Test n° 3

Exercice 1 (Probabilités)**.**

1. Énoncer les formules des probabilités totales et de Bayes associées à un système complet d'événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et pour un événement quelconque B.

2. On considère n urnes numérotées. L'urne k contient k boules rouges et $2k$ boules vertes. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard : elle est rouge. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne k (pour $k \in [\![1, n]\!]$) ? On commencera par définir les événements liés à cette expérience et on justifiera *soigneusement* son résultat.

Exercice 2 (Géométrie)**.** Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On considère trois points A, B, C de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a, b, c non-nulles.

Rappel : dans un triangle ABC non-plat, les hauteurs sont concourantes. Leur intersection s'appelle l'orthocentre.

1. Montrer qu'aucune droite du plan ne coupe $\mathcal{C}$ en strictement plus de deux points. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C ?

2. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ puis placer les points A, B, C pour les valeurs $a = -1$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = 3$. Construire l'orthocentre du triangle ABC.

Dans la suite a, b et c sont de nouveau **quelconques**.

3. Déterminer les équations des droites suivantes :
   (a) la droite passant par A et orthogonale à (BC) ;
   (b) la droite passant par B et orthogonale à (AC).

4. Montrer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 3 (Algèbre linéaire)**.**

Partie I : un cas particulier

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $\varphi(x, y, z) = x + y + z$.

1. Montrer que φ est linéaire.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. L'application est-elle injective ?

3. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$. L'application est-elle surjective ?

4. Justifier que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Partie II : cas général

On se place désormais dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E quelconque et on considère une forme linéaire f sur E non-nulle. On fixe alors un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$.

6. Justifier que l'image de f est $\mathbb{K}$.

7. Montrer que $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.