À rendre pour le lundi 9 octobre 2023

Devoir maison n° 1

Mathématiques

Le but de ce DM est de montrer, avec trois méthodes différentes, l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin x + \cos x\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

1) **Première méthode :** factoriser $\sin x + \cos x$ puis en déduire l'inégalité souhaitée.

2) **Deuxième méthode :** mettre l'inégalité au carré (en justifiant) et conclure.

3) **Troisième méthode :** on considère la fonction $f(x) = \sin x + \cos x$.

   a) Justifier pourquoi il *suffit* de montrer que : $\forall x \in [0, 2\pi],\ \left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{2}$.
   b) Calculer $f(x+\pi)$ et en déduire qu'il suffit de montrer l'inégalité seulement pour $x \in [0, \pi]$.
   c) Calculer $f(\frac{\pi}{2} - x)$ et en déduire qu'il suffit de montrer l'inégalité seulement pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   d) Étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et conclure.

Solution.

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ et on rappelle que $|\cos x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

2) L'inégalité concerne deux nombres positifs donc on peut la mettre au carré tout en conservant une équivalence (on rappelle aussi que $|x|^2 = x^2$) :

$$\begin{aligned} \left|\sin x + \cos x\right| \leqslant \sqrt{2} &\iff \left(\sin x + \cos x\right)^2 \leqslant 2 \\ &\iff \sin^2 x + 2\cos x \sin x + \cos^2 x \leqslant 2 \\ &\iff 2\cos x \sin x \leqslant 1 \qquad \text{car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ &\iff \sin(2x) \leqslant 1 \qquad \text{car } \sin(2x) = 2\sin x \cos x. \end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité est vraie puisque $\sin x \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où le résultat.

3) a) On *suppose* que : $\forall x \in [0, 2\pi],\ \left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{2}$. Montrons qu'alors l'inégalité s'étend à tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ *quelconque*. Puisque f est 2π-périodique, on souhaite trouver un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_k = x + 2k\pi \in [0, 2\pi]$ de sorte que $|f(x)| = |f(x_k)| \leqslant \sqrt{2}$ d'après l'hypothèse. Un tel k doit vérifier

$$0 \leqslant x + 2k\pi \leqslant 2\pi \quad \iff \quad -k \leqslant \frac{x}{2\pi} \leqslant -k + 1$$

   donc on peut prendre $k = -\left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor$.

   b) $f(x+\pi) = -f(x)$ donc $|f|$ est π-périodique. En utilisant le raisonnement précédent, on voit qu'il suffit de montrer l'inégalité pour $x \in [0, \pi]$.

c) $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$ mais $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\iff\frac{\pi}{2}-x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ donc cette relation ne permet pas de réduire l'intervalle d'étude. Il y a donc un problème dans la question...

En revanche, la relation $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$ montre que la courbe de f présente une symétrie d'axe $x=\frac{\pi}{4}$, ce que l'on peut exploiter. En effet, puisque $|f|$ est π-périodique on peut montrer l'inégalité seulement sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ car cet intervalle est de longueur π. Or, pour tout $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$, on a $\frac{\pi}{2}-x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ donc il suffit de montrer l'inégalité pour $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

d) Finalement on étudie f sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. On rappelle que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=\cos x-\sin x$. Pour $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$, on a $\cos x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $f'(x)\geqslant 0$ et finalement f est croissante sur cet intervalle. Puisque $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, on obtient l'inégalité souhaitée.