Nombres complexes et géométrie

À tout point $A(x,y)$ du plan on fait correspondre son affixe complexe $z_A = x+iy$. De même, à tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on fait correspondre son affixe $z_{\vec{u}} = x+iy$. Ainsi, toute transformation T du plan correspond à une fonction complexe $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tel que $f(z)$ soit l'affixe de $T(M)$ pour tout point M d'affixe z.

Propriétés fondamentales : (quantités de base à savoir interpréter géométriquement.)
Pour tous points A, B, C et D, on a

$$|z_B - z_A| = AB \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})\ [2\pi].$$

Ainsi, on en déduit que :

- C appartient au cercle de centre A et de rayon AB *ssi* $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$,
- A est le milieu de $[BC]$ *ssi* $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -1$,
- A, B et C sont alignés *ssi* $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$,
- ABC est rectangle en A *ssi* $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Quelques transformations du plan.

1. <u>Translation</u> : la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b correspond à la fonction complexe

$$f(z) = z + b.$$

2. <u>Homothétie</u> : l'homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de centre Ω d'affixe ω correspond à la fonction complexe

$$f(z) = k(z-\omega) + \omega.$$

Réciproquement, toute fonction complexe de la forme $f(z) = az+b$ <u>avec $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$</u> correspond à une homothétie de rapport a et de centre Ω.
On détermine son affixe ω en résolvant l'équation de point fixe $f(\omega) = \omega$ puis on écrit $\left\{\begin{array}{rcl} f(z) & = & az+b \\ \omega & = & a\omega + b \end{array}\right.$ donc en soustrayant, $f(z) - \omega = a(z-\omega)$ et ainsi $f(z) = ...$

3. <u>Rotation</u> : la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre Ω d'affixe ω correspond à la fonction complexe

$$f(z) = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega.$$

Réciproquement, toute fonction complexe de la forme $f(z) = az+b$ <u>avec $a \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$</u> correspond à une rotation d'angle $\arg(a)$ et de centre Ω.

On détermine son affixe ω en résolvant l'équation de point fixe $f(\omega)=\omega$ puis on écrit $\begin{cases} f(z) &= az+b \\ \omega &= a\omega+b \end{cases}$ donc en soustrayant, $f(z)-\omega = a(z-\omega)$ et ainsi $f(z) = \dots$

4. Similitude directe : on détermine la fonction complexe associée à $T_1 \circ T_2$ en calculant la composée $f_1 \circ f_2$. Dans le cas où les transformations T_1 et T_2 sont des homothéties/rotations, on dit que la composée est une similitude directe et on vérifie facilement que sa fonction complexe associée est de la forme $f(z)=az+b$. Les transformations commutent (*i.e.* $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$) *ssi* elles ont le même centre ou l'une d'entre elles est triviale.

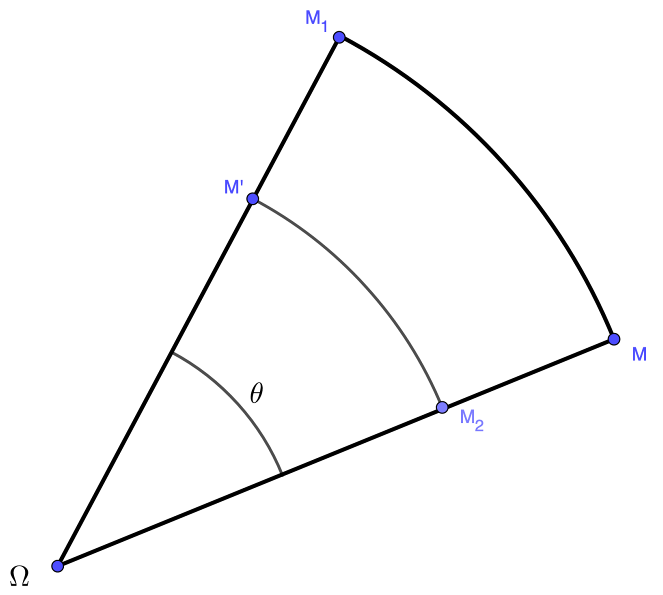
   Réciproquement, toute fonction complexe de la forme $f(z)=az+b$ avec $a \neq 1$ correspond à la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre Ω. La composée peut être réalisée dans le sens que l'on veut puisque ces transformations commutent. Le rapport de l'homothétie est $|a|$ et l'angle de la rotation est $\arg(a)$.
   En pratique, on commence donc par mettre a sous forme polaire pour déterminer ces paramètres puis on détermine ω en résolvant l'équation de point fixe $f(\omega)=\omega$.

   Exemple. Soit $f(z)=(2+2i)z-1$. On a $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et

$$f(\omega)=\omega \iff \omega = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

   Donc $f(z) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega)+\omega$ ce qui correspond à la composée de l'homothétie de rapport $2\sqrt{2}$ et de centre $\Omega\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ (ou vice-versa).

Transformation de la forme $f : z \mapsto ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega \quad$ (ici $k \in]0,1[$).



Sur le dessin, les affixes des points sont données par

$$M(z), \quad M_1(e^{i\theta}(z-\omega)+\omega), \quad M_2(k(z-\omega)+\omega), \quad M'(f(z)).$$

Autrement dit, en notant T_1 la rotation d'angle θ et de centre Ω et T_2 l'homothétie de rapport k et de centre Ω, on a $M_1 = T_1(M)$ et $M_2 = T_2(M)$.
En particulier, on constate que $M' = T_1 \circ T_2(M) = T_2 \circ T_1(M)$.