Vendredi 7 juin 2024

Devoir sur table n° 6

Concours blanc de mathématiques

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- Justifiez vos réponses.
- **ENCADREZ** vos résultats.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Numérotez les copies doubles.
- Bon courage !

Exercice 1. On travaille dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soient $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$ et $\mathcal{D}' = B + \text{Vect}(\vec{v})$ deux droites de l'espace.

   a) À quelle condition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles (ou confondues) ?

   b) On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles (ou confondues).
   Montrer que les deux droites s'intersectent si et seulement si $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$.

On considère les points $A(0,0,1)$ et $B(1,1,2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) ; par Δ_2 la droite d'équations $y = z = 0$; par Δ_3 la droite d'équations : $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$.

2) Déterminer une représentation paramétrique de Δ_1.

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (M_1M_2).

4) À quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?

5) On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2), on veillera à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.

6) Soit une droite Δ' qui rencontre les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3. Montrer qu'elle est incluse dans la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $xz = y(y+1)$.

Exercice 2. Un tireur tire à l'arc sur n cibles distinctes. On suppose que pour chaque tir, il atteint sa cible avec la même probabilité p. On notera $q = 1 - p$ la probabilité de rater la cible.

1) On note X le nombre de cibles atteintes. Quelle est la loi de X ?

Le tireur retente sa chance sur les $n - X$ cibles qu'il a ratées la première fois. On note Y le nombre de cibles atteintes à la deuxième tentative et on pose $Z = X + Y$.

2) Déterminer $Z(\Omega)$ et calculer $P(Z = 0)$.

3) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Exprimer $P(Z = k)$ en fonction des $P(X = i)$ et $P_{X=i}(Z = k)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. On donnera le nom ainsi que les paramètres de la formule utilisée.

4) Pour $(i, m) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $P_{X=i}(Y = m)$. On distinguera deux cas.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$.

6) En déduire : $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1 + q)^k (q^2)^{n-k}$. Reconnaitre alors la loi de Z.

7) Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'une cible soit atteinte à l'issue des deux tirs.

Finalement, le tireur retente sa chance sur toutes les cibles (y compris celles qu'il a déjà atteintes). Il fait donc deux essais par cible. Pour chaque cible touchée au premier essai, il gagne 5 euros et pour chaque cible touchée au second essai, il gagne X euros.

8) Calculer le gain moyen du tireur en fonction de n et p. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, déterminer la valeur de n à partir de laquelle ce gain moyen est supérieur ou égal à 36 euros.

Exercice 3.
Partie I : Un exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & -21 & 6 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A (c'est-à-dire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A).

1) Déterminer le rang de A ainsi que deux matrices colonnes $U, V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = UV^{\mathrm{T}}$.

2) Déterminer des bases de l'image et du noyau de f.

3) Déterminer, en justifiant, si f est éventuellement un projecteur ou une symétrie.

4) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? Justifier.

On pose, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = x - 7y + 2z$.

5) Montrer que φ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

6) Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \varphi(x, y, z)u$.

Partie II : Cas général

Soit M une matrice carrée à $n \in \mathbb{N}^*$ lignes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On suppose que M est de rang 1.

7) Montrer qu'il existe U et V des matrices colonnes telles que $M = UV^{\mathrm{T}}$.

8) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M^2 = \lambda M$. Dans quel cas g est-il un projecteur ?

9) Montrer qu'il existe une matrice inversible P et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

10) En déduire qu'il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^n$ et un vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $g(x) = \varphi(x)u$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Étude de f.

   a) Déterminer un développement limité à l'ordre deux de f en zéro.

   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'équation de la tangente T_0 en zéro ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 au voisinage de zéro.

   c) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

   d) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   e) Dresser les variations de f, limites comprises.

   f) Donner un équivalent simple de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2) Étude d'une fonction définie par une intégrale

   a) On note $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$.
   Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer le signe de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   c) Calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   d) Par un calcul de limite, vérifier que G' est bien continue en zéro.

   e) Montrer que : $\forall t \geqslant 1, \quad e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis que : $\forall t \geqslant 1, \quad f(t) \geqslant \dfrac{1}{2t}$.

   f) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.

3) Étude d'une suite

a) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}ds$.
Montrer que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, $u_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe puis que :

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+s}ds - u_n \leqslant \int_0^1 f(t)dt$$

d) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.