À rendre pour le lundi 6 novembre 2023

Devoir maison n° 2

Correction

Exercice 1. Soit p un entier naturel non-nul. On pose $f(p) = p^2 + p + 1$ et $u_p = \dfrac{f(p)}{p(p+1)}$.

1) Calculer $f(p-1)$. En déduire, pour $p \geqslant 2$, une expression de $\dfrac{p^3-1}{p^3+1}$ en fonction de u_p et u_{p-1}.

2) Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de la quantité suivante :

$$w_n = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}.$$

Solution.

1) $f(p-1) = p^2 - p + 1$ et en utilisant les identités remarquables pour $a^3 \pm b^3$, on obtient

$$\frac{p^3-1}{p^3+1} = \frac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{p(p-1)f(p)}{p(p+1)f(p-1)} = \frac{u_p}{u_{p-1}}.$$

2) Le produit étant télescopique, on a

$$w_n = \prod_{p=2}^{n} \frac{u_p}{u_{p-1}} = \frac{u_n}{u_1}.$$

Or, $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{2}{3}.}$

Exercice 2. Soient un entier $n \geqslant 2$ et a, b des nombres complexes. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1) Que vaut ω^n ? Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a + \omega^k b)$.

2) Montrer que $n|a| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{j=0}^{n-1} |b + \omega^j a|$.

4) En déduire que $|a| + |b| \leqslant \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

Solution.

1) $\omega^n = e^{2i\pi} = 1$. Puisque $\omega \neq 1$ (car $n > 1$), on peut appliquer la formule pour une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+\omega^k b) = \sum_{k=0}^{n-1} a + b\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = na + b\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = na.$$

2) En utilisant ce qui précède et l'inégalité triangulaire, on a

$$n|a| = |na| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(a+\omega^k b)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a+\omega^k b|$$

3) On fait le changement d'indice $j = n-k$ dans la somme et on remarque que $a+\omega^{n-j}b = \omega^{-j}(\omega^j a+b)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|a+\omega^k b| = \sum_{j=1}^{n}|a+\omega^{n-j}b| = \sum_{j=1}^{n}|\omega^{-j}|\cdot|\omega^j a+b| = \sum_{j=1}^{n}|\omega^j a+b| = \sum_{j=0}^{n-1}|\omega^j a+b|$$

puisque le terme pour $j=0$ est égal à celui pour $j=n$.

4) Tout ce qui précède est vraie pour $a, b \in \mathbb{C}$ *quelconques*. On peut donc échanger leurs rôles et on obtient :

$$n|b| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|b+\omega^k a| = \sum_{j=0}^{n-1}|a+\omega^j b|.$$

En sommant cette dernière inégalité avec celle de la question deux, on a

$$n|a|+n|b| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a+\omega^k b| + \sum_{j=0}^{n-1}|a+\omega^j b| = 2\sum_{k=0}^{n-1}|a+\omega^k b|$$

puisque l'indice de sommation est muet. D'où

$$\boxed{|a|+|b| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a+\omega^k b|.}$$

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des réels $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ *pour différentes valeurs de* $n \in \mathbb{N}^*$. *On rappelle qu'un réel* r *est un rationnel s'il existe deux entiers relatifs* p *et* q *(avec* $q \neq 0$*) tels que* $r = \frac{p}{q}$. *Quitte à simplifier la fraction, on peut toujours choisir* p *et* q *premiers entre eux.*
On admet dans tout le problème que si p *est un nombre premier alors* $\sqrt{p}$ *est irrationnel (*i.e. *n'est pas rationnel) ainsi que le résultat d'arithmétique suivant : si* p *et* q *sont deux entiers premiers entre eux (*i.e. *sans facteur commun) tels que* p *divise* q^3 *alors* $p = \pm 1$.

Partie I

Dans cette partie, on va établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Ici n *désigne un entier naturel non-nul et pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *on pose :*

$$a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k$.

2) Comparer a_{k+2n+1} et a_{2n+1-k} avec a_k et montrer que : $\forall (s,k) \in \mathbb{Z}^2, \quad 2a_s a_k = a_{s+k} + a_{s-k}$.

3) Établir la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}$.

4) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}_k$: "a_k et a_{k+1} sont rationnels."
On **suppose** que a_1 est rationnel. Montrer alors par récurrence que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On a ainsi montré que si a_1 *est rationnel alors tous les* a_k, *pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *sont rationnels.*

Partie II

5) On prend $n = 2$. En utilisant la question 3, déterminer une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de racines carrées. Ce nombre est-il rationnel ?

6) Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1$.

7) On suppose par l'absurde que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est rationnel donc s'écrit $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Justifier que $8p^3 - 6pq^2 = q^3$ et en déduire une contradiction.
On a ainsi montré que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ *est irrationnel.*

8) Dans cette question, on prend $n = 6$ et on pose $y_1 = a_1 + a_3 + a_4$ et $y_2 = a_2 + a_5 + a_6$.

   a) Calculer $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$.
   b) Montrer que $y_1 < 0$ et déterminer y_1 et y_2.
   c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$ est irrationnel.
   d) On pose $\alpha = y_1$, $\beta = a_1a_3 + a_1a_4 + a_3a_4$ et $\gamma = a_1a_3a_4$. Calculer β et γ.
   e) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 3 dont les coefficients s'expriment à l'aide de α, β, γ.

Solution.

1) On pose $t = \dfrac{\pi}{2n+1}$. En utilisant la formule d'Euler et celle pour une somme géométrique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}(-e^{it})^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}(-e^{-it})^k \\ &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^{2n+1}e^{i(2n+1)t}-1}{-e^{it}-1} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{2n+1}e^{-i(2n+1)t}-1}{-e^{-it}-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{i\pi}+1}{e^{it}+1} + \frac{1}{2}\frac{e^{-i\pi}+1}{e^{-it}+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. De plus, la formule pour la somme géométrique est bien valide car $-e^{it} \neq 1$ pour $n > 0$.

2) $a_{2n+1+k} = (-1)^{2n+1}(-1)^k \cos\left(\pi + \frac{k\pi}{2n+1}\right) = a_k$ car $-\cos(\pi+\theta) = \cos\theta$.
$a_{2n+1-k} = (-1)^{2n+1}(-1)^{-k} \cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = a_k$ car $-\cos(\pi-\theta) = \cos\theta$ et $(-1)^{-k} = (-1)^k$.
Ainsi, $\boxed{a_{2n+1+k} = a_{2n+1-k} = a_k.}$
De plus, puisque $(-1)^{s+k} = (-1)^s(-1)^k = (-1)^{s-k}$ et en utilisant une formule de factorisation :

$$\begin{aligned}a_{s+k} + a_{s-k} &= (-1)^{s+k}\left(\cos\left(\frac{(s+k)\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{(s-k)\pi}{2n+1}\right)\right) \\ &= (-1)^{s+k} 2\cos\left(\frac{s\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \\ &= 2a_k a_s.\end{aligned}$$

3) On fait le changement d'indice $j = 2n+1-k$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=n+1}^{2n} a_{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n} a_j$$

d'après ce qui précède. D'où la relation. Ainsi,

$$0 = \sum_{k=0}^{2n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$$

donc finalement $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}.}$

4) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_k$.
Initialisation : il faut montrer que a_1 **et** a_2 sont rationnels. Pour a_1, c'est vrai par hypothèse (mais ça n'est jamais qu'une hypothèse). Ensuite, on remarque que

$$a_2 = \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 2a_1^2 - 1 \qquad \left(\text{toujours avec } t = \frac{\pi}{2n+1}\right)$$

et donc si a_1 s'écrit $\frac{p}{q}$, on a $\boxed{a_2 = \frac{2p^2-q^2}{q^2} \text{ qui est rationnel}}$ (plus généralement, on peut utiliser sans démonstration que les rationnels sont stables par somme, différence, produit et quotient).

Hérédité : on suppose $\mathcal{P}_k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons alors que a_{k+1} et a_{k+2} sont rationnels. On sait déjà que a_{k+1} est rationnel par hypothèse de récurrence. Il suffit alors d'exprimer a_{k+2} en fonction de a_{k+1} et a_k. Pour cela, on reprend l'identité de la question 2 avec le couple d'entier $(k+1, 1)$ pour (s, k). Ainsi,

$$2a_{k+1}a_1 = a_{k+1+1} + a_{k+1-1}$$

ce qui donne $a_{k+2} = 2a_1a_{k+1} - a_k$ qui est bien rationnel car a_1, a_k et a_{k+1} sont rationnels par hypothèse.

Conclusion : par principe de récurrence, $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en particulier, toujours dans l'hypothèse où a_1 est rationnel, on obtient que tous les a_k sont rationnels.

5) D'après la question 3,

$$-\frac{1}{2} = a_1 + a_2 = a_1 + 2a_1^2 - 1$$

donc a_1 est une racine de $2X^2 + X - \dfrac{1}{2}$. On pose $\Delta = 1^2 + 4 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 5 > 0$. Les racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Or, seule x_1 est négative et $a_1 = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0$ donc nécessairement $a_1 = x_1$ et $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$

Ce nombre n'est pas rationnel car sinon $\sqrt{5} = 4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$ le serait.

6) On applique la formule de Moivre puis le binôme de Newton :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.$$

En identifiant les parties réelles, on obtient

$$\boxed{\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.}$$

Avec $\theta = \dfrac{\pi}{9}$, cela donne $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \text{ est une solution de } 4x^3 - 3x - \tfrac{1}{2} = 0 \quad i.e. \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0.}$

7) Les hypothèses donnent $0 = 8\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\frac{p}{q} - 1 = \dfrac{8p^3 - 6pq^2 - q^3}{q^3}$.

Donc $8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0 \quad i.e. \quad q^3 = 8p^3 - 6pq^2 = p(8p^2 - 6q^2)$ ce qui signifie que p divise q^3. Or, puisqu'on a pris p et q premiers entre eux, cela implique que $p = \pm 1$ (propriété admise en début de problème).

Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \pm\frac{1}{q}$ mais puisque ce nombre est positif et inférieur strict à 1, on a même $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{q}$ avec $q \geqslant 2$. On a alors $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \leqslant \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ce qui est impossible car cos est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'où, $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) \text{ est irrationnel.}}$

8) a) D'après la question 3, $\boxed{y_1 + y_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k = -\frac{1}{2}.}$

En utilisant la formule de la question 2 avec les bons couples (s,k), on obtient :

$$\begin{aligned} y_1y_2 = \ & a_1a_2 + a_1a_5 + a_1a_6 \\ & + a_3a_2 + a_3a_5 + a_3a_6 \\ & + a_4a_2 + a_4a_5 + a_4a_6 \\ = \ & \frac{1}{2}(a_3 + a_1 + a_6 + a_4 + a_7 + a_5 \\ & + a_5 + a_1 + a_8 + a_2 + a_9 + a_3 \\ & + a_6 + a_2 + a_9 + a_1 + a_{10} + a_2) \\ = \ & \frac{1}{2}(a_3 + a_1 + a_6 + a_4 + a_6 + a_5 \\ & + a_5 + a_1 + a_5 + a_2 + a_4 + a_3 \\ & + a_6 + a_2 + a_4 + a_1 + a_3 + a_2) \end{aligned}$$

en utilisant la relation $a_{2n+1-k} = a_k$ pour obtenir uniquement des indices entre 1 et 6.

Ainsi, on trouve $\boxed{y_1y_2 = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{6} a_k = -\frac{3}{4}.}$

b) La fonction cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{13}\right) \geqslant \cos\left(\frac{4\pi}{13}\right)$ ce qui donne $a_3 + a_4 \leqslant 0$. Puisque $a_1 < 0$, on en déduit que $\boxed{y_1 < 0.}$
On rappelle que y_1 et y_2 sont naturellement les racines du polynôme

$$(X - y_1)(X - y_2) = X^2 - (y_1 + y_2)X + y_1y_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{3}{4}.$$

On pose $\Delta = \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$. Les racines du polynômes sont donc :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}.$$

Puisque seule $x_1 < 0$, on a $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ (et pas l'inverse). Ainsi,

$$\boxed{y_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}.}$$

c) Par l'absurde, si $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$ est rationnel alors a_1 aussi et, d'après la question 4, tous les a_k sont rationnels. On obtient donc que y_2 est rationnel comme somme de rationnels mais cela implique aussi que $\sqrt{13} = 4y_2 + 1$ est rationnel. Contradiction.

d) $\beta = \frac{1}{2}(a_4 + a_2 + a_5 + a_3 + a_7 + a_1) = \frac{1}{2}(a_4 + a_2 + a_5 + a_3 + a_6 + a_1) = -\dfrac{1}{4}$.
$\gamma = \frac{1}{2}(a_4 + a_2)a_4 = \frac{1}{4}(a_8 + a_0 + a_6 + a_2) = \frac{1}{4}(a_5 + 1 + a_6 + a_2) = \dfrac{y_2 + 1}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{16}$.

e) a_1, a_3 et a_4 sont naturellement les racines du polynôme $P(X) = (X - a_1)(X - a_3)(X - a_4)$.
En développant, on trouve

$$(X - a_1)(X - a_3)(X - a_4) = X^3 - \alpha X^2 + \beta X - \gamma.$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right) = -a_1$, on en déduit que
$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{13}\right) \text{ est racine de } -P(-X) = X^3 - \frac{1+\sqrt{13}}{4}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{3+\sqrt{13}}{16}.}$