NOM :

Test n° 1 : sujet A

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité.

1. $f(x) = (2x^3+4x-1)^3$	$f'(x) = 3(6x^2+4)(2x^3+4x-1)^2$	pour $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = (2-x)e^{x^2-x}$	$f'(x) = -\left(2x^2-5x+3\right)e^{x^2-x}$	pour $x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = \tan(\cos x)$	$f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$	pour $x \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}$	pour $x \in]-1,1[$

Exercice 2. Donner la forme polaire et algébrique des nombres complexes suivants. On explicitera les valeurs remarquables de cos et sin.

z	forme polaire	forme algébrique
$-2e^{i\frac{11\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$-1+i\sqrt{3}$
$(1+i\sqrt{3})^4$	$16e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$-8-8i\sqrt{3}$
$(2e^{i\frac{\pi}{6}})^5$	$32e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$-16\sqrt{3}+16i$
$\dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$	$e^{-i\frac{\pi}{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Explications :

- $-1 = e^{i\pi}$ donc $-2e^{i\frac{11\pi}{3}} = 2e^{i\frac{14\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}+4i\pi} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1+i\sqrt{3}$.
- $(1+i\sqrt{3})^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}} = -8-8i\sqrt{3}$.
- $(2e^{i\frac{\pi}{6}})^5 = 32e^{i\frac{5\pi}{6}} = -16\sqrt{3}+16i$.
- $\dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i} = \dfrac{(1+\sqrt{2}-i)^2}{|1+\sqrt{2}+i|^2} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})i-1}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \dfrac{2(1+\sqrt{2})(1-i)}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1-i)$

  Or, en utilisant la quantité conjuguée : $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  d'où le résultat car $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 3. Écrire $f(x) = \cos^2(3x) - \cos^2 x$ comme produit de cosinus et sinus.

$$f(x) = (\cos(3x) + \cos x)(\cos(3x) - \cos x) = -4\cos(2x)\cos(x)\sin(2x)\sin(x) = -\sin(4x)\sin(2x)$$

en utilisant les formules $\cos p \pm \cos q$ et $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$.

Exercice 4. Exprimer $g(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\cos x}$ en fonction de $\cos x$.

On applique la formule de Moivre puis le binôme de Newton :

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x.$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \text{et } \sin(3x) &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x(4\cos^2 x - 1) \end{aligned}$$

D'où

$$g(x) = 4\cos^2(x) - 3$$

Exercice 5. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ 5x & - & 4y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

$$\mathcal{S} = \{(1,1,0)\}$$

Exercice 6. Calculer les sommes suivantes :

1. $$\sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k+2}} = \frac{1}{9}\sum_{k=3}^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{2}{3}} = \frac{8}{81}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

2. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$$