Feuille d'exercices n° 11 : continuité

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-4x^2-3x+6}{x^2-4}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\sin(e^{-x})$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x^2+x-1)}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f(x)=\begin{cases}(1+x)e^{1/x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } |x|\neq 1\\ \frac{1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition de ces fonctions et déterminer si on peut les prolonger par continuité aux bornes du domaine.

1. $f(x)=x^x$
2. $f(x)=\dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)}$
3. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$

Exercice 4. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0, vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x)$.

1. Soit x_0 fixé. Montrer que la suite $\left(f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right)_n$ est constante.
2. Montrer que pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, $f(x_0)=f(0)$.
3. En déduire que f est une fonction constante.

Exercice 5. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$. Montrer que si f est continue, alors f est constante.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ qui vérifient :

$$f(1)=g(0)=1 \quad\text{et}\quad g(1)=f(0)=0.$$

Montrer que : $\exists a\in[0,1],\quad f(a)=2023g(a)$.

Exercice 7. Soit u la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+\frac{1}{4}$.

1. Montrer que u est positive.
2. Montrer que u est monotone.
3. En déduire que u converge et calculer sa limite.

Exercice 8. Soit $a>0$. On considère la suite définie par :

$$u_0>0 \quad\text{et}\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Étudier la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

3. Montrer que : $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{a}$.

4. Montrer que u est monotone à partir de $n = 1$.

5. Montrer que u converge et calculer sa limite.

Exercice 9. On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.

2. Montrer que, $\forall n \geq 0$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

3. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).

4. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$.

Exercice 10. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite u dont le terme général u_n est la solution strictement positive à l'équation $f_n(x) = 0$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que u est bien définie.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.

4. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

5. En déduire que u est monotone.

6. Montrer que u converge.

7. Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n$ et en déduire la valeur de la limite de u.

Exercice 11. On considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection sur des intervalles à déterminer.

2. Déterminer le tableau de variations de f^{-1}.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, qu'on notera u_n.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant 0$.

5. Étudier la monotonie de u et calculer sa limite.

6. Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n - \ln n) \leqslant u_n \leqslant \ln n$.

7. Retrouver la limite de u puis déterminer la limite de : $\dfrac{u_n}{\ln n}$.

Pour s'entrainer

Exercice 12. L'objectif est de déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+1}{3}\right) = f(x).$$

1. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3}$. Expliciter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Soit f solution du problème. Montrer que $f(u_0) = f(1/2)$. Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice 13.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x+1 = \frac{e^x}{n}$ a une unique solution x_n strictement négative.
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n), puis l'existence d'une limite.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n+1)$.

Exercice 14. On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 \geq 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \ln(u_n). \end{cases}$

1. Étudier la fonction $g\colon x \mapsto 1 + \ln(x) - x$.
2. Montrer que u existe sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que u est monotone.
4. Montrer que u converge et calculer sa limite.

Exercice 15. On définit $f_n\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

1. Montrer que $f_n(x) = 2$ admet une unique solution, notée u_n.
2. Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad u_n \in]0,1[$.
3. Étudier la monotonie de u et en déduire la convergence de u.
4. Démontrer que u_n^n tend vers 0. En déduire la limite de la suite u.

Exercice 16. Soit f définie sur un intervalle I vérifiant : $\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$.
Montrer que f est continue sur I.

Exercice 17. Soit $f\colon x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer en utilisant des suites de limite nulle que f n'a pas de limite en 0.

Exercice 18. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1/2]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$.

Exercice 19. Déterminer toutes les fonctions vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue en 0 et en 1 et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x^2)$
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$

3. f est continue sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)\cos(x)$

4. f est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$

Exercice 20. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $(P)\colon \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(0) = 0 \qquad f(nx) = nf(x) \qquad f(-nx) = -nf(x) \qquad f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$$

Exercice 21. Montrer que chacune des équations suivante admet une solution sur l'intervalle I donné :

1. $x^{2014} - x^{2015} = 1 \quad$ sur $I = [-1, 1]$
2. $\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2} \quad$ sur $I = [1, 10]$
3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2) \quad$ sur $I = [0, 1]$
4. $e^x = 2 + x \quad$ sur $I = [\ln 2, 2\ln 2]$