OS – Chapitre H Complément

Théorèmes généraux dans l'ARQS

VI - Théorèmes complémentaires

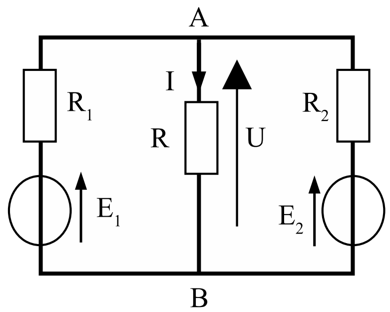
VI.1 - Principe de superposition

Énoncé

Soit un système entièrement linéaire, c'est-à-dire constitué uniquement de dipôles ou quadripôles linéaires, et contenant au moins deux générateurs indépendants. Les intensités et tensions dues à l'ensemble des générateurs, sont les sommes des intensités et tensions dues à chacun des générateurs les autres étant éteints.
Pour éteindre un générateur de courant, on le remplace par un interrupteur ouvert. Pour éteindre un générateur de tension, on le remplace par un fil.

Exemple d'application du principe de superposition

On étudie le circuit suivant :



On cherche l'expression de l'intensité I circulant dans la branche centrale AB.

— On éteint E_1, on laisse E_2 allumée. On note I' l'intensité dans la branche centrale et U' la tension aux bornes de cette branche. Le circuit est alors le circuit de gauche ci-dessous :

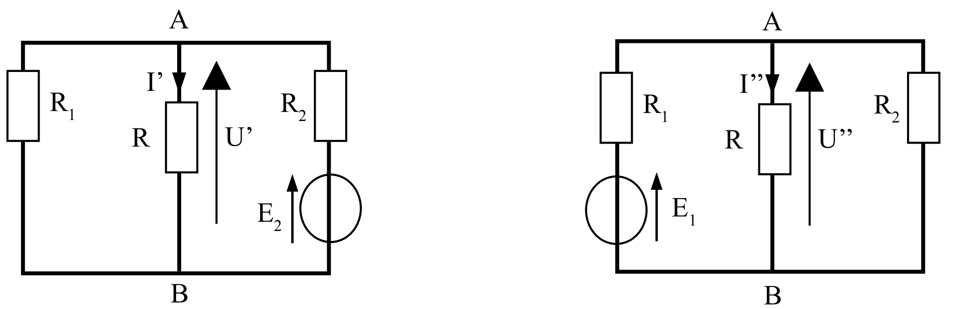


FIGURE 1.1 – Les différents circuits obtenus en éteignant à chaque fois toutes les sources sauf une.

$$I' = \frac{R_1 E_2}{R_1 R_2 + R R_2 + R_1 R}$$

— On éteint E_2, on laisse E_1 allumée. On note I'' l'intensité dans la branche centrale et U'' la tension aux bornes de cette branche. Le circuit est alors le circuit de droite ci-dessus. On trouve :

$$I'' = \frac{R_2 E_1}{R_2 R_1 + R R_1 + R_2 R}$$

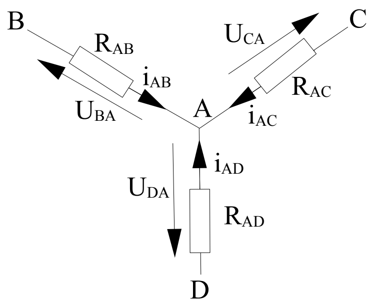
Finalement par application du principe de superposition :

$$\boxed{I = I' + I'' = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 R_2 + R R_2 + R_1 R}}$$

VI.2 - Théorèmes de Millman simplifié

Démonstration

Soit un nœud central A entouré d'un nombre de points périphériques supérieur à 2. Dans chacune des branches liant le nœud central eux points périphériques, il y a un dipôle passif (pas de sources de courant).



On applique la loi des nœuds en A :

$$i_{AB} + i_{AC} + i_{AD} = 0$$

Si les dipôles sont des résistors, alors on peut appliquer la loi d'Ohm pour chacun d'eux :

$$i_{AB} = \frac{U_{BA}}{R_{AB}} \;;\quad i_{AC} = \frac{U_{CA}}{R_{AC}} \;;\quad i_{AD} = \frac{U_{DA}}{R_{AD}}$$

D'autre part, d'après la définition d'une différence de potentiels, et si on note v les potentiels :

$$u_{BA} = v_B - v_A \;;\quad u_{CA} = v_C - v_A \;;\quad u_{DA} = v_D - v_A$$

On peut donc réécrire la loi des nœuds en termes de potentiels :

$$\frac{v_B - v_A}{R_{AB}} + \frac{v_C - v_A}{R_{AC}} + \frac{v_D - v_A}{R_{AD}} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \boxed{v_A = \frac{\frac{v_B}{R_{AB}} + \frac{v_C}{R_{AC}} + \frac{v_D}{R_{AD}}}{\frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{AD}}}}$$

Cette écriture de loi des nœuds en termes de potentiels s'appelle le théorème de Millman (simplifié car il n'y a pas des sources de courants dans les branches). Il signifie que le potentiel au nœud central est la moyenne des potentiels aux points périphériques pondérés par les conductances dans les branches (c'est-à-dire l'inverse des résistances).

Il se généralise à un nombre $N > 2$ quelconque de branches par :

$$\boxed{v_i = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{v_j}{R_{ij}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{R_{ij}}}} \quad \text{pour des résistors en régime quelconque}$$

Remarques :

— on fait bien attention aux conventions d'orientation utilisées pour les dipôles ;

— comme le théorème de Millman manipule des potentiels et que les potentiels sont définis à une constante arbitraire près, on peut, pour simplifier certains calculs, choisir dans le circuit un point où le potentiel est nul (choix de la masse) ;

— en régime permanent sinusoïdal forcé, on peut appliquer le théorème de Millman avec n'importe quels dipôles passifs dans les branches (résistors, bobines, condensateurs), grâce aux grandeurs complexes et aux impédances :

$$\boxed{\underline{v}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{\underline{v}_j}{\underline{Z}_{ij}}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_{ij}}}}$$ pour des dipôles passifs quelconques en régime permanent sinusoïdal forcé

Exemple d'application du théorème de Millman

On étudie le même circuit que précédemment. Pour préparer l'application du théorème de Millman, on choisit une masse, généralement sur la ligne basse d'un générateur.

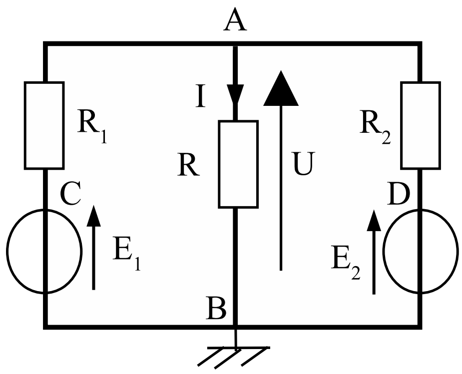


FIGURE 1.2 – On cherche l'intensité I du courant circulant dans la branche centrale en fonction de E_1, E_2, R_1, R_2 et R.

Définition des différences de potentiel :

— $E_1 = v_C - v_B$;

— $E_2 = v_D - v_B$;

— $U = v_A - v_B$.

Théorème de Millman appliqué au point A :

$$v_A = \frac{\frac{v_B}{R} + \frac{v_C}{R_1} + \frac{v_D}{R_2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

En physique, seules les différences de potentiels ont une signification. On peut donc choisir par convention une origine pour tous les potentiels électriques. On choisit arbitrairement la masse au point B. Bien que ce choix soit arbitraire, il peut être argumenté : dans la pratique, et pour des raisons de sécurité, le point de potentiel bas d'un GBF est généralement relié à la Terre qui constitue une masse particulière (point de connexion de couleur standardisée noire en TP). Par défaut, dans la pratique, on a donc naturellement la masse en B. Ce choix implique que le potentiel électrique en B est conventionnellement choisi nul : $v_B = 0$.
Ce choix simplifie les expressions en :

— $E_1 = v_C$;

— $E_2 = v_D$;

— $U = v_A$.

Et :

$$v_A = \frac{\frac{v_C}{R_1} + \frac{v_D}{R_2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

On obtient :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{v_A}{R} = \frac{1}{R}\frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Finalement :

$$\boxed{I = \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1R_2 + RR_2 + R_1R}}$$

qui est évidemment le même résultat qu'avec application du principe de superposition.