Feuille d'exercices n° 23 : indépendance en probabilité

Exercice 1. On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X (on pourra commencer par calculer les probabilités $P(X \leqslant k)$).

Exercice 2. Dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire, on tire successivement avec remise deux boules.
On note A l'événement "on obtient au moins une boule blanche" et B "on obtient au moins une boule noire". Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et A, B deux évènements tels que $P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{3}$.

1. Donner un encadrement de $P(A \cup B)$ et de $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P(A \cup B)$ et $P(\overline{A} \cup B)$ dans les cas suivants :
   (a) A et B sont incompatibles.
   (b) A et B sont indépendants par rapport à la probabilité P.
   (c) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 4. On considère X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ et Y une variable aléatoire dont la loi conditionnellement à $[X = 1]$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$ et dont la loi conditionnellement à $[X = 0]$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de X conditionnellement à $Y = 0$.

Exercice 5. Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi du couple (X, Z).
3. En déduire la loi de Z.

Exercice 6. On lance deux fois un dé équilibré. On note X le résultat du premier lancer et Y celui du second.

1. Déterminer $P(X \leqslant k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $Z = \max(X, Y)$. Calculer $P(Z \leqslant k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la loi de Z.
4. Donner la loi de (Z, X).

Exercice 7.

1. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{n}{k}$. En déduire : $\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \binom{n}{2j}$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que :
$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![0, n]\!]^2 \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad p_{i,j} = P(X = i, Y = j) = a2^{i-2j} \binom{n}{i} \binom{n}{2j}$$
Déterminer a pour que $(p_{i,j})_{(i,j)}$ définisse bien une distribution de probabilités.

3. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Reconnaitre la loi de X.

4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soit X , Y , Z trois variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. On suppose que X , Y , Z suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \cdots n\}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \{2, 3, \cdots, n+1\}$: $\quad P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}$.

2. Montrer que pour tout $k \in \{n+2, n+3, \cdots, 2n\}$: $\quad P(X + Y = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$

3. En déduire que : $P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$.

Pour s'entrainer

Exercice 9. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$.

1. Pour quel(s) $x \in \mathbb{R}$ peut-on définir une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant $P(\{a, c\}) = 3x$ et $P(\{c\}) = 3x^2$?

2. Que vaut alors $P(\{a, b\})$?

Exercice 10. On dispose d'un damier carré de 4 lignes et 4 colonnes. On répartit au hasard 4 jetons indiscernables sur 4 cases différentes du damier.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. Aucun des jetons ne se situe sur une des diagonales ;

2. Trois jetons exactement sont sur une même diagonale ;

3. Chaque ligne et chaque colonne contient un jeton.

Exercice 11. Quatre urnes contiennent des boules :

- l'urne 1 contient 4 boules rouges, 1 boules blanche
- l'urne 2 contient 3 boules rouges, 2 boules blanches
- l'urne 3 contient 2 boules rouges, 3 boule blanches
- l'urne 4 contient 1 boule rouge, 4 boules blanches

On choisit au hasard une urne et de celle-ci l'on tire une boule au hasard. Si la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne 3 ?

Exercice 12. Un élève a le choix entre quatre chemins A, B, C, D pour aller au lycée. La probabilité pour qu'il choisisse A (resp. B, C) est $1/3$ (resp. $1/4, 1/12$). La probabilité d'arriver en retard en passant par A (resp. B, C) est $1/20$ (resp. $1/10, 1/5$). En passant par D, on n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité pour que l'élève choisisse D ?

2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité pour qu'il soit passé par C ?

Exercice 13. On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n.

- si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.

On note p_n la probabilité de lévènement A_n : "à l'instant n, l'appareil est en panne".

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.

2. Exprimer p_n en fonction de p_0.

3. Etudier la convergence de la suite (p_n).

Exercice 14. On considère un jeu de 32 cartes. Les cartes sont alors réparties en quatre couleurs, chaque couleur étant composée de huit hauteurs (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7).

1. (a) On tire successivement quatre cartes avec remise. Dénombrer :
   (b) Le nombre de tirages possibles.
   (c) Le nombre de possibilités d'avoir quatre As.
   (d) Le nombre de possibilités d'avoir exactement un coeur.
   (e) Le nombre de possibilités d'avoir au moins deux coeurs.
   (f) Le nombre de possibilités d'avoir exactement 1 coeur et exactement une dame.
   (g) Le nombre de possibilités d'avoir exactement 1 coeur ou exactement une dame.

2. Mêmes questions avec un tirage successif de 4 cartes sans remise.

3. Mêmes questions avec un tirage simultané de 4 cartes.

Exercice 15. On considère un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n. On appelle poignée de jetons tout sous- ensemble de l'ensemble des n jetons, y compris l'ensemble vide. Combien y a-t-il de poignées :

1. au total ?

2. contenant le jeton numéro 1 ?

3. contenant exactement 2 jetons ?

4. contenant au moins 2 jetons ?

5. contenant un nombre pair de jetons ?

Exercice 16. Une boîte contient deux boules : une noire et une rouge.
On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n l'évènement "on obtient des boules des deux couleurs au cours des n tirages" et B_n l'évènement "on obtient au plus une boule noire".

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.

2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?

3. Même question si $n = 3$.

Exercice 17. On compose un numéro de téléphone à 10 chiffres.

1. Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient distincts ?

2. Quelle est la probabilité qu'il commence par 01 ?

3. Quelle est la probabilité que ses chiffres forment une suite strictement croissante ?

Exercice 18. On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir " face " est $p \in]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants de la pièce décrite ci dessus. On note F_k l'évènement " on obtient face au k-ième lancer " et P_k l'évènement " on obtient pile au k-ième lancer ". On cherche à calculer la probabilité qu'au cours de ces n lancers " face " ne soit jamais suivi de " pile ". On note A_n cet évènement.

1. Exprimer A_n en fonction des évènements F_k et P_k , $k \in \{1, \cdots, n\}$.

2. En déduire $P(A_n)$. (Au cours du calcul on sera amené à distinguer le cas $p = \frac{1}{2}$ et $p \neq \frac{1}{2}$.

Exercice 19. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne nuléro k contient k boules vertes et k boules rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ?

Exercice 20. Un chocolatier vend n sortes de bonbons au chocolat ($n \geqslant 3$). Il offre gracieusement trois chocolats à l'un de ses clients en lui demandant de les choisir.

1. Quel est le nombre de choix où le client goûte trois sortes de bonbons différentes ?

2. Quel est le nombre de choix où il goûte seulement deux sortes différentes ?

3. En déduire le nombre total de choix possibles.

Exercice 21. Dans un magasin de CD, 5% des boîtes sont en mauvais état, 60% des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux, et 98% des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note A l'événement " la boîte achetée est abîmée", et D l'événement " le CD acheté est défectueux".

1. Calculer $P(D)$.

2. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 22. On considère des évènements A, B, C d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Ecrire à l'aide des opérations d'ensembles les évènements suivants :

1. Les évènements A et B sont réalisés mais pas C .

2. L'un au moins des évènements A, B, C est réalisé.

3. Un et un seul des évènements A, B, C est réalisé.

4. L'un au plus des évènements A, B, C est réalisé.