^p(X+1)^q(X+2)^r(X+3)^s(X+4) = \lambda X(X+1)^p(X+2)^q(X+3)^r(X+4)^s.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, cette relation impose que $p = q = r = s = 1$ *i.e.*

$$P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3).$$

Synthèse : si $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ (avec éventuellement $\lambda = 0$) alors on a bien

$$(X+4)P(X) = XP(X+1).$$

4. Analyse : soit P tel que P' divise P *i.e.* il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$.

   Si P est constant alors $P = Q \times 0 = 0$.

   Sinon, considérons une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de P (théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $m \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de cette racine. On a donc $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Cela signifie aussi que α est racine d'ordre $m-1$ de P' (éventuellement $m = 1$ et α n'est pas racine de P'). Ainsi on a $P = (X-\alpha)^m R_1$ et $P' = (X-\alpha)^{m-1}R_2$ avec $R_1(\alpha) \neq 0$ et $R_2(\alpha) \neq 0$. En injectant cela dans la relation $P = QP'$ on trouve

   $$(X-\alpha)R_1 = QR_2$$

   et en évaluant en α, on obtient $Q(\alpha) = 0$. Or, $\deg Q = \deg P - \deg P' = 1$ donc il n'a qu'une racine. Cela signifie que α est unique et donc que P est de la forme $P = \lambda(X-\alpha)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   Synthèse : le polynôme nul est solution du problème et pour tous $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P = \lambda(X-\alpha)^n$ vérifie bien

   $$P' = n\lambda(X-\alpha)^{n-1} \text{ divise } P.$$

Exercice 19. On définit par récurrence la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} P_0 = 1 \ ; \ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1} \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
4. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ et donner ses racines.

Solution.

1. $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 3X$.
2. Monôme de plus haut degré : $2^{n-1}X^n$ (à montrer par récurrence).
3. Par récurrence. La clé de l'hérédité est :
   $P_{n+1}(\cos x) = 2\cos x P_n(\cos x) - P_{n-1}(\cos x) = 2\cos x \cos(nx) - \cos(n-1)x$.
   Or : $\cos(nx) = \cos((n-1)x + x) = \cos((n-1)x)\cos x - \sin((n-1)x)\sin x$.
   $$\begin{aligned} P_{n+1}(\cos x) &= \cos((n-1)x)(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x \sin x \sin((n-1)x) \\ &= \cos((n-1)x)\cos(2x) - \sin(2x)\sin((n-1)x) \\ &= \cos((n+1)x). \end{aligned}$$

4. On cherche quand est-ce que $\cos(nx)$ s'annule : $\cos(nx) = 0 \iff nx \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \iff x \equiv \dfrac{\pi}{2n}\,[\frac{\pi}{n}]$.
   Donc $x = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On obtient $2n$ représentants de x sur le cercle trigonométrique qui ont deux à deux le même cosinus.
   Donc $P(\cos x) = \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On obtient n racnies disctinctes. Comme P est de degré n, on en déduit qu'il est scindé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire A^n.

Solution.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ -18 & -14 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$.
2. $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Donc $X^n = (X-1)(X-2)Q(X) + R(X)$ avec $R(X) = aX + b$
   En $X = 1$: $1 = a + b$. En $X = 2$: $2^n = 2a + b$.
   On résout et on trouve : $X^n = (X-1)(X-2)Q(X) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.
3. On prend $X = A$. On obtient : $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$