Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 20 : dimension finie

Exercice 1. Déterminer la dimension des ensembles suivants :

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$
2. L'ensemble des solutions du système : $(S)\colon \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & + & t = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & - & 2t = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & - & t = & 0 \end{array}\right.$
3. L'ensemble des suites réelles qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel. Déterminer une base de E et $\dim E$.

Exercice 3. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices dont la somme des termes sur la diagonale est nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
2. On note désormais $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer la dimension et une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 4. Soient $u = (1,1,1), \quad v = (0,1,1), \quad w = (1,2,0), \quad z = (1,0,1)$.

1. La famille (u, v, w, z) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$.
2. En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soient $u = (1,1,1)$, $v = (1,1,-1)$, $w = (1,-1,1)$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $(1,0,0)$ dans cette base.

Exercice 6. Soient trois polynômes définis par : $P(X) = X^2 - 3X + 1$, $Q(X) = X^2 + 2X + 1$ et $R(X) = X^2 - X + 4$. Montrer que (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7. On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les espaces suivants :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad G = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} | x = y = z - t\right\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. On se place dans $\mathbb{R}^4$. On considère les familles suivantes :

$$u_1 = (1,1,0,0), \quad u_2 = (-1,1,1,1), \quad u_3 = (0,0,1,1), \quad u_4 = (1,-1,1,-1), \quad u_5 = (0,1,0,1)$$

$$v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (0,1,1,1)$$

1. Montrer que : $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \mathbb{R}^4$.
2. Montrer que (v_1, v_2) est une famille libre.
3. Compléter la famille (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ avec des éléments pris dans u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Exercice 9. On considère les deux espaces suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0\}, \qquad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + t = 0\}.$$

1. Montrer que ces deux ensembles sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de chacun d'eux.

2. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

3. Qui est $F + G$?

Exercice 10. Soit (a, b, c, d) la base canonique de $\mathbb{K}^4$.
On pose $E = \text{Vect}(a, b + c + d)$, $F = \text{Vect}(b, a + c + d)$, $G = \text{Vect}(c, a + b + d)$, et $H = \text{Vect}(d, a + b + c)$.
Donner la dimension de ces sous-espaces et déterminer $E \cap F \cap G \cap H$.

Exercice 11. Soient $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 1)$ et $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
Soient $v_1 = (0, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$. Déterminer les dimensions de E, de F, de $E+F$ et de $E \cap F$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$ dans $\mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0.$$

Si $a_0 \neq 0$ montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide des a_k et des A^k.

Exercice 13. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient : $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension m.

2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.

3. Soit $(f'_1, \ldots, f'_m)$ une base de F' et $(g'_1, \ldots, g'_m)$ une base de G'.
   On considère $H = \text{Vect}(f'_1 + g'_1, \ldots, f'_m + g'_m)$. Quelle est la dimension de H ?

4. Montrer que H est un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.

5. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 14. Donner le rang des familles suivantes.

1. (a, b, c, d) où $a = (1, 2, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 1, 1)$ et $d = (1, -1, 0)$.

2. (a, b, c, d) où $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (2, 3, 4, 1)$, $c = (3, 4, 1, 2)$ et $d = (4, 1, 2, 3)$.

3. (a, b, c) où $a = (0, -r, q)$, $b = (r, 0, -p)$ et $c = (-q, p, 0)$ avec $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 15. Soient $w_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $w_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $w_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$, $w_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$.

1. Déterminer le rang de (w_1, w_2, w_3, w_4).

2. Déterminer les réels α et β tels que $(2, 4, 6, \alpha, \beta) \in \text{Vect}(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Pour s'entrainer

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1);(2,1,3,-1);(4,5,3,1))$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$, et donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.

3. On note G l'ensemble des solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$
   Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.

4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6,10,8,2)$.

Exercice 17. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.

2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices dont la somme des termes sur la diagonale est nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.

3. On note désormais M l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Déterminer la dimension et une base de M.

5. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.

6. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.

7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans M dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.

Exercice 18.

1. Dans $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on définit une loi $+$ par $(x,y)+(x',y') = (xx', y+y')$ et une loi externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ par $\lambda(x,y) = (x^\lambda, \lambda y)$. Vérifier que $(E, +, \Delta)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $+$ usuelle et de la loi externe définie par $\lambda(x,y) = (\lambda x, 0)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 19. Donner la dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 20. Soient $u = (3,3,2,1)$, $v = (2,2,2,1)$ et $w = (1,1,1,1)$.
On pose $E = \mathrm{Vect}(u,v,w)$, $a = u - v$, $b = v - w$ et $c = w$.

1. Montrer que (a,b,c) est une famille libre.

2. En déduire la dimension de E puis que $A = (a,b,c)$ et $U = (u,v,w)$ sont des bases de E.

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 22. E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
3. $F + G = E$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice 23. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(A_1, B_1) = \mathrm{Vect}(A_2, B_2)$.