Projecteurs et symétries d'un espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Rappel : si F et G sont supplémentaires dans E (*i.e.* $E = F \oplus G$) alors, par définition, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Exemple. Soient $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,0,1))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1,-1))$.

On vérifie par le calcul que $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,1,-1))$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^3$ (trois vecteurs en dimension trois). Ainsi, d'après l'une des caractérisations vues en cours sur les sous-espaces supplémentaires, on a $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Il se décompose donc de manière unique $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Précisément, $(a,b,c) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \lambda(0,1,-1)$ où (α,β,λ) sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$. En résolvant le système d'inconnues α, β, λ on trouve $u_F = (a, b-a+c, a)$ et $u_G = (0, a-c, c-a)$.

Étant donnés deux sous-espaces supplémentaires et la décomposition $x = x_F + x_G$ associée, on peut alors définir une application linéaire en donnant l'image de x_F et celle de x_G.

Définition 1. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E *i.e.* $E = F \oplus G$. Tout vecteur $x \in E$ se décompose alors de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application linéaire p définie par : $\forall x \in E,\ p(x) = x_F$.

Proposition 1. La projection sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme p tel que

$$p|_F = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad p|_G = 0_G.$$

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On décompose $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ de sorte que

$$x + \lambda y = \underbrace{x_F + \lambda y_F}_{\in F} + \underbrace{x_G + \lambda y_G}_{\in G} \quad \text{(décomposition unique de } x + \lambda y \text{ selon } F \oplus G).$$

Ainsi, $p(x+\lambda y) = x_F + \lambda y_F = p(x) + \lambda p(y)$ et donc $p \in \mathcal{L}(E)$. De plus, si $x \in F$ alors $x = x + 0$ et $p(x) = x$. Si $x \in G$ alors $x = 0 + x$ et $p(x) = 0$.
Unicité : si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f(x_F) = x_F$ pour tout $x_F \in F$ et $f(x_G) = 0$ pour tout $x_G \in G$ alors

$$\forall x \in E, \quad f(x) = f(x_F + x_G) = f(x_F) + f(x_G) = x_F = p(x).$$

□

Proposition 2. Si p est la projection sur F, parallèlement à G alors

$$F = \mathrm{Im}(p) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}(p).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a $G \subset \mathrm{Ker}(p)$. Montrons l'autre inclusion.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$ avec $x = x_F + x_G$. Alors, $x_F = p(x) = 0$ donc finalement $x = x_G \in G$.
$F \subset \mathrm{Im}(p)$: soit $x_F \in F$. On a vu que $x_F = p(x_F) \in \mathrm{Im}(p)$.
$\mathrm{Im}(p) \subset F$: soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ donc $y = x_F \in F$.

□

Remarque 1. Dans le cas d'un projecteur, on a toujours $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
C'est faux en général et ce n'est pas une caractérisation des projecteurs.

Proposition 3 (caractérisation des projecteurs)**.** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.
Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration. Si p est un projecteur alors $p(x) = x_F$ et $p \circ p(x) = p(x_F) = x_F = p(x)$.
Réciproquement, si $p \circ p = p$ alors il faut trouver les sous espaces vectoriels F et G.
On pose $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$ et on vérifie qu'ils sont supplémentaires.
Soit $x \in E$, montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
Analyse : soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Il existe $x' \in E$ tel que $x_F = p(x')$ donc

$$p(x_F) = p^2(x') = p(x') = x_F.$$

Ainsi, par linéarité, $p(x) = p(x_F) + p(x_G) = x_F$ car $x_G \in \text{Ker}(p)$. D'où, $x_F = p(x)$ et $x_G = x - p(x)$.
Synthèse : posons $x_F = p(x)$ et $x_G = x - p(x)$. On a

- $x_F \in F$;
- $p(x_G) = p(x) - p^2(x) = 0_E$ *i.e.* $x_G \in G$;
- $x = x_F + x_G$.

Finalement $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p(x) = x_F$ pour tout $x \in E$, ce qui est la définition de la projection sur F parallèlement à G.

□

Définition 2. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Pour $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ la décomposition associée. On appelle symétrie par rapport à F et parallèlement à G l'application linéaire s définie par : $\forall x \in E,\ s(x) = x_F - x_G$. C'est l'unique endomorphisme s tel que

$$s|_F = \text{id}_F \quad \text{et} \quad s|_G = -\text{id}_G.$$

Remarque 2. Cette dernière propriété se démontre de la même façon que la proposition 1

Proposition 4. Si s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G alors

$$F = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(s + \text{id}_E).$$

Démonstration.
$F \subset \text{Ker}(s - \text{id}_E)$: soit $x \in F$, alors $s(x) = s(x + 0) = x$ donc $s(x) - x = 0$ *i.e.* $x \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)$.
$\text{Ker}(s - \text{id}_E) \subset F$: soit $x \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ *i.e.* $s(x) = x$. Alors $x_F + x_G = x = s(x_F + x_G) = x_F - x_G$.
Par unicité de l'écriture, on a $x_G = -x_G$ *i.e.* $x_G = 0$ donc finalement $x = x_F \in F$.

$G \subset \text{Ker}(s + \text{id}_E)$: soit $x \in G$, alors $s(x) = s(0 + x) = -x$ donc $s(x) + x = 0$ *i.e.* $x \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.
$\text{Ker}(s + \text{id}_E) \subset G$: soit $x \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ *i.e.* $s(x) = -x$. Alors $-x_F - x_G = -x = s(x_F + x_G) = x_F - x_G$.
Par unicité de l'écriture, on a $-x_F = x_F$ *i.e.* $x_F = 0$ donc finalement $x = x_G \in G$.

□

Proposition 5 (lien entre projecteur et symétrie)**.** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On pose $s = 2p - \text{id}_E$.
Alors p est le projecteur sur F parallèlement à G si et seulement si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Démonstration. Si p est un projecteur alors $x = p(x) + x_G$ *i.e.* $x_G = x - p(x)$ donc
$s(x) = 2p(x) - x = p(x) - x_G$ et s est bien la symétrie associée à F et G.
Si s est une symétrie alors $s(x_F + s_G) = x_F - x_G$ donc $p(x) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = \frac{1}{2}(x_F - x_G + (x_F + x_G)) = x_F$.

□

Proposition 6 (caractérisation des symétries)**.** Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Démonstration. Si s est une symétrie alors $s(s(x)) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x$.
Réciproquement, si $s \circ s = \mathrm{id}_E$ alors on pose $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$. Ainsi $p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \mathrm{id}_E) = p$ donc p est un projecteur et finalement s est une symétrie d'après la proposition 5.

□

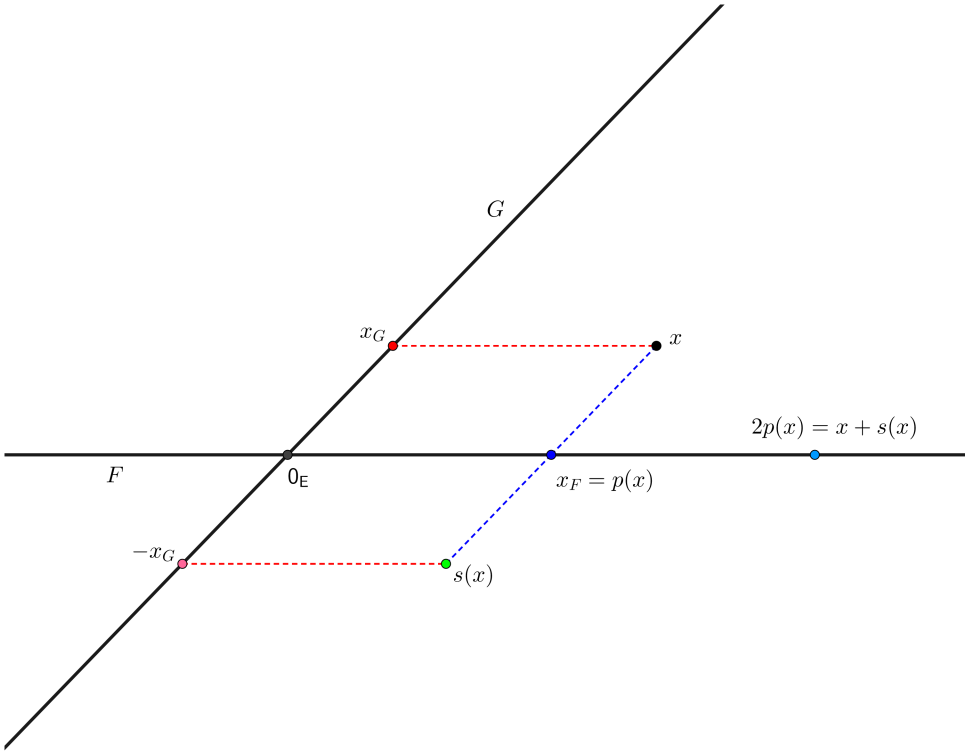

Illustration des notions de projecteur et symétrie dans le cas où $\dim E = 2$ et où F et G sont deux droites supplémentaires.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On note $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G, puis de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Solution.

1. F est une droite et G un plan donc $\dim F + \dim G = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$. De plus si $u \in F \cap G$ alors $u = (x,x,x)$ et $2x + x - x = 0$ donc $x = 0$ *i.e.* $u = (0,0,0)$. D'où $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Il faut déterminer pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sa décomposition selon $F \oplus G$. On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - \lambda(1,1,1) \in G$ *i.e.*
$$2(x - \lambda) + (y - \lambda) - (z - \lambda) = 0 \iff \lambda = x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}.$$
On en déduit que
$$u = \left(x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)(1,1,1) + \left(-\frac{y}{2} + \frac{z}{2}, -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}, -x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2}z\right).$$

D'où $p(x,y,z) = \left(x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}, x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}, x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)$ et $s = 2p' - \mathrm{id}$ avec p' la projection sur G donc

$$s(x,y,z) = (-y+z, -2x+y+z, -2x-y+3z) - (x,y,z) = (-x-y+z, -2x+z, -2x-y+2z).$$