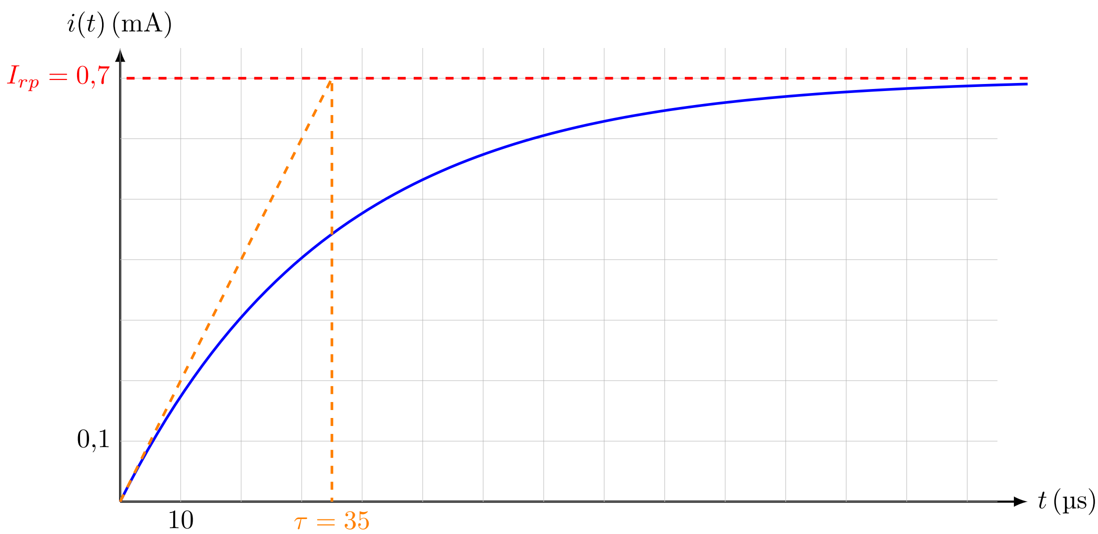
Correction OS – TD 5

Circuits linéaires du premier ordre

I - Circuit RL

1. en $t > 0$, l'interrupteur est fermé, la loi des mailles donne $E = u_R + u_i$. Or $u_R = Ri$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On obtient :
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$
2. Résolution de l'équation différentielle avec problème de Cauchy
   - On pose $\tau = \frac{L}{R}$. (τ est homogène à un temps).
   - La solution de l'équation homogène est $i_h(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$.
   - Le second membre étant constant, on peut chercher la solution particulière i_p sous la forme d'une constante, on a alors $\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}t} = 0$ ce qui donne $i_p = \frac{E}{R}$
   - La solution générale de l'équation est alors $i(t) = i_h + i_p = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$
   - le circuit étant, en $t = 0$, ouvert depuis très longtemps, on a $i(t = 0^-) = 0$. Le courant traversant une bobine étant continu, on a également $i(t = 0^+) = 0$
   - On peut appliquer cette condition initiale pour déterminer λ : $\lambda = -\frac{E}{R}$

   On trouve finalement :
$$\boxed{\forall t > 0,\ i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$
3. d'après la question précédente, on a $i_\infty = \lim_{t\to+\infty} i(t) = \frac{E}{R}$. Or, pour $t \gg \tau$, on peut considérer que le régime continu est atteint, la bobine se comporte alors comme un fil, l'équation du circuit se simplifie en $E = u_R$. Avec une simple application de la loi d'Ohm, on retrouve $I_{rp} = \frac{E}{R}$
4. On analyse le graphique pour en déduire les valeurs de R et L :



   - on lit $I_{rp} = 0{,}7\,\mathrm{m\,A}$. D'après la question précédente, on en déduit $R = \frac{E}{i_{rp}} = 1{,}4\,\mathrm{k\Omega}$;
   - on sait que la tangente à l'origine coupe l'asymptote correspondant au régime permanent en $t = \tau$. On lit alors sur le graphique $\tau = 35\,\mathrm{\mu s}$. Or $\tau = \frac{L}{R}$. On en déduit $L = \tau R = 50\,\mathrm{mH}$.

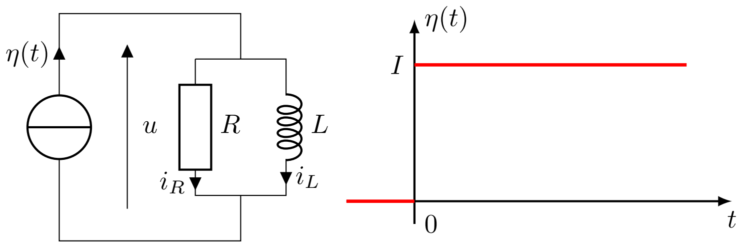
II - Réponse indicielle du circuit RC parallèle

1. $\boxed{E_{rp} = R\eta}$.
2. $\forall t > t_1$, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = \dfrac{R\eta}{\tau}}$ avec $\tau = RC$.
3. $\forall t > t_1$, $\boxed{u(t) = R\eta\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right)}$.
   $i_R(t) = \frac{u}{R} = \eta\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right)$ et $i_c = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \eta\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$.

III - Réponse d'un circuit RL parallèle à un échelon de courant

Méthode générale

— On complète le schéma avec toutes les notations *utiles.*



— η est le courant qui circule dans la branche principale, pas la peine d'introduire une autre notation.

— Une seule tension est utile puisque le circuit est entièrement parallèle, donc tous les dipôles ont la même tension à leurs bornes.

— Idéalement chaque schéma et chaque relation mathématique sont accompagnés d'un quantificateur temporel ou d'une indication du domaine de validité.

— On prépare le raisonnement de façon organisée, en commençant par les relations générales qui sont vraies tout le temps. On avance ensuite dans en restreignant le domaine temporel de validité de plus en plus (tout le temps, puis pour les temps positifs, puis pour un temps suffisamment long pour que le transitoire soit éteint, puis éventuellement pour un temps infini).

Relation vraie tout le temps :

$$\forall t,\ \eta(t) = i_R(t) + i_L(t)$$

Relations vraies pour les temps positifs :

$$\forall t > 0,\ \begin{cases} \eta(t) &=& I \text{ et donc } \forall t > 0,\ I = i_R(t) + i_L(t) \\ u(t) &=& R\, i_R(t) \\ u(t) &=& L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Relations vraies au bout d'un temps suffisamment long pour qu'on puisse considérer que le régime transitoire est approximativement terminé et que <u>le régime permanent est atteint</u> :

$$\forall t \gg \tau,\ \begin{cases} u(t) &\approx& u_{SP}(t) \\ i_R(t) &\approx& i_{R,SP}(t) \\ i_L(t) &\approx& i_{L,SP}(t) \end{cases}$$

D'autre part, pour les temps positifs, <u>la consigne imposée au circuit est stationnaire donc le régime permanent sera lui aussi stationnaire</u>. On a donc :

$$\forall t \gg \tau,\ \begin{cases} u(t) &\approx& u_{SP}(t) = Cste \\ i_R(t) &\approx& i_{R,SP}(t) = Cste \\ i_L(t) &\approx& i_{L,SP}(t) = Cste \end{cases}$$

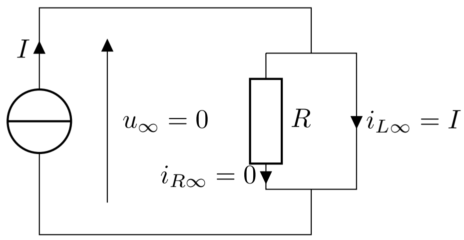
Une fois que tout est posé. On attaque la rédaction de la réponse en n'écrivant que ce qui est utile.

1. Pour les temps positifs, la consigne imposée au circuit est stationnaire. Donc le régime permanent, qui sera atteint au bout d'un temps suffisamment long, sera lui aussi stationnaire. On aura donc $\forall t \gg \tau$, $i_L(t) \approx i_{L,SP}(t) = Cste$. Or $\forall t > 0$, $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ donc $\forall t \gg \tau$, $u(t) \approx 0$. Or $\forall t > 0$, $u(t) = R\, i_R(t)$ donc $\forall t \gg \tau$, $i_R(t) \approx 0$. Or $\forall t > 0$, $i_L(t) = I - i_R(t)$ donc

$$\boxed{\forall t \gg \tau,\ i_L(t) \approx I \quad \text{CQFD}}$$

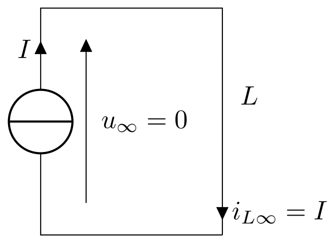
Ceci suffit également pour conclure que $i_{L\infty} = \lim\limits_{t \to +\infty} i_L(t) = I$.

Remarques : au bout d'un temps très long, $u(t) \approx 0$ à cause de la bobine. On peut donc dire que, au bout d'un temps très long, la bobine se comporte comme un fil. Ce qui mène au schéma équivalent limite suivant, pour $t \to +\infty$:



Circuit électrocinétique équivalent pour $t \to +\infty$.

Compte tenu de l'étude faite précédemment, toute l'intensité passe par la bobine et rien ne traverse le résistor : on dit que le résistor est *court-circuité. La tension à ses bornes est nulle ET l'intensité qui le traverse est nulle* : tout se passe comme s'il n'était plus là. Concrètement, on peut le retirer du circuit sans que cela ne change quoi que ce soit. On aurait alors :



Une façon de démontrer que le résistor peut-être retiré du schéma est de réfléchir en termes de résistance équivalente. En électrocinétique, un fil est un dipôle de résistance nulle : $R_{fil} = 0$. Si on cherche la résistance équivalente au fil et à la résistance R, qui sont en parallèles, on a

$$R_{eq} = (R||R_{fil}) = \frac{R\,R_{fil}}{R + R_{fil}} = \frac{R \times 0}{R + 0} = 0 = R_{fil}$$

Un résistor en parallèle avec un fil est équivalent à un fil. Tout se passe comme si le résistor n'était plus là. C'est logique : le courant de la branche principale, se sépare en deux courants dans les branches secondaires. L'intensité dans chacune des branches est inversement proportionnelle à leurs résistances (puisque les résistances ont tendance à empêcher les intensités de circuler). Si une branche a une résistance nulle, aucun courant ne passe dans l'autre branche, qui ne sert donc plus à rien.

2. On établit une loi des nœuds. On trouve facilement

$$\boxed{\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}}$$

3. Détermination de l'expression de $i_L(t)$.
   — Le second membre de l'équation différentielle à résoudre pour trouver i_L étant stationnaire, on cherche une solution particulière stationnaire : $i_{L,SP}(t) = K = Cste$. On réinjecte cette solution particulière dans l'équation différentielle :

   $$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{\tau} = \frac{I}{\tau}$$

   On en déduit que $K = I$ puisque $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = 0$.
   La solution homogène a la forme suivante :

   $$\forall t > 0,\ i_{L,SH}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

   La solution générale a donc pour expression :

   $$\forall t > 0,\ i_L(t) = i_{L,SP}(t) + i_{L,SH}(t) = I + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour déterminer A, il faut connaître la condition initiale dans le domaine de définition de $i_L(t)$, c'est-à-dire en $t = 0^+$. On sait que $i_L(t = 0^-) = 0$ (énoncé). Or l'intensité du courant circulant à travers une bobine est continue temporellement, donc on a : $i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-)$. Finalement, $i_L(t = 0^+) = 0$. On applique cette condition initiale à la solution générale :$i_L(t = 0^+) = I + A$ d'où $A = -I$

On conclut :

$$\boxed{\forall t \geq 0,\, i_L(t) = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Remarques :

— on a prolongé i_L par continuité en $t = 0$, on prend donc soin d'écrire $t \geq 0$ et non pas uniquement $t > 0$;

— à ce stade de l'exercice, il peut être utile de s'assurer de l'homogénéité de la relation et de vérifier que l'expression trouvée est cohérente avec les conditions initiales et avec la limite pour $t \to +\infty$ trouvée au 1.

— Discussions sur les continuités de η, i_R et u en $t = 0$. On a :

$$\forall t,\, \eta(t) = i_R(t) + i_L(t)$$

or il évident que $\underline{\eta \text{ est discontinue en } t = 0}$ (échelon) et on a montré que $\underline{i_L \text{ est continue en } t = 0}$. Il est donc certain que $\underline{i_R \text{ est discontinue en } t = 0}$. D'autre part, $u(t) = Ri_R(t)$, donc $\underline{u \text{ est discontinue en } t = 0}$.

— On a

$$\forall t > 0,\, u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

d'où

$$\boxed{\forall t > 0,\, u(t) = RIe^{-\frac{t}{\tau}}}$$

— On a

$$\forall t > 0,\, i_R(t) = I - i_L(t)$$

d'où

$$\boxed{\forall t > 0,\, i_R(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Remarques :

— on aurait aussi pu trouver $i_R(t)$ grâce à la loi d'Ohm : $i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$;

— on fait bien attention à écrire $t > 0$ et non pas $t \geq 0$ pour u et i_R car ces grandeurs ne sont pas continues en $t = 0$;

— on pourrait montrer que $u(t = 0^-) = 0$ alors que $u(t = 0^+) = RI$ et aussi $i_R(t = 0^-) = 0$ alors que $i_R(t = 0^+) = I$: il faut un certain temps pour que le courant s'établisse dans la bobine, mais le courant dans le résistor, lui, s'établit instantanément (si on accepte possible le modèle d'une source de courant délivrant un échelon).

4. On choisit de représenter les grandeurs réduites $\frac{i_L}{I}$, $\frac{i_R}{I}$ et $\frac{u}{RI}$. Avantages :

— Elles sont sans dimension, donc on peut les porter toutes les trois sur le même axe des ordonnées, ce qui n'aurait pas été possible avec des intensités et une tension.

— Elles sont toutes les trois comprises entre 0 et 1, ce qui simplifie les choix d'échelles.

— On remarque que $\frac{i_R}{I} = \frac{u}{RI}$: deux courbes suffisent donc pour représenter le trois grandeurs.

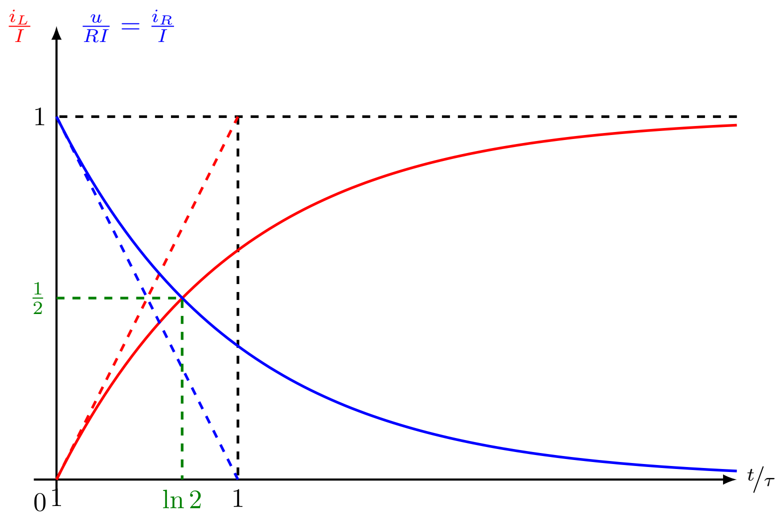
Pour compléter, on choisit aussi une abscisse réduite $\frac{t}{\tau}$

Points importants du graphique :

— Les courbes de $\frac{i_L}{I}$ et $\frac{i_R}{I}$ se croisent pour $i_L(t^*) = i_R(t^*)$. Or on a $\forall t > 0$, $I = i_R(t) + i_L(t)$. Donc on a $i_L(t^*) = i_R(t^*) = \frac{I}{2}$, ce qui permet d'écrire $\frac{I}{2} = I\, e^{-\frac{t^*}{\tau}}$ et d'en déduire que $\frac{t^*}{\tau} = \ln(2)$.

— Les tangentes à l'origine coupent les valeurs asymptotiques en $t = \tau$ donc en $\frac{t}{\tau} = 1$.

— $\lim\limits_{t\to+\infty} i_L(t) = I$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{i_L(t)}{I} = 1$.



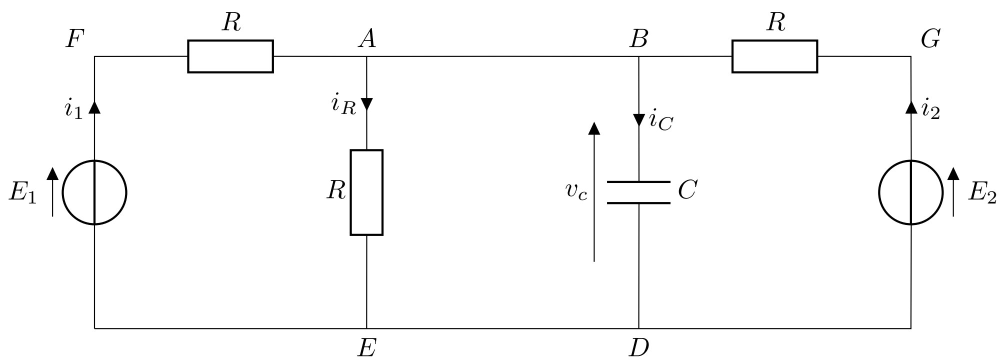
Remarques :

— Il est souvent plus facile de tracer ces courbes en *commençant* par les tangentes à l'origine.

— La détermination de t^* est tout à fait analogue à celle du temps de demi-réaction en chimie à l'ordre 1.

IV - Régime transitoire d'un circuit composé

1. Circuit pour $t > t_1$:



On analyse le circuit :

— les points A et B sont un unique nœud ;

— les points D et E sont un unique nœud ;

— les dipôles entre A et E et entre B et D sont en parallèle.

Conséquences :

— loi des nœuds : $i_1 + i_2 = i_R + i_C$ (1) ;

— $v_A - v_E = v_B - v_D = V_c$ (2) ;

— loi d'Ohm : $i_R = \frac{v_A - v_E}{R} = \frac{V_c}{R}$ (3) ;

On établit deux relations supplémentaires :

— loi de la maille BGD : $E_2 = Ri_2 + V_c$ (4) ;

— loi de la maille AEF : $E_1 = Ri_1 + V_c$ (5).

(4) + (5) donne : $E_1 + E_2 = R(i_1 + i_2) + 2V_c$. Compte tenu de (1) et (3), on trouve $E_1 + E_2 = Ri_c + 3V_c$.
Or, $i_c = C\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t}$, donc finalement :

$$\forall t > t_1,\ E_1 + E_2 = RC\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + 3V_c(t)$$

qu'on normalise en :

$$\forall t > t_1,\ \frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + \frac{V_c(t)}{\frac{RC}{3}} = \frac{E_1 + E_2}{RC}$$

ce qui permet d'identifier $\tau = \frac{RC}{3}$ et finalement :

$$\boxed{\forall t > t_1,\ \frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + \frac{V_c(t)}{\tau} = \frac{E_1 + E_2}{3\tau}}$$

Solution générale :

$$\forall t > t_1,\ V_c(t) = \frac{E_1 + E_2}{3} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour déterminer la constante A, il faut former le problème Cauchy en trouvant la condition initiale. Pour $t < t_1$, l'interrupteur est ouvert, et le circuit utile est donc un simple circuit RC série dont la consigne en tension est E_2. En $t = t_1^-$, le condensateur étant en charge depuis très longtemps, le condensateur est complètement chargé et sa tension vaut E_2 : $V_c(t_1^-) = E_2$. La tension aux bornes d'un condensateur étant continue temporellement, on peut prolonger en t_1^+ : $V_c(t_1^+) = V_c(t_1^-) = E_2$. On applique cette condition initiale à la solution exprimée précédemment :

$$\text{en } t = t_1,\ E_2 = \frac{E_1 + E_2}{3} + Ae^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

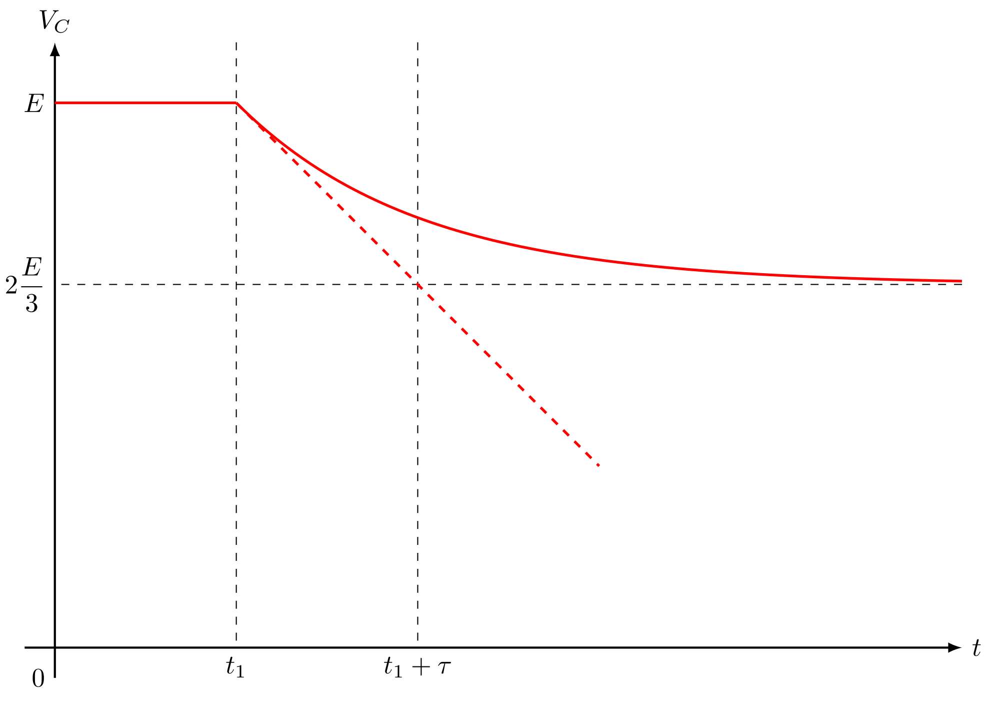
d'où

$$A = \left(E_2 - \frac{E_1 + E_2}{3}\right)e^{\frac{t_1}{\tau}} = \frac{2E_2 - E_1}{3}e^{\frac{t_1}{\tau}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall t \geq t_1, V_c(t) = \frac{E_1 + E_2}{3} + \frac{2E_2 - E_1}{3}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$$

2. On représente le chronogramme de V_c, dans le cas simple $E_1 = E_2 = E > 0$. Je vous encourage à tenter des chronogrammes dans d'autres cas (par exemples : $E_1 = 2E_2 > 0$ ou $E_1 = E_2 = E < 0$).



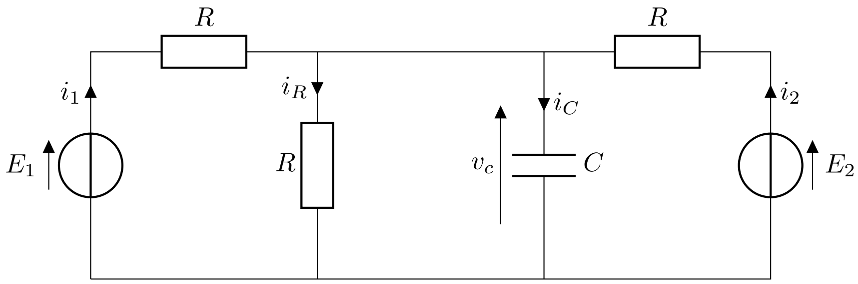
Chronogramme $V_C(t)$ – cas particulier $E_1 = E_2 = E > 0$

Annexe – correction de l'exercice IV par le principe de superposition

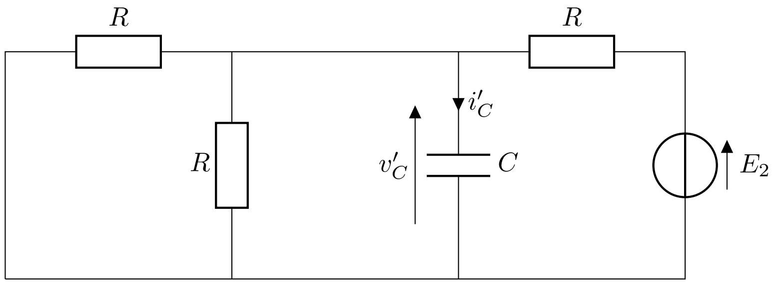
Hors programme pour illustrer le principe de superposition. À consulter si tout le reste est parfaitement maîtrisé.

Principe de superposition :

> Dans un circuit linéaire, toute grandeur physique est la superposition (la somme) des différents résultats trouvés pour cette grandeur en étudiant successivement les différents circuits simplifiés où toutes les sources sauf une sont éteintes.



1. On éteint la source de gauche. On obtient le circuit suivant, $\forall t > t_1$:



On note avec des primes (') les résultats associés à ce premier circuit simplifié où toutes les sources sont éteintes sauf une. En remarquant que les deux résistances à gauche sont en parallèle, puis établissant à une loi des nœuds et une loi des mailles, on obtient :

$$\text{Pour la source de gauche éteinte :} \quad \forall t > t_1, \quad \frac{RC}{3}\frac{\mathrm{d}V'_c}{\mathrm{d}t} + V'_c(t) = \frac{E_2}{3}$$

qu'on normalise en :

$$\text{Pour la source de gauche éteinte :} \quad \forall t > t_1, \quad \frac{\mathrm{d}V'_c}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{RC}V'_c(t) = \frac{E_2}{RC}$$

on identifie τ, temps de relaxation du circuit, grâce au premier membre de la forme suivante :

$$\text{Pour la source de gauche éteinte :} \quad \forall t > t_1, \quad \frac{\mathrm{d}V'_c}{\mathrm{d}t} + \frac{V'_c(t)}{\tau} = \frac{E_2}{RC}$$

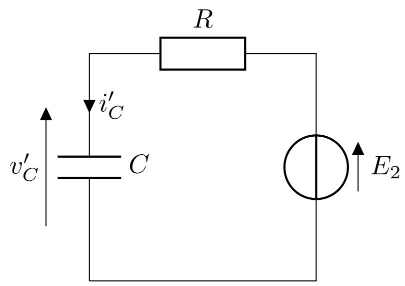
et donc

$$\boxed{\tau = \frac{RC}{3}}$$

On intègre cette équation différentielle, et on trouve :

$$\text{Pour la source de gauche éteinte :} \quad \forall t > t_1, V'_c(t) = \frac{E_2}{3} + A'e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour déterminer A', il faut former le problème de Cauchy et déterminer la condition initiale $V'_c(t_1^+)$. L'énoncé indique que pour $t < t_1$, K est ouvert. On a donc, pour la source de gauche éteinte et $\forall t < t_1$, le circuit suivant :



Le condensateur étant chargé depuis un temps très long par un générateur de tension stationnaire, un régime permanent et stationnaire est atteint pour $t \to t_1$. En $t = t_1^-$, toutes les grandeurs sont stationnaires, notamment V'_c, donc $i'_c(t_1^-) = C\frac{\mathrm{d}V'_c}{\mathrm{d}t} \approx 0$ et on en conclut, grâce à une loi des mailles, que $V'_c(t_1^-) = E_2$. V'_c étant la tension aux bornes d'un condensateur, elle est continue temporellement, et on en déduit : $V'_c(t = t_1^+) = V'_c(t = t_1^-) = E_2$. On reporte cette condition initiale dans l'expression de V'_c pour $t > t_1$:

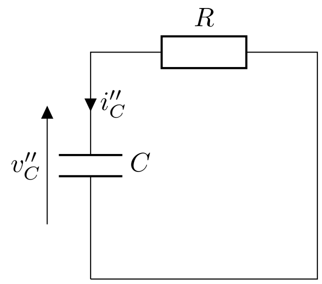
Pour la source de gauche éteinte : $E_2 = \dfrac{E_2}{3} + A'e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ d'où $A' = \dfrac{2E_2}{3}e^{+\frac{t_1}{\tau}}$ et finalement

$$\boxed{\text{Pour la source de gauche éteinte :} \quad \forall t \geq t_1, V'_c(t) = \frac{E_2}{3} + \frac{2E_2}{3}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$$

Si on rallume la source de gauche et qu'on éteint la source de droite, on trouve une situation parfaitement identique à la précédente avec une source E_1. On en déduit, par analogie, en notant avec des secondes (") les résultats associés à ce deuxième circuit simplifié :

$$\boxed{\text{Pour la source de droite éteinte :} \quad \forall t > t_1, V''_c(t) = \frac{E_1}{3} + A''e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Pour déterminer A'', il faut former le problème de Cauchy et déterminer la condition initiale $V''_c(t_1^+)$. L'énoncé indique que pour $t < t_1$, K est ouvert. On a donc, pour la source de droite éteinte et $\forall t < t_1$, le circuit suivant :



Le condensateur est donc en régime libre depuis un temps très long. Pour $t \to t_1^-$, il atteint un régime permanent nul, dans lequel $V''_c \approx 0$. On a donc $V''_c(t_1^-) = 0$ et par continuité $V''_c(t_1^+) = 0$. On en déduit :

Pour la source de droite éteinte : $0 = \dfrac{E_1}{3} + A''e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ d'où $A'' = -\dfrac{E_1}{3}e^{+\frac{t_1}{\tau}}$ et finalement

$$\boxed{\text{Pour la source de droite éteinte :} \quad \forall t \geq t_1, V''_c(t) = \frac{E_1}{3} - \frac{E_1}{3}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$$

Par application du théorème de superposition :

$$\boxed{\forall t \geq t_1, V_c(t) = V'_c(t) + V''_c(t) = \frac{E_1 + E_2}{3} + \frac{2E_2 - E_1}{3}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$$

On retrouve bien le même résultat.