Samedi 27 janvier 2023

Devoir sur table n° 4

Correction

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- Justifiez vos réponses.
- **ENCADREZ** vos résultats.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Numérotez les copies doubles.
- Bon courage !

Questions de cours

1) Étudier le prolongement par continuité aux bornes du domaine de définition de :

$$f(x) = x^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}.$$

2) Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

3) Soit $f\colon E \to F$ une application entre deux ensemble quelconques E et F. Montrer que pour toutes parties A_1 et A_2 de E, on a :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \text{et} \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Montrer que si f est injective alors la dernière inclusion est une égalité.

Solution.

1) Par *définition* $f(x) = e^{x \ln x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1$ car l'exponentielle est continue.
Ainsi $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+}$ et son prolongement est défini par

$$f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g, quant à elle, est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. En 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ par croissance comparée et en 1, on a

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{1+1} \times 1 = \frac{1}{2}$$

en utilisant la limite remarquable $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ avec $y = x - 1$.

Ainsi $\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+}$ et son prolongement est défini par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2) On pose $g(x) = f(x) - x$. Comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ *i.e.* $\boxed{f(c) = c.}$

3) Soit $y \in F$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in A_1 \cup A_2,\ y = f(x) \\ &\iff \exists x \in A_1,\ y = f(x) \ \text{ ou } \ \exists x \in A_2,\ y = f(x) \\ &\iff y \in f(A_1) \ \text{ ou } \ y \in f(A_2) \\ &\iff y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

D'où la première égalité d'ensemble. On considère maintenant $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Il existe alors $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. En particulier, comme $x \in A_1$, on a $y = f(x) \in f(A_1)$. De même, $y \in f(A_2)$ et finalement $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ ce qui prouve l'inclusion souhaitée.

Dans le cas où f est injective, si on part de $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ alors il existe $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Par injectivité de f, on a $x_1 = x_2$ et donc $x_1 \in A_1 \cap A_2$ ce qui prouve que $y \in f(A_1 \cap A_2)$. D'où l'inclusion réciproque.

Exercice 1. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et montrer que A est inversible. Que vaut A^{-1} ?

2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux réels u_n et v_n tels que

$$A^n = u_n A + v_n I_3.$$

et donner une relation entre (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n), valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} a_n = 2u_n + v_n, \\ b_n = u_n - v_n. \end{cases}$$

   a) Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n ainsi qu'une relation entre b_{n+1} et b_n.
   b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n en fonction de n.
   c) En déduire u_n, v_n puis A^n en fonction de n.

4) Déterminer une relation de récurrence double sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver le résultat précédent.

Solution.

1) On effectue le produit de A par elle-même, ce qui donne

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

On constate alors que $A^2 = 2I_3 + A$, donc

$$A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - I_3) \times A = I_3.$$

Par conséquent, $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et son inverse est

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que : $A^n = u_n A + v_n I_3$.

- *Initialisation :* pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$, donc le résultat est vrai au rang 0 avec

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 1.$$

- *Héridité :* soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. En multipliant cette relation par la matrice A, il vient

$$A^{n+1} = u_n A^2 + v_n A.$$

  Or, d'après la question précédente, $A^2 = 2I_3 + A$, ce qui donne en réinjectant dans la relation précédente :

$$A^{n+1} = 2u_n I_3 + u_n A + v_n A = (u_n + v_n)A + 2u_n I_3.$$

  En posant $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n$, on obtient $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I_3$, ce qui donne le résultat demandé au rang $n + 1$.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } A^n = u_n A + v_n I_3, \\ \text{et l'on a} \\ \qquad u_0 = 0,\ v_0 = 1 \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases} \end{array}}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2u_{n+1} + v_{n+1} && \text{par définition de } a_{n+1} \\ &= 2(u_n + v_n) + 2u_n && \text{d'après la question précédente} \\ &= 4u_n + 2v_n \\ &= 2a_n && \text{par définition de } a_n. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} && \text{par définition de } b_{n+1} \\ &= u_n + v_n - 2u_n && \text{d'après la question précédente} \\ &= -u_n + v_n \\ &= -b_n && \text{par définition de } b_n. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = -b_n. \end{cases}}$$

b) La question précédente montre que $(a_n)_n$ est une suite géométrique de raison 2, donc, pour tout entier n, $a_n = 2^n a_0$. De plus,

$$a_0 = 2u_0 + v_0 = 1.$$

De même, la suite $(b_n)_n$ est géométrique de raison -1 et de premier terme

$$b_0 = u_0 - v_0 = -1.$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = 2^n \\ b_n = (-1)^{n+1} \end{cases}}$$

c) Par définition de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = 2u_n + v_n \\ b_n = u_n - v_n \end{cases}$$

En sommant les deux égalités pour éliminer v_n on obtient

$$a_n + b_n = 3u_n \quad \text{soit} \quad u_n = \frac{a_n + b_n}{3}.$$

De même, en calculant $a_n - 2b_n$ afin d'éliminer u_n, il vient

$$a_n - 2b_n = 3v_n \quad \text{soit} \quad v_n = \frac{a_n - 2b_n}{3}.$$

On conclut à l'aide des expressions trouvées à la question précédente que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \\ v_n = \dfrac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3} \end{cases}}$$

4) On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_{n+1} + 2u_n$.
On considère alors l'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ dont les solutions (évidentes) sont -1 et 2. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ -\lambda + 2\mu &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= -\frac{1}{3} \\ \mu &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

On retrouve bien le résultat précédent pour u_n. Comme $v_n = u_{n+1} - u_n$, on obtient aussi de nouveau le résultat pour v_n.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x^n - x - 1$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.
On notera u_n cette solution et on rappelle que n est pris supérieur ou égal à 2.

2) Calculer la valeur exacte de u_2.

3) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \geqslant 1$.

4) Montrer que $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

5) Montrer que la suite u converge.

6) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

7) En déduire qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $\forall n \geqslant n_0, \quad f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$.

8) En déduire que : $\forall n \geqslant n_0, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

9) Calculer la limite de la suite u ainsi que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^n$.

Solution.

1) f_n est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ comme polynôme. Pour $x \geqslant 1$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$.
Or, $x \geqslant 1 \Rightarrow x^{n-1} \geqslant 1 \Rightarrow nx^{n-1} \geqslant n$ car n est positif. Ainsi, puisque $n \geqslant 2$, on a $f_n'(x) \geqslant n - 1 > 0$ sur $[1, +\infty[$.

La fonction f_n est donc continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $f_n([1,+\infty[) = [f_n(1), \lim\limits_{+\infty} f_n[= [-1,+\infty[$. En particulier, comme $0 \in [-1,+\infty[$, $\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ s'annule exactement une fois sur } [1,+\infty[.}$

2) u_2 est la solution supérieure à 1 de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$. On résout cette équation. On trouve deux solutions : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$. Donc $\boxed{u_2 = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

3) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x - 1 - (x^n - x - 1) = x^n(x-1)$.
Ainsi : $\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \geqslant 1.}$

4) Comme $u_n \geqslant 1$, en prenant $x = u_n$ dans l'inéquation précédente, on obtient :
$f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \geqslant 0$. Or, $f_n(u_n) = 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(u_n) \geqslant 0 = f_{n+1}(u_{n+1})}$.
Comme f_{n+1} est strictement croissante, on a $u_n \geqslant u_{n+1}$. $\boxed{\text{La suite est décroissante.}}$

5) La suite est décroissante et minorée par 1 donc $\boxed{\text{elle converge.}}$

6) $f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{n} - 2$. Or,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1/n}} \to e^1$$

car l'exponentielle est continue et en utilisant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e-2.}$$

7) On constate que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = e-2 > 0$. Une suite qui converge vers un nombre strictement positif est positive à partir d'un certain rang.
$\boxed{\text{Donc à partir d'un certain rang, } f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \text{ est positif.}}$

8) On sait que $f_n(1) = -1 < 0$ et $f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$ pour $n \geqslant n_0$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule entre 1 et $1+\dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant n_0$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{1}{n}.}$

9) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente donne :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

D'un autre côté, on sait que $f_n(u_n) = 0$ *i.e.* $u_n^n - u_n - 1 = 0$. Ainsi, $u_n^n = u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+1$.
D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 2.}$

Exercice 3. Dans cet exercice, on étudie quelques propriétés du déterminant, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\begin{array}{rccc} \det\colon & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad-bc \end{array}$$

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que A soit inversible et donner, dans ce cas, une expression de A^{-1}.

   b) Démontrer le résultat précédent.

2) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(MM') = \det(M) \times \det(M')$.

3) On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients entiers :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \right\}$$

   On dit que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est inversible <u>dans</u> $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si M est inversible et que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

   a) Montrer que M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$.

   b) Montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alors a et b sont premiers entre eux.

Solution.

1) a) A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

   b) On pose : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On constate : $AB = BA = (ad-bc)I_2$.

   Si $ad - bc \neq 0$ alors $A \times \frac{1}{ad-bc}B = I_2$. Donc $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } \dfrac{1}{ad-bc}B}$.
   Si $ad - bc = 0$ alors $AB = 0_2$ donc $A = 0_2$ ou $B = 0_2$ ou A n'est pas inversible. Comme $B = 0_2 \Rightarrow A = 0_2$, on obtient dans tous les cas que A n'est pas inversible.

2) D'une part : $\det(M)\det(M') = (ad-bc)(a'd'-b'c') = ada'd' - adb'c' - bca'd' + bcb'c'$.
   D'autre part : $MM' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} \det(MM') &= (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') \\ &= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc' \\ &= aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca'. \end{aligned}$$

On retrouve bien : $\det(MM') = \det(M)\det(M')$

3) a) Si $\det(M) = \pm 1$ alors d'après la question 1, M est inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

qui est donc bien à coefficients entiers. Ainsi, M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
Réciproquement, si M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alors $MM^{-1} = I_2$ donc, en passant au déterminant :

$$\det(MM^{-1}) = \det(I_2) \iff \det(M)\det(M^{-1}) = 1$$

d'après la question précédente. Or M et M^{-1} appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ donc leurs déterminants sont *entiers*. La relation précédente montre qu'ils divisent 1 mais les seuls diviseurs de 1 sont 1 et -1. Ainsi, $\boxed{\det(M) = \pm 1.}$

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On a $\det(M) = ad - bc = \pm 1$ d'après ce qui précède. Soit n un diviseur commun (positif) de a et b. Alors, il divise aussi $ad - bc$. Donc n divise ± 1 *i.e.* $n = 1$. Ainsi, $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux.}}$

Exercice 4. Le but de l'exercice est d'étudier la suite d'intégrales définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t^2} dt.$$

On rappelle la définition de la factorielle : $0! = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Question préliminaire

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant 2^{n-1}$. En déduire la limite de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.

Signe et monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : x \mapsto \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

2) Déterminer le domaine de définition de f_n et justifier l'existence de I_n.

3) La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

4) Calculer I_0 puis I_1 (on pourra faire une intégration par parties).

5) Faire l'étude complète de f_n. On dressera son tableau de variations avec limites aux bornes. En déduire le signe de I_n.

6) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7) Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) Calculer I_2.

9) Effectuer le changement de variable $y = \ln t$ dans I_n.

10) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente (si oui, on précisera sa limite) ?

Une expression de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11) Montrer qu'il existe une suite **d'entiers naturels** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = n! - \frac{b_n}{e}.$$
On déterminera b_0, b_1, b_2 ainsi qu'une relation entre b_n et b_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

12) Déterminer la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la limite de $(b_n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

13) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

14) Déterminer la limite de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Solution.

1) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant 2^{n-1}$. Pour $n = 1$, $n! = 1! = 1 \geqslant 1 = 2^{n-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $n! \geqslant 2^{n-1}$. Comme $n + 1 \geqslant 2$, on a
$$(n+1)! = n! \times (n+1) \geqslant 2^{n-1} \times 2 = 2^n$$
ce qui achève la récurrence.

2) Lorsque $n = 0$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}^*$. Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[1, e]$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale I_n.

3) On a $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \pm\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée). Ainsi, f_n n'admet pas de limite finie en 0 donc $\boxed{\text{elle n'est pas prolongeable par continuité en ce point.}}$

4) On a

$$I_0 = \int_1^e \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^e = \frac{e-1}{e}$$

et, par intégration par parties :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{t} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{-1}{e} + I_0 = \frac{e-2}{e}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est, par quotient, dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^3}\big(n - 2\ln x\big).$$

Le signe de la dérivée dépend de la parité de n.

- Si n est pair, $n-1$ est impair donc, pour tout $n \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x)$ est du signe de $(n-2\ln x)\ln x$. Comme $x \mapsto n - 2\ln x$ est décroissante et s'annule lorsque $n - 2\ln x = 0 \iff x = e^{\frac{n}{2}}$, on obtient le tableau de variations suivant.

x	0		1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(n-2\ln x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-n}$	↘	0

En effet, par opération et croissance comparée : $\lim\limits_{0^+} f_n = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = 0$.

- Si n est impair alors $f_n'(x)$ est du signe de $(n-2\ln x)$. On obtient alors, de façon analogue, le tableau suivant.

x	0		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-n}$	↘	0

D'après les tableaux, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive sur $[1, e]$ (c'est clair pour n pair et, pour n impair, on remarque que $f_n(1) = 0$) donc, par positivité de l'intégrale, I_n est positif. Le calcul de I_0 donne la positivité de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [1, e]$, $\ln t \in [0, 1]$ donc $(\ln t)^n \geqslant (\ln t)^{n+1}$ ce qui donne $\boxed{f_n(t) \geqslant f_{n+1}(t).}$ On obtient, par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_1^e f_n(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_1^e f_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t = I_{n+1}$$

donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties pour obtenir :

$$I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}(\ln t)^{n+1}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t} \times (n+1)\frac{1}{t}(\ln t)^n \mathrm{d}t = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$$

ce qui s'écrit $\boxed{I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n.}$

8) On obtient, avec la relation précédente, $\boxed{I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = \frac{2e-5}{e}.}$

9) Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait le changement de variable $y = \ln t$ donc $t = e^y$ et $dt = e^y dy$. Ainsi,

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{y^n}{e^{2y}} e^y \mathrm{d}y = \int_0^1 y^n e^{-y}\mathrm{d}y.$$

10) Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant e^{-y} \leqslant 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \int_0^1 y^n \times 0\mathrm{d}y \leqslant I_n = \int_0^1 y^n e^{-y}\mathrm{d}y \leqslant \int_0^1 y^n \mathrm{d}y = \frac{1}{n+1}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente et de limite nulle.}}$

11) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = e\left(n! - I_n\right).$$

On a, avec les calculs de I_0, I_1 et I_2,

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2 \quad \text{et} \quad b_2 = 5.$$

De plus, avec la relation de récurrence sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = e\left((n+1)! - I_{n+1}\right) = (n+1)e\left(n! - I_n\right) + 1 = (n+1)b_n + 1.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$. Le nombre $b_0 = 1$ est un entier naturel. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $b_n \in \mathbb{N}$. En tant que produit et somme d'entier naturels,

$$b_{n+1} = (n+1)b_n + 1 \in \mathbb{N}$$

ce qui achève la récurrence. En conclusion il existe une suite d'entiers naturels $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n! - \frac{b_n}{e}$.

12) Comme (I_n) tend vers 0, par opérations, comme $(n!)$ tend vers $+\infty$, la suite (b_n) tend vers $+\infty$. On a la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{b_n}{n!} = e - \frac{I_n}{n!}$$

donc, à nouveau par opérations, $\boxed{(b_n/n!)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } e.}$

13) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Avec la question précédente, $b_0 = 1 = 0! \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$b_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

On a, avec la question précédente,

$$b_{n+1} = (n+1)b_n + 1 = (n+1)n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 1 = (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

d'où

$$b_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}.$$

14) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = b_n/n!$ donc avec la question précédente, $\boxed{(e_n)_n \text{ converge vers } e.}$