# Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 15 : quelques corrections

**Exercice 2.**

9. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2+2}\right) \sim \dfrac{-1}{n^2+2} \sim -\dfrac{1}{n^2}$

10. $u_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \sim \dfrac{2}{2} \sim 1$

11. Idée : les termes de la sommes croissent tellement vite que la somme des premiers termes est négligeable devant le dernier.

    Réalisation : montrons que $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k! = o(n!)$. On aura ainsi, $u_n = n! + v_n = n! + o(n!) \sim n!$.

    On a $\dfrac{v_n}{n!} = \dfrac{1}{n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{k!}{n!} = \dfrac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{1}{n(n-1)\underbrace{(n-2)\times\cdots\times(k+1)}_{\geqslant 1}} \leqslant \dfrac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n} \to 0.$

12. ⚠ **On a un exposant qui varie** ⚠ donc on met sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}
u_n = \exp\left(\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1)\right) &= \exp\left(\sqrt{n}\ln n\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1 - \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)\right)\\
&= \exp\left(\sqrt{n}\ln n\left(\tfrac{1}{2n} + o(\tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{n\ln n} + o(\tfrac{1}{n\ln n})\right)\right)\\
&= \exp\left(o(1)\right) \qquad \text{par croissance comparée}\\
&\sim 1
\end{aligned}$$

13. $u_n \sim \dfrac{3^n}{3^n} \sim 1.$

14. $u_n \sim \dfrac{n!}{(n+2)!} \sim \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^2}.$

15. $u_n \sim n\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}.$

**Exercice 3.**

5. On pose $h = x - 1$ :

$$\begin{aligned}
\frac{x\ln x}{x^2-1} = \frac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2} &= \frac{1+h}{2h}\cdot\frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{1+\frac{h}{2}}\\
&= \frac{1+h}{2}\left(1 - \tfrac{h}{2} + \tfrac{h^2}{3} + o(h^2)\right)\left(1 - \tfrac{h}{2} + \tfrac{h^2}{4} + o(h^2)\right)\\
&= \frac{1+h}{2}\left(1 - h + \tfrac{5}{6}h^2 + o(h^2)\right)\\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{h^2}{12} + o(h^2)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
\end{aligned}$$

6. $f$ est impaire donc on sait déjà que tous les termes de degrés pairs de son DL en 0 sont nuls. Les termes de degrés impairs valent le double de ceux pour $\sqrt{1-x}$. Ainsi,
$f(x) = -2\Big(\frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + o(x^4)\Big) = -x - \frac{x^3}{8} + o(x^4)$.

9. Quand $x \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{x} \to 0$ donc
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

**Exercice 4.**

4. Quand $x \to 0$ : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{x}{2} + o(x)\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.
D'où, $\boxed{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)} = -\dfrac{1}{2} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}.}$

7. $\mathrm{ch}(\frac{1}{x})^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln \mathrm{ch}(\frac{1}{x})\right)$. Quand $x \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{x} \to 0$ donc
$$\ln \mathrm{ch}(\tfrac{1}{x}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2x^2} + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)$$
en utilisant que $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + o(u)$. Ainsi, $x^2 \ln \mathrm{ch}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2} + o(1)$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(\tfrac{1}{x})^{x^2} = \sqrt{e}.}$

9. On pose $t = \tan x$ de sorte que $t \to 1$. On rappelle la formule : $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.
Ainsi, $(\tan x)^{\tan(2x)} = \exp\left(\dfrac{2t\ln t}{1-t^2}\right)$. Or,
$$\frac{2t\ln t}{1-t^2} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{2t(t-1)}{1-t^2} = \frac{-2t}{1+t} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -1.$$
D'où, $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)} = \dfrac{1}{e}.}$

**Exercice 10.**

1. $f(x) = \ln(1+x+x^2) \underset{0}{=} x + x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x)$.
Tangente à l'origine $T$: $y = x$ et $C_f$ est au-dessus de $T$ au voisinage de 0.

2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \underset{0}{=} \dfrac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} = 1 - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2)^2 + o(x^2)$.
D'où, $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$.
Tangente à l'origine $T$: $y = 1 - \dfrac{x}{2}$ et $C_f$ est au-dessus de $T$ au voisinage de 0.

3. On pose $h = \frac{1}{x}$ de sorte que $h \to 0$ quand $x \to +\infty$.
$f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{h}}(2 - \sqrt{1+h} - \sqrt{1-h})$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\Big(2 - (1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)) - (1 - \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2))\Big)$
$\quad = \frac{1}{4}h\sqrt{h} + o(h\sqrt{h})$.
Ainsi, $f(x) = \dfrac{1}{4x\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $C_f$ possède donc une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et elle se situe au-dessus.

4. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}} \underset{+\infty}{=} \dfrac{x}{1+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}+o(\frac{1}{x^3})}$

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(1-\tfrac{1}{2x}-\tfrac{1}{4x^2}-\tfrac{1}{12x^3}+(\tfrac{1}{2x}+\tfrac{1}{4x^2}+\tfrac{1}{12x^3})^2-(\tfrac{1}{2x})^3+o(\tfrac{1}{x^3})\right)$$
$$= \frac{x}{2}\left(1-\tfrac{1}{2x}+(-\tfrac{1}{12}+2\cdot\tfrac{1}{2\cdot 4}-\tfrac{1}{8})\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})\right)$$
$$= \tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{24x^3}+o(\tfrac{1}{x^3}).$$

Ainsi, $D\colon y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ (et même en $-\infty$) et $C_f$ est au-dessus de $D$ au voisinage de $+\infty$ (mais en-dessous au voisinage de $-\infty$).