NOM :

Test n° 2

Exercice 1 (Nombres complexes)**.** Mettre sous forme polaire et algébrique (dans l'ordre que l'on veut) les nombres complexes suivants

1. $z_1 = (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})^4$
2. $z_2 = \dfrac{(i+1)^5}{(i-1)^4}$

$z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}})\right)^4 = (2i)^4 \sin^4\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_2 = \dfrac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^5}{(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^4} = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i.$

Exercice 2 (Dérivation)**.** Dériver les fonctions suivantes en précisant le domaine de validité. On simplifiera au maximum son résultat.

1. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
2. $g(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$
3. $h(x) = \dfrac{\cos^2 x}{2 + \cos x}$

$D_{f'} = \mathbb{R}$, $D_{g'} =]-1, 1[$ et $D_{h'} = \mathbb{R}$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$; $\qquad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; $\qquad h'(x) = -\dfrac{\sin x \cos x(4 + \cos x)}{(2 + \cos x)^2}$.

Exercice 3 (Intégration)**.** Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^e x \ln x \; dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}} dt$ (poser $x = \sqrt{t+1}$)

$I_1 = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \dfrac{1}{2}$.

On intègre par parties : $I_2 = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$.

$$\begin{aligned}
I_4 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}}dt &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)^3}{x} 2x dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{2}} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)dx \\
&= 2\left(\frac{2^{7/2}}{7} - 3\frac{2^{5/2}}{5} + 3\frac{2^{3/2}}{3} - \sqrt{2}\right) - 2\left(\frac{1}{7} - 3\frac{1}{5} + 3\frac{1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}.
\end{aligned}$$