

Devoir maison n° 1

Mathématiques

Le but de ce DM est de montrer, avec trois méthodes différentes, l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}.$$

- 1) **Première méthode** : factoriser $\sin x + \cos x$ puis en déduire l'inégalité souhaitée.
- 2) **Deuxième méthode** : mettre l'inégalité au carré (en justifiant) et conclure.
- 3) **Troisième méthode** : on considère la fonction $f(x) = \sin x + \cos x$.
 - a) Justifier pourquoi il *suffit* de montrer que : $\forall x \in [0, 2\pi], \quad |f(x)| \leq \sqrt{2}$.
 - b) Calculer $f(x + \pi)$ et en déduire qu'il suffit de montrer l'inégalité seulement pour $x \in [0, \pi]$.
 - c) Calculer $f(\frac{\pi}{2} - x)$ et en déduire qu'il suffit de montrer l'inégalité seulement pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 - d) Étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et conclure.