Semaine du 29 avril

Programme de colle n°25

Dimension finie

1) Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
2) Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
3) Dimension d'un espace vectoriel. Dimension de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
4) Dans E de dimension finie n, une famille libre à n éléments est une base. Une famille génératrice à n éléments est une base.
5) Dimension d'un sous-espaces vectoriel. Caractérisation des sous-espaces supplémentaires avec la dimension.
6) Formule de Grassmann.
7) Rang d'une famille de vecteurs.

Intégration

1) Révisions sur le calcul intégral.
2) Subdivisions, fonctions en escaliers, intégrale d'une fonction continue sur un segment.
3) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
4) Sommes de Riemann, méthode des rectangles.
5) Inégalité de Taylor-Lagrange.

Questions de cours

1) Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :
$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}, \qquad F_2 = \text{Vect}\left((1,1,1),(3,-1,2),(-1,3,0)\right).$$
2) Soit $u=(1,2,-1)$, $v=(0,2,3)$, $w=(1,0,1)$. Montrer que (u,v,w) forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Soit $G = \text{Vect}\left((1,1,1),(3,-1,1)\right)$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = G$.
4) Calculer certaines des intégrales suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\, dx$

   (b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

   (c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{1+x+x^2}\, dx$

   (d) $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2}{(2-5x)^4}\, dx$

   (e) $I = \displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2+x^4} dx$

   (f) $I = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\sqrt{t}\right) dt$

5) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(e^t+1)dt$. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer le signe de F puis dresser son tableau de variations.
6) Calculer la limite des suites $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.
7) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange, l'appliquer à la fonction exponentielle puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}$.