Fiche méthodologique : quelques techniques de démonstration

On récapitule ici certaines méthodes que l'on a vues depuis le début de l'année pour construire une démonstration. On insistera particulièrement sur celles vues lors du cours sur les espaces vectoriels mais, évidemment, il faut d'abord être au point sur celles vues précédemment.

I. Logique et ensembles

1. Pour montrer une propriété qui commence par "$\forall x \in E$ ..." on commence par écrire "Soit $x \in E$ ...". En effet, si on a montré la propriété pour un x fixé *quelconque* alors on l'a montrée pour tout x.

2. Pour montrer qu'une propriété est fausse, on montre son contraire *i.e.* sa négation. En particulier, pour montrer qu'une propriété de la forme "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$" (où $\mathcal{P}(x)$ est une propriété dépendant d'un paramètre x) est fausse, il suffit de donner un contre-exemple c'est-à-dire un exemple de $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

3. Pour montrer une implication "$A \Rightarrow B$" ou, dit autrement, "si A alors B", on commence par supposer A et on en déduit B. On a donc le droit de se servir de la propriété A **mais pas** de B.

4. Pour montrer une équivalence "$A \Leftrightarrow B$" ou, dit autrement, "A si et seulement si B".
<u>Méthode 1</u> : on procède par équivalence c'est-à-dire qu'à chaque étape on justifie les implications dans les deux sens. Cette méthode fonctionne bien lorsque l'équivalence se montre par un simple enchainement d'équations ou d'inéquations mais en général il vaut mieux privilégier la méthode suivante.
<u>Méthode 2</u> : on procède par double implication c'est-à-dire qu'on montre le sens direct "$A \Rightarrow B$" puis, dans un second temps, on montre le sens réciproque "$B \Rightarrow A$" (l'ordre n'ayant évidemment aucune importance).

5. Pour montrer une inclusion d'ensembles $X \subset Y$ on commence par écrire "Soit $x \in X$" et on en déduit que $x \in Y$.

6. Pour montrer une égalité d'ensembles $X = Y$, on procède par double inclusion : on montre d'abord $X \subset Y$ puis $Y \subset X$.

Remarque : on a l'équivalence "$X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X,\ x \in Y$" donc les points 5 et 6 se déduisent des premiers points. On peut alors montrer directement $X = Y$ en raisonnant par équivalence (mais c'est plus rare).

7. <u>Analyse/synthèse</u> : c'est une méthode de démonstration qui revient à faire une double inclusion (ou une double implication suivant le point de vue). On considère un ensemble E et $\mathcal{P}(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre $x \in E$. On cherche à déterminer tous les éléments $x \in E$ qui vérifient $\mathcal{P}(x)$ *i.e.* pour lesquels $\mathcal{P}(x)$ est vraie. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions, autrement dit $\mathcal{S} = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$.
Dans l'analyse, on part d'une solution du problème *i.e.* un élément $x \in \mathcal{S}$ et on montre que x est sous une certaine forme (voire qu'il n'y a qu'une seule valeur possible). Précisément, on va montrer que $x \in F$ où F est une partie de E (la plus petite possible) à déterminer explicitement.
Dans la synthèse, on part d'un élément $x \in F$ et on montre qu'il est solution du problème c'est-à-dire que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. On a ainsi montré que $\mathcal{S} = F$.

   Bien sûr, toute la difficulté est de déterminer le bon ensemble F "candidat" pour être égal à $\mathcal{S}$, de sorte que la synthèse fonctionne. La plupart du temps $\mathcal{S}$ (et donc F) est un singleton, c'est-à-dire qu'on applique cette méthode d'analyse/synthèse pour montrer l'unicité puis l'existence de la solution d'un problème.

II. Applications

On considère une application $f\colon E \to F$. Avant d'utiliser l'une des méthodes suivantes, il faut bien repérer qui sont les ensembles de départ et d'arrivée (notamment pour les fonctions réelles où l'on considère parfois une restriction des ces ensembles).

1. Pour montrer que f est injective.
   Méthode 1 : on fixe $y \in F$ et on montre que y a au plus un antécédent en étudiant par exemple le nombre de solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$. Cette méthode fonctionne bien pour certaines fonctions réelles en exploitant la stricte monotonie.
   Méthode 2 : on fixe $x, y \in E$ *tels que* $f(x) = f(y)$ puis on en déduit que $x = y$. Évidemment, il faut largement exploiter l'hypothèse $f(x) = f(y)$ sinon c'est qu'il y a un problème.
   Méthode 3 : on fixe $x, y \in E$ *tels que* $x \neq y$ puis on en déduit que $f(x) \neq f(y)$. En général, cette méthode est moins efficace que la méthode 2.

2. Pour montrer que f est surjective.
   Méthode 1 : on fixe $y \in F$ et on montre que y a au moins un antécédent en étudiant le nombre de solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$. Dans le cas des fonctions réelles, on peut par exemple utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
   Méthode 2 : on fixe $y \in F$ et on explicite un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est souvent ce qu'il faut faire dans les exercices abstraits sur les applications.

3. Pour montrer que f est bijective.
   Méthode 1 : on montre qu'elle est injective puis surjective (dans l'ordre que l'on veut).
   Méthode 2 : on fixe $y \in F$ et on montre que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution. Pour les fonctions réelles on peut, par exemple, utiliser le théorème de la bijection.

4. Pour montrer que f est bijective *et* déterminer sa bijection réciproque.
   Méthode 1 : on considère une fonction $g\colon F \to E$ (elle peut être donnée dans l'énoncé) et on vérifie que
   $$\forall x \in E,\ g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\ f(g(y)) = y.$$
   Méthode 2 : on fixe $y \in F$ et on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$. Si on obtient une unique solution qu'on peut exprimer en fonction de y et qu'on l'a note $g(y)$ alors f est bijective et g est sa bijection réciproque.

III. Espaces vectoriels

1. Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera toujours que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On veut montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   Méthode 1 : on vérifie les trois points suivants.

   $$\bullet\ F \subset E, \qquad \bullet\ 0_E \in F, \qquad \bullet\ \forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u + \lambda v \in F.$$

   Pour le dernier point, il faut bien exploiter la forme des vecteurs. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^3$ alors on écrira “Soient $(x, y, z) \in F$ et $(x', y', z') \in F$...” et si E est un espace de fonctions alors on écrira “Soient $f, g \in F$...”.
   Méthode 2 : on montre que $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *i.e.* F est l'espace engendré par des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. C'est une méthode efficace lorsque l'ensemble F est donné sous forme paramétrique.

Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

2. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice (de E). On fixe $u \in E$ et on montre qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Encore une fois, il faut travailler avec la bonne forme de vecteur : si $E = \mathbb{R}^3$ alors on écrit $u = (a, b, c)$ et on peut appeler les scalaires cherchés x, y et z ; le problème revient alors à résoudre un système linéaire.

3. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre, on considère des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$ et on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

4. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base.
   Méthode 1 : on montre que c'est une famille libre puis génératrice (l'ordre n'a pas d'importance).
   Méthode 2 : on fixe $u \in E$ et on montre qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Le plus souvent, cela reviendra à résoudre un système. On pourra aussi utiliser le raisonnement par analyse/synthèse dans un contexte plus abstrait.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

5. Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe on montre $F \cap G = \{0_E\}$. Bien sûr, F et G étant des sous-espaces vectoriels, on a toujours $0_E \in F \cap G$ donc c'est l'autre inclusion qui est non-triviale. La méthode consiste ainsi à écrire “Soit $u \in F \cap G$” et à montrer que $u = 0_E$.

6. Pour montrer que F et G sont supplémentaires.
   Méthode 1 : on montre que

   $$\bullet\ F \cap G = \{0_E\}, \qquad \bullet\ F + G = E.$$

   Le problème de cette méthode est qu'il est rarement facile de voir qu'un vecteur $w \in E$ s'écrit $w = u + v$ avec $(u, v) \in F \times G$ sans partir d'un couple de solution et de l'expliciter, autrement dit d'utiliser la méthode suivante qui est donc à privilégier.
   Méthode 2 : on montre par analyse/synthèse qu'il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$.
   Méthode 3 : on trouve une base de F et une base de G, disons $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. Puis on montre que la famille $(e_1, \ldots, e_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base de E.

IV. Quelques exemples

On donne quelques mises en application sous forme d'exercices des différentes méthodes citées précédemment. Ne pas hésiter à en chercher d'autres dans les cours/TD/DM/DS.

1) Logique et ensembles

Exercice 1. Montrer (sans faire une récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n!} \leqslant 2^{1-n}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a vu que si f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors f est strictement monotone. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, les entiers p et k sont premier entre eux alors p est premier. Que dire de la réciproque ?

Exercice 4. Soient $A, B, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec P inversible. On pose $A' = PAP^{-1}$ et $B' = PBP^{-1}$.

1. Montrer que A et B commutent *ssi* A' et B' commutent.
2. On suppose que $n = 2$.
   Montrer que $AA^T = I_2$ *ssi* il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Dans un espace vectoriel E, on considère trois sous-espaces vectoriels F, G et H.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. L'égalité est-elle nécessairement vérifiée ?
2. A-t-on toujours $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$?
3. Montrer que $F + (G \cap (F + H)) = (F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 6. Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2) Applications

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On note $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array}$

1. Montrer que $\tilde{f}$ est injective si et seulement si f est injective.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est surjective si et seulement si f est surjective.

Exercice 8. Trouver $F \subset \mathbb{C}$ pour que la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z+3}{z-7}$ pour $z \in E = \mathbb{C} \setminus \{7\}$ soit bijective de E sur F et déterminer f^{-1}.

3) Espaces vectoriels

Exercice 9. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } y = 3z\}$.
2. $G = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(1) + 3f'(2) = 0\}$.
3. $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}$$

1. Montrer que f est injective *ssi* $\mathcal{F}$ est libre.
2. Montrer que f est surjective *ssi* $\mathcal{F}$ est génératrice.
3. Montrer que f est bijective *ssi* $\mathcal{F}$ est une base.

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } x + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((3, 2, 1))$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.

V. Solutions

Exercice 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n! = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ donc on peut minorer les $n-1$ premiers termes du produit par 2 ce qui donne $n! \geqslant 2^{n-1}$. D'où le résultat.

Exercice 2. Il suffit de donner un contre-exemple c'est-à-dire ici une fonction f dérivable strictement monotone mais dont la dérivée s'annule. La fonction $x \mapsto x^3$ vérifie ces critères.

Exercice 3. On suppose que p et k sont premiers entre eux pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$. Soit d un diviseur de p. Alors $d \in [\![1, p-1]\!]$ car $p \neq 0$ et donc $d \neq 0$. Par hypothèse, p et d sont premiers entre eux mais puisque $d \mid p$ on a aussi $\mathrm{pgcd}(d, p) = d$. D'où $d = 1$ et donc p est premier.

La réciproque est vraie. On suppose que p est premier. Soient $k \in [\![1, p-1]\!]$ et d un diviseur commun de k et p. En particulier, $d \mid p$ qui est premier donc $d = 1$ ou p. Puisque $d \mid k \neq 0$, on a $d \leqslant k < p$ donc $d = 1$. Ainsi k et p sont premier entre eux.

Exercice 4.

1. $AB = BA \Leftrightarrow AP^{-1}PB = BP^{-1}PA \Leftrightarrow PAP^{-1}PBP^{-1} = PBP^{-1}PAP^{-1} \Leftrightarrow A'B' = B'A'$ où la deuxième équivalence est justifiée par le fait que multiplier une équation matricielle à gauche ou à droite par une matrice inversible permet de garder l'équivalence.

2. <u>Sens direct</u> : on suppose que $AA^T = I_2$. Alors, en posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'hypothèse donne $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$. Le point de coordonnées (a, b) appartient au cercle unité donc il existe $t \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos t$ et $b = \sin t$. De même il existe $t' \in [0, 2\pi[$ tel que $c = \cos t'$ et $d = \sin t'$. La condition $ac + bd = 0$ se réécrit alors $\cos(t - t') = 0$ *i.e.* $t' \equiv t \pm \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
Si $t' \equiv t + \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ alors on pose $\theta = -t$ et on vérifie facilement que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Si $t' \equiv t - \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ alors on pose $\theta = t$ et on vérifie facilement que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

   Le sens réciproque se montre par un calcul direct.

Exercice 5.

1. Soit $w \in (F \cap G) + (F \cap H)$. Par définition d'une somme de sous-espaces vectoriels, il existe $u \in F \cap G$ et $v \in F \cap H$ tels que $w = u + v$. Puisque F est un sous-espace vectoriel et $u, v \in F$, on a $u + v \in F$. De plus, $u \in G$ et $v \in H$ donc $u + v \in G + H$. Ainsi, $w \in F \cap (G + H)$. D'où l'inclusion.

   On n'a pas toujours l'inclusion dans l'autre sens (donc l'égalité). En effet, si on pose $F = \mathrm{Vect}((1,1))$, $G = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $H = \mathrm{Vect}((0,1))$ alors on a $(F \cap G) + (F \cap H) = \{(0,0)\} + \{(0,0)\} = \{(0,0)\}$ et $F \cap (G + H) = F \cap \mathbb{R}^2 = F$.

2. On reprend l'exemple précédent. On a $F + (G \cap H) = F + \{(0,0)\} = F$ et $(F+G) \cap (F+H) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ donc l'égalité proposée est fausse en général (mais la question suivante montre en particulier que l'inclusion $\subset$ est vraie).

3. Inclusion directe : soit $w \in F + (G \cap (F + H))$. Il existe $u \in F$ et $v \in G \cap (F + H)$ tels que $w = u + v$. Puisque $v \in G$, on a $u + v \in F + G$. De plus, $v \in F + G$ donc il existe $v_1 \in F$ et $v_2 \in H$ tels que $v = v_1 + v_2$. Ainsi $w = u + v_1 + v_2 \in F + H$ car $u + v_1 \in F$ et $v_2 \in H$. D'où $w \in (F + G) \cap (F + H)$.
   Inclusion réciproque : soit $w \in (F+G) \cap (F+H)$. Puisque $w \in (F+G)$, il existe $u_1 \in F$ et $v_1 \in G$ tels que $w = u_1 + v_1$. De même, il existe $u_2 \in F$ et $v_2 \in H$ tels que $w = u_2 + v_2$. Alors, $v_1 = u_2 - u_1 + v_2 \in F + H$ car $u_2 - u_1 \in F$ et $v_2 \in H$. Ainsi, $v_1 \in G \cap (F + H)$ et $w = u_1 + v_1 \in F + (G \cap (F + H))$.

Exercice 6. Montrons par analyse-synthèse qu'il s'agit des fonctions linéaires.
Analyse : soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
On a en particulier

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

donc $f(0) = 0$. Pour un réel x fixé et un entier $n \geqslant 1$, on a $f(nx) = f(x) + f((n-1)x)$ donc on en déduit par récurrence que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette formule s'étend aux entiers relatifs puisque $0 = f(0) = f(nx) + f(-nx)$ donc $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$. En prenant $x = 1/q$ pour $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient $f(1) = f(q/q) = qf(1/q)$ donc $f(1/q) = f(1)/q$ et finalement $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$ pour tout rationnel $\frac{p}{q}$.

On fixe $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel u_n dans l'intervalle $[x, x + \frac{1}{n+1}]$ (démontrez-le). On construit ainsi une suite de rationnels qui tend vers x. D'après ce qui précède, on a $f(u_n) = u_n f(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite et en utilisant la continuité de f en x, on obtient : $f(x) = xf(1)$. On a ainsi prouvé que f est une fonction linéaire.

Synthèse : soit f une fonction linéaire *i.e.* de la forme $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec λ une constante (noter qu'on a nécessairement $\lambda = f(1)$). Alors, f est bien continue et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x + y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = f(x) + f(y).$$

Exercice 7.

1. Sens direct : supposons que $\tilde{f}$ est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On a $\tilde{f}(A) = f(A) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(B) = \tilde{f}(B)$. Par injectivité de $\tilde{f}$, cela implique que $A = B$ *i.e.* $x = y$. Ainsi f est injective.

   Sens réciproque : supposons que f est injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(A) = f(B)$. Montrons que $A = B$. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A) = f(B)$ donc il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$. Par injectivité de f, cela implique que $x = y$ et ainsi $x \in B$. D'où $A \subset B$. Un raisonnement analogue montre que $B \subset A$ (A et B jouent des rôles symétriques). D'où $A = B$ et $\tilde{f}$ est injective.

2. Sens direct : supposons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $y \in F$. On pose $B = \{y\}$. Puisque $\tilde{f}$ est surjective, il existe $A \in E$ tel que $B = f(A)$. Nécessairement A est non-vide et n'importe quel élément $x \in A$ vérifie $f(x) = y$. Ainsi f est surjective.

   Sens réciproque : supposons que f est surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Puisque f est surjective, pour chaque élément $y \in B$, on choisit un antécédent qu'on note $g(y)$. On pose alors $A = \{g(y) \mid y \in B\}$ et donc $f(A) = \{f(g(y)) \mid y \in B\} = B$. Ainsi $\tilde{f}$ est surjective.

Exercice 8. Soit $z' \in \mathbb{C}$. On résout l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{7\}$:

$$z' = f(z) \iff z(z'-1) = 7z' + 3$$

Si $z' = 1$ alors l'équation devient 0=10 donc il n'y a pas de solution *i.e.* 1 n'a pas d'antécédent par f.
Si $z' \neq 1$ alors l'équation possède une unique solution $z = \frac{7z'+3}{z'-1}$. Ainsi, avec $F = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, f réalise une bijection de E vers F et sa bijection réciproque est

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ z & \mapsto & \frac{7z+3}{z-1} \end{array}$$

Exercice 9.

1. On pose $E = \mathbb{R}^3$ (espace vectoriel de référence). Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

   - $F \subset E$ par définition.
   - $(0,0,0) \in F$ puisque $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$ et $0 = 3 \times 0$.
   - Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ y & = & 3z \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{rcl} x' + 2y' - z' & = & 0 \\ y' & = & 3z' \end{array} \right.$ donc en faisant $L_1 + \lambda L_1'$ on obtient $(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') - (z + \lambda z') = 0$ et de même, on a $y + \lambda y' = 3(z + \lambda z')$. Ainsi, $(x,y,z) + \lambda(x',y',z') \in F$.

2. On pose $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (espace vectoriel de référence). Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E.

   - $G \subset E$ par définition.
   - Si f est la fonction nulle alors on a bien $f(1) + 3f'(2) = 0$ donc la fonction nulle appartient à G.
   - Soient $f, g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f(1) + 3f'(2) = 0$ et $g(1) + 3g'(2) = 0$ donc en faisant $L_1 + \lambda L_1'$, on obtient $(f + \lambda g)(1) + 3(f + \lambda g)'(2) = 0$. D'où $f + \lambda g \in G$.

3. On a $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
   H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10.

1. Sens direct : supposons que f est injective. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. On a alors $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0_E = f(0, \dots, 0)$. Par injectivité de f, cela implique que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

   Sens réciproque : supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda_1', \dots, \lambda_n') \in \mathbb{K}^n$ tels que $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(\lambda_1', \dots, \lambda_n')$. Alors
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' e_i \iff \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i') e_i = 0_E.$$
   Puisque $\mathcal{F}$ est libre, cela implique que $\lambda_i - \lambda_i' = 0$ *i.e.* $\lambda_i = \lambda_i'$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, f est injective.

2. f est surjective si et seulement si pour tout $u \in E$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, ce qui est la définition de "$\mathcal{F}$ est génératrice". D'où l'équivalence.

3. D'après ce qui précède : f est bijective *ssi* f est injective et surjective *ssi* $\mathcal{F}$ est libre et génératrice *ssi* $\mathcal{F}$ est une base.

Exercice 11. Dans chaque cas on peut commencer par chercher des familles génératrices de F et G (inutile de montrer qu'elles sont libres) puis on montre que la réunion de ces deux familles forme une base de E.

1. On résout : $\begin{cases} x &= y \\ x+z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$. Donc $F = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$.
De même, on trouve par exemple $G = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(2,-1,0))$ (il suffit de prendre deux vecteurs non-colinéaires du plan G). Montrons que $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(1,0,-1),(2,-1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $x, y, z \in \mathbb{R}$, on résout l'équation suivante.

$$x(1,1,-1) + y(1,0,-1) + z(2,-1,0) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x + y + 2z = a \\ x - z = b \\ -x - y = c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{a+2b+c}{2} \\ y = \frac{-a-2b-3c}{2} \\ z = \frac{a+c}{2} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et ainsi, F et G sont supplémentaires.

2. On a $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$ (qui sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$). Montrons que $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(3,2,1))$ est une base. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(3,2,1) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x + 3z = a \\ x + y + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{-a+3b-3c}{2} \\ y = \frac{-a+b+c}{2} \\ z = \frac{a-b+c}{2} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et ainsi, F et G sont supplémentaires.

3. Pour changer on va appliquer la méthode 1. F est bien un sous-espace vectoriel de E (l'ensemble des polynômes de degré au plus 2) donc il faut penser à montrer la même chose pour G.

   - $G \subset E$ car si $P' = 0$ alors P est une constante.
   - le polynôme nul a une dérivée nulle donc appartient à G.
   - Soient $P, Q \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = 0 + \lambda \times 0 = 0$ donc $P + \lambda Q \in G$.

   Ainsi G est un sous-espace vectoriel de E. Montrons à présent que F et G sont supplémentaires.

On commence par montrer que $F \cap G = \{0\}$. On sait déjà que $\{0\} \subset F \cap G$. Soit $P \in F \cap G$. Puisque $P \in F$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX$. Or, $P \in G$ donc $0 = P' = 2aX + b$ ce qui donne $a = b = 0$ car un polynôme est nul *ssi* tous ses coefficients sont nuls. Ainsi $P = 0$. D'où l'égalité.

À présent, on montre que $E = F + G$ (que l'on peut même noter $F \oplus G$ à ce stade de la preuve). Soit $P \in E$. Ce polynôme s'écrit sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En posant $P_F = aX^2 + bX$ et $P_G = c$, on a bien $P = P_F + P_G$ avec $P_F \in F$ et $P_G \in G$.