Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 25 : matrices et applications linéaires

Exercice 1. Déterminer la matrice dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes (on admet qu'elles sont linéaires) :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+z \\ -x+6y-3z \end{pmatrix} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$

5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & (2X+2)P - XP' \end{array}$

6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$

7. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$
   avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère l'application suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - (2X+1)P \end{array}$$

Est-elle un automorphisme ?

Exercice 3. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & \text{le reste de la division euclidienne de } (X^3-1)P \text{ par } X^3 - X \end{array}$$

1. Vérifier que f est linéaire et vérifier que f est bien à valeur dans $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y, x+2y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire ; donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau $\ker f$; f est elle injective ?
3. f est elle surjective ? Donner une base de $\mathrm{Im} f$.
4. Montrer que $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \mid x + 2z = 3y\}$.
5. On pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,-2)$, $e_3 = (1,0,1)$,. Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On appelle $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 5.

1. Démontrer que les familles $\mathcal{U} = \left((X+1)^2, X+1, X^2+X+1\right)$
   et $\mathcal{V} = \left(X, (X-1)^2, 1\right)$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{U}$.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f et montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ réunion d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans cette base.
4. Décrire f comme la composée de deux endomorphismes très simples.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$.
On considère $\mathcal{B} = (X^2 + 2X - 1, -X + 1, X^2 + X - 1)$ une famille de E.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$ et celle de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(P) = XP'$. Déterminer M, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ puis M', la matrice dans la base $\mathcal{B}$.
5. En déduire N^n où $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - I_3)(A + 3I_3) = 0$. En déduire que : $\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad f^2(u) = -2f(u) + 3u$.
2. On note $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et $G = \ker(f + 3\mathrm{id})$. Pour $u_F \in F$, que vaut $f(u_F)$?
3. Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
4. Donner la dimension du G. En déduire celle de F.
5. Soit (u_1, u_2) une base de F et (u_3) une base de G. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 9. Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant la valeur de α.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Donner le rang des familles suivantes :

1. (a, b, c, d) où $a = (1, 2, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 1, 1)$ et $d = (1, -1, 0)$.
2. (a, b, c, d) où $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (2, 3, 4, 1)$, $c = (3, 4, 1, 2)$ et $d = (4, 1, 2, 3)$.
3. (a, b, c) où $a = (0, -r, q)$, $b = (r, 0, -p)$ et $c = (-q, p, 0)$ avec $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soit $m \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & m & -m^2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de A, en fonction de m.

2. Pour quelles valeurs de m le déterminant est-il nul ?

3. En déduire le rang de A en fonction de m.

Exercice 12.

1. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p < n$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
   Montrer que AB n'est pas inversible. BA peut-elle être inversible ?

2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À-t-on $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(BA)$?

Exercice 13. Calculer les déterminants suivants (on demande la réponse sous forme factorisée) :

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

2. $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

3. $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$

4. $D = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$

5. $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

6. $D = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix}$

Exercice 14. On considère $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(1,1,1)$ deux vecteurs de l'espace. À l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} a+b & a+2b & 3a-c \\ 2a+b & 2a+2b & 6a-c \\ 3a+b & 3a+2b & 9a-c \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 15. Pour $m \in \mathbb{K}$, on note f_m l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme.

Exercice 16.

1. On définit l'application $\mathrm{Tr}\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+d$. Montrer que Tr est linéaire.

2. On définit

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^\top B) \end{array}$$

   Montrer que ϕ est une application symétrique, bilinéaire et définie, positive.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Si $x \in E$ est tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, montrer que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

2. Donner la matrice de f dans cette base.

Pour s'entrainer

Exercice 18. Calculer les déterminants suivants (en factorisant au maximum d_3) :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 19. Montrer que le rang de $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est supérieur ou égal à 2.
Pour quelles valeurs de a et b ce rang vaut-il exactement 2 ?

Exercice 20. On appelle matrice scalaire une matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M est une matrice scalaire (pour $\Rightarrow$ on écrira $M(I_n + E_{i,j}) = (E_{i,j} + I_n)M$ pour i et j dans $[\![1, n]\!]$).
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, commute avec tous les automorphismes de E, que peut-on dire de f ?

Exercice 21. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$ et en déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(B^k)$.

Exercice 22.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer sans calculs le noyau et l'image de f.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer sans calculs le noyau et l'image de f.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer une base de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.
3. Si on note (u_0) une base de $\ker f$ et (u_1, u_2) une base de $\mathrm{Im} f$, montrer que $\mathcal{B} = (u_0, u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 24. Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 25. Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$ et $f : \begin{cases} E \to E \\ aX^3 + bX^2 + cX + d \mapsto (a+b)X^2 + (a+b+c)X + a+b+c+d \end{cases}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer son image et son noyau.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E et retrouver les résultats du 1.