Semaine du 22 janvier

Programme de colle n°15

Continuité

1) Limite d'une fonction à l'infini ou en un point. Fonction continue sur un intervalle. Prolongement par continuité.
2) Théorème des valeurs intermédiaires.
3) Théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$.
4) Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
5) Application aux suites récurrentes et aux suites implicites.

Matrices et systèmes linéaires

1) Calcul matriciel : combinaison linéaire et produit. Transposée d'une matrice.
2) *Révision :* résolution d'un système linéaire par l'algorithme du pivot de Gauss.
3) Lien entre matrices et systèmes linéaires.
4) Puissance d'une matrice carrée, binôme de Newton.
5) Matrices inversibles : définition, propriété.
6) Inverse d'une matrice 2×2.
7) Calcul effectif de l'inverse d'une matrice.

Questions de cours

On commencera la colle par un calcul de produit matriciel.

1) Montrer que les fonctions $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ sont prolongeables par continuité en 0.
2) Étudier le prolongement par continuité aux bornes du domaine de définition de : $f(x) = x^x$ et $g(x) = \frac{x \ln x}{x^2-1}$.
3) Montrer que la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est croissante et diverge vers $+\infty$.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^{-nx} - x = 0$ admet une unique solution noté u_n. Montrer que la suite u converge vers une valeur à déterminer.
5) Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique.
6) Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer M^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
7) Résoudre les deux systèmes suivants en inversant la matrice du système.

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

8) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
9) Inverser une matrice donnée par le colleur.