Samedi 9 mars 2024

Devoir sur table n° 5

Correction

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- **ENCADREZ** vos résultats.
- Numérotez les copies doubles.
- Justifiez vos réponses.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Bon courage !

Questions de cours

1) On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques sont définis respectivement par

$$\mathcal{S}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; M^T = M \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; M^T = -M \right\}.$$

   a) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel. On admet le résultat pour $\mathcal{A}_n$.

   b) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Donner les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre 5 en 0.
On calculera **explicitement** les factorielles et on détaillera le calcul pour $h(x)$.

$$f(x) = \arctan x, \qquad g(x) = \ln(1+x), \qquad h(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Solution.

1) a) Montrons que $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
   - La matrice nulle est symétrique *i.e.* $0_n \in \mathcal{S}_n$.
   - Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(A+\lambda B)^T = A^T + \lambda B^T = A + \lambda B$ donc $A + \lambda B \in \mathcal{S}_n$. D'où, $\mathcal{S}_n$ est stable par combinaison linéaire.

   b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$ tel que $M = S + A$.
   Analyse : soit $(S, A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$ tel que $M = S + A$. Alors $M^T = S^T + A^T = S - A$ puisque, par hypothèse, S est symétrique et A antisymétrique. Ainsi,

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

   Synthèse : on pose $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. On a bien :

- $S^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$ *i.e.* $S \in \mathcal{S}_n$;
- $A^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$ *i.e.* $A \in \mathcal{A}_n$;
- $M = S + A$.

Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

2) $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$, $\qquad g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$,

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} &= 1 + \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24}\right) + \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24}\right)^2 + \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24}\right)^3 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5). \end{aligned}$$

Exercice 1. On considère des codes à six chiffres entre 0 et 9. Pour chaque question, il faut compter le nombre de codes vérifiant une certaine condition. On justifiera systématiquement et on simplifiera au maximum ses résultats (on ne demande pas d'applications numériques poussées).

1) Le nombre total de codes.

2) Ceux commençant par un chiffre 1.

3) Ceux ayant au moins un chiffre 1.

4) Ceux contenant exactement deux chiffres pairs.

5) Ceux contenant au moins une séquence de trois (mais pas quatre) chiffres identiques.
Exemple : 000444 *convient mais pas* 100004*.*

Solution.

1) Pour chacun des six chiffres, on a dix possibilités. Il y a donc autant de codes que de 6-listes dans $[\![0, 9]\!]$, soit $\boxed{10^6.}$

2) Une fois le premier chiffre fixé (valant 1), le reste du code est quelconque. Il y en a donc autant que de 5-listes dans $[\![0, 9]\!]$, soit $\boxed{10^5.}$

3) Calculons d'abord N, le nombre de codes *ne contenant pas* le chiffre 1. Il s'agit des 6-listes dans $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (neuf possibilités pour chacun des six chiffres) donc $N = 9^6$. Le nombre de codes contenant *au moins* un chiffre 1 est le cardinal complémentaire de N *i.e.* $\boxed{10^6 - 9^6.}$

4) Pour choisir un tel code :

   - on choisit d'abord la place des deux chiffres pairs (*i.e.* quels chiffres sont pairs et donc lesquels sont impairs parmi les six) ce qui donne $\binom{6}{2} = \frac{6\times 5}{2!} = 15$ possibilités ;
   - puis on choisit la valeur de chacun des chiffres pairs (cinq possibilités à chaque fois) donc 5^2 possibilités ;
   - enfin, on choisit la valeur de chacun des chiffres impairs donc 5^4 possibilités.

En tout, on a donc $\boxed{15 \cdot 5^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 5^7}$ codes possibles.

5) Tout d'abord, remarquons qu'il y a 4 possibilités pour choisir la position d'une séquence de trois chiffres identiques. Par exemple : 000123, 100023 , 120003 et 123000 illustrent les quatre configurations possibles. La situation étant légèrement différente dans les configurations 1 et 4 par rapport aux configurations 2 et 3, on va compter les codes possibles en distinguant ces deux situations.

   On commence par compter le nombre de codes dans la configuration 2 ou 3 :

   - on choisit l'une des 2 configurations ;
   - puis on choisit la valeur de la séquence de trois chiffres identiques donc 10 possibilités ;
   - enfin, on choisit le reste du code de sorte que la valeur choisie précédemment ne soit pas à coté de la séquence, il n'y a donc plus que 9 possibilités pour les deux chiffres voisins de la séquence et 10 possibilités pour le dernier chiffre, soit $9^2 \cdot 10$ possibilités.

   Ainsi, il y a $2 \cdot 10 \cdot 9^2 \cdot 10 = 16200$ codes dans les configurations 2 et 3.

   Pour les codes dans la configuration 1 ou 4 :

   - on choisit l'une des 2 configurations ;
   - puis on choisit la valeur de la séquence de trois chiffres identiques donc 10 possibilités ;
   - enfin, on choisit le reste du code, il y a un chiffre voisin de la séquence sur lequel il n'y a que 9 possibilités et 10 possibilités pour chacun des deux autres chiffres, soit $9 \cdot 10^2$ possibilités ;
   - à tout cela, il faut retrancher le nombre de codes de la forme 000444 (deux séquences différentes à la suite) que l'on a en fait comptés deux fois, ce qui fait $10 \cdot 9$ possibilités.

   Ainsi le nombre de codes dans les configurations 1 ou 4 vaut $2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^2 - 10 \cdot 9 = 17910$ et donc le nombre total de codes cherchés vaut $\boxed{16200 + 17910 = 34110.}$

Exercice 2.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; AM = MA \right\}.$$

   a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   b) Montrer que A^k est dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas particulier où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note aussi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E.

b) Calculer A^2 et déterminer les coordonnées de A^2 dans la base $\mathcal{B}$.

3) On pose

$$C_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

et $F = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

a) Justifier que $F = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$. En déduire une base de F.

b) Déterminer $F \cap E$. En donner une base.

c) Donner un supplémentaire de $F \cap E$ dans E. Justifier.

Solution.

1) a) On montre que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

- $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- $A \times 0_n = 0_n = 0_n \times A$ donc $0_n \in E$.
- Soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M + \lambda N)A$ car $AM = MA$ et $AN = NA$. Ainsi $M + \lambda N \in E$.

b) Le produit matriciel étant associatif, les exposants sont définis sans ambiguïté. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AA^k = A^{k+1} = A^k A$ donc $\boxed{A^k \in E.}$

2) a) Soit $M = \begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & j\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \in E \iff AM = MA \iff \begin{pmatrix}d & e & f\\a+g & b+h & c+j\\d & e & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & a+c & b\\e & d+f & e\\h & g+j & h\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} d = b\\ e = a + c\\ f = b\\ a + g = e\\ b + h = d + f\\ c + j = e\\ d = h\\ e = g + j\\ f = h \end{cases} \iff \begin{cases} d = b\\ e = a + c\\ f = b\\ g = c\\ h = b\\ j = a \end{cases}$$

$$i.e.\ M = \begin{pmatrix}a & b & c\\b & a+c & b\\c & b & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} = aI_3 + bA + cB.$$

Donc $E = \mathrm{Vect}(I_3, A, B)$, autrement dit, la famille (I_3, A, B) est génératrice de E. Montrons qu'elle est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bA + cB = 0_3$. La première ligne donne directement $a = b = c = 0$ donc la famille (I_3, A, B) est libre et génératrice. Ainsi, $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + B$. Donc les coordonnées de A^2 dans $\mathcal{B}$ sont : $\boxed{X_{A^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3) a) On a $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$ donc $\boxed{F = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)}$ *i.e.* la famille (C_1, C_2, C_3) est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_3$. Le coefficient du milieu donne $2y = 0$ et celui en haut à droite donne $y + z = 0$. On en déduit que $x = y = z = 0$ et donc que la famille est libre. Finalement, $\boxed{(C_1, C_2, C_3) \text{ est une base de } F.}$

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Celle-ci appartient à F si et seulement si l'équation suivante d'inconnue x, y, z admet des solutions :

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = M \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & a \\ b & = & 0 \\ y + z & = & c \\ 2y & = & a + c \end{array} \right.$$

La condition de compatibilité du système est $b = 0$ et le reste du sytème est échelonné. Ainsi $M \in F$ *ssi* $b = 0$. Dit autrement, $F \cap E$ est l'ensemble des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a+c & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + cB$. D'où, $\boxed{F \cap E = \text{Vect}(I_3, B).}$ La famille (I_3, B) est donc génératrice de $F \cap E$ et puisque les deux matrices ne sont pas colinéaires, $\boxed{(I_3, B) \text{ est libre et finalement c'est une base de } F \cap E}$.

c) On pose $G = \text{Vect}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de E puisque $A \in E$. De plus, $F \cap E$ est un espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels donc, puisqu'il est inclus dans E, c'est aussi un sous-espace vectoriel de E.
On a $F \cap E = \text{Vect}(I_3, B)$, $G = \text{Vect}(A)$ et (I_3, B, A) est une base de E donc $F \cap E$ et G sont supplémentaires dans E d'après la dernière proposition du cours.

Problème : calcul d'une intégrale

Dans ce problème, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x \ln x}{1 + x}.$$

1) a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, déterminer la valeur de $g'(0)$.

2) a) Montrer que l'équation $1 + x + \ln x = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ et que $\dfrac{1}{2e} < \alpha < \dfrac{1}{e}$. On rappelle que $\ln 2 = 0,69...$

b) Montrer que $g(\alpha) = -\alpha$.

3) a) Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand $x \to +\infty$.

b) Montrer que $g(x) \underset{+\infty}{=} \ln x - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} + o\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$.

4) Dresser le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ et tracer son graphe en faisant apparaitre deux tangentes remarquables ainsi que les points d'abscisses α et 1.

On cherche à déterminer une valeur approchée de α. Pour cela, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2e}$ et $u_{n+1} = -g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est bien définie et appartient à $[\frac{1}{2e}, \alpha]$.

b) Justifier qu'il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que : $\forall x \in [\frac{1}{2e}, \alpha], \quad |g'(x)| \leqslant C$.
On admet par la suite qu'on peut prendre $C = \dfrac{1}{e}$.

c) En déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_n$ et déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} et α aient leurs cinq premières décimales en commun. On donne : $\ln(10) \leqslant 2,31$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6) Montrer que f_k est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)dt$ est bien définie.

7) Montrer que si $k > 1$ alors f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

8) Déterminer une primitive de f_k sur $]0, +\infty[$ puis une primitive F_k de f_k sur $[0, +\infty[$.

9) En déduire la valeur de I_k.

On pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ (celle-ci est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$).

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall t \in [0, 1], \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(t) = -g(t) + (-1)^n t^n g(t)$.

11) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| J - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leqslant \alpha \int_0^1 t^n dt$$

puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = J$.

Dans la suite du problème, on cherche à calculer la limite précédente. On note $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ la fonction cotangente (lorsqu'elle est bien définie). Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, m]\!]$, on pose

$$\alpha_k = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$

ainsi que $S_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

12) a) Montrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. En déduire que l'inégalité

$$\cot^2 x \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \cot^2 x$$

est valable sur un intervalle à préciser.

b) Montrer que : $\dfrac{\pi^2}{(2m+1)^2} S_m \leqslant \sum_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{\pi^2}{(2m+1)^2}(m + S_m)$.

13) a) En utilisant la formule de De Moivre, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\Big((2m+1)x\Big) = \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j \sin^{2j+1}(x) \cos^{2m-2j}(x).$$

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, le réel α_k est racine du polynôme

$$P_m(X) = \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j X^{m-j}.$$

puis que $S_m = \dfrac{m(2m-1)}{3}$.

14) Établir que $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

15) On pose $A_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$ et $B_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$. Calculer $A_m - B_m$ puis déterminer finalement la valeur de J.

Solution.

1) a) Par croissance comparée, $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Ainsi, en posant $g(0) = 0$, $\boxed{\text{on prolonge } g \text{ par continuité.}}$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et quotient de fonctions dérivables.
Pour $x > 0$, on a $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ donc

$$g'(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' \ln x + \frac{x}{1+x}(\ln x)' = \frac{1}{(1+x)^2} \ln x + \frac{x}{1+x} \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x + x + 1}{(1+x)^2}.$$

c) Pour $x > 0$, $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{\ln x}{1 + x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

Ainsi $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en 0 et son graphe y admet une tangente verticale.}}$

2) a) Posons $h(x) = \ln x + x + 1$ pour tout $x > 0$. La fonction h est <u>strictement croissante</u> et <u>continue</u> sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes et continues ($x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x + 1$). D'après le théorème de la bijection, h réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $h(\mathbb{R}_+^*) =]\lim\limits_{0} h, \lim\limits_{+\infty} h[= \mathbb{R}$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent par h dans $\mathbb{R}_+^*$ *i.e.* $\boxed{\text{l'équation } h(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha > 0.}$ De plus, $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} > 0$ et $h\left(\frac{1}{2e}\right) = -\ln 2 + \frac{1}{2e} < -\ln 2 + \frac{1}{2} < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule entre $\frac{1}{2e}$ et $\frac{1}{e}$. D'où $\boxed{\frac{1}{2e} < \alpha < \frac{1}{e}.}$

b) Comme $h(\alpha) = 0$, on a $\ln \alpha = -1 - \alpha$. Ainsi, $\boxed{g(\alpha) = \dfrac{\alpha(-1 - \alpha)}{1 + \alpha} = -\alpha.}$

3) a) Quand $x \to +\infty$: $\boxed{g(x) \sim \frac{x \ln x}{x} \sim \ln x.}$

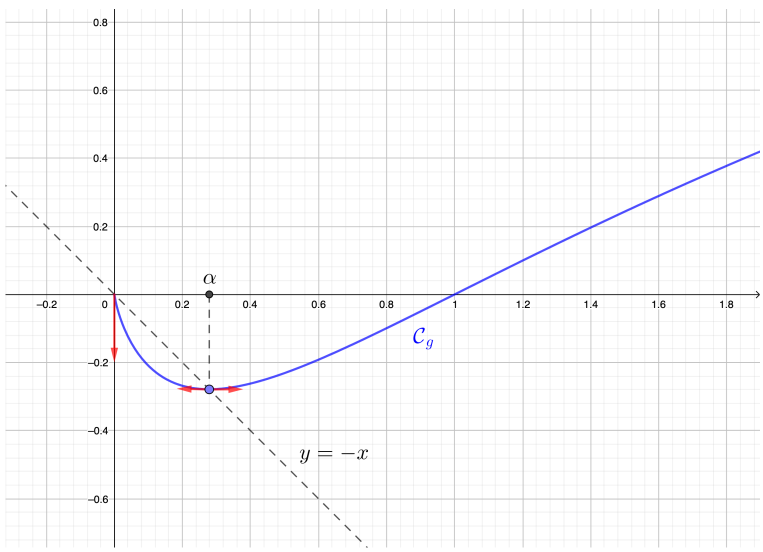
b) On remarque déjà que $g(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}}$. Or, $\frac{1}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où le résultat en multipliant par $\ln x$.

4) g' est du signe de h qui, d'après la question 2 a), est strictement croissante et s'annule en α. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$



5) a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: "u_n existe et $u_n \in [\frac{1}{2e}, \alpha]$."

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2e} \in [\frac{1}{2e}, \alpha]$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Puisque g est définie sur $[\frac{1}{2e}, \alpha]$ qui, par hypothèse, contient u_n, alors $u_{n+1} = -g(u_n)$ est bien défini. De plus, d'après la question 4, g est décroissante sur $[\frac{1}{2e}, \alpha]$ donc $-g$ est croissante et ainsi

$$\frac{1}{2e} \leqslant u_n \leqslant \alpha \implies -g\left(\frac{1}{2e}\right) \leqslant -g(u_n) \leqslant -g(\alpha) = \alpha.$$

Or, $-g\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1+\ln 2}{1+2e} \geqslant \frac{3/2}{3e} = \frac{1}{2e}$ donc finalement $u_{n+1} = -g(u_n) \in [\frac{1}{2e}, \alpha]$.

b) On a vu que h est strictement croissante et s'annule en α donc

$$\frac{1}{2e} \leqslant x \leqslant \alpha \implies h\left(\frac{1}{2e}\right) \leqslant h(x) \leqslant h(\alpha) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\frac{1}{2e}, \alpha]$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{\ln 2 - \frac{1}{2e}}{(1+x)^2} < \ln 2 - \frac{1}{2e} < 1$.

Une application numérique donne $\dfrac{\ln 2 - \frac{1}{2e}}{(1+\frac{1}{2e})^2} < \dfrac{1}{e}$.

c) La fonction g est dérivable sur $[\frac{1}{2e}, \alpha]$ et $|g'| \leqslant \frac{1}{e}$ sur cet intervalle. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis entre u_n (qui est bien dans l'intervalle d'après la question 5a)) et α, ce qui donne

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| = |g(\alpha) - g(u_n)| \leqslant \frac{1}{e}|\alpha - u_n|.}$$

On montre alors par récurrence que $|u_n - \alpha| \leqslant e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \alpha| \leqslant 1 = e^{-0}$ car $u_0, \alpha \in [0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant e^{-n}$. Alors, l'inégalité précédente donne

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n - \alpha| \leqslant e^{-1} \cdot e^{-n} = e^{-(n+1)}.$$

D'où le résultat.

d) Puisque $\lim e^{-n} = 0$, on a $\boxed{\lim u_n = \alpha.}$

Pour trouver un n_0 qui convient, il *suffit* d'avoir $e^{-n_0} \leqslant 10^{-6}$ *i.e.* $n_0 \geqslant 6 \ln 10$. Comme $6 \ln 10 \leqslant 6 \times 2{,}31 = 13{,}86$, on peut prendre $\boxed{n_0 = 14.}$

6) f_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues. De plus, puisque $k > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} x^k \ln x = 0 = f_k(0)$ par croissance comparée donc f_k est continue en 0 et finalement $\boxed{f_k \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

7) Pour $x > 0$, $f_k'(x) = kx^{k-1} \ln x + x^{k-1}$. Si $k > 1$ alors $k-1 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_k'(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^{k-1} \ln x + 0 = 0$ par croissance comparée donc, puisque f_k est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, le théorème de la limite de la dérivée assure que $\boxed{f_k \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$

8) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \int_1^x f_k(t)dt$. La fonction F est une primitive de f_k sur $\mathbb{R}_+^*$. On va déterminer explicitement $F(x)$ en faisant une intégration par parties (ce qu'on n'aurait pas pu faire *a priori* si l'une des bornes de l'intégrale valait 0).

$$F(x) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{k+1}\cdot\frac{1}{t}dt = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}.$$

Ainsi, $\boxed{F_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \text{ définit bien une primitive de } f_k \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Par croissance comparée, cette fonction se prolonge par continuité en 0 en posant $F_k(0) = 0$. De plus

$$\frac{F_k(x)}{x} = \frac{x^k\ln x}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $k > 0$. Ainsi F_k est aussi dérivable en 0 et $F_k'(0) = 0 = f_k(0)$.
Finalement, $\boxed{F_k \text{ est une primitive de } f_k \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

9) D'après ce qui précède, $\boxed{I_k = \Big[F_k(t)\Big]_0^1 = \frac{-1}{(k+1)^2}.}$

10) Pour $t \in]0,1]$, en appliquant la formule pour une somme géométrique (de raison $-t \neq 1$).

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k f_k(t) = \ln t \sum_{k=1}^n (-t)^k = (\ln t)(-t)\frac{1-(-t)^n}{1+t} = -g(t) + (-t)^n g(t).$$

On constate que cette formule est encore valable pour $t = 0$.

11) En intégrant l'inégalité précédente, on obtient : $\sum_{k=1}^n (-1)^k I_k = -J + \int_0^1 (-t)^n g(t)dt$.
L'inégalité triangulaire donne alors

$$\left|J - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k\right| = \left|\int_0^1 (-t)^n g(t)dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n |g(t)|dt \leqslant \alpha\int_0^1 t^n dt$$

où dans la dernière inégalité, on utilise le fait que $|g(t)| \leqslant \alpha$ sur $[0,1]$ d'après la question 4.
Puisque $\alpha\int_0^1 t^n dt = \frac{\alpha}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\boxed{J = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}}$$

d'après la question 9.

12) a) On pose $u(x) = x - \sin x$ et $v(x) = \tan x - x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Les fonctions u et v sont dérivables, $u'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ et $v'(x) = \tan^2 x \geqslant 0$. Ainsi, u et v sont croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et puisque $u(0) = v(0) = 0$, elle sont positives. D'où $\boxed{\sin x \leqslant x \leqslant \tan x.}$
Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a donc $0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. On peut alors mettre au carré et passer à l'inverse, ce qui donne $\frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}$.

Or, $\dfrac{1}{\tan^2 x} = \cot^2 x$ et $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$. D'où le résultat.

b) Pour $k \in [\![1, m]\!]$, on a bien $0 < \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{m\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}$ donc on peut prendre $x = \frac{k\pi}{2m+1}$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne

$$\alpha_k \leqslant \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant 1 + \alpha_k.$$

En sommant ces inégalités sur $k \in [\![1, m]\!]$, on obtient

$$S_m \leqslant \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant m + S_m \iff \frac{\pi^2}{(2m+1)^2} S_m \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2m+1)^2}(m + S_m).$$

13) a) On rappelle la formule de De Moivre valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n.$$

Avec la formule du binôme, le membre de droite vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k$.

Comme $i^k = \begin{cases} \pm 1 & \text{pour } k \text{ pair,} \\ \pm i & \text{pour } k \text{ impair,} \end{cases}$ la partie imaginaire de ce nombre complexe est la somme des termes d'indices impairs. Pour $n = 2m+1$, les entiers impairs entre 0 et $2m+1$ sont ceux de la forme $k = 2j + 1$ avec $j \in [\![0, m]\!]$ et on a $i^k = (-1)^j i$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sin\Big((2m+1)x\Big) &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} (\cos x)^{2m+1-k} (i \sin x)^k\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (\cos x)^{2m-2j} (-1)^j (\sin x)^{2j+1}.
\end{aligned}$$

b) En factorisant l'expression précédente par $(\sin x)^{2m+1}$ (lorsque $\sin x \neq 0$), on trouve

$$\begin{aligned}
\sin\Big((2m+1)x\Big) &= (\sin x)^{2m+1} \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j (\cos x)^{2m-2j} (\sin x)^{2j-2m} \\
&= (\sin x)^{2m+1} \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j (\cot^2 x)^{m-j}.
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![1, m]\!]$ et $x = \frac{k\pi}{2m+1}$, on a bien $\sin x \neq 0$ donc l'égalité précédente est valable mais on a aussi $\sin\Big((2m+1)x\Big) = \sin(k\pi) = 0$. Ainsi, le membre de droite est nul, ce qui donne

$$\boxed{\sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j \alpha_k^{m-j} = 0.}$$

Les réels $(\alpha_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$ sont donc *des* racines du polynôme $P_m(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j+1} (-1)^j X^{m-j}$.

Or, ce polynôme est de degré m et les α_k sont tous distincts car cot est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Les réels $(\alpha_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$ sont donc *toutes* les racines du polynôme $P_m(X)$.

On a ainsi la factorisation suivante :

$$P_m(X) = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = a_m \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)$$

avec a_j le $j-$ième coefficient de P_m. En développant le produit (en partie), on retrouve la formule à connaître par cœur :

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = -\frac{a_{m-1}}{a_m} = -\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{3!(2m+1)} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

14) Le résultat précédent montre que lorsque $m \to +\infty$, on a $S_m \sim \frac{2}{3}m^2$ et en particulier $m = o(S_m)$. Ainsi, les membres de gauche et de droite de l'encadrement prouvé en 12 b) sont équivalents à

$$\frac{\pi^2}{(2m+1)^2} \cdot \frac{2m^2}{3} \sim \frac{2\pi^2}{4 \times 3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Les deux quantités tendent donc vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$ aussi d'après le théorème des gendarmes.

15) On a : $A_m - B_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1+(-1)^k}{k^2} = \sum_{j=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{2}{(2j)^2} = \frac{A_{\lfloor m/2 \rfloor}}{2}$
car, dans la première somme, les termes d'indices impairs s'annulent.

Or, $A_{\lfloor m/2 \rfloor} \to \dfrac{\pi^2}{6}$ en tant que suite extraite donc finalement

$$B_m = A_m - \frac{A_{\lfloor m/2 \rfloor}}{2} \to \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}.$$

D'après la question 11,

$$\boxed{J = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{(-1)^{k'-1}}{k'^2} = \lim_{n \to +\infty} B_{n+1} - 1 = \frac{\pi^2}{12} - 1.}$$