Feuille d'exercices n^o 14 : espaces vectoriels

Exercice 1.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
   $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -9x + 7y = 0\}$ $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y = 1\}$
   $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0\}$ $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$
   $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$ $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
   $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \geqslant 0\}$ $E_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$

3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
   L'ensemble E_9 des suites croissantes L'ensemble E_{10} des suites monotones
   L'ensemble E_{11} des suites bornées L'ensemble E_{12} des suites convergeant vers 0
   L'ensemble E_{13} des suites arithmétiques L'ensemble E_{14} des suites géométriques
   L'ensemble E_{15} des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 2x_n$

4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
   L'ensemble E_{16} des fonctions positives L'ensemble E_{17} des fonctions s'annulant en 0
   L'ensemble E_{18} des fonctions continues L'ensemble E_{19} des fonctions dérivables
   L'ensemble E_{20} des fonctions 2π-périodiques L'ensemble E_{21} des f telles que $f(3) = 2f(5) - 1$

Exercice 2. Équation du sous-espace engendré.

1. À quelle condition sur le réel a, a-t-on : $(1, a, 2) \in \text{Vect}((1, 1, 3), (0, 1, 1))$?

2. Déterminer de même une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que :
   $(a, b, c) \in \text{Vect}((1, 1, 3), (2, -1, 3), (0, 1, 1))$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\text{Vect}((1, 1, 1), (2, 1, -1)) = \text{Vect}((1, 2, 4), (3, 1, -3))$.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles suivants :

$$F = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 5. Dans les cas suivants, on donne trois ensembles E, F et G. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

1. Soient E l'ensemble des suites réelles convergentes, F celui des suites constantes et G l'ensemble des suites convergeant vers 0.

2. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines.

3. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^{1} f(t)\ dt = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur $[-1, 1]$.

4. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$;
   $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 6. Déterminer une famille génératrice pour les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2z\} \qquad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2z, x + y + z = 0\}$$

Exercice 7. Pour A et B des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une famille génératrice de $A \cap B$.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 3z\}$.
2. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 3z\}$ et $B = \mathrm{Vect}((1, 1, 2), (2, 1, 1))$.
3. $A = \mathrm{Vect}((1, 2, 2), (3, 2, 2))$ et $B = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 2))$.

Exercice 8. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? Sont-elles des bases ?

1. $((1, 2, 5, 4), (2, 4, 10, 7))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $((1, 2, 3), (-5, -10, -15))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$ dans $\mathbb{R}^4$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ? forment-ils une famille génératrice de E ?

1. $u\colon x \mapsto \cos x, \quad v\colon x \mapsto \sin x, \quad w\colon x \mapsto e^x$;
2. $u_1\colon x \mapsto 2\cos x, \quad u_2\colon x \mapsto \cos 2x, \quad u_3\colon x \mapsto \cos^2 x, \quad u_4\colon x \mapsto \sin^2 x$

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E, et déterminer les coordonnées de u dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1))$ et $u = (2, 3, 4)$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ et $u = I_2$.

Exercice 11.

1. Donner une base de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$, où $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. Donner une base de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x + 2y + z = 0\}$.
3. Montrer que $F = G$.

Exercice 12. Donner une base des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x = 2y = 3z\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \,|\, x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \,|\, x + 2y - z = x - y = t = 0\}$
5. $E_5 =$ l'ensemble des suites arithmétiques dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
6. $E_6 =$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' = 0$

7. E_7 = l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$

8. E_8 = l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + 8\cos(4x)y = 0$

Exercice 13. Compléter en une base de $\mathbb{K}^4$ la famille $((1,1,1,1),(1,1,-1,-1))$.

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires.

1. $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x,y) \mid x+y=0\}$ et $G = \{(x,y) \mid x-y=0\}$.

2. $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } x+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$.

3. $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x,y,z) \mid x-y+z=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$.

4. $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.

5. $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$ et $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$.

Exercice 15. Dans $E = \mathbb{R}^3$ soit $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.
Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Pour s'entrainer

Exercice 16.

1. Soient $u_1 = (1,2,0,1), u_2 = (2,1,3,1), u_3 = (0,3,-3,1)$ et $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.
   Déterminer une base de E.

2. Soient $v_1 = (1,2,1,0), v_2 = (-1,1,1,1), v_3 = (2,-1,0,1), v_4 = (2,2,2,2)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)$.
   Déterminer une base de F.

3. Déterminer une base de $E \cap F$ et une base de $E + F$.

Exercice 17.

1. $C = \mathrm{Vect}((1,2,3),(3,2,1))$. Déterminer une équation cartésienne de C.

2. $D = \mathrm{Vect}((1,2,3))$. Déterminer un système d'équations cartésiennes pour D.

Exercice 18. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b & b \\ b & a-b & a+2b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } a, b \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$ et en donner une base.

Exercice 19. Équation du sous espace engendré.

1. Déterminer le réel a pour que : $(a,4) \in \mathrm{Vect}((4,16),(3,9))$.

2. Déterminer le réel a pour que : $(1,a) \in \mathrm{Vect}((10,15),(4,6))$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que : $(a,b) \in \mathrm{Vect}((2,-3),(-4,6))$.