Feuille d'exercices n° 6 : fonctions usuelles

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes :

$$(E_1)\colon \operatorname{ch}(x) = 3 \qquad (E_2)\colon \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) = 17$$

Indication : Poser : $X = e^x$. Alors e^{-x} s'écrit aussi en fonction de X.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1)\colon\ \arcsin x = \arccos \frac{1}{3} \qquad\qquad (E_2)\colon\ \arcsin x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Indication : Composer par sin. Que vaut $\sin^2(\arccos x)$?

Exercice 3.

1. Soient a, b strictement positifs. Vérifier que $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.
2. En déduire la limite lorsque n tends vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)$.

Indication : Poser $T_1 = \arctan(a) - \arctan(b)$ et $T_2 = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$. Vérifier que T_1 et T_2 ont la même tangente. Pourquoi sont-ils égaux ?

Exercice 4.

1. Simplifier : $\arcsin x + \arccos x$.
2. Résoudre l'équation $(E)\colon\ \arcsin(x) + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$ en posant (après justification) $x = \sin\theta$.

Indication :

1. Étudier la fonction $x \mapsto \arccos x + \arcsin x$.
2. Déterminer le domaine de résolution de (E).
   Que vaut $\sqrt{1-x^2}$ en fonction de t ?

Exercice 5. Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Indication : Dériver la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Attention au domaine de définition.

Exercice 6.

1. Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A(x) = \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 7. Soit f définie par : $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Étudier le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f puis calculer f' quand elle existe.

Exercice 8. On pose
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$
Le but de cet exercice est de simplifier l'expression de f par deux méthodes.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de f et son domaine de dérivabilité.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   (c) En déduire une simplification de f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) On écrit $x = \tan\theta$ avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pourquoi est-ce possible ?
   (b) Simplifier alors $f(\tan\theta)$.
   (c) Retrouver la simplification de f.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f\colon x \mapsto \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Étudier sa parité.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.
3. En déduire une expression simplifiée de f.

Pour s'entrainer

Exercice 10. Résoudre $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Dans cet exercice, on cherche à simplifier l'expression de f par deux méthodes.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Déterminer le domaine de dérivation de f et calculer f'. En déduire une écriture simplifier de f.
3. Soit $x \in D$. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Exprimer ensuite x en fonction de θ.
4. En déduire une expression simplifiée de f. Est-ce la même que celle trouvée en 2 ?

Exercice 12. On cherche à étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de f. En déduire un intervalle d'étude le plus restreint possible pour f.
3. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de f.
4. En déduire une expression simplifiée de la fonction f (on pourra distinguer plusieurs intervalles).
5. En posant $x = \cos(\theta)$, retrouver directement l'expression de f.

Exercice 13 (Formule de Machin)**.**
Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.
En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$
(cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Exercice 14. Résoudre $\arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arccos(1/4)$ en précisant le domaine de résolution.
Indication : On justifiera que le membre de droite est dans $[0, \pi]$.

Exercice 15. Démontrer les formules suivantes (analogues pour les fonctions hyperboliques des formules de trigonométries que vous connaissez bien) :

- $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$

Exercice 16. Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et déterminer la plus petite période :

1. $f(x) = x - \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$
2. $f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$
3. $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}(x - \lfloor x \rfloor))$

Exercice 17.

1. Déterminer une fonction $g\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(e^x) = \mathrm{ch}(x)$.
2. Existe-t-il une fonction $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(\mathrm{ch}(x)) = e^x$?
3. Existe-t-il une fonction $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geqslant 0, f(\mathrm{ch}(x)) = e^x$?

Exercice 18. Simplifier les expressions suivantes :

- $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right)\right)$
- $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$
- $\cos(\arcsin(x))$
- $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

Exercice 19. Résoudre l'équations suivante : $4\mathrm{ch}(x) + 3\mathrm{sh}(x) - 4 = 0$.

Exercice 20. Étudier et tracer la courbe de : $f(x) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$.