Semaine du 29 janvier

# Programme de colle n°16

## Matrices et systèmes linéaires

1) Calcul matriciel : combinaison linéaire et produit. Transposée d'une matrice.
2) *Révision :* résolution d'un système linéaire par l'algorithme du pivot de Gauss.
3) Lien entre matrices et systèmes linéaires.
4) Puissance d'une matrice carrée, binôme de Newton.
5) Matrices inversibles : définition, propriété, inverse d'une matrice $2 \times 2$.
6) Calcul effectif de l'inverse d'une matrice.

## Dérivation

1) Définition du nombre dérivé. Dérivée à droite, dérivée à gauche.
2) Fonction dérivée, opérations sur les fonctions dérivables.
3) Dérivées successives, fonction de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz.
4) Théorème de Rolle.
5) Égalité et inégalité des accroissements finis : applications aux suites récurrentes.
6) Théorème de la limite de la dérivée : soient $I$ un intervalle et $a \in I$, si $f$ est continue sur $I$, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$. Si, de plus, $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ alors elle l'est aussi sur $I$.

## Questions de cours

*On commencera la colle par un calcul de produit matriciel.*

1) Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $M = S + A$ avec $S$ symétrique et $A$ antisymétrique.
2) Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer $M^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3) Résoudre les deux systèmes suivants en inversant la matrice du système.
$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (S_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ -2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \end{array} \right.$$
4) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que $A$ est inversible et donner son inverse.
5) Inverser une matrice donnée par le colleur.
6) Soit $f$ une fonction dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $a \in ]\alpha, \beta[$. Montrer que si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $f'(a) = 0$. Que pensez-vous de la réciproque ?
7) Étudier la dérivabilité de la fonction suivante sur son domaine de définition : $f(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$.
8) Étudier la continuité, dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$ de l'une des fonctions suivantes sur son domaine de définition.
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x^2 \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{array} \right. \qquad g(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$