

## Programme de colle n°20

### Dénombrement

- 1) Cardinal d'un ensemble fini  $E$ . Notations :  $\text{Card}(E)$  ou  $|E|$ .
- 2) Formules usuelles :  $\text{Card}(A \cup B)$ ,  $\text{Card}(\overline{A})$ ,  $\text{Card}(A \setminus B)$ ,  $\text{Card}(E \times F)$ ,  $\text{Card}(F^E)$  et  $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$ .
- 3)  $p$ -listes de  $E$  :  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ .
- 4)  $p$ -arrangements de  $E$  :  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  tel que  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$ . Permutations de  $E$ .
- 5)  $p$ -combinaisons de  $E$  :  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  tel que  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ .

### Géométrie plane

- 1) Base orthonormée directe.
- 2) Coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires.
- 3) Produit scalaire.
- 4) Produit mixte ou déterminant.
- 5) Équation de droites, représentation paramétrique, vecteur directeur, normal.
- 6) Distance d'une droite à un point.
- 7) Équation de cercles
- 8) Intersection de droites, de cercles.

### Questions de cours

*On commencera la colle par un petit calcul de développement limité.*

- 1) Nombre d'applications injectives de  $E$  dans  $F$  (avec  $E$  et  $F$  des ensembles finis).
- 2) Nombre d'anagrammes du mot : ANAGRAMME.
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer que  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  sans utiliser la formule avec les factorielles.
- 4) Pour  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan, montrer que :  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ .  
En déduire l'identité du parallélogramme et celle de polarisation.
- 5) Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan dont les coordonnées sont prises dans un repère orthonormé.  
Montrer que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .
- 6) Soit  $\mathcal{D}$  :  $2x - y + 4 = 0$  et  $M(1, 1)$ . Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .
- 7) Dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le point  $\Omega(1, -1)$  ainsi que les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Montrer que  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère. Est-il direct ? Est-il orthogonal ?
  - (b) Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le vecteur  $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$  et le point  $A(5, 6)$ .  
Calculer leurs coordonnées dans  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ .
- 8) Soit  $\mathcal{D}$  la droite qui passe par les points  $A(1, 1)$  et  $B(2, -1)$ .  
Déterminer : un vecteur directeur, un vecteur normal, un paramétrage et une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .