Feuille d'exercices n^o 8 : correction

Exercice 1. Pour chacun des nombres complexes a suivants, résoudre l'équation $z^3 = a$.

1. $a = e^{i\frac{5\pi}{12}}$
2. $a = -8i$
3. $a = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$

Solution. On rappelle que les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2 où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (et $\bar{j} = j^2$).

1. On résout : $z^3 = e^{i\frac{5\pi}{12}}$. On pose $b = e^{i\frac{5\pi}{36}}$. On obtient alors trois solutions : b, bj et $b\bar{j}$.
   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{e^{i\frac{5\pi}{36}}, e^{i\frac{29\pi}{36}}, e^{-i\frac{19\pi}{36}}\}.}$

2. On résout : $z^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$. On pose $b = 8^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. On obtient alors trois solutions : b, bj et $b\bar{j}$.
   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i\}.}$

3. On met a sous forme géométrique : $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $a = \dfrac{2e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.
   On résout : $z^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$. On pose $b = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\pi}{36}}$. On obtient alors trois solutions : b, bj et $b\bar{j}$.
   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2^{1/6}e^{-i\frac{\pi}{36}}, 2^{1/6}e^{i\frac{23\pi}{36}}, 2^{1/6}e^{-\frac{25\pi}{36}}\}.}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + 2z - 5i = 0$
2. $\frac{1}{2}z^2 + (1+i)z - i = 0$
3. $z^2 + (2+3i)z - 5 + 5i = 0$
4. $iz^2 + (8+2i)z - 8 - 3i = 0$. (indication : il y a une solution évidente)
5. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.
6. $z^2 - 2z\cos(a) + 1 = 0$.
7. $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$.
8. $\begin{cases} z_1z_2 = i \\ z_1 + z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$
9. $z^3 - 2(1+i)z + (2+4i)z - 4i = 0$, sachant qu'une des racines est imaginaire pure.

Solution. Pour trouver une racine carrée du discriminant, on notera "méthode 1" si Δ est sous forme géométrique et "méthode 2" si Δ est sous forme algébrique.

1. $\Delta = -16 < 0$. Une racine carré est : $\delta = 4i$. $\boxed{\mathcal{S} = \{2+i, -2+i\}}$

2. $\Delta = 4i = 4e^{i\pi/2}$. Par la méthode 1, une racine carré est : $\delta = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.
   $\boxed{\mathcal{S} = \{-1+\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-1), -1-\sqrt{2}-i(\sqrt{2}+1)\}}$

3. $\Delta = 15 - 8i$. Par la méthode 2, une racine carré est : $\delta = 4 - i$. $\boxed{\mathcal{S} = \{1-2i, -3-i\}}$

4. 1 est racine évidente. L'autre racine est : $\dfrac{-8-3i}{i}$. $\boxed{\mathcal{S} = \{1, -3+8i\}}$

5. On pose $Z = z^2$. On résout : $Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$.
$\Delta = 25(-3-4i)$. Par la méthode 2, on cherche une racine carré de $-3-4i$. On obtient une racine de Δ : $\delta = 5(1-2i)$. On obtient : $Z_1 = -2i$ ou $Z_2 = 5-12i$.
Reste à résoudre $z^2 = Z_1$ (méthode 1) puis $z^2 = Z_2$ (méthode 2)
$\boxed{\mathcal{S} = \{-1+i, 1-i, -3+2i, 3-2i\}}$

6. $\Delta = 4\cos^2 a - 4 = -4\sin^2 a$. Une racine carré est : $\delta = 2i\sin a$. $\boxed{\mathcal{S} = \{e^{ia}, e^{-ia}\}}$

7. On pose $Z = z^3$. On résout $Z^2 - (1-i)Z - i = 0$.
$\Delta = 2i = 2e^{i\pi/2}$. Par la méthode 1, une racine carré est : $\delta = 1+i$. Donc $Z_1 = 1$ ou $Z_2 = -i$.
Reste à résoudre les équations $z^3 = 1$ et $z^3 = -i = e^{-i\pi/2}$.
On trouve : $\boxed{\mathcal{S} = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}, e^{-i\pi/6}, e^{-i\pi/6+2i\pi/3}, e^{-i\pi/6+4i\pi/3}\}}$
ou encore $\boxed{\mathcal{S} = \left\{1, i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

8. Comme on connait la somme et le produit des racines, z_1 et z_2 sont solutions de l'équation : $Z^2 - \sqrt{3}Z + i = 0$.
$\Delta = 3-4i$. Par la méthode 2, une racine carrée est : $\delta = 2-i$. D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - i/2, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i/2\}}$

9. On cherche une racine de la forme : $z = ai$ avec $a \in \mathbb{R}$. On ré-injecte :
$-ia^3 + 2(1+i)a^2 + (2+4i)ia - 4i = 0$. Par identification partie réelle/imaginaire, c'est équivalent à : $2a^2 - 4a = 0$ et $-a^3 + 2a^2 + 2a - 4 = 0$. La première équation donne $a = 0$ ou $a = 2$. Puisque 0 n'est pas solution de la deuxième équation mais que 2 l'est, on obtient que $\boxed{z = 2i \text{ est une solution}}$.
On peut donc diviser $z^3 - 2(1+i)z + (2+4i)z - 4i$ par $z - 2i$. On trouve :
$z^3 - 2(1+i)z + (2+4i)z - 4i = (z-2i)(z^2 - 2z + 2)$. Reste à résoudre : $z^2 - 2z + 2 = 0$. On trouve : $1+i$ et $1-i$.
D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{2i, 1-i, 1+i\}}$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ en utilisant les racines $n$ièmes :

$$(E_1) \colon (z-2)^4 = (2z-1)^4 \qquad (E_2) \colon 27(z+i)^6 + (z-i)^6 = 0 \qquad (E_3) \colon (z+1)^n = (z-1)^n$$

Indication : Se ramener à une équation du type $Z^4 = 1$ que l'on sait résoudre.

Solution.

1. $z = \dfrac{1}{2}$ n'est pas solution. Donc on peut diviser : $(E_1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z-2}{2z-1}\right)^4 = 1$. On pose : $Z = \dfrac{z-2}{2z-1}$.
On résout : $Z^4 = 1$. On trouve : $Z = e^{2ik\pi/4}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$, donc $Z = 1, i, -1$ ou $-i$.
On revient à z : $Z = \dfrac{z-2}{2z-1} \Leftrightarrow z - 2 = Z(2z-1) \Leftrightarrow z = \dfrac{2-Z}{1-2Z}$ (car Z ne vaut jamais $\frac{1}{2}$).
On obtient 4 solutions : $\dfrac{2-1}{1-2}, \dfrac{2-i}{1-2i}, \dfrac{2+1}{1+2}, \dfrac{2+i}{1+2i}$ autrement dit : $-1, \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i, 1, \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$
$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i, 1, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right\}}$

2. $z = -i$ n'est pas solution. Donc on peut diviser : $(E_2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6 = -27$. On pose : $Z = \dfrac{z-i}{z+i}$.
On résout : $Z^6 = -27 = 27e^{\pi}$. On pose $b = 27^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}}$. On a donc $Z = be^{i\frac{2k\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}$ avec $k \in [\![0, 5]\!]$.

On revient à z : $Z = \dfrac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow (z+i)Z = z-i \Leftrightarrow z = i\dfrac{1+Z}{1-Z}$ (car Z ne vaut jamais 1)

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ i\frac{1+\sqrt{3}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}}{1-\sqrt{3}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}} \;\middle|\; k \in [\![0,5]\!] \right\}}$

3. $z=1$ n'est pas solution. Donc on peut diviser : $(E_3) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$. On pose : $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.
   On résout : $Z^n = 1 \Leftrightarrow Z = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   On revient à z : $Z = \dfrac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow z = \dfrac{Z+1}{Z-1}$. Attention, il faut retirer $Z=1$ qui est dans les valeurs de Z (pour $k=0$).
   $\boxed{z = \dfrac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} \text{ pour } k \in [\![1, n-1]\!].}$ On obtient $n-1$ solutions et en factorisant par l'arc moitié on obtient même $z = \dfrac{2\cos(k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)} = \dfrac{\cos(k\pi/n)}{i\sin(k\pi/n)} = -i\text{cotan}(k\pi/n)$.

Exercice 4. Soit $P(z) = z^4+z^3+z^2+z+1$, et $Q(z) = \dfrac{P(z)}{z^2} = z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$ (si $z \neq 0$).

1. On pose $u = z+\dfrac{1}{z}$. Calculer u^2 et utiliser ce résultat pour ramener l'équation $Q(z)=0$, à une équation du second degré en u.
2. Déterminer les racines de P.
3. Montrer, sans utiliser la question précédente, que : ($P(z)=0 \Longrightarrow z^5 = 1$).
4. Déduire de ces deux questions, en utilisant les racines cinquièmes de l'unité, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

Solution.

1. $u^2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2$.
   $Q(z) = z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} = u^2-2+u+1 = u^2+u-1$.

2. Comme $z=0$ n'est pas racine de P : $P(z)=0 \Leftrightarrow Q(z)=0 \Leftrightarrow u^2+u-1=0$
   On résout : $u^2+u-1=0 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $u_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
   On revient à z : $z+\dfrac{1}{z} = u \Leftrightarrow z^2-uz+1=0$
   $\Delta = u^2-4 = 1-u-4 = -u-3$. Dans les deux cas ($u_1$ et u_2), $-u-3<0$.
   Donc : $\boxed{z = \dfrac{u_j+i\sqrt{u_j+3}}{2} \text{ ou } z = \dfrac{u_j-i\sqrt{u_j+3}}{2} \text{ pour } j=0 \text{ ou } 1}$ (on obtient 4 solutions.)

3. Pour $z \neq 1$, $P(z) = \dfrac{1-z^5}{1-z} = 0 \Leftrightarrow z^5 = 1 \Leftrightarrow z = e^{2ik\pi/5}$ pour $k \in [\![1,4]\!]$ (il faut retirer $z=1$).

4. On obtient deux façons d'écrire les racines de P.
   $z = e^{i2\pi/5} = \cos 2\pi/5 + i\sin 2\pi/5$ est racine de P.
   Par identification, $\cos 2\pi/5$ est la partie réelle de $\dfrac{u_j \pm i\sqrt{u_j+3}}{2}$, donc $\cos 2\pi/5 = \dfrac{u_j}{2}$ pour un certain j. Comme $u_2<0$ et que $\cos 2\pi/5 > 0$, nécessairement : $\boxed{\cos\dfrac{2\pi}{5} = u_1/2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.
   De même, on obtient $\boxed{\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$.