Test n° 3 : correction

Exercice 1 (Probabilités)**.**

1. Énoncer les formules des probabilités totales et de Bayes associées à un système complet d'événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et pour un événement quelconque B.

2. On considère n urnes numérotées. L'urne k contient k boules rouges et $2k$ boules vertes. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard : elle est rouge. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne k (pour $k \in [\![1, n]\!]$) ? On commencera par définir les événements liés à cette expérience et on justifiera *soigneusement* son résultat.

Solution.

1. $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B) \quad$ et $\quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad P_B(A_k) = \dfrac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$

2. On définit les événements U_k : "on choisit l'urne k" et R : "la boule tirée est rouge".
D'après l'énoncé, on a

$$P(U_k) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad P_{U_k}(R) = \frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas total}} = \frac{k}{k+2k} = \frac{1}{3}.$$

De plus, $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un <u>système complet d'événements</u> donc d'après la formule de Bayes

$$P_R(U_k) = \frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{3}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{n}.$$

Exercice 2 (Géométrie)**.** Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On considère trois points A, B, C de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a, b, c non-nulles.

<u>Rappel</u> : dans un triangle ABC non-plat, les hauteurs sont concourantes. Leur intersection s'appelle l'orthocentre.

1. Montrer qu'aucune droite du plan ne coupe $\mathcal{C}$ en strictement plus de deux points. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C ?

2. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ puis placer les points A, B, C pour les valeurs $a = -1$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = 3$. Construire l'orthocentre du triangle ABC.

Dans la suite a, b et c sont de nouveau **quelconques**.

3. Déterminer les équations des droites suivantes :
   (a) la droite passant par A et orthogonale à (BC) ;
   (b) la droite passant par B et orthogonale à (AC).

4. Montrer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à $\mathcal{C}$.

Solution.

1. Une droite verticale d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ intersecte $\mathcal{C}$ en exactement un point si $\alpha \neq 0$ (c'est le point de coordonnées $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$) et zéro point si $\alpha = 0$. Considérons à présent une droite $\mathcal{D}$ non-verticale. Elle possède une équation cartésienne de la forme

$$\mathcal{D}\colon y = \alpha x + \beta$$

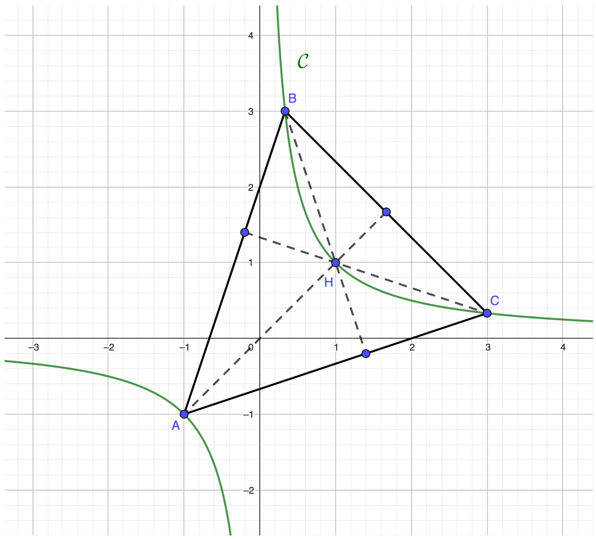
où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont donc les solutions du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = \alpha x + \beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} y = \dfrac{1}{x} \\ \alpha x^2 + \beta x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

La deuxième équation étant polynomiale de degré 2, elle admet au maximum deux solutions. D'où le résultat.

On en déduit que $\boxed{\text{les points } A, B, C \text{ de } \mathcal{C} \text{ ne sont pas alignés.}}$

2.



3. (a) Soit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $A(a, \frac{1}{a})$ de vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} c-b \\ \frac{1}{c}-\frac{1}{b} \end{pmatrix}$. On a

$$\mathcal{D}_1 \colon (c-b)(x-a) + (\tfrac{1}{c} - \tfrac{1}{b})(y - \tfrac{1}{a}) = 0 \iff bcx - y = abc - \tfrac{1}{a}$$

   (b) De même (on échange les rôles de a et b), $\mathcal{D}_2 \colon acx - y = abc - \frac{1}{b}$.

4. L'orthocentre $H(x, y)$ est à l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ donc ses coordonnées vérifient $y = bcx - abc + \frac{1}{a}$ et

$$acx - bcx + abc - \tfrac{1}{a} = abc - \tfrac{1}{b} \iff x = -\frac{1}{abc}.$$

On constate alors que $y = bcx - abc + \frac{1}{a} = -abc$ donc $\boxed{H \in \mathcal{C}.}$

Exercice 3 (Algèbre linéaire)**.**

Partie I : un cas particulier

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $\varphi(x, y, z) = x + y + z$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. L'application est-elle injective ?
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$. L'application est-elle surjective ?
4. Justifier que $V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Partie II : cas général
On se place désormais dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E quelconque et on considère une forme linéaire f sur E non-nulle. On fixe alors un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$.

6. Justifier que l'image de f est $\mathbb{K}$.

7. Montrer que $E = \text{Vect}(u) \oplus \text{Ker}(f)$.

Solution.

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
$$\varphi(u + \lambda v) = x + \lambda x' + y + \lambda y' + z + \lambda z' = x + y + z + \lambda(x' + y' + z') = \varphi(u) + \lambda\varphi(v)$$
donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Alors, $\varphi(x, y, z) = 0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases}$
donc $\boxed{\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).}$ La famille $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est ainsi génératrice de $\text{Ker}(\varphi)$ et puisqu'il s'agit de deux vecteurs non-colinéaires, c'est même $\boxed{\text{une base de Ker}(\varphi).}$ Le noyau n'étant pas réduit à $0_{\mathbb{R}^3}$, l'application $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda, 0, 0) = \lambda$ donc $\boxed{\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R} \text{ et } \varphi \text{ est surjective.}}$
Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème du rang pour remarquer que $\text{rang}(\varphi) = 3 - 2 = 1 = \dim \mathbb{R}$.

4.
   - $V \subset \mathbb{R}^3$ par définition.
   - $(0, 0, 0) \in V$.
   - Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $x = y = z$ et $x' = y' = z'$ donc
   $$x + \lambda x' = y + \lambda y' = z + \lambda z'.$$
   Ainsi, $(x, y, z) + \lambda(x', y', z') \in V$ et V est stable par combinaison linéaire.

5. On a $(x, y, z) \in V \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$
donc $V = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $\dim V + \dim \text{Ker}(\varphi) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
Montrons à présent que V et $\text{Ker}(\varphi)$ sont en somme directe. Soit $(x, y, z) \in V \cap \text{Ker}(\varphi)$. Alors $x = y = z$ et $0 = x + y + z = 3x$ donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Ainsi, $V \cap \text{Ker}(\varphi) = \{(0, 0, 0)\}$ et on a bien montré que les deux sous-espaces sont supplémentaires.

6. f est une forme linéaire. Cela signifie que f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et donc $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ (qui, on le rappelle, est un espace vectoriel de dimension 1). Ainsi, soit $\text{Im}(f) = \{0_E\}$ soit $\text{Im}(f) = \mathbb{K}$. Or, ici on suppose f non-nulle donc le premier cas est exclu. D'où le résultat.
Autre méthode : on pose $\alpha = f(u) \neq 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(\frac{\lambda}{\alpha}u) = \lambda$ donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$.

7. Soit $x \in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times \text{Ker}(f)$ tel que $x = \lambda u + v$.
Analyse : soit $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times \text{Ker}(f)$ tel que $x = \lambda u + v$. Par linéarité, $f(x) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda f(u)$ car $v \in \text{Ker}(f)$. Puisque $f(u)$ est un scalaire non-nul, on a $\lambda = \frac{f(x)}{f(u)}$ et donc $v = x - \frac{f(x)}{f(u)}u$.
Synthèse : posons $\lambda = \frac{f(x)}{f(u)}$ et $v = x - \frac{f(x)}{f(u)}u$. Alors on a bien
   - $\lambda \in \mathbb{K}$;
   - $f(v) = f(x) - \frac{f(x)}{f(u)}f(u) = 0$ *i.e.* $v \in \text{Ker}(f)$;
   - $\lambda u + v = x$.

   D'où $E = \text{Vect}(u) \oplus \text{Ker}(f)$.