Semaine du 2 octobre

Programme de colle n°3

Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles

1) Domaine de définition, graphe d'une fonction.
2) Parité, périodicité, réduction du domaine d'étude.
3) Savoir, à partir du graphe de f, trouver ceux de $x \mapsto f(x) + a$ et $x \mapsto f(x+a)$.
4) Monotonie.
5) Majorant, maximum d'une fonction.
6) Bijection pour des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.
7) Fonction réciproque.
8) Formules de dérivation (notamment pour $f \circ g$, pour f^{-1}).
9) Dérivées successives.
10) Asymptote verticale, horizontale.
11) Fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.
12) Résolution d'inéquations, recherche d'extrema, recherche du nombre de solutions d'une équation par l'étude de fonctions.

Trigonométrie

1) Fonction cosinus, sinus, tangente.
2) Formule de duplication, linéarisation, factorisation.
3) Équations et inéquations trigonométriques.

Questions de cours

1) Preuve de l'inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$.
2) Soient $f : I \to J$ une fonction croissante et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante. Montrer que $g \circ f$ est décroissante.
3) Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ réalise une bijection entre deux ensembles à préciser et déterminer sa bijection réciproque.
4) Soit f une fonction strictement croissante sur $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$.
5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$.
6) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
7) Factoriser $\cos x + \sqrt{3} \sin x$.
8) Réduction du domaine d'étude de $f(x) = \sin(4x)$ et $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Expliquer comment obtenir le reste du graphe.
9) Soit $a \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On pose $t = \tan(\frac{a}{2})$. Montrer que $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et donner les formules analogues pour $\sin a$ et $\tan a$.