À rendre pour le 8 janvier 2023

Devoir maison n° 3

Correction

Exercice 1. Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. On considère l'application f suivante.

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}.$$

1) Faire un dessin où figurent les ensembles E, A, B ainsi qu'une partie $X \subset E$. Expliquer à quoi correspond $f(X)$ sur ce dessin.
2) Dans cette question uniquement on prend $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble A est celui des fonctions paires et B celui des fonctions impaires. Déterminer $f(\mathbb{R}[x])$ où $\mathbb{R}[x]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.

On revient au cas général.

3) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
4) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
5) On suppose que f est bijective ; déterminer alors f^{-1}.

Solution.

2) Il s'agit de comprendre et décrire l'intersection entre l'ensemble des fonctions polynomiales et celui des fonctions paires puis faire la même chose avec les fonctions impaires. Pour cela, on considère une fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}[x]$ sous la forme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

et on remarque que

$$\begin{aligned} P(-x) = P(x) &\iff \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &\iff \forall k \in [\![0, n]\!], \quad (-1)^k a_k = a_k \end{aligned}$$

et cette dernière condition signifie que $a_k = 0$ si k est impair. Ainsi, on a

$$\mathbb{R}[x] \cap A = \left\{ x \mapsto \sum_{i=0}^{d} a_i x^{2i} \;\middle|\; d \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}[x^2].$$

De même, $P \in \mathbb{R}[x]$ est impair *ssi* ses coefficients d'indices pairs sont nuls donc

$$\mathbb{R}[x] \cap B = \left\{ x \mapsto \sum_{i=0}^{d} a_i x^{2i+1} \,\middle|\, d \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{R} \right\} = x\mathbb{R}[x^2]$$

et ainsi, $f(\mathbb{R}[x]) = (\mathbb{R}[x^2], x\mathbb{R}[x^2])$.

Pour la suite, on va montrer les équivalences en procédant à chaque fois par double implication. Ne pas hésiter à faire un dessin pour bien comprendre ce qu'il se passe.

3) Sens réciproque ($\Leftarrow$) : supposons que $A \cap B = \emptyset$ et montrons qu'alors f est surjective *i.e.*

$$\forall Y \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B),\ \exists X \in \mathcal{P}(E),\ Y = f(X).$$

Soit $Y \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, ce que l'on écrit directement $Y = (Y_1, Y_2)$ où $Y_1 \subset A$ et $Y_2 \subset B$. Posons $X = Y_1 \cup Y_2$. Alors,

$$X \cap A = (Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A) = Y_1 \cup \emptyset = Y_1$$

car Y_1 est une partie de A et Y_2 est une partie de B qui est disjoint de A par hypothèse. De même, $X \cap B = Y_2$. Ainsi $f(X) = (Y_1, Y_2) = Y$, on a bien trouvé un antécédent de Y par f.

Sens direct ($\Rightarrow$) : on va plutôt montrer la contraposée *i.e.* $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow f$ non-surjective.

Supposons donc que $A \cap B \neq \emptyset$ et considérons $x \in A \cap B$. Alors, l'élément $Y = (\{x\}, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ n'a pas d'antécédent par f. En effet, si $f(X) = Y$ alors on aurait $x \in X \cap A$ donc nécessairement $x \in X \cap B$ ce qui contredit le fait que $X \cap B = \emptyset$. Ainsi f n'est pas surjective.

4) Sens direct ($\Rightarrow$) : supposons f injective. On va montrer que $A \cup B = E$ par double inclusion. On sait déjà que A et B sont des parties de E donc $A \cup B \subset E$. Soit $x \in E$, posons $X = \{x\}$ et $Y = f(X)$. Alors $Y \neq (\emptyset, \emptyset)$ puisque $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$ et que f est injective. On a donc $X \cap A \neq \emptyset$ ou $X \cap B \neq \emptyset$ *i.e.* $x \in A$ ou $x \in B$. D'où $E \subset A \cup B$.

Sens réciproque ($\Leftarrow$) : supposons que $A \cup B = E$. On va montrer que f est injective donc on considère X_1 et X_2 des parties de E telles que $f(X_1) = f(X_2)$ et on montre qu'alors $X_1 = X_2$.
Puisque $A \cup B = E$, pour tout $X \subset E$, on a $X = X \cap E = (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Ainsi, si $f(X_1) = f(X_2)$ alors $X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2$. D'où f injective.

5) On suppose f bijective *i.e.* $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ d'après ce qui précède, ce qui signifie que A et B forment une partition de E. Considérons l'application $g\colon \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(E)$ définie par $g(Y_1, Y_2) = Y_1 \cup Y_2$. Alors,

$$\forall X \subset E, \quad g(f(X)) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$$
$$\forall Y_1 \subset A, \forall Y_2 \subset B, \quad f(g(Y_1, Y_2)) = \Big((Y_1 \cup Y_2) \cap A, (Y_1 \cup Y_2) \cap B \Big) = (Y_1, Y_2)$$

car, par exemple, $Y_1 \cap B \subset A \cap B = \emptyset$. Ainsi, g est la bijection réciproque de f.