Feuille d'exercices n° 24 : correction

Exercice 1.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées cylindriques $\left(2; \frac{5\pi}{3}, 5\right)$ et $\left(4, \frac{3\pi}{2}, -2\right)$.

2. Déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Solution.

1. $\boxed{(1, -\sqrt{3}, 5) \text{ et } (0, -4, -2).}$

2. $\boxed{(\sqrt{8}, \frac{5\pi}{6}, 2\sqrt{2}).}$

Exercice 2. Soient $A(0,1,2)$; $B(-1,1,1)$; $C(2;-1;2)$; $D(4;0;-1)$ quatre points de l'espace.
Calculer les quantités suivantes : AB, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.
Préciser si ces calculs permettent une conclusion géométrique.

Solution. $AB = \sqrt{2}$
$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux.
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (1, -5, -1)$: les vecteurs ne sont pas colinéaires.
$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = -12$: les trois vecteurs forment une base indirecte.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points de l'espace, et I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées quel que soit le point M :

1. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$;

2. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{0}$;

3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Solution.

1. $\Delta_1 = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$.
   Par linéarité :
   $\Delta_1 = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MC} \wedge (-\overrightarrow{MA}) - (-\overrightarrow{MA}) \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$.
   $\boxed{\Delta_1 = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}}$

2. remplacer : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ etc...
   $\Delta_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \wedge (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \wedge (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$
   $\Delta_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC})$. $\boxed{\Delta_2 = \overrightarrow{0}}$

3. On utilise la multilinéarité (on développe comme un produit) :
   $$\begin{aligned}\Delta_3 = [\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MK}] &= [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}]+[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MK}]+[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}]+[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MK}] \\ &= [-\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}] + [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}] + [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MK}] \\ &= [\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}] + [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MK}].\end{aligned}$$
   En écrivant $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK}$ et en remarquant que $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires, on obtient : $\Delta_3 = [\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AK}] + [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.
   Or, $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$. Ainsi, $[\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AK}] = 0$ ce qui prouve le résultat.

Exercice 4.

1. Prouver la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.

2. En déduire l'identité $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

Solution.

1. En coordonnées.

2. $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Solution.

1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ est toujours orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Donc si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, on distingue plusieurs cas.

   (a) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$: $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}^3}$

   (b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$: $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

   (c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$: $\boxed{\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})}$

   (d) si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:
   on pose : $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}, \vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ et $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$. La famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe.
   On note : $\overrightarrow{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. On calcule :
   $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{u}||\vec{i} \wedge (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = ||\overrightarrow{u}||b\vec{k} - ||\overrightarrow{u}||c\vec{j}$.
   On veut $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{v}||\vec{j}$ donc $b = 0$ et $c = -\dfrac{||\overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{u}||}$.
   Ainsi $\boxed{\overrightarrow{x} = \dfrac{a}{||\overrightarrow{u}||}\overrightarrow{u} - \dfrac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||^2}}$ où a est un paramètre quelconque.

Exercice 6. Dans l'espace rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on définit les vecteurs suivants : $\overrightarrow{u}(1, a, 2)$, $\overrightarrow{v}(2, 1, a)$, et $\overrightarrow{w}(a, 2, 1)$. Déterminer pour quelles valeurs du réel a la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace.

Solution. On calcule le déterminant/produit mixte : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + a^3 - 2a - 2a - 2a = a^3 - 6a + 9$.
On constate que $a = -3$ est une racine évidente du polynôme. Donc $a^3 - 6a + 9 = (a+3)(a^2 - 3a + 3)$ avec $a^2 - 3a + 3 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, le déterminant est non nul si et seulement si $a \neq -3$.
Donc $\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ est une base si et seulement si } a \neq -3.}$

Exercice 7. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(0, -1, 4)$, $B(1, -1, 2)$, $C(2, -1, 1)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 contenant A, B, et C.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 contenant A et la droite $\mathcal{D}$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan P_3 perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et contenant B.

4. Déterminer une équation cartésienne du plan P_4 contenant la droite $\mathcal{D}$ et parallèle à la droite (BC).

Solution.

1. $M \in P_1 \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \Leftrightarrow y+1=0$ donc $\boxed{P_1\colon y+1=0}$

2. On note $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}(2,3,1)$ un vecteur qui dirige $\mathcal{D}$ et $M_{\mathcal{D}}(1,-2,3) \in D$.
$M \in P_2 \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}, \overrightarrow{AM_{\mathcal{D}}}] = 0$. On trouve $\boxed{P_2\colon -2x+3y-5z+23=0.}$

3. Un vecteur normal à P_3 est $\overrightarrow{n}(2,3,1)$ donc $P_3\colon 2x+3y+z+d=0$ avec d à déterminer. Comme $B \in P_3$, on trouve $d=-1$. D'où $\boxed{P_3\colon 2x+3y+z-1=0.}$

4. On note $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}(2,3,1)$ un vecteur qui dirige D et $M_{\mathcal{D}}(1,-2,3) \in D$. On a $\overrightarrow{BC}(1,0,-1)$.
$M \in P_4 \Leftrightarrow [\overrightarrow{MM_{\mathcal{D}}}, \overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}, \overrightarrow{BC}] = 0$. On trouve $\boxed{P_4\colon -x+y-z+6=0.}$

Exercice 8. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les droites D_1 définie par les équations cartésiennes $\begin{cases} x+y=2 \\ y-2z=3 \end{cases}$ et D_2 par les équations cartésiennes $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=a \end{cases}$ où a est un réel donné.

1. D_1 et D_2 sont-elles parallèles ?

2. Calculer la valeur de a pour que D_1 et D_2 soient coplanaires. Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection et une équation du plan P qui les contient toutes les deux.

Solution.

1. On calcule des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ qui dirigent D_1 et D_2 :
$\overrightarrow{v}_1 = (1,1,0) \wedge (0,1,-2) = (-2,2,1)$ et $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,1) \wedge (1,-2,3) = (5,-2,-3)$.
$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires donc $\boxed{D_1 \text{ et } D_2 \text{ ne sont pas parallèles.}}$

2. Comme D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, D_1 et D_2 sont coplanaires si et seulement si elles sont un point commun si et seulement si le système suivant admet une solution :
$$\begin{cases} x+y=2 \\ y-2z=3 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+3z=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-1 \\ a=-4 \end{cases}.$$
$\boxed{D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont coplanaires si et seulement si } a=-4. \text{ Le point d'intersection est alors } (1,1,-1).}$
Un vecteur normal au plan P est $\overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{v}_2 = (-4,-1,-6)$ donc $P\colon 4x+y+6z+d=0$ avec d à déterminer. Comme le point d'intersection $(1,1,-1)$ est dans P, on trouve $d=1$.
Ainsi, $\boxed{P\colon 4x+y+6z+1=0.}$

Exercice 9.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace, dirigée par $\overrightarrow{v}$ et A un point de cette droite. Soit M un point de l'espace. Montrer que la distance entre $\mathcal{D}$ et M vaut $\dfrac{||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||}$.

2. Application : soit $\mathcal{D}\colon \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ et $M(1,1,1)$. Déterminer la distance entre $\mathcal{D}$ et M.

Solution.

1. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
On a $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{v} = MH \times ||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{n}$.
Donc $\dfrac{||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||} = MH$ qui $\boxed{\text{est la distance du point à la droite.}}$

2. $\overrightarrow{v}(1,-1,0)$ dirige la droite. $A(0,-1,1)$ est sur la droite. Donc $\boxed{d(\mathcal{D},M)=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

Exercice 10. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x+y-z=0$. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

2. Déterminer les coordonnées de l'image de M dans la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$.

Solution.

1. On a $H(a,b,c)\in\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MH}$ colinéaire à $\vec{n}=(1,1,-1)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
Ainsi, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} a=x+t\\ b=y+t\\ c=z-t\end{array}\right.$ avec $a+b-c=0$ ce qui donne
$\boxed{H\left(\frac{2x-y+z}{3},\frac{-x+2y+z}{3},\frac{x+y+2z}{3}\right).}$

2. Le point image M' vérifie : $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HM'}$. Donc $x_{M'}=2x_H-x_M$. On en déduit que
$\boxed{M'(\frac{x-2y+2z}{3},\frac{-2x+y+2z}{3},\frac{2x+2y+z}{3}).}$

Exercice 11. L'espace est rapporté au repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Soient les droites D_1 de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=3+2t\\ y=1+t\\ z=2-t\end{array}\right.$ et D_2 définie par les équations $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+4z=-8\\ x+y+z=0\end{array}\right.$.

1. Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer un vecteur directeur de la perpendiculaire commune Δ de D_1 et D_2.

3. Calculer la distance de D_1 à D_2.

Solution.

1. $A(3,1,2)\in D_1$ et $\vec{u}_1(2,1,-1)$ dirige D_1.
$B(8,0,-8)\in D_2$ et un vecteur directeur de D_2 est $\vec{u}_2=(3,2,4)\wedge(1,1,1)=(-2,1,1)$.
D_1 : $A+\mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$ et D_2 : $B+\mathrm{Vect}(\vec{u}_2)$.
$[\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2]=-30\neq 0$ donc ils ne sont pas coplanaires : $\boxed{\text{les deux droites ne sont pas dans le même plan.}}$

2. Un vecteur directeur de la perpendiculaire Δ est $\vec{v}=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2$ *i.e.* $\boxed{\vec{v}(2,0,4)}$.

3. Soit H_i l'intersection de D_i et Δ. On a alors $d(D_1,D_2)=H_1H_2$. Or,
$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{v}\cdot\overrightarrow{AH_1}+\vec{v}\cdot\overrightarrow{H_1H_2}+\vec{v}\cdot\overrightarrow{H_2B}=\vec{v}\cdot\overrightarrow{H_1H_2}=\pm||\vec{v}||H_1H_2$ par orthogonalité de Δ. D'où
$d(D_1,D_2)=\frac{|\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}|}{||\vec{v}||}=3\sqrt{5}$.

Exercice 12. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les deux plans d'équations respectives $3x-4y+1=0$ et $2x-3y+6z-1=0$.
Déterminer tous les points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Solution. On résout : $d(\mathcal{P},M)=d(\mathcal{Q},M)\Leftrightarrow\frac{|3x-4y+1|}{5}=\frac{|2x-3y+6z-1|}{7}\Leftrightarrow 7|3x-4y+1|=5|2x-3y+6z-1|$.
$d(\mathcal{P},M)=d(\mathcal{Q},M)\Leftrightarrow 7(3x-4y+1)=5(2x-3y+6z-1)$ ou $7(3x-4y+1)=-5(2x-3y+6z-1)$.
On trouve deux plans d'équations : $\boxed{P_1\colon 11x-13y-30z+12=0 \text{ et } P_2\colon 31x-43y+30z+2=0.}$

Exercice 13. L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramètrique $\begin{cases} x &= 4 + 2t \\ y &= 3 + t \\ z &= 1 + t \end{cases}$

1. Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de $\mathcal{D}$. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale. En déduire les coordonnées de H, projection orthogonale de O sur $\mathcal{D}$. Que vaut la distance de O à $\mathcal{D}$?

2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2z = 2$ contient la droite $\mathcal{D}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et de O à $\mathcal{P}'$. Retrouver la distance de O à $\mathcal{D}$.

Solution.

1. $f(t) = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 26}$.
   Cette fonction est minimale quand $t \mapsto 6t^2 + 24t + 26$ est minimale donc quand $\boxed{t = -b/2a = -2.}$
   $f(t)$ est minimale quand $M(t) = H$ donc $\boxed{H(0, 1, -1).}$
   Ainsi, $\boxed{d(O, \mathcal{D}) = OH = \sqrt{2}.}$

2. On remplace dans l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 2t - 2(1 + t) = 4 - 2 = 2$. L'équation est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\boxed{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}.}$
   $\mathcal{P}'$ est dirigé par $\vec{u}(2, 1, 1)$ (vecteur directeur de $\mathcal{D}$) et par $\vec{n}(1, 0, -2)$ (vecteur normal à $\mathcal{P}$). Le point $A(4, 3, 1)$ est dans $\mathcal{D}$ donc dans $\mathcal{P}'$.
   $\vec{u} \wedge \vec{n} = (-2, 5, -1)$ donc $\mathcal{P}' \colon -2x + 5y - z + d = 0$ avec $A \in \mathcal{P}'$, on trouve $d = -6$.
   Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}' \colon -2x + 5y - z - 6 = 0.}$

3. $d(O, \mathcal{P}) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
   $d(O, \mathcal{P}') = \dfrac{|-6|}{\sqrt{4 + 25 + 1}} = \dfrac{6}{\sqrt{30}}$.
   Dans le rectangle dont la longueur des côtés est $d(O, \mathcal{P})$ et $d(O, \mathcal{P}')$, la diagonale mesure :
   $\sqrt{\dfrac{4}{5} + \dfrac{36}{30}} = \sqrt{2}$. $\boxed{\text{On retrouve bien } d(O, \mathcal{D}).}$

Exercice 14. Déterminer le centre et le rayon des sphères suivantes. Étudier leur intersection avec le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$ (on donnera le centre et le rayon du cercle quand c'est possible).

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0$

2. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

Solution.

1. $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$: $\boxed{\text{sphère de centre } \Omega(0, 2, -3) \text{ et de rayon } 1.}$
   $d(\mathcal{P}, \Omega) = \dfrac{4}{\sqrt{3}} > 1$: le plan et la sphère ne s'intersecte pas.

2. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$: $\boxed{\text{sphère de centre } \Omega(1, 1, 1) \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$
   $d(\mathcal{P}, \Omega) = 0 \leqslant \sqrt{2}$: le centre du cercle est dans le plan. Le plan et la sphère s'intersecte en un cercle de rayon $\sqrt{2}$ et de centre Ω.

3. $x^2+y^2+z^2=4$: sphère de centre $\Omega(0,0,0)$ et de rayon 2.
$d(\mathcal{P},\Omega) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} < 2$: le plan et la sphère s'intersecte en un cercle.
D'après Pythagore, le rayon R du cercle vérifie : $R = \sqrt{R_{\text{sphere}^2} - d(\Omega,\mathcal{P})^2} = 1$.
Le centre du cercle H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{\Omega H}$ est colinéaire à $(1,1,1)$ (vecteur normal à $\mathcal{P}$) et $H \in \mathcal{P}$. On trouve : $\boxed{H(1,1,1).}$

Exercice 15. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(6,-6,6)$ $B(-6,0,6)$ et $C(-2,-2,11)$.

1. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre B et passant par A.
2. Déterminer une équation du plan Π tangent à $\mathcal{S}$ en A.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale à Π passant par C. Déterminer les coordonnées du point D, intersection de Π avec $\mathcal{D}$.
4. Étudier l'intersection des droites (AD) et (BC) et déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.

Solution.

1. $AB = \sqrt{180}$. Donc les points de la sphère vérifient $BM = AB$ donc $\boxed{\mathcal{S}\colon x^2+y^2+z^2+12x-12z-108=0.}$
2. Un vecteur normal à Π est $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(-12,6,0)$ donc $\Pi\colon -2x+y+d=0$ avec $A \in \Pi$, on trouve $\boxed{\Pi\colon -2x+y+18=0.}$
3. $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{v}(-2,1,0)$ et passe par C donc une équation paramétrique est $\mathcal{D} : \begin{cases} x=-2-2t \\ y=-2+t \\ z=11 \end{cases}$.
   Le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Π vérifie $\begin{cases} x=-2-2t \\ y=-2+t \\ z=11 \\ -2x+y+18=0 \end{cases}$
   On trouve $\boxed{D(6,-6,11).}$
4. Équations paramétriques des droites :
   $(AD)\colon \begin{cases} x=6 \\ y=-6 \\ z=6+5t \end{cases}$ $\quad (BC)\colon \begin{cases} x=-6+4t \\ y=-2t \\ z=6+5t \end{cases}$.
   L'éventuel point d'intersection vérifie (il y a t et t') :
   $\begin{cases} x=6 \\ y=-6 \\ z=6+5t' \\ x=-6+4t \\ y=-2t \\ z=6+5t \end{cases}$. On trouve une solution : $\boxed{(AD) \text{ et } (BC) \text{ s'intersectent en un unique point } M(6,-6,21).}$