Feuille d'exercices n° 13 : dérivation

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème.

1. $f(x) = (x^2 - 1)\arccos(x)$
2. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
3. $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux bornes de leur domaine de définition ? Si oui, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée. Et si oui, la fonction est-elle $\mathcal{C}^1$?

1. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
2. $f(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Exercice 3. Soit $f\colon x \mapsto 1 + |x| \sin x$.

1. Montrer que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.

1. Déterminer la dérivée k-ième de $f\colon x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $g\colon x \mapsto \ln x$.
2. En déduire la dérivée p-ième $h\colon x \mapsto x^{p-1} \ln x$.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer la dérivée k-ième de $f(x) = x^n$.
2. Déterminer la dérivée n-ième de $g(x) = x^{2n}$.
3. Pour calculer la dérivée n-ième de g, appliquer la formule de Leibniz à $g(x) = f(x) \times f(x)$. En déduire que
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 6. Soit f définie par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est continue.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ existe et est continue.
4. En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 7. On considère la fonction $f\colon x \mapsto e^{-x^2}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que : $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$. Établir une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.

3. Déterminer P_1, P_2 et déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

4. Montrer la relation (R): $f'(x) = -2xf(x)$.
   En dérivant (R), déterminer une relation entre $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$.
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n' = -2nP_{n-1}$.
   Montrer que le polynôme P_n vérifie l'équation diffŕentielle : $P_n''(x) - 2xP_n'(x) + 2nP_n(x) = 0$.

6. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{(n)}(x)$.

7. Montrer par récurrence que P_n admet n racines réelles distinctes.

Exercice 8. En uttilisant l'égalité des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{t+1}}\right)$.

Exercice 9.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$. A l'aide d'un passage à la somme, montrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n$.
3. Montrer que la suite u est convergente.

Exercice 10. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels, qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 11.

1. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ pour tout $x \in [0; 1]$.
   (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Étudier le sens de variation de f sur $[0, 1]$. Quelle est l'image de $[0, 1]$ par f ?
   (c) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
   (d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On note ℓ cette valeur.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \ell|$.
   (c) En déduire que (u_n) converge vers ℓ, et déterminer un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore f la fonction ainsi prolongée. La fonction f prolongée est-elle dérivable en 0 ?

2. Étudiez les variations de f.

3. Déterminer les points fixes de f.

4. Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t}{(t+1)^2}$, en déduire que :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \qquad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

5. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie en la minorant.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$.
   (c) En déduire que (x_n) converge et déterminer la limite de la suite.

Pour s'entrainer

Exercice 13. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f(1) = 0$ et uniquement en ces points. On suppose aussi que $f'(0) = 0$.

1. On considère la fonction $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g la fonction prolongée.
2. Montrer que la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.
3. En déduire que la courbe de f admet une tangente passant par l'origine autre que celle en 0.

Exercice 14. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et que $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$, et que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$?

Exercice 16. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 + x} + 2$.

1. (a) Étudier les variations de f, et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   (b) Montrer que $|f'|$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$, et en donner un majorant.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 5| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 5|$.
   (c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 17. Chercher les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 7x^2 + 5 \end{array} \right. \quad , \quad g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \frac{1}{5x^2+3} \end{array} \right. \quad , \quad h : \left\{ \begin{array}{l}]-10,10[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x}{x+2} \end{array} \right.$$

Exercice 18.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $f'(x)(g(b)-g(a)) = g'(x)(f(b)-f(a))$.
2. En déduire la règle de l'Hôpital : Si f et g s'annulent toutes les deux en un point a, sont continues et dérivables au voisinage de a (sauf éventuellement en a pour la dérivabilité), ne s'annulent pas au voisinage de a, et vérifient $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 19. Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I qui vérifie les deux propriétés :

$$(1)\colon\ f(I) \subset I \qquad (2)\colon\ \exists k \in]0,1[, \forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$$

1. Montrer que f est continue en tout point de I.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\alpha \in I$. Montrer que cette solution est unique.
3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite converge vers α.

Exercice 20. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Quelle est sa parité ?
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, et que son prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$, on note α sa solution. Vérifier que $\alpha \in]0,1[$ et calculer $\mathrm{ch}(\alpha)$.
4. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{ch}(t) - t$, puis prouver que : $\forall t \geq 0, \quad 0 \leq t\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t) \leq \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}^2(t)$.
5. Montrer que f est lipschitizienne sur $\mathbb{R}$.
6. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer la nature de la suite (u_n).

Exercice 21. Soit f une fonction dérivable en un point a. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 22.

1. Soit f une fonction dérivable en un point a. Déterminer la limite éventuelle en a de $\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h}$.

Exercice 23. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose en plus que f est dérivable en 0 et en 1 avec $f'(0) = f'(1) = 0$.
On définit g sur $]0,1[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

1. Étudier les limites de g en 0 et en 1. Montrer que l'on peut prolonger g en une fonction continue sur $[0,1]$.
2. Démontrer alors qu'il existe α dans $]0,1[$ tel que $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$ et que $f(\alpha) = \alpha$.