

## Devoir maison n° 3

Mathématiques

*On veillera dans ce DM à être bien rigoureux et à adopter une rédaction “type” pour montrer une équivalence, une égalité d’ensembles ou encore qu’une application est injective/surjective/bijjective.*

**Exercice 1.** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ . On considère l’application  $f$  suivante.

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

- 1) Faire un dessin où figurent les ensembles  $E, A, B$  ainsi qu’une partie  $X \subset E$ . Expliquer à quoi correspond  $f(X)$  sur ce dessin.
- 2) Dans cette question uniquement on prend  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l’ensemble  $A$  est celui des fonctions paires et  $B$  celui des fonctions impaires. Déterminer  $f(\mathbb{R}[x])$  où  $\mathbb{R}[x]$  désigne l’ensemble des fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$ .

On revient au cas général.

- 3) Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .
- 4) Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ .
- 5) On suppose que  $f$  est bijective ; déterminer alors  $f^{-1}$ .