Semaine du 5 février

Programme de colle n°17

Dérivation

1) Définition du nombre dérivé. Dérivée à droite, dérivée à gauche.
2) Fonction dérivée, opérations sur les fonctions dérivables.
3) Dérivées successives, fonction de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz.
4) Théorème de Rolle.
5) Égalité et inégalité des accroissements finis : applications aux suites récurrentes.
6) Théorème de la limite de la dérivée : soient I un intervalle et $a \in I$, si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ alors elle l'est aussi sur I.

Espaces vectoriels

1) Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^\Omega$, $\mathbb{C}^n$, etc.
2) Sous-espace vectoriel, intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
3) Somme directe, sous-espaces vectoriels supplémentaires.
4) Famille génératrice.
5) Famille libre.
6) Base, base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
7) Coordonnées dans une base.

Questions de cours

1) Soit f une fonction dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $a \in]\alpha, \beta[$. Montrer que si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Que pensez-vous de la réciproque ?
2) Étudier la dérivabilité de la fonction suivante sur son domaine de définition : $f(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$.
3) Étudier la continuité, la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de l'une des fonctions suivantes sur son domaine de définition.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4) Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ est un espace vectoriel.
5) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que l'intersection et la somme de deux sous-espaces vectoriels de E sont encore des sous-espaces vectoriels.
6) Montrer que $G = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 0\}$ est un espace vectoriel et déterminer une famille génératrice de G.
7) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
8) On considère $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 2x - y + z = 0\right\}$. Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.