Samedi 2 décembre 2023

Devoir sur table n° 2

Mathématiques

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- Justifiez vos réponses.
- ENCADREZ vos résultats.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Numérotez les copies doubles.
- Bon courage !

Questions de cours

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la formule pour la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2) Mettre sous formes polaire et algébrique le nombre complexe $a = \dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) Déterminer les racines cubiques de $2+2i$. On calculera **explicitement** leurs formes algébriques (sans garder cos et sin).

Exercice 1. Dans cet exercice, on veut prouver que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. On suppose donc par l'absurde qu'elle en possède une et on note ℓ cette limite.

1) Pourquoi a-t-on $\ell \in \mathbb{R}$?

2) Justifier que les suites $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(n+2))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

3) Factoriser $\cos(n+2)+\cos(n)$. En déduire que $\ell = 0$.

4) Exprimer $\cos(2n)$ en fonction de $\cos n$. En déduire une contradiction.

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) a) Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

   b) Résoudre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\sin(x) = x$.

2) Démontrer que pour tout entier n, $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.

1) Soient θ, α, β des réels. À l'aide de la technique de l'arc moitié, factoriser :

$$\frac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - e^{i\beta}}.$$

2) On considère A, B et M, trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et z. Montrer que :

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{a}{b}\right)\ [\pi]. \qquad (*)$$

3) Donner une interprétation géométrique du résultat précédent.

4) Que devient l'égalité $(*)$ si on suppose en plus que A et B sont diamétralement opposés ? Donner une interprétation géométrique pour cette nouvelle égalité obtenue.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que $A = (1+1)^n$, $B = (1+j)^n$ et $C = (1+\bar{j})^n$.

1) Calculer en fonction de $\bar{j}$ les nombres j^2 et $\frac{1}{j}$.

2) Placer de façon **exacte** les points d'affixe $1, j$ et $\bar{j}$ dans un repère orthonormé. On expliquera comment on procède.

3) Calculer $1 + j + j^2$.

4) Pour $k \in \mathbb{Z}$, calculer $1 + j^k + j^{2k}$. On distinguera deux cas.

5) Mettre sous forme polaire $1 + j$ et de $1 + \bar{j}$. En déduire les formes polaires de B et C.

6) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A + B + C$ en fonction de n.

7) Développer A, B et C par la formule du binôme de Newton.

8) En déduire une expression pour la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k}.$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. On considère aussi la fonction auxiliaire définie par $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

1) Étude de g.

   a) Faire l'étude complète de la fonction g. On déterminera son domaine de définition, son domaine de dérivation, sa dérivée ainsi que son tableau de variations (limites comprises).

   b) Le graphe de g possède-t-il une asymptote ? Si oui, préciser laquelle.

   c) Tracer le graphe de g. On fera apparaître l'asymptote, la tangente en 0 ainsi qu'une autre tangente remarquable.

2) Étude de f.

   a) En justifiant *soigneusement*, déterminer le domaine de définition de f.

   b) Faire de même pour son domaine de dérivabilité.

   c) Pour $x \in D_{f'}$, calculer $f'(x)$.

   d) En déduire une simplification de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$. On distinguera deux cas.

   Indication : faire apparaître la forme $\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$ dans la dérivée.

3) Changement de variable.

   a) Justifier que pour tout $x \geqslant 0$, il existe un unique $\theta \in [0, \pi[$ tel que $\sqrt{x} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

   b) Exprimer $\sin\theta$ en fonction de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

   c) Pour $\theta \in [0, \pi[$, simplifier $\arcsin(\sin\theta)$. On distinguera deux cas.

   d) En déduire de nouveau une simplification de $f(x)$.

4) Tracer le graphe de f.

Exercice 6. Soit u la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$$

1) Montrer que u_n est bien défini et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On introduit v la suite auxiliaire suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln u_n$. Montrer que v est bien définie et qu'il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux.

3) Expliciter v_n puis u_n en fonction de n.

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7. Autour du nombre e.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Rappeler la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) En utilisant le binôme de Newton, montrer que $u_n \leqslant S_n$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $\dfrac{n!}{(n-k)!n^k} \geqslant 1 - \dfrac{k(k-1)}{2n}$.

4) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{(k-2)!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-3}}$.

5) En déduire que $S_n - u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.

6) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant q$. Montrer que $q!S_q$ est un entier et que $\displaystyle q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q}$.

7) En déduire que e est irrationnel.