Vendredi 7 juin 2024

Devoir sur table n° 6

Correction

Durée : 4h. Calculatrice interdite.

- Mettre le numéro des questions.
- Justifiez vos réponses.
- **ENCADREZ** vos résultats.
- Utilisez des mots en français entre les assertions mathématiques.
- Numérotez les copies doubles.
- Bon courage !

Exercice 1. On travaille dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soient $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\mathcal{D}' = B + \mathrm{Vect}(\vec{v})$ deux droites de l'espace.

   a) À quelle condition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles (ou confondues) ?

   b) On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles (ou confondues).
   Montrer que les deux droites s'intersectent si et seulement si $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$.

On considère les points $A(0, 0, 1)$ et $B(1, 1, 2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) ; par Δ_2 la droite d'équations $y = z = 0$; par Δ_3 la droite d'équations : $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$.

2) Déterminer une représentation paramétrique de Δ_1.

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (M_1M_2).

4) À quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?

5) On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2), on veillera à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.

6) Soit une droite Δ' qui rencontre les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3. Montrer qu'elle est incluse dans la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $xz = y(y + 1)$.

Solution.

1) a) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (ou confondues) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *i.e.* $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.}$

b) On procède par double implication.

Sens direct : supposons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ s'intersectent en un point M de l'espace. Alors, le plan $\mathcal{P} = M + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ (qui est bien défini car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires par hypothèse) contient les deux droites donc, en particulier, les points A et B. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires et $\boxed{\text{leur produit mixte est donc nul.}}$

Sens réciproque : supposons que $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$ et considérons le plan $\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. L'hypothèse signifie que $B \in \mathcal{P}$ et donc finalement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites de $\mathcal{P}$. Puisqu'on les suppose aussi non-parallèles, $\boxed{\text{nécessairement elles s'intersectent.}}$

2) On a $A \in \Delta_1$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite. Ainsi, une représentation paramétrique est

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}}$$

3) On a $M_1(a, a, a+1)$ et $M_2(b, 0, 0)$ donc $\overrightarrow{M_2M_1}\begin{pmatrix}a-b\\a\\a+1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Ainsi,

$$\boxed{(M_1M_2) : \begin{cases} x = b + (a-b)t \\ y = at \\ z = (a+1)t \end{cases}}$$

4) On pourrait utiliser la question 1) mais le plus simple reste d'injecter les coordonnées d'un point quelconque de (M_1M_2) dans le système d'équations cartésiennes définissant Δ_3. Ainsi, les droites s'intersectent si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} b + (a-b)t & + & at & = & 0 \\ at & + & (a+1)t & = & -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b + (2a-b)t & = & 0 \\ (2a+1)t & = & -1 \end{cases}$$

La deuxième équation impose que $2a+1 \neq 0$ et $t = \frac{-1}{2a+1}$. On peut donc multiplier la première équation par $2a+1$, ce qui donne $(2a+1)b - (2a-b) = 0$ *i.e.* $ab = a - b$. Finalement,

$$\boxed{(M_1M_2) \text{ et } \Delta_3 \text{ s'intersectent} \iff \begin{cases} ab & = & a-b \\ a & \neq & -\frac{1}{2} \end{cases}}$$

5) Par hypothèse, $ab = a - b$ donc $a(1-b) = b$. En particulier, $b \neq 1$ car sinon on aurait $0 = 1$. Ainsi, $a = \dfrac{b}{1-b}$ et la représentation paramétrique de (M_1M_2) devient dans ce cas

$$\boxed{(M_1M_2)\colon \begin{cases} x = b + \dfrac{b^2 t}{1-b} \\ y = \dfrac{bt}{1-b} \\ z = \dfrac{t}{1-b} \end{cases}}$$

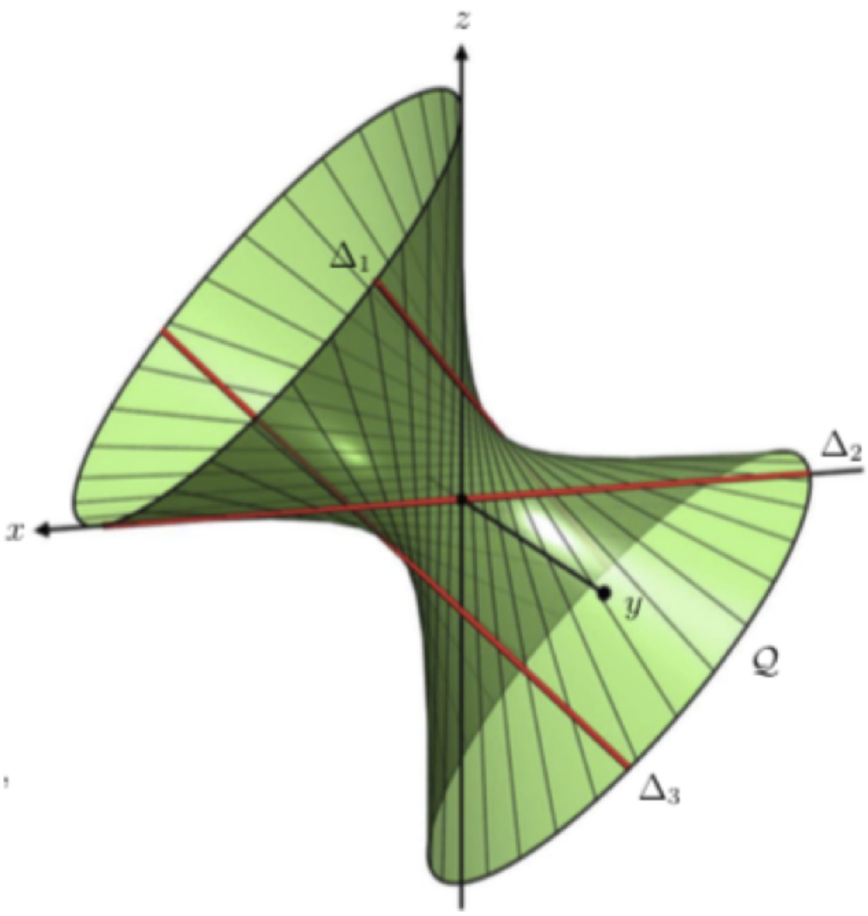
6) Δ' intersecte Δ_1 en M_1 et Δ_2 en M_2. Donc $\Delta' = (M_1M_2)$ et cette droite intersecte Δ_3. D'après ce qui précède, une paramétrisation de Δ' est donnée par le système précédent.
Soit $M(x,y,z) \in \Delta'$. Il existe donc des réels a, b, t tels que

$$\begin{cases} x = b + \dfrac{b^2 t}{1-b} \\ y = \dfrac{bt}{1-b} \\ z = \dfrac{t}{1-b} \end{cases}$$

On a alors

$$xz = \frac{bt}{1-b} + \left(\frac{bt}{1-b}\right)^2 = \frac{bt}{1-b}\left(1 + \frac{bt}{1-b}\right) = y(1+y).$$

D'où, $\boxed{M \in \mathscr{S}.}$



Exercice 2. Un tireur tire à l'arc sur n cibles distinctes. On suppose que pour chaque tir, il atteint sa cible avec la même probabilité p. On notera $q = 1 - p$ la probabilité de rater la cible.

1) On note X le nombre de cibles atteintes. Quelle est la loi de X ?

Le tireur retente sa chance sur les $n-X$ cibles qu'il a ratées la première fois. On note Y le nombre de cibles atteintes à la deuxième tentative et on pose $Z = X + Y$.

2) Déterminer $Z(\Omega)$ et calculer $P(Z = 0)$.

3) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Exprimer $P(Z = k)$ en fonction des $P(X = i)$ et $P_{X=i}(Z = k)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. On donnera le nom ainsi que les paramètres de la formule utilisée.

4) Pour $(i, m) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $P_{X=i}(Y = m)$. On distinguera deux cas. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$.

6) En déduire : $P(Z = k) = \binom{n}{k}p^k(1+q)^k(q^2)^{n-k}$. Reconnaitre alors la loi de Z.

7) Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'une cible soit atteinte à l'issue des deux tirs.

Finalement, le tireur retente sa chance sur toutes les cibles (y compris celles qu'il a déjà atteintes). Il fait donc deux essais par cible. Pour chaque cible touchée au premier essai, il gagne 5 euros et pour chaque cible touchée au second essai, il gagne X euros.

8) Calculer le gain moyen du tireur en fonction de n et p. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, déterminer la valeur de n à partir de laquelle ce gain moyen est supérieur ou égal à 36 euros.

Solution.

1) On répète n fois la même expérience de manière indépendante. La probabilité d'atteindre la cible (succès) est p et X compte le nombre de succès. Ainsi, $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, p).}$

2) On a $\boxed{Z(\Omega) = [\![0, n]\!]}$ et puisque $(Z = 0)$ correspond à l'événement où chaque cible a été ratée deux fois, on trouve par indépendance des tirs : $\boxed{P(Z = 0) = q^{2n}.}$

3) On applique la formule des probabilités totales à $(Z = k)$ relativement au système complet d'événements $(X = i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$:

$$\boxed{P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i)P_{X=i}(Z = k).}$$

4) Si $X=i$ alors Y vaut au maximum $n-i$. Ainsi, $\boxed{\text{lorsque } m+i>n,\ P_{X=i}(Y=m)=0.}$
Sinon, puisqu'on effectue $n-i$ tir indépendants avec pour chacun une probabilité p de succès, on a

$$\boxed{P_{X=i}(Y=m)=\binom{n-i}{m}p^m q^{n-i-m}.}$$

En particulier, si on prend $i=n$ et $m=1$, on a $P_{X=n}(Y=1)=0\neq P(Y=1)$ donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

5) $\displaystyle\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k!)}\frac{k!}{i!(k-i)!}=\binom{n}{k}\binom{k}{i}.$

6) Si $X=i$ alors $Z=k \Leftrightarrow Y=k-i$ et nécessairement $k-i\geqslant 0$ donc

$$\begin{aligned}
P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{n}P(X=i)P_{X=i}(Y=k-i) && \text{d'après Q.3}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}q^{n-k} && \text{d'après Q.4 avec } m=k-i\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}p^k q^{2n-k-i} && \text{d'après Q.5}\\
&=\binom{n}{k}p^k q^{2(n-k)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}1^i q^{k-i}\\
&=\binom{n}{k}p^k q^{2(n-k)}(1+q)^k && \text{par la formule du binôme}
\end{aligned}$$

Or, $p(1+q)=(1-q)(1+q)=1-q^2$. On reconnait alors que $\boxed{Z \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,1-q^2).}$

7) L'expérience peut-être décrite ainsi :
Pour chaque cible, le succès est "le tireur atteint la cible à l'issue des deux tirs".
L'échec est donc "le tireur rate deux fois la cible" et la probabilité d'échec est alors q^2.
Les tirs sont indépendants et Z compte le nombre de succès.
Ainsi, $\boxed{Z \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(n,1-q^2).}$

8) Notons Y' le nombre de cibles touchées lors du second essai et G le gain du tireur. D'après l'énoncé, $G=5X+XY'$. De plus $Y'\sim\mathcal{B}(n,p)$ est indépendante de X. Les propriétés de l'espérance donnent alors

$$\boxed{E(G)=5E(X)+E(X)E(Y')=np(np+5).}$$

On cherche maintenant à savoir quand cette valeur est supérieure ou égale à 36. On résout donc

$$x(x+5)\geqslant 36 \iff x^2+5x-36\geqslant 0.$$

On a $\Delta=169$ et les racines du trinômes sont -9 et 4. Ainsi, on doit avoir $np\geqslant 4$ *i.e.* $\boxed{n\geqslant 8}$ pour $p=\frac{1}{2}$.

Exercice 3.
Partie I : Un exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & -21 & 6 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A (c'est-à-dire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A).

1) Déterminer le rang de A ainsi que deux matrices colonnes $U, V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = UV^{\mathrm{T}}$.

2) Déterminer des bases de l'image et du noyau de f.

3) Déterminer, en justifiant, si f est éventuellement un projecteur ou une symétrie.

4) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? Justifier.

On pose, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = x - 7y + 2z$.

5) Montrer que φ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

6) Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \varphi(x, y, z)u$.

Partie II : Cas général

Soit M une matrice carrée à $n \in \mathbb{N}^*$ lignes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On suppose que M est de rang 1.

7) Montrer qu'il existe U et V des matrices colonnes telles que $M = UV^{\mathrm{T}}$.

8) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M^2 = \lambda M$. Dans quel cas g est-il un projecteur ?

9) Montrer qu'il existe une matrice inversible P et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

10) En déduire qu'il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^n$ et un vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $g(x) = \varphi(x)u$.

Solution.

1) On rappelle que le rang d'une matrice est égal à la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes. Or, ici les trois colonnes de A sont proportionnelles et non nulles donc $\boxed{A \text{ est de rang 1.}}$ En posant

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

on a $\boxed{A = UV^{\mathrm{T}}}$.

2) Une base de l'image de f est un vecteur dont les coordonnées sont une colonne de A non nulle (car A est de rang 1) : $\boxed{\big((2,1,3)\big) \text{ est une base de l'image de } f}$.

Les lignes de A étant elles aussi proportionnelles, on a immédiatement :

$$\operatorname{Ker}(f) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 7y + 2z = 0\Big\} = \operatorname{Vect}\Big((7,1,0), (-2,0,1)\Big)$$

et comme $(7,1,0)$ et $(-2,0,1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Ker}(f)$:
$\boxed{\big((7,1,0), (-2,0,1)\big) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f).}$

3) On a, en calculant, $A^2 = A$ donc $f \circ f = f$. Ainsi, $\boxed{f \text{ un projecteur.}}$

4) Puisque f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, d'après le cours on a $\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f).}$

5) φ est bien à valeur dans $\mathbb{R}$. Il reste à montrer qu'elle est linéaire.
Soit $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi\Big((x,y,z) + \lambda(x',y',z')\Big) &= \varphi\Big(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z'\Big) \\
&= x + \lambda x' - 7(y + \lambda y') + 2(z + \lambda z') \\
&= x - 7y + 2z + \lambda(x' - 7y' + 2z') \\
&= \varphi(x,y,z) + \lambda \varphi(x',y',z')
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}^3}$.

6) On pose $u = (2,1,3)$. On a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{f(x,y,z) = \Big(2(x - 7y + 2z), x - 7y + 2z, 3(x - 7y + 2z)\Big) = \varphi(x,y,z)u.}$$

7) Comme M est de rang 1, elle admet au moins une colonne non nulle et toutes les colonnes sont proportionnelles à celle-ci. En notant C_i une colonne non nulle dont les coefficients sont $u_1, \ldots, u_n$ et $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe v_j tel que $C_j = v_j C_i$ (on a notamment $v_i = 1$). Ainsi, en posant $U = C_i$ et V la colonne dont les coefficients sont $v_1, \ldots, v_n$, on a $\boxed{M = UV^{\mathrm{T}}.}$

8) On a $M^2 = UV^{\mathrm{T}}UV^{\mathrm{T}}$. Or, $V^{\mathrm{T}}U$ est une matrice de taille 1×1 donc elle s'identifie au scalaire

$$\lambda = V^T U = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

en notant toujours u_k et v_k les coefficients des colonnes. Ainsi,

$$\boxed{M^2 = U\lambda V^{\mathrm{T}} = \lambda UV^{\mathrm{T}} = \lambda M.}$$

De plus, g est un projecteur si et seulement si $M^2 = M$, c'est-à-dire, comme M n'est pas nulle, $\lambda = 1$.

9) Comme M est de rang 1, le noyau de g est, par le théorème du rang, de dimension $n-1$. On considère donc $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(g)$ qu'on complète (par le théorème de la base incomplète) par un vecteur $e_n \in \mathbb{R}^n$. On pose $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées de $g(e_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. Soient P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et M' la matrice de g dans $\mathscr{B}$. Par définition, comme $g(e_1) = \cdots = g(e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $g(e_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, on a

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Or, par propriété des changements de base, on a aussi $M = PM'P^{-1}$ donc finalement

$$\boxed{P^{-1}MP = M' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.}$$

10) Matriciellement, dans la base $\mathscr{B}$, pour tout vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$M'X = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_n \\ \alpha_2 x_n \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{pmatrix} = x_n U$$

où $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. En revenant à l'écriture vectorielle, on a donc pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\boxed{g(x) = \varphi(x) u}$$

où $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et $\varphi(x) = x_n$, la n-ième coordonnée de x dans $\mathscr{B}$ (on vérifie facilement que φ est linéaire).

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Étude de f.

   a) Déterminer un développement limité à l'ordre deux de f en zéro.

   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'équation de la tangente T_0 en zéro ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 au voisinage de zéro.

c) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

e) Dresser les variations de f, limites comprises.

f) Donner un équivalent simple de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2) Étude d'une fonction définie par une intégrale

a) On note $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$.
Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer le signe de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) Par un calcul de limite, vérifier que G' est bien continue en zéro.

e) Montrer que : $\forall t \geqslant 1, \quad e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis que : $\forall t \geqslant 1, \quad f(t) \geqslant \dfrac{1}{2t}$.

f) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

3) Étude d'une suite

a) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{\frac{-s}{n}}}{1+s} ds$.
Montrer que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, $u_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe puis que :

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+s} ds - u_n \leqslant \int_0^1 f(t)dt$$

d) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1) a) On démarre avec un DL à l'ordre 3 de exp :

$$\frac{1-e^{-x}}{x} \underset{0}{=} \frac{1-(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

b) f admet un DL à l'ordre 1 donc $\boxed{f \text{ est dérivable et } f'(0) = \dfrac{-1}{2}.}$
Les premiers termes du DL permettent aussi de déterminer la tangente en 0 et sa position relative. Ainsi,

$$\boxed{T_0\colon y = 1 - \frac{x}{2}}$$

et $f(x) - (1 - \frac{x}{2}) \underset{0}{=} \frac{x^2}{6} + o(x^2) \geqslant 0$ au voisinage de 0.
Donc $\boxed{\text{la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.}}$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\boxed{\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{xe^{-x} - (1 - e^{-x})}{x^2} = \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2}.}$$

d) On fait un DL de f' en 0 : $f'(x) \underset{0}{=} \dfrac{x(1 - x + o(x)) - 1 + 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \underset{0}{=} -\dfrac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2} = f'(0)}$ d'après la question a) et donc f' est continue en 0.
De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux donc finalement, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

e) On pose $\phi(x) = xe^{-x} - 1 + e^{-x}$ de sorte que f' est du signe de ϕ.
ϕ est dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x}$ et $\phi(0) = 0$.
On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ϕ'		$+$		$-$	
ϕ		$\nearrow$	0	$\searrow$	
ϕ		$-$	0	$-$	
f'		$-$	$-1/2$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Par limite directe : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f) $1 - e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
$1 - e^{-x} \underset{-\infty}{\sim} -e^{-x}$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{-e^{-x}}{x}$.

2) a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on note F une primitive de f. Alors, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après le théorème fondamental de l'analyse : $G(x) = F(x^2) - F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi $\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$ en tant que somme et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

b) D'après les variations de f, on trouve que $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
Reste à savoir si les bornes sont dans l'ordre croissant :
$x \leqslant x^2 \Leftrightarrow x(x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 0$.
Donc par passage à l'intégrale :

i. si $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 0$ alors $x \leqslant x^2$ et $G(x) \geqslant 0$;
ii. si $0 < x < 1$ alors $x \geqslant x^2$ et $G(x) \leqslant 0$.

c) $G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$.
Si $x \neq 0$: $G'(x) = 2x\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2} - \dfrac{1-e^{-x}}{x} = \dfrac{1+e^{-x}-2e^{-x^2}}{x}$.
Si $x = 0$: $G'(0) = 2 \times 0 f(0) - f(0) = -1$

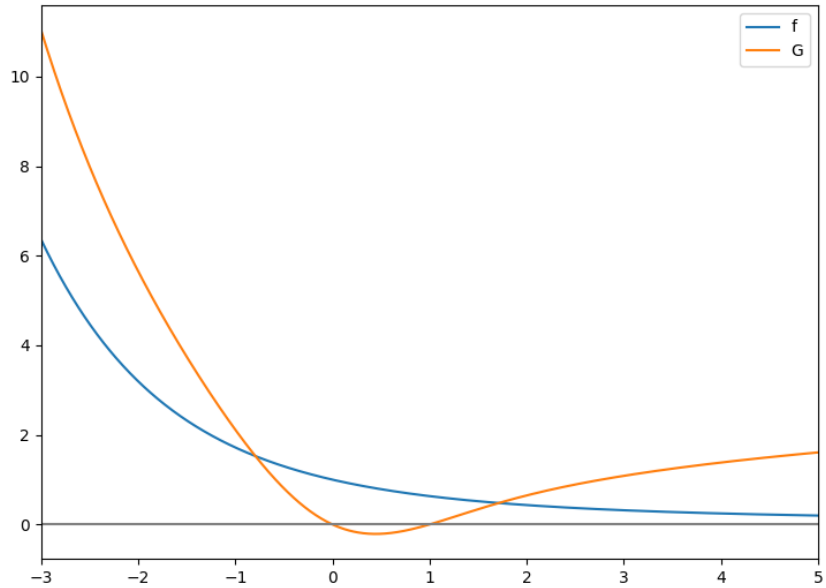
d) On fait un DL de $G'(x)$:
$G'(x) = \dfrac{1+e^{-x}-2e^{-x^2}}{x} = \dfrac{1+1-x+o(x)-2+2x^2+o(x^2)}{x} = -1+o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1 = G'(0)$.
On retrouve que G' est continue en zéro.

e) Si $t \geqslant 1$ alors $e^{-t} \leqslant e^{-1} = \dfrac{1}{e} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Si $t \geqslant 1$ alors $f(t) \geqslant \dfrac{1-1/2}{t} = \dfrac{1}{2t}$ car $t > 0$.

f) Pour $x \geqslant 1$, on a $x \leqslant x^2$ et pour tout $t \geqslant x \geqslant 1$: $f(t) \geqslant \dfrac{1}{2t}$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\int_x^{x^2} f(t)dt \geqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}[\ln t]_x^{x^2} = \frac{1}{2}(\ln(x^2) - \ln x) = \frac{1}{2}\ln x.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.}$



3) a) Sur $[0,n]$, $\dfrac{1}{1+s}$ ne s'annule pas. Donc $s \mapsto \dfrac{e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}$ y est continue et $\boxed{u_n \text{ est bien définie.}}$

b) Si $0 \leqslant s \leqslant n$ alors $e^{-1} \leqslant e^{\frac{-s}{n}} \leqslant 1$ et donc : $\dfrac{e^{-1}}{1+s} \leqslant \dfrac{e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}$ car $1+s \geqslant 0$.

Par croissance de l'intégrale $(0 \leqslant n)$: $\boxed{u_n \geqslant e^{-1}\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+s}ds = e^{-1}\ln(n+1).}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

c) f est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale existe.
$\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+s}ds - u_n = \int_0^n \frac{1-e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}ds.$
Sur $[0,n]$, $1-e^{\frac{-s}{n}} \geqslant 0$ et $1+s \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^n \frac{1-e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}ds \geqslant 0.$
Pour l'autre inégalité, on effectue le changement de variable suivant : $t = \dfrac{s}{n}$:

$$\int_0^n \frac{1-e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}ds = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}ndt.$$

Or, $\dfrac{n}{1+nt} \leqslant \dfrac{n}{nt} = \dfrac{1}{t}$ pour $t \geqslant 0$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^n \frac{1-e^{\frac{-s}{n}}}{1+s}ds \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt = \int_0^1 f(t)dt.$
Finalement, on a bien : $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+s}ds - u_n \leqslant \int_0^1 f(t)dt.$

d) $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+s}ds = \ln(n+1)$ donc l'encadrement précédent est équivalent à

$$\ln(n+1) - \int_0^1 f(t)dt \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1).$$

Quand n tend vers l'infini, les membres de gauche et de droite sont tous les deux équivalents à $\ln n$ donc u_n aussi par encadrement. D'où, $\boxed{u_n \sim \ln n.}$