À rendre pour le 22 avril 2024

Devoir maison n° 5

Mathématiques

Exercice 1. On considère un cercle $\mathscr{C}$ du plan euclidien dont on note A son centre et $r > 0$ son rayon. On considère également B un point du plan tel que $AB > r$ et on pose $AB = a$. Le but de cet exercice est de montrer que par le point B passent exactement deux tangentes au cercle. On utilisera la définition suivante.

« Une droite $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ si l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ est exactement un point. »

1) Justifier qu'il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $(x-a)^2+y^2 = r^2$. Faire un dessin. Dans la suite, on se place dans ce repère.

2) On considère une droite $\mathscr{D}$ du plan. Montrer que $\mathscr{D}$ passe par B si et seulement elle possède une équation cartésienne de la forme $x = 0$ ou $y = \alpha x$ où α est un réel.

3) Montrer, avec les notations de la question précédente, que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\mathscr{D}$ possède une équation cartésienne de la forme $y = \alpha x$ où $\alpha = \pm\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$.

4) Conclure l'exercice.

5) À présent, on souhaite redémontrer le résultat en utilisant que les tangentes d'un cercle sont toutes les droites passant par un point du cercle et normales au rayon issu de ce point. On va tout d'abord **démontrer** cette dernière propriété. On ne s'en servira qu'une fois la propriété établie.

   a) Soit $\mathscr{D}$ une droite tangente au cercle $\mathscr{C}$. On note $M(x, y)$ l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. Montrer que les droites (AM) et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.

   b) Réciproquement, soit $M(x, y) \in \mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ la droite passant par M et orthogonale à (AM). Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$.

   c) On cherche toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par B. Montrer que le problème revient à trouver tous les points $M \in \mathscr{C}$ tels que les droites (AM) et (BM) sont orthogonales.

   d) Montrer que l'ensemble des points M vérifiant la propriété précédente correspond à l'intersection de $\mathscr{C}$ avec un autre cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

   e) Conclure de nouveau.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des solutions positives de l'équation

$$(E) : \quad \tan x = x$$

puis de calculer la limite de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. Montrer de plus que : $n\pi \leqslant x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

   b) Montrer que $x_n \sim n\pi$.

   c) Montrer que $x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ et en déduire que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.

   d) Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ et conclure que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E_n) : $\tan y = 2n \tan\left(\frac{y}{2n}\right)$ d'inconnue y. Dans cette question, on va montrer que (E_n) admet exactement n solutions dans $[0, n\pi[$ que l'on notera :

$$0 = y_0(n) < y_1(n) < \cdots < y_{n-1}(n).$$

Par ailleurs, on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1} X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} X^k$.

a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que E_n admet **au moins** une solution dans $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.

b) En utilisant la formule de De Moivre, montrer que pour tout $t \not\equiv \frac{\pi}{4n} \left[\frac{\pi}{2n}\right]$ et $t \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, on a

$$\tan(2nt) = \frac{P(\tan^2 t)}{Q(\tan^2 t)} \tan t.$$

c) En utilisant cette dernière relation avec une valeur de t bien choisie, montrer si $y \in [0, n\pi[$ est une solution de (E_n) alors le réel $\alpha = \tan^2\left(\frac{y}{2n}\right)$ est une racine du polynôme

$$R = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{2n+1}{2k+1} X^k.$$

d) Conclure.

3) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\alpha_k = \tan^2\left(\frac{y_k(n)}{2n}\right)$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$.

b) Justifier que $\widetilde{R} = X^n R\left(\frac{1}{X}\right)$ définit bien un polynôme dont on précisera le degré. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{10}.$$

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))}$.

4) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $I_k =]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\tan x}{x}$ réalise une bijection de I_k dans un intervalle J à préciser.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(y_k(n))$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_k(n) = x_k$.

c) Montrer également que $y_k(n) > x_k$ pour tout $n > k$.

5) On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n > N+1$, on pose : $S_N(n) = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2(y_k(n))}$.

a) Établir que : $0 \leqslant S_N(n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{1}{(k\pi)^2}$.

b) En déduire que : $0 \leqslant S_N(n) \leqslant \dfrac{1}{N\pi^2}$. *Indication* : on pourra utiliser que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour tout $k > 1$.

6) À l'aide des résultats précédents, montrer finalement que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{10}$.