Semaine du 13 mai

Programme de colle n°27

Applications linéaires

1) Définition, noyau, image.
2) Vocabulaire : isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.
3) Espaces vectoriels isomorphes, défaut d'injectivité/surjectivité dû aux dimensions.
4) Théorème du rang.
5) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$ (finie) alors f injective *ssi* f surjective *ssi* f bijective.
6) Projecteurs et symétries.

Indépendance en probablité

1) Événements indépendants, mutuellement indépendants.
2) Loi binomiale.
3) Couples de variables aléatoires.
4) Loi d'un couple, lois marginales.
5) Variables aléatoires indépendantes.

Questions de cours

1) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim E$ finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Montrer que $\tilde{f}\colon \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme. En déduire le théorème du rang.
2) Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leur noyau et leur image :

   (a) $f_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

   (b) $f_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{array}$
3) Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ telle que $f(x, y, z) = (x-y, y-z, z-x, x)$.
   (a) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(f)$ ainsi qu'une base de cet espace.
4) Montrer que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ avec $p(x, y) = (2x - y, 2x - y)$ est un projecteur.
   Donner ses éléments caractéristiques.
5) Soient A, B deux événements indépendants. Montrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants. De même pour A, $\bar{B}$ et $\bar{A}$, B.
6) On tire n fois avec remise dans une urne contenant une boule rouge et une boule noire.
   On note A_n : “obtenir des boules des deux couleurs” et B_n : “obtenir au plus une boule noire”.
   Discuter de l'indépendance de A_n et B_n suivant la valeur de n.
7) On lance deux dés équilibrés. On note A : “le dé 1 donne un nombre pair”, B : “le dé 2 donne un nombre impair” et C : “la somme des dés est paire”. Montrer que A, B, C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement.
8) Une urne contient n boules numérotées. On en tire une, on note X sa valeur puis on la remet en enlevant toutes celles qui lui sont strictement supérieures. On retire alors une boule et on note Y sa valeur. Déterminer la loi du couple (X, Y) et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.