Samedi 2 décembre 2023

Devoir sur table n° 2

Corrigé

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- ENCADREZ vos résultats.
- Numérotez les copies doubles.
- Justifiez vos réponses.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Bon courage !

Questions de cours

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la formule pour la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2) Mettre sous formes polaire et algébrique le nombre complexe $a = \dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) Déterminer les racines cubiques de $2+2i$. On calculera **explicitement** leurs formes algébriques (sans garder cos et sin).

Solution.

1) voir cours.

2) voir cours.

3) voir cours, on utilise en plus la question précédente pour avoir les racines cubiques sous forme algébrique :

$$\boxed{-1+i \qquad \frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad -\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

Exercice 1. Dans cet exercice, on veut prouver que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. On suppose donc par l'absurde qu'elle en possède une et on note ℓ cette limite.

1) Pourquoi a-t-on $\ell \in \mathbb{R}$?

2) Justifier que les suites $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(n+2))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

3) Factoriser $\cos(n+2)+\cos(n)$. En déduire que $\ell = 0$.

4) Exprimer $\cos(2n)$ en fonction de $\cos n$. En déduire une contradiction.

Solution.

1) La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc si elle possède une limite, $\boxed{\text{celle-ci est finie.}}$

2) Ces trois suites sont des suites extraites de $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, cette dernière converge vers ℓ donc $\boxed{\text{ses suites extraites aussi.}}$

3) $\cos(n+2)+\cos(n) = 2\cos\left(\frac{n+2-n}{2}\right)\cos\left(\frac{n+2+n}{2}\right) = 2\cos(1)\cos(n+1)$. En passant à la limite dans cette relation et en utilisant la question 2, on a

$$\ell + \ell = 2\cos(1)\ell \iff (1-\cos(1))\ell = 0 \iff \boxed{\ell = 0}$$

car $1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(1) \in]0,1[$ et en particulier $1-\cos(1) \neq 0$.

4) $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$. En passant de nouveau à la limite dans cette relation, on obtient

$$\ell = 2\ell^2 - 1 \iff 0 = -1$$

puisque $\ell = 0$ d'après ce qui précède. D'où la contradiction et ainsi, $\boxed{\text{la suite } (\cos n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite.}}$

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) a) Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

   b) Résoudre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\sin(x) = x$.

2) Démontrer que pour tout entier n, $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution.

1) a) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sin est positif.
   On pose : $u(x) = x - \sin x$. u est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions dérivables : $u'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$u'(x)$	0	$+$
$u(x)$	0	↗

On constate : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad u(x) \geqslant 0.$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ on a } 0 \leq \sin(x) \leq x.}$

b) $\sin x = x \Leftrightarrow u(x) = 0$. D'après les variations de u, $u(x)$ s'annule une fois et une seule en $x = 0$. Donc : $\boxed{\text{pour } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x = x \Leftrightarrow x = 0}$

2) On note $\mathcal{P}_n$: "$u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$". Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n$\in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a bien $u_0 = \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
D'après la question a), si $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \sin(u_n) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifié.

<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.}$

3) $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \leqslant 0$ d'après la question a) car $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'après la question 2).
Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

4) La suite est décroissante, minorée par 0. Donc $\boxed{u \text{ converge.}}$

5) On note ℓ la limite de u. En passant à la limite dans la relation de récurrence (et par continuité de la fonction sinus), on obtient

$$\sin \ell = \ell \iff \ell = 0$$

d'après la question 1b) car $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Exercice 3.

1) Soient θ, α, β des réels. À l'aide de la technique de l'arc moitié, factoriser :

$$\frac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - e^{i\beta}}.$$

2) On considère A, B et M, trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et z. Montrer que :

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{a}{b}\right) \; [\pi]. \qquad (*)$$

3) Donner une interprétation géométrique du résultat précédent.

4) Que devient l'égalité ($*$) si on suppose en plus que A et B sont diamétralement opposés ? Donner une interprétation géométrique pour cette nouvelle égalité obtenue.

Solution.

1) $e^{i\theta} - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\alpha}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{\theta+\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$.

Donc : $\dfrac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - e^{i\beta}} = \dfrac{e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta+\beta}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}$. Ainsi

$$\boxed{\frac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - e^{i\beta}} = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}.}$$

2) A, B, M sont sur le cercle trigonométrique. Donc leurs affixes s'écrivent : $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $z = e^{i\theta}$ avec $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$.

On a alors : $\dfrac{z-a}{z-b} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - e^{i\beta}} = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}$.

Il s'agit presque d'une forme polaire : cela dépend du signe du réel $\dfrac{\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}$.

S'il est positif, $\frac{\alpha-\beta}{2}$ est un argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$.

S'il est négatif, c'est $\frac{\alpha-\beta}{2} + \pi$ qui l'est.

Dans tous les cas : $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) \equiv \dfrac{\alpha-\beta}{2}\ [\pi]$.

Comme $\arg(a/b) = \arg(a) - \arg(b) = \alpha - \beta$, on obtient : $\boxed{\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) \equiv \dfrac{1}{2} \arg\left(\dfrac{a}{b}\right)\ [\pi]}$

3) On sait que $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \arg\left(\dfrac{a-z}{b-z}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{a}{b}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)\ [2\pi]$.

L'égalité (*) montre ainsi qu'étant donnés trois points du cercle trigonométrique, l'angle $\widehat{AMB}$ vaut toujours la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$. On généralise facilement au cas d'un cercle quelconque.

4) Dans ce cas, $b = -a$ donc $\dfrac{a}{b} = -1$ dont un argument est π. Ainsi, l'égalité devient :

$$\boxed{\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].}$$

Interprétation géométrique : $\boxed{\text{l'angle } \widehat{AMB} \text{ est droit.}}$ Autrement dit, Un triangle inscrit dans un cercle, dont un des côtés est un diamètre est un triangle rectangle.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que $A = (1+1)^n$, $B = (1+j)^n$ et $C = (1+\overline{j})^n$.

1) Calculer en fonction de $\overline{j}$ les nombres j^2 et $\dfrac{1}{j}$.

2) Placer de façon **exacte** les points d'affixe $1, j$ et $\overline{j}$ dans un repère orthonormé. On expliquera comment on procède.

3) Calculer $1 + j + j^2$.

4) Pour $k \in \mathbb{Z}$, calculer $1 + j^k + j^{2k}$. On distinguera deux cas.

5) Mettre sous forme polaire $1 + j$ et de $1 + \overline{j}$. En déduire les formes polaires de B et C.

6) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A + B + C$ en fonction de n.

7) Développer A, B et C par la formule du binôme de Newton.

8) En déduire une expression pour la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

Solution.

1) Puisque $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $\boxed{j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}.}$

2) Les trois points d'affixe respectives $1, j, \overline{j}$ sont situés sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. j et $\overline{j}$ sont d'abscisses -1/2. $\boxed{\text{On place } j \text{ et } \overline{j} \text{ à l'intersection du cercle et de la droite } x = -1/2.}$

3) On trouve $\boxed{1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.}$

4) Plus généralement, on va utiliser la somme des termes d'une suite géométrique de raison j^k. On remarque déjà que

$$j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0\ [3], \\ j & \text{si } k \equiv 1\ [3], \\ j^2 & \text{si } k \equiv 2\ [3]. \end{cases}$$

Dans le premier cas, on a $1 + j^k + j^{2k} = 3$. Dans les deux autres cas, la raison est différente de 1 donc

$$1 + j^k + j^{2k} = \frac{(j^k)^3 - 1}{j^k - 1} = 0$$

car $j^3 = 1$. Ainsi

$$\boxed{1 + j^k + j^{2k} = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0\ [3] \quad \textit{i.e. } k \text{ est un multiple de 3,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

5) $1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$.
$1 + \overline{j} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$.
$B = (e^{i\pi/3})^n = e^{in\pi/3}$ et $C = e^{-in\pi/3}$

6) On constate que A est réel, et $\overline{B} = \overline{(1+j)^n} = (1+\overline{j})^n = C$.
Donc $B + C = B + \overline{B} = 2\mathrm{Re}(B) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ est réel.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(A+B+C) = 0}$ et $\boxed{A+B+C = \mathrm{Re}(A+B+C) = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).}$

7) $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k, \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overline{j}^k.$

8) En utilisant les questions 7 puis 4 :

$$A + B + C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^{n} \binom{n}{k}$$

mais cette dernière somme est en fait exactement S_n en “posant” $k = 3k'$. D'où

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).}$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. On considère aussi la fonction auxiliaire définie par $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

1) Étude de g.

   a) Faire l'étude complète de la fonction g. On déterminera son domaine de définition, son domaine de dérivation, sa dérivée ainsi que son tableau de variations (limites comprises).

   b) Le graphe de g possède-t-il une asymptote ? Si oui, préciser laquelle.

   c) Tracer le graphe de g. On fera apparaître l'asymptote, la tangente en 0 ainsi qu'une autre tangente remarquable.

2) Étude de f.

   a) En justifiant *soigneusement*, déterminer le domaine de définition de f.

   b) Faire de même pour son domaine de dérivabilité.

   c) Pour $x \in D_{f'}$, calculer $f'(x)$.

   d) En déduire une simplification de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$. On distinguera deux cas.

   Indication : faire apparaître la forme $\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$ dans la dérivée.

3) Changement de variable.

   a) Justifier que pour tout $x \geqslant 0$, il existe un unique $\theta \in [0, \pi[$ tel que $\sqrt{x} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

   b) Exprimer $\sin\theta$ en fonction de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

c) Pour $\theta \in [0, \pi[$, simplifier $\arcsin(\sin \theta)$. On distinguera deux cas.

d) En déduire de nouveau une simplification de $f(x)$.

4) Tracer le graphe de f.

Solution.

1) a) La fonction g est $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}_+}$ et $\boxed{\text{dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ (à cause de la racine). Pour $x \neq 0$,

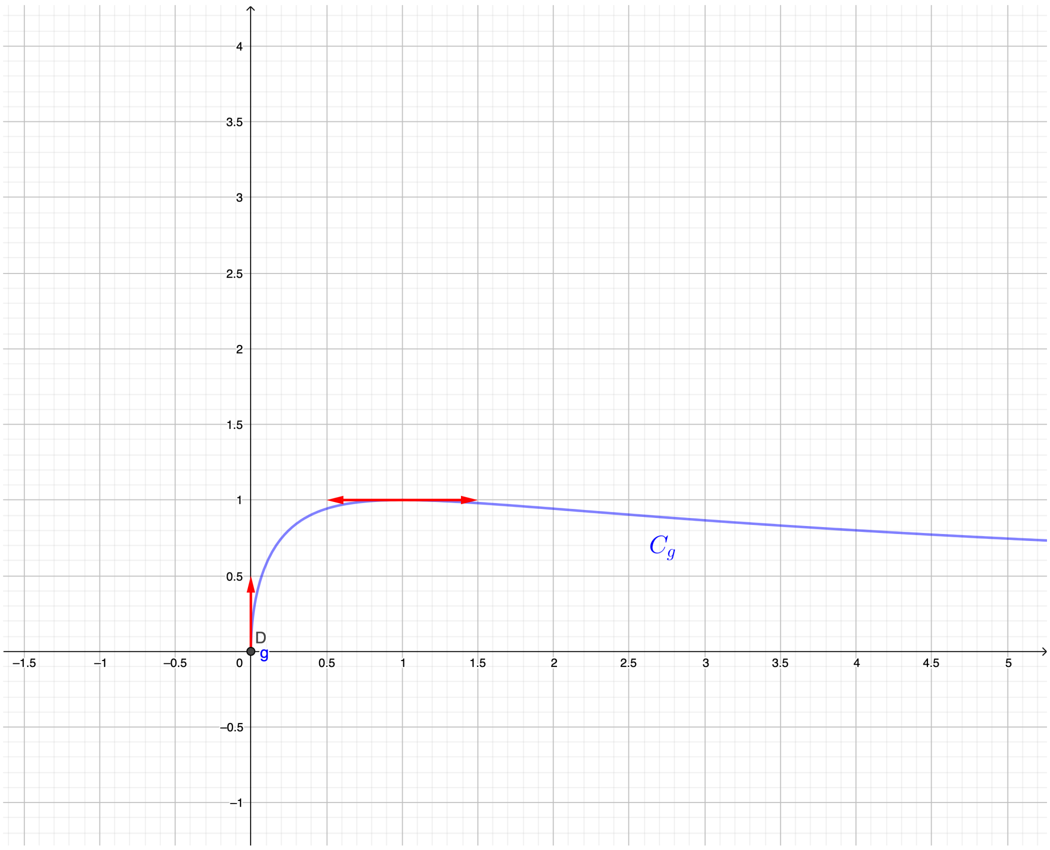
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

qui est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variations.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) Le graphe de g possède $\boxed{\text{une asymptote horizontale en } +\infty \text{ d'équation } y = 0.}$

c)



2) a) $f(x) = \arccos(g(x))$ donc $f(x)$ est défini *ssi* $g(x)$ est défini et $g(x) \in [-1, 1]$. Or, d'après ce qui précède, $g(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $[0, 1]$. D'où, $\boxed{D_f = \mathbb{R}_+.}$

b) Soit $x \in D_f$. Pour que f soit dérivable en x, il faut tout d'abord que g soit dérivable en x (*a priori*). De plus, $g(x)$ doit être une valeur en laquelle la fonction arccos est dérivable. Ainsi,

$$f \text{ dérivable en } x \iff x > 0 \text{ et } g(x) \in]-1, 1[.$$

Or, d'après la question 1, $g(x) \in]-1, 1$ uniquement pour $x = 1$ et $g(1) = 1$.
D'où, $\boxed{D_{f'} =]0, 1[\cup]1, +\infty[.}$

c) En utilisant la dérivée d'une composée,

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x)\arccos'(g(x)) &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{|1+x|}{\sqrt{(1+x)^2-4x}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+x)^2}\frac{1+x}{\sqrt{(x-1)^2}} \quad \text{car ici } 1+x>0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\frac{x-1}{|x-1|}. \end{aligned}$$

On remarque que le dernier facteur ne vaut pas toujours 1.

d) Cas 1 : $x \in]0, 1[$ *i.e.* $\frac{x-1}{|x-1|} = -1$. On a alors

$$f'(x) = -2\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = -2\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

avec $u(x) = \sqrt{x}$. On reconnaît alors la dérivée de $\arctan(u(x))$. Ces fonctions sont donc égales à une constante près sur l'intervalle $]0, 1[$ et même sur $[0, 1]$ par continuité. On a ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = C - 2\arctan(\sqrt{x}).$$

Or, $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $C = \frac{\pi}{2}$ et

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{x}).}$$

Cas 2 : $x \in]1, +\infty[$ *i.e.* $\frac{x-1}{|x-1|} = 1$. En procédant de même, on trouve :

$$\boxed{\forall x > 1, \quad f(x) = 2\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}.}$$

3) a) La fonction $h\colon \theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est strictement croissante (par composée) sur $I = [0, \pi[$ donc réalise une bijection de I dans $J = h(I)$. Comme h est de plus continue, on a

$$J = [h(0), \lim_{\pi^-} h[= \mathbb{R}_+.$$

En particulier, pour tout $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ donc il possède un unique antécédent

$\theta \in [0,\pi[$ par la fonction h. D'où le résultat. De plus, d'après le cours sur les fonctions usuelles, on a $\frac{\theta}{2} = \arctan(\sqrt{x})$ *i.e.* $\theta = 2\arctan(\sqrt{x})$

b) C'est une formule à connaître mais on peut aussi la retrouver facilement : $\boxed{\sin\theta = \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$

c) On rappelle que $\arcsin(\sin\theta)$ est par définition l'unique angle $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\alpha = \sin\theta$. Ainsi,

$$\boxed{\arcsin(\sin\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - \theta & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}}$$

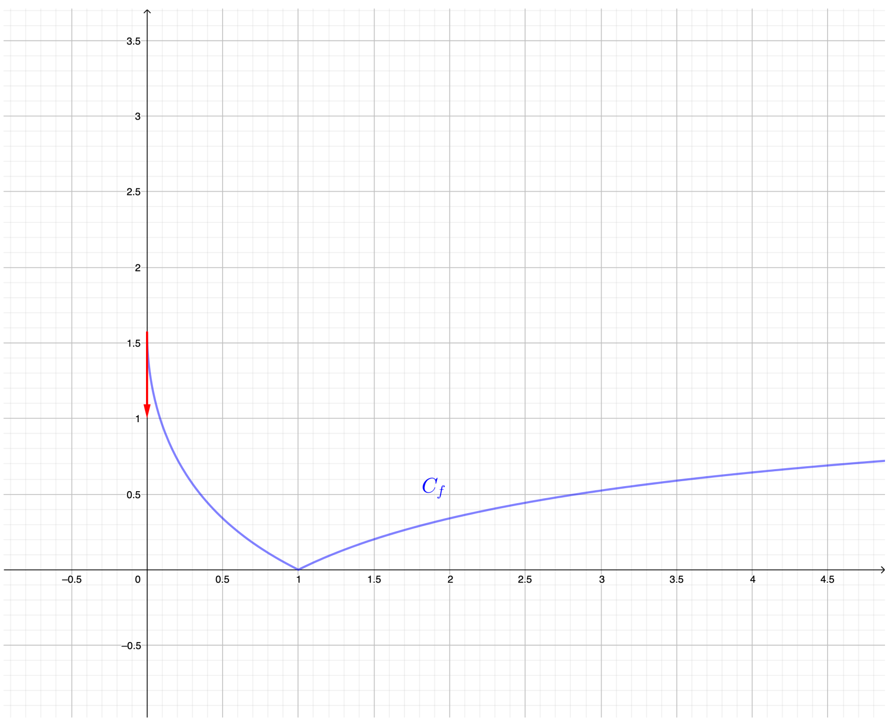
d) D'après les question a) et b), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \arccos\left(\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \arccos(\sin\theta) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin\theta) \qquad \text{puisque } \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \theta - \frac{\pi}{2} & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Or, le premier cas correspond à $x \in [0,1]$ et le second cas à $x \geqslant 1$. D'où,

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0,1], \\ 2\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}}$$

4)



Exercice 6. Soit u la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$$

1) Montrer que u_n est bien défini et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On introduit v la suite auxiliaire suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln u_n$. Montrer que v est bien définie et qu'il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux.

3) Expliciter v_n puis u_n en fonction de n.

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution.

1) On note $\mathcal{P}_n$:"u_n existe et $u_n > 0$". Montrons par récurrence double sur n que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, u_0 existe et $u_0 = 1 > 0$. Pour $n = 1$, u_1 existe et $u_1 = 4 > 0$.

   <u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n et u_{n+1} existent et sont strictement positifs.
   Alors u_{n+2} existe car $u_n u_{n+1} \geqslant 0$.
   D'autre part, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} > 0$. Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vérifiée.

   <u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n.
   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0.}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc $\boxed{v_n \text{ existe.}}$

   De plus $v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln\sqrt{u_{n+1}u_n} = \dfrac{1}{2}(\ln u_{n+1} + \ln u_n) = \dfrac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \dfrac{1}{2}v_{n+1} + \dfrac{1}{2}v_n.}$

3) On résout l'équation caractéristique : $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} \iff r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$.
   On trouve $r = 1$ ou $r = -\dfrac{1}{2}$.
   Donc $v_n = \lambda + \mu(-1/2)^n$.
   Déterminons les constantes :
   $v_0 = \lambda + \mu = \ln u_0 = 0$
   $v_1 = \lambda - \dfrac{1}{2}\mu = \ln u_1 = \ln 4$
   On trouve : $\lambda = -\mu = \dfrac{2}{3}\ln 4$ donc $v_n = \dfrac{2}{3}\ln 4(1 - (-1/2)^n)$.
   On revient à u : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(\dfrac{2}{3}\ln 4(1 - (-1/2)^n))}$

4) Comme $-1/2 \in]-1, 1[$, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \exp(\dfrac{2}{3}\ln 4) = 4^{\frac{2}{3}}.}$

Exercice 7. Autour du nombre e.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Rappeler la valeur de $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) En utilisant le binôme de Newton, montrer que $u_n \leqslant S_n$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur $k \in [\![0,n]\!]$ que $\frac{n!}{(n-k)!n^k} \geqslant 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$.

4) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{(k-2)!} \leqslant \frac{1}{2^{k-3}}$.

5) En déduire que $S_n - u_n \leqslant \frac{2}{n}$ puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.

6) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant q$. Montrer que $q!S_q$ est un entier et que $q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q}$.

7) En déduire que e est irrationnel.

Solution.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc

$$\boxed{u_n = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 = e}$$

2) La formule du binôme donne

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Pour $k=0$ on a bien $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 \leqslant \frac{1}{k!}$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \leqslant \frac{1}{k!}$$

car chacun des k facteurs au numérateur est inférieur ou égal à n.
En sommant ces inégalités pour $k \in [\![0,n]\!]$, on obtient $u_n \leqslant S_n$.

3) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in [\![0,n]\!]$, la propriété

$$\mathcal{P}_k : \frac{n!}{(n-k)!n^k} \geqslant 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

On remarque que la propriété n'a aucun sens pour $k > n$ donc dans l'hérédité ($\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$) on devra avoir $k < n$ de sorte que $k+1 \leqslant n$.

Initialisation : pour $k=0$, on a bien $\dfrac{n!}{(n-0)!n^0} = 1 \geqslant 1 - \dfrac{0\times(-1)}{2n}$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}_k$ pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-(k+1))!n^{k+1}} &= \frac{n!}{(n-k)!n^k}\frac{n-k}{n} \\
&\geqslant \left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right) && \text{d'après } \mathcal{P}_k \\
&= 1 - \frac{k(k-1)}{2n} - \frac{2k}{2n} + \frac{k^2(k-1)}{2n^2} \\
&\geqslant 1 - \frac{k(k-1+2)}{2n} && \text{le dernier terme étant positif} \\
&= 1 - \frac{(k+1)k}{2n}.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{k+1}$.

4) Pour $k=2$ ou 3, l'inégalité est vraie. Pour $k>3$ et pour tout entier $i \in [\![2, k-2]\!]$, on a $i \geqslant 2$ donc

$$(k-2)! = \prod_{i=2}^{k-2} i \geqslant \prod_{i=2}^{k-2} 2 = 2^{k-3}.$$

D'où $\dfrac{1}{(k-2)!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-3}}$ en passant à l'inverse.

5) En utilisant le binôme de Newton, a

$$\begin{aligned}
S_n - u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{2n} && \text{d'après la question 2)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!2n} && \text{car les deux premiers termes sont nuls} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-3}2n} && \text{d'après la question 3)} \\
&= \frac{4}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k} \\
&= \frac{4}{n} \times \frac{1}{4} \times \frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $u_n \leqslant S_n \leqslant u_n + \frac{2}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ et d'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e$.

6) On a

$$q!S_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q} q(q-1)\cdots(q-k+1)$$

qui est bien entier en tant que somme de produits d'entiers. Aussi,

$$\begin{aligned}
q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(k-1)k} \\
&\leqslant \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{(q+1)^{k-q}} && \text{car chaque facteur au dénominateur est } \geqslant q+1 \\
&= \frac{1}{q+1} \times \frac{1 - \frac{1}{(q+1)^{n-q}}}{1 - \frac{1}{q+1}} && \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{(q+1)^{n-q}}}{q} \\
&< \frac{1}{q}.
\end{aligned}$$

7) Posons $\varepsilon_q(n) = q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!}$. Il est clair que $\varepsilon_q(n) > 0$. D'après ce qui précède, on a même $\varepsilon_q(n) \in]0, \frac{1}{q}[$. Or,

$$\varepsilon_q(n) = q!S_n - q!S_q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q!e - q!S_q.$$

On note ε_q cette limite et on remarque que $\varepsilon_q(n)$ est croissante pour $n \geqslant q$ donc par passage à la limite $\varepsilon_q \in]0, \frac{1}{q}]$. Ainsi,

$$q!e = q!S_q + \varepsilon_q$$

avec $q!S_q \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_q \in]0, 1[$ pour $q > 1$. On en déduit que $q!e$ n'est pas entier pour tout entier $q > 1$ et on remarque que c'est aussi vrai pour $q = 1$ car

$$\varepsilon_1(n) = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2 \cdot 3^{k-2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n-2}}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

donc $2 < e \leqslant 2 + \frac{3}{4} < 3$. *A fortiori*, qe n'est pas entier pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et donc e est irrationnel car sinon on aurait $e = \frac{p}{q} \ \Rightarrow\ qe = p$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.