Semaine du 15 janvier

# Programme de colle n°14

## Ensembles, applications et arithmétique

1) Appartenance, inclusion, $\mathcal{P}(E)$, intersection, union, produit cartésien.
2) Applications injectives, surjectives, bijectives.
3) Multiples, diviseurs et division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
4) Nombres premiers, PGCD, PPCM.

## Continuité

1) Limite d'une fonction à l'infini ou en un point. Fonction continue sur un intervalle. Prolongement par continuité.
2) Théorème des valeurs intermédiaires.
3) Théorème de la bijection : si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ alors $f$ réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$.
4) Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
5) Application aux suites récurrentes et aux suites implicites.

## Questions de cours

1) Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.
   Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective et que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
2) Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Soient $A$, $A_1$ et $A_2$ des parties de $E$, et $B$, $B_1$ et $B_2$ des parties de $F$. Montrer l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

   (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$
   (b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$
   (c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   (d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   (e) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
   (f) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

3) Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.
4) Présenter l'algorithme d'Euclide pour le calcul de pgcd. Réaliser cet algorithme pour calculer $\text{pgcd}(584, 82)$.
5) Montrer que les fonctions $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ sont prolongeables par continuité en 0.
6) Étudier le prolongement par continuité aux bornes du domaine de définition de : $f(x) = x^x$ et $g(x) = \frac{x\ln x}{x^2-1}$.
7) Montrer que la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est croissante et diverge vers $+\infty$.
8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^{-nx} - x = 0$ admet une unique solution noté $u_n$. Montrer que la suite $u$ converge vers une valeur à déterminer.