Feuille d'exercices n° 12 : calcul matriciel et systèmes linéaires

Exercice 1. Calculer les produits de matrices $A \times B$ et $B \times A$ dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & a & b & c \\ 0 & \lambda & d & e \\ 0 & 0 & \lambda & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer J_n^2, J_n^3 en fonction de J_n.
2. Calculer J_n^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Calculer les puissances des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une relation entre A^2, A et I_3.
2. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Expliciter (a_n) et (b_n) puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_3$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0_3$.

Exercice 7. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = I_n, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

2. Montrer que A commute avec toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A est une matrice scalaire.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. Calculer AA^T, en déduire à quelle condition A est inversible et donner alors son inverse. Quelle condition obtient-on si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que il existe $p \in \mathbb{N}^*$, telle que : $A^p = 0_n$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.

2. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1})$.

3. En déduire que $I_n - A$ est inversible. Quel est son inverse ?

Exercice 11. Inverser les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

2. Calculer $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est inversible.

3. Exprimer A en fonction de P et D. Sans calcul, est-ce que A est inversible ? Exprimer A^{-1} en fonction de P et D.

4. Calculer D^n et exprimer A^n en fonction de D et P.

Exercice 13. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, la trace et le déterminant des matrices R_θ et S_θ.

2. Soit $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $R_\theta R_\alpha, S_\theta S_\alpha$ puis pour $n \in \mathbb{N}$: R_θ^n et S_θ^n.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $R_\theta^T R_\theta$ et $S_\theta^T S_\theta$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A = I_2$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$ ou $A = S_\theta$.

5. Voyez-vous un lien entre les coordonnées polaires et les matrices R_θ ?

Pour s'entrainer

Exercice 14. Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant la valeur de α.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 15. Soit $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $C^3 = 6C - C^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_k) et (b_k) telles que $C^k = a_k C^2 + b_k C$ (pour $k \geq 1$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et expliciter ces deux suites.
4. En déduire l'expression de C^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$?

Exercice 16. Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17.

1. Déterminer le produit de deux matrices diagonales et les puissances d'une matrice diagonale.
   A quelle condition une matrice diagonale est-elle inversible ? Donner alors son inverse.
2. Quelle est la diagonale du produit de deux matrices triangulaires supérieures ou d'une puissance d'une matrice triangulaire supérieure ?
   Que se passe-t-il pour des matrices triangulaires inférieures ?
3. A quelle condition une matrice triangulaire est-elle inversible ? Que peut-on alors dire de son inverse ? (est-elle triangulaire, et si oui que peut-on dire de sa diagonale ?)

Exercice 18. Soit T une matrice triangulaire d'ordre n dont les termes diagonaux sont nuls.
Montrer que $T^n = 0$.

Exercice 19. Soit $M = \begin{pmatrix} 2a-1 & a & 2a-1 \\ a^2+a-2 & a^2-1 & a-1 \\ a^2+a-1 & a^2+a-1 & a \end{pmatrix}$.

1. Etudier le rang de la matrice M suivant les valeurs de a.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice M est-elle inversible ? Calculer M^{-1} dans le cas $a = 2$.

Exercice 20. Calculer les produits matriciels suivants :

1. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin x \\ -1 & 0 & \cos x \\ -\sin x & \cos x & 0 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.
Calculer A^3 puis les puissances de $I_3 + A$.

Exercice 22. En considérant $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{array} \right.$ inverser la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ où $a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i > j \\ \binom{j-1}{i-1} \text{ sinon} \end{array} \right.$

Exercice 23. Soit $A = (a_{k,l}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_{k,l} = \omega^{(k-1)(l-1)}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Calculer $A\overline{A}$ où $\overline{A} = (\overline{a_{k,l}})$ et en déduire A^{-1}.

Exercice 24. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = A^T\}$ l'espace des *matrices symétriques* à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Vérifier que $0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. A quelle condition a-t-on $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$?
   Les puissances de A sont-elles des matrices symétriques ?
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$. A^{-1} est-elle symétrique ?

Exercice 25. Discuter et résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x - y + z & = & a \\ x + y - z & = & b \\ -x + 2y + z & = & c \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - 5y + 2z + 4t & = & a \\ 7x - 4y + z + 3t & = & b \\ 5x + 7y - 4z - 6t & = & c \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y + z & = & a \\ -x + 3y - 5z & = & b \\ 8x - 9y + 13z & = & c \end{array} \right.$$

Exercice 26. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\left\{ \begin{array}{ccc} (m+2)x + y & = & m \\ (m-10)x + (m-4)y & = & -3m \end{array} \right.$
   où $m \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement.
2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3-y} & = & \frac{-1}{2} \\ \frac{5}{1-x} - \frac{1}{3-y} & = & -2 \end{array} \right.$.
3. $\left\{ \begin{array}{ccc} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y & = & u \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y & = & v \end{array} \right.$
   où θ, u et v sont des réels fixés.
4. $\left\{ \begin{array}{ccc} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 1 \\ (2a+1)x + 3y + (a+2)z & = & 3 \end{array} \right.$
5. $\left\{ \begin{array}{ccc} x + 2y + az & = & 1 \\ 3x + 4y + 2z & = & a \\ 2x + 3y - z & = & 1 \end{array} \right.$
6. $\left\{ \begin{array}{ccc} x + y + 4z + 4t & = & a \\ 3x + y - 4z + 6t & = & 0 \\ x - 4z + t & = & b \end{array} \right.$
7. $\left\{ \begin{array}{ccc} 2y + 2z & = & p \\ -2x + z & = & q \\ -2x - y & = & r \\ x - 2y + 2z & = & s \end{array} \right.$
   où $a, p, q, r, s \in \mathbb{R}$.
8. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right.$
9. $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array} \right.$
10. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array} \right.$