Feuille d'exercices n^o 16 : dénombrement

Exercice 1. Un sac contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6, 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 9 boules vertes numérotées de 1 à 9.

1. On tire simultanément 4 boules du sac.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages contiennent 4 numéros impairs ?
   (c) Combien de tirages contiennent au moins une boule blanche ?
   (d) Combien de tirages contiennent exactement une boule n^o 6 ?
2. Mêmes questions si l'on tire les 4 boules l'une après l'autre avec remise.
3. Mêmes questions si l'on tire les 4 boules l'une après l'autre sans remise.

Exercice 2. Soient a, b, c et d quatre chiffres avec $a \neq 0$. On note $\overline{abcd}$ le nombre entier défini par $10^3a + 10^2b + 10c + d$.

1. Calculer le nombre d'entiers de la forme $\overline{abcd}$ tels que la suite (a, b, c, d) soit strictement décroissante.
2. Calculer le nombre d'entiers de la forme $\overline{abcd}$ tels que la suite (a, b, c, d) soit strictement croissante.
3. Répondre aux questions 1), 2) en supposant de plus que le nombre $\overline{abcd}$ est divisible par 5.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul, et E un ensemble à n éléments. Dénombrer :

1. Les couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$.
2. Les couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$.
3. Les triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 4.

1. Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E. Démontrer que :
   $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)$
2. Application :
   Dans un village de 100 maisons, 88 sont équipées de téléviseur, 90 de lave-linge et 95 de réfrigérateur. Combien y a-t-il, au minimum, de maisons équipées simultanément de ces 3 types d'appareils ?

Pour s'entrainer

Exercice 5.

1. Combien y a-t-il de manières différentes de ranger sur une étagère quarante livres tous différents.
2. Même question en ne séparant pas les treize livres d'une certaine collection C_1 ?
3. Même question en ne séparant pas les treize de la collection C_1, ni les sept de la collection C_2, ni les vingt restants.

Exercice 6. On répartit neuf boules différentes dans trois tiroirs.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
2. Même question en supposant que le premier tiroir est vide.
3. Même question en supposant qu'exactement un tiroir est vide.
4. Même question en supposant qu'au moins un tiroir est vide.

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul, et E un ensemble à n éléments.
Montrer par récurrence que pour tout $p \geqslant 2$, le nombre de p-uplets $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ de parties de E tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$ est égal à $(2^p - 1)^n$.

Exercice 8. On répartit neuf boules différentes dans trois tiroirs.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
2. Même question en supposant que le premier tiroir est vide.
3. Même question en supposant qu'exactement un tiroir est vide.
4. Même question en supposant qu'au moins un tiroir est vide.

Exercice 9. Combien de mots de cinq lettres composés de trois consonnes et de deux voyelles en excluant ceux renfermant trois consonnes consécutives pouvez-vous former ?

Exercice 10. On dispose de n paires de chaussures différentes.
On tire simultanément $2k$ chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités sans tirer aucune paire ?
3. Combien y a-t-il de possibilités en ne tirant que des paires ?

Exercice 11. On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une surjection $f : \mathbb{N} \to E$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. (On pourra chercher une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$).
2. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ (m,n) \mapsto \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + n \end{array} \right.$ est une bijection.
3. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, puis que $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
4. Montrer par l'absurde que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
   Indication : étant donnée une surjection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on pourra poser :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si le } n^{\text{eme}} \text{ chiffre après la virgule de } f(n) \text{ est } 6 \\ 6 \text{ sinon} \end{array} \right.$
   et aboutir à une contradiction en considérant le nombre réel $y = c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots c_n \ldots$

Exercice 12. On considère un quadrillage de points à coordonnées entières positives, d'origine O. On va de O à $A(n,p)$ par un chemin constitué d'une succession de segments de longueur 1 parallèles à Ox ou Oy, dans le sens gauche-droite ou bas-haut.

1. Quel est le nombre de chemins possibles de O à A ?
2. $M(r,s)$ étant un point du quadrillage avec $r \leqslant n$ et $s \leqslant p$, quel est le nombre de chemins de O à A passant par M ?

Exercice 13. Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes. Il distribue 8 fruits différents. Combien y a-t-il de distributions possibles :

1. s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
2. si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit :

$I_n = \{(i,j) \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$	$D_n = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n\}$
$J_n = \{(i,j) \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$	$K_n = \{(i,j) \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$

1. Démontrer que les ensembles ci-dessus sont finis.
2. Calculer $\mathrm{Card}(D_n)$.
3. Démontrer que les ensembles J_n, D_n et K_n forment une partition de $[\![1,n]\!]^2$ et que $\mathrm{Card}(J_n) = \mathrm{Card}(K_n)$.
4. En déduire $\mathrm{Card}(I_n)$, $\mathrm{Card}(J_n)$ et $\mathrm{Card}(K_n)$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $\Delta_n = \{(p,q) \mid (p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } p+q=n\}$.
Démontrer que cet ensemble est fini et calculer son cardinal.

Exercice 16. Au Loto, une grille simple est un choix de 6 numéros distincts dans $[\![1,49]\!]$.

1. Calculer le nombre total de grilles que l'on peut jouer.
2. Une grille gagnante ayant été déterminée, calculer le nombre de grilles comportant exactement n bons numéros, pour $n=5$, $n=4$ et $n=3$.

Exercice 17. On considère un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n. On appelle poignée de jetons tout sous- ensemble de l'ensemble des n jetons, y compris l'ensemble vide. Combien y a-t-il de poignées :

1. au total ?
2. contenant le jeton numéro 1 ?
3. contenant exactement 2 jetons ?
4. contenant au moins 2 jetons ?
5. contenant un nombre pair de jetons ?

Exercice 18. Un chocolatier vend n sortes de bonbons au chocolat ($n \geqslant 3$). Il offre gracieusement trois chocolats à l'un de ses clients en lui demandant de les choisir.

1. Quel est le nombre de choix où le client goûte trois sortes de bonbons différentes ?
2. Quel est le nombre de choix où il goûte seulement deux sortes différentes ?
3. En déduire le nombre total de choix possibles.