

## Programme de colle n°22

### Géométrie plane

- 1) Base orthonormée directe.
- 2) Coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires.
- 3) Produit scalaire.
- 4) Produit mixte ou déterminant.
- 5) Équation de droites, représentation paramétrique, vecteur directeur, normal.
- 6) Distance d'une droite à un point.
- 7) Équation de cercles.
- 8) Intersection de droites, de cercles.

### Polynômes

- 1) Définition de  $\mathbb{K}[X]$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- 2) Structure d'espace vectoriel, sous-espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- 3) Degré d'un polynôme,  $\deg(P + Q)$ ,  $\deg(PQ)$ ,  $\deg(P \circ Q)$ .
- 4) Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .
- 5) Racines de multiplicité  $k$ , lien avec la dérivée de  $P$ .
- 6) Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé.
- 7) Polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- 8) Factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ , dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- 9) Relation racines/coefficients de  $P$  pour la somme, le produit.
- 10) Décomposition en éléments simples.

### Questions de cours

- 1) Effectuer une division euclidienne de polynômes choisis par le colleur.
- 2) Dans le théorème de la division euclidienne, montrer l'unicité du couple  $(Q, R)$  sous réserve d'existence.
- 3) Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $P$  est inversible dans  $\mathbb{K}[X]$  si et seulement si  $P$  est constant non nul.
- 4) Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  tels que  $\alpha \neq \beta$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$  puis celui de  $P$  par  $(X - \alpha)(X - \beta)$ .
- 5) Déterminer une base de  $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(2) = 0\}$ .
- 6) Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  :  $P = X^4 - 1$  et  $P = X^5 - 1$ .
- 7) Décomposer en éléments simples (dans  $\mathbb{R}$ ) :  $R = \frac{X^3 + X}{X^3 - 1}$ .