Correction OS – TD 1

Optique géométrique et lois de Descartes

II - Dioptre plan

Pour des angles tous orientés de la normale vers le rayon, si on note i_1 l'angle d'incidence défini positif, on a :

$$\boxed{i_1 = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} = \arctan\left(\frac{1,5}{1,0}\right) = 56°18'36''$$

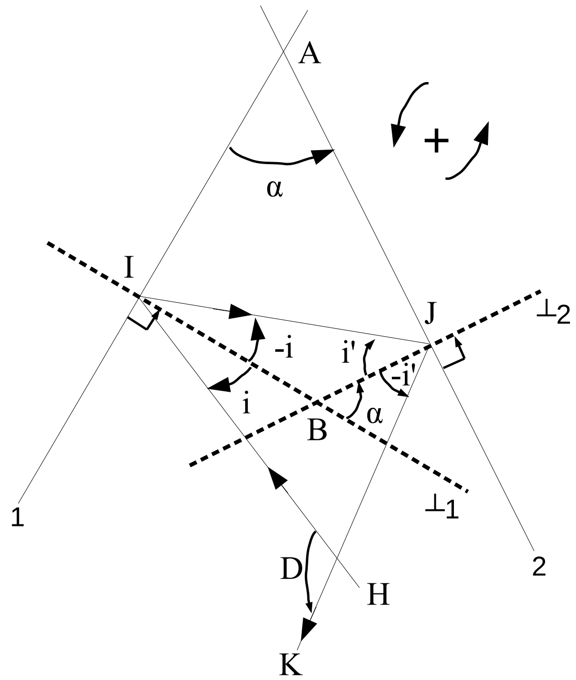
On en déduit, si on note i_2 l'angle de réfraction et r l'angle de réflexion :

$$\boxed{r = -i_1} = -56°18'36'' \text{ et } \boxed{i_2 = 90° - i_1} = 33°41'24''$$

III - Miroirs sécants

Pour faciliter le raisonnement, on fait un schéma et on se munit d'un sens de décompte positif des angles, par exemple le sens trigonométrique.

Les deux miroirs (1) et (2), sécants en A, forment un angle orienté α. Aux points d'incidence I et J, on obtient leurs normales orientées respectives en tournant de +90° et on les note $(\perp_1)$ et $(\perp_2)$. Les angles d'incidence des rayons en I et en J sont notés respectivement i et i'.



La déviation D est l'angle entre le premier rayon incident (HI) et le dernier rayon réfléchi (JK). On décompte simplement les angles de toutes les rotations permettant de ramener le premier rayon incident (HI) exactement dans l'orientation et le sens du dernier réfléchi (JK). Pour cela, on se ramène systématiquement aux normales puisque tous les angles utiles sont définis à partir de ces normales. Une première rotation d'angle $-i$ amène le rayon incident (HI) sur la normale $\perp_1$. Une deuxième rotation d'angle $-i$ amène le rayon dans la direction (JI). Etc. Finalement, on obtient :

$$\boxed{D = -i - i - i' - i' = -2(i + i')}$$

On remarque que l'angle orienté $\widehat{JBI}$ est égal à $(\pi - \alpha)$. En effet, l'angle orienté de la droite (1) vers la droite (2) est α. Or, l'angle orienté entre deux droites se retrouvent entre les perpendiculaires à ces deux droites, pourvu que les perpendiculaires aient été obtenues par des rotations d'angles identiques (en valeur absolue et en signe) [1], ce qui nous permet de conclure que $\widehat{\perp_1 BJ} = \alpha$ et donc $\widehat{JBI} = \pi - \alpha$.
La somme des angles orientés du triangle (BIJ) effectuée dans le sens trigonométrique est $\pi - \alpha - i - i'$. Le sens trigonométrique étant le sens de décompte positif choisi, cette somme est égale à $+\pi$ on a donc $\pi - \alpha - i - i' = \pi$ et $\boxed{\alpha = -(i + i')}$. Finalement :

$$\boxed{D = 2\alpha}$$

1. On dit que les rotations conservent les angles relatifs.

IV - Prisme – Questions préliminaires

1. $\boxed{A = r + r'}$, $\boxed{D = i + i' - (r + r')}$ et $\boxed{D = i + i' - A}$.
2. $\boxed{A = r - r'}$, $\boxed{D = i - i' - (r - r')}$ et $\boxed{D = i - i' - A}$.
3. $\boxed{A = -r + r'}$, $\boxed{D = -i + i' - (-r + r')}$ et $\boxed{D = -i + i' - A}$.
4. $\boxed{A = r + r'}$, $\boxed{D = i + i' - (r + r')}$ et $\boxed{D = i + i' - A}$.

V - Prisme – Étude optique

Principaux résultats.

-1. $\boxed{A = r + r'}$

0. $\boxed{D = (i + i') - (r + r')}$ et $\boxed{D = (i + i') - A}$

1. Le rayon émerge en K si $i' < \frac{\pi}{2}$. Or, en K : $n \sin(r') = \sin(i')$, donc $sin(r') = \frac{1}{n}\sin(i') < \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}$.

   Finalement, le rayon émerge en K si $\boxed{r' < \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$.

   Or $r = A - r'$, donc le rayon émerge en K si $r > A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Or, en I, on peut écrire $\sin(i) = n\sin(r)$, donc le rayon émerge en K si $\sin(i) = n\sin(r) > n\sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Finalement, <u>le rayon émerge en K si</u> :

$$\boxed{i > i_0 = \arcsin\left\{n\left[sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\right\}}$$

2. Quoi qu'il arrive, on a $0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$, ce qui, grâce à la loi de Descartes de la réfraction en I, mène à $0 \leq \sin(r) \leq \frac{1}{n}$ et donc à :

$$0 \leq r \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(condition générale)}$$

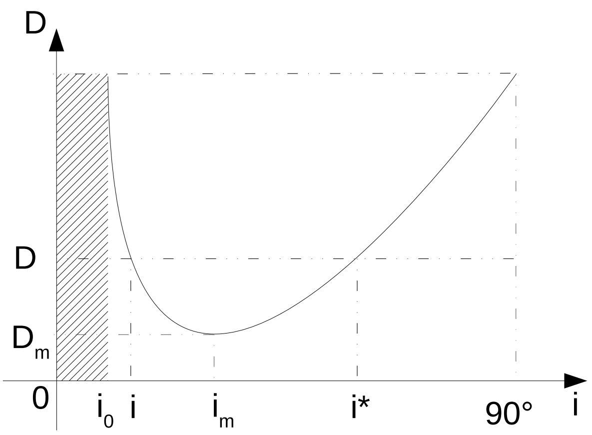
   D'autre part, on a montré à la question 3. que la condition d'émergence en K est

$$r' < \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(condition d'émergence)}$$

   Finalement, les deux conditions mènent à :

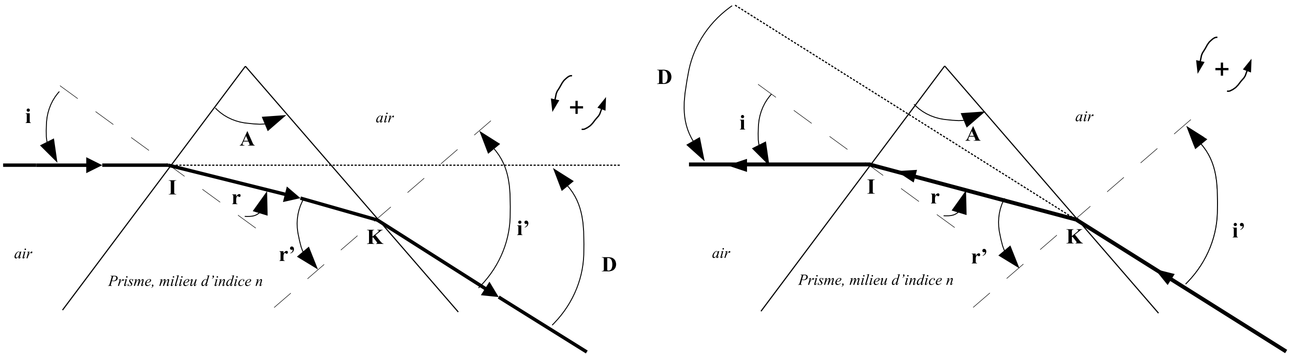
$$\boxed{A = r + r' < 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3. A.N. : $i_0 = 32{,}47° = 32°28'27''$.
4. L'expérience montre que la déviation passe par un minimum D_m pour un angle d'incidence i_m. La courbe a donc forcément l'allure suivante :



On constate qu'il y a *a priori* deux angles d'incidence, i et i^* qui donnent la même valeur de déviation. Et que la déviation minimale est atteinte quand $i = i^*$.

Or, le principe du retour inverse de la lumière indique que, si la lumière adopte un trajet donné pour un sens donné de la lumière, alors le trajet inverse est aussi un trajet possible pour la lumière si on inverse le sens de propagation. Ainsi, sur la figure ci-dessous, on constate qu'une même déviation D induite par l'angle d'incidente i peut également être obtenue si on inverse le sens de propagation de la lumière avec par conséquent comme angle d'incidence i' :



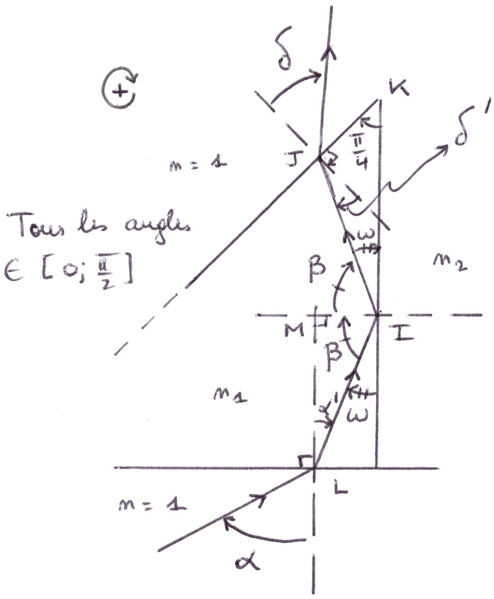
Il est donc évident que l'angle i^* de la première figure correspond à i' et donc que $D = D_m$ pour $i = i'$, CQFD.

5. En notant $i_m = i'_m$ la valeur de l'angle d'incidence permettant d'obtenir un minimum de déviation, on montre facilement grâce à la loi de Descartes appliquée en I et K qu'on a aussi $r_m = r'_m$ pour les angles de réfraction à l'intérieur du prisme. Compte tenu des réponses aux questions précédentes, on trouve $D_m = 2i_m - A$ et $A = 2r_m$ d'où, par application d'une loi de Descartes de la réfraction en I ou K :

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

VI - Trajet d'un rayon laser

On complète le schéma avec les angles utiles aux calculs. Sur le schéma, on est libre d'orienter les angles comme on le souhaite, arbitrairement. Une façon efficace de procéder est de définir tous les angles positifs (en les orientant et en indiquant le sens de décompte positif). On prépare un certain nombre de relations entre les angles définis sur le schéma, avec une justification minimale :



— Loi de la réflexion en I : $(\widehat{MIJ}) = (\widehat{LIM}) = \beta$;

— Le triangle (MIL) est rectangle en M donc : $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \beta$;

— La somme des angles du triangle (IJK) vaut π : $\pi = \frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} + \delta') + \omega$ d'où $\delta' = \beta - \frac{\pi}{4}$.

1. On a, en L : $n\sin(\alpha) = n_1\sin(\alpha')$, d'où $n\sin(\alpha) = n_1\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ et donc

$$\boxed{n\sin(\alpha) = n_1\cos(\beta)} \tag{1.1}$$

Pour qu'il y ait réflexion totale en I, il faut que $\beta > \beta_{lim}$ avec β_{lim} angle limite de réflexion totale, tel que $n_1 \sin(\beta_{lim}) = n_2 \sin(\frac{\pi}{2}) = n_2$ d'où

$$\boxed{\beta_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} \tag{1.2}$$

Compte tenu de (1.1), on a α_{lim} donné par :

$$n \sin(\alpha_{lim}) = n_1 \cos(\beta_{lim})$$

et donc $n \sin(\alpha_{lim}) = n_1 \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)$. On en déduit :

$$\boxed{\alpha_{lim} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)\right)} \tag{1.3}$$

Il y a réflexion totale en I si $\beta > \beta_{lim}$. La fonction sinus étant croissante sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et la fonction cosinus étant décroissante sur ce même intervalle, on déduit de la relation (1.1) que $\beta > \beta_{lim} \implies \alpha < \alpha_{lim}$. Il y a donc bien réflexion totale en I si $\alpha < \alpha_{lim}$.

2. Loi de Descartes en J : $n \sin(\delta) = n_1 \sin(\delta')$. Or $\delta' = \beta - \frac{\pi}{4}$, donc $n \sin(\delta) = n_1 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$. Finalement :

$$\boxed{\sin(\delta) = \frac{n_1}{n} \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

3. On a donc : $\sin(\delta) = \frac{n_1}{n}\left[\sin(\beta)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(\beta)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ or $\sin(\beta) = \sqrt{1-\cos^2(\beta)}$ donc $\sin(\delta) = \frac{n_1}{n}\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{1-\cos^2(\beta)} - \cos(\beta)\right]$

   Compte tenu de (1.1), on a de plus $\cos(\beta) = \frac{n\sin(\alpha)}{n_1}$ d'où :

$$\boxed{\sin(\delta) = \frac{n_1}{n}\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{n\sin(\alpha)}{n_1}\right)^2} - \frac{n\sin(\alpha)}{n_1}\right]}$$

4. En comptant les angles depuis le rayon émergeant en J vers le rayon incident, on a : $D = \alpha - \alpha' - \beta - \beta + \pi + \delta' - \delta$. Le « π » étant nécessaire pour retrouver un rayon orienté correctement. Ensuite, $D = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - 2\beta + \pi + \left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) - \delta$. Et finalement :

$$\boxed{D = \alpha - \delta + \frac{\pi}{4}}$$