À rendre pour le lundi 6 novembre 2023

Devoir maison n° 2

Mathématiques

Exercice 1. Soit p un entier naturel non-nul. On pose $f(p) = p^2 + p + 1$ et $u_p = \dfrac{f(p)}{p(p+1)}$.

1) Calculer $f(p-1)$. En déduire, pour $p \geqslant 2$, une expression de $\dfrac{p^3-1}{p^3+1}$ en fonction de u_p et u_{p-1}.

2) Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de la quantité suivante :

$$w_n = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}.$$

Exercice 2. Soient un entier $n \geqslant 2$ et a, b des nombres complexes. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1) Que vaut ω^n ? Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b)$.

2) Montrer que $n|a| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{j=0}^{n-1} |b + \omega^j a|$.

4) En déduire que $|a| + |b| \leqslant \displaystyle\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des réels $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ *pour différentes valeurs de* $n \in \mathbb{N}^*$. *On rappelle qu'un réel r est un rationnel s'il existe deux entiers relatifs p et q (avec $q \neq 0$) tels que* $r = \frac{p}{q}$. *Quitte à simplifier la fraction, on peut toujours choisir p et q premiers entre eux.*
*On admet dans tout le problème que si p est un nombre premier alors $\sqrt{p}$ est irrationnel (*i.e. *n'est pas rationnel) ainsi que le résultat d'arithmétique suivant : si p et q sont deux entiers premiers entre eux (*i.e. *sans facteur commun) tels que p divise q^3 alors $p = \pm 1$.*

Partie I

Dans cette partie, on va établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Ici n désigne un entier naturel non-nul et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k$.

2) Comparer a_{k+2n+1} et a_{2n+1-k} avec a_k et montrer que : $\forall (s,k) \in \mathbb{Z}^2, \quad 2a_s a_k = a_{s+k} + a_{s-k}$.

3) Établir la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}$.

4) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}_k$: "a_k et a_{k+1} sont rationnels."
On **suppose** que a_1 est rationnel. Montrer alors par récurrence que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On a ainsi montré que si a_1 est rationnel alors tous les a_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont rationnels.

Partie II

5) On prend $n = 2$. En utilisant la question 3, déterminer une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de racines carrées. Ce nombre est-il rationnel ?

6) Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1$.

7) On suppose par l'absurde que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est rationnel donc s'écrit $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Justifier que $8p^3 - 6pq^2 = q^3$ et en déduire une contradiction.
On a ainsi montré que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ *est irrationnel.*

8) Dans cette question, on prend $n = 6$ et on pose $y_1 = a_1 + a_3 + a_4$ et $y_2 = a_2 + a_5 + a_6$.

   a) Calculer $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$.
   b) Montrer que $y_1 < 0$ et déterminer y_1 et y_2.
   c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$ est irrationnel.
   d) On pose $\alpha = y_1$, $\beta = a_1a_3 + a_1a_4 + a_3a_4$ et $\gamma = a_1a_3a_4$. Calculer β et γ.
   e) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 3 dont les coefficients s'expriment à l'aide de α, β, γ.