Feuille d'exercices n° 8 : équations complexes

Exercice 1. Pour chacun des nombres complexes a suivants, résoudre l'équation $z^3 = a$.

1. $a = e^{i\frac{5\pi}{12}}$
2. $a = -8i$
3. $a = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + 2z - 5i = 0$
2. $\frac{1}{2}z^2 + (1+i)z - i = 0$
3. $z^2 + (2+3i)z - 5 + 5i = 0$
4. $iz^2 + (8+2i)z - 8 - 3i = 0$. (indication : il y a une solution évidente)
5. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.
6. $z^2 - 2z\cos(a) + 1 = 0$.
7. $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$.
8. $\begin{cases} z_1 z_2 = i \\ z_1 + z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$
9. $z^3 - 2(1+i)z + (2+4i)z - 4i = 0$, sachant qu'une des racines est imaginaire pure.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ en utilisant les racines $n$ièmes :

$$(E_1)\colon (z-2)^4 = (2z-1)^4 \qquad (E_2)\colon 27(z+i)^6 + (z-i)^6 = 0 \qquad (E_3)\colon (z+1)^n = (z-1)^n$$

Indication : Se ramener à une équation du type $Z^4 = 1$ que l'on sait résoudre.

Exercice 4. Soit $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, et $Q(z) = \dfrac{P(z)}{z^2} = z^2 + z + 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$ (si $z \neq 0$).

1. On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$. Calculer u^2 et utiliser ce résultat pour ramener l'équation $Q(z) = 0$, à une équation du second degré en u.
2. Déterminer les racines de P.
3. Montrer, sans utiliser la question précédente, que : ($P(z) = 0 \Longrightarrow z^5 = 1$).
4. Déduire de ces deux questions, en utilisant les racines cinquièmes de l'unité, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

Pour s'entrainer

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes (n est un entier naturel au moins égal à 2) :

$$(E_1)\colon (z+1)^n = (z-1)^n \qquad (E_2)\colon \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 0 \qquad (E_3)\colon z^n + 2^n = 0$$

Exercice 6. On considère l'application du plan complexe dans lui-même $f : z \mapsto z^2 + z + 1$.

1. Déterminer les images par f des nombres 1, $2i - 5$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Déterminer les antécedents par f de $1 + i$.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes ayant une image réelle par f.
5. Déterminer le lieu des points M alignés avec leur image par f et avec 1.