Feuille d'exercices n° 13 : correction

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème.

1. $f(x) = (x^2 - 1)\arccos(x)$
2. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
3. $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

Solution.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $-1 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. $\boxed{\mathcal{D}_f = [-1, 1].}$
f est dérivable comme produit de fonctions dérivables pour les x vérifiant : $-1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$.
En $x = 1$: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{(x^2-1)\arccos(x)}{x-1} = (x+1)\arccos(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Donc f est dérivable en 1.
En $x = -1$: $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{(x^2-1)\arccos(x)}{x+1} = (x-1)\arccos(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} -2\pi$. Donc f est dérivable en -1.
Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } [-1, 1]}$

2. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+.}$ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.
En $x = 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en zéro. Elle admet une tangente horizontale en } x = 0.}$

3. $f(x)$ existe si et seulement si : $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$. $\boxed{\mathcal{D}_f = [-1, 1].}$
f est dérivable comme produit de fonctions dérivables pour les x vérifiant : $0 < 1 - x^2 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$.
En $x = 1$: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Donc f est dérivable en 1.
En $x = -1$: $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = (1-x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f n'est dérivable en -1. Elle y admet une tangente verticale.
Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1, 1].}$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux bornes de leur domaine de définition ? Si oui, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée. Et si oui, la fonction est-elle $\mathcal{C}^1$?

1. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
2. $f(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Solution.

1. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*.}$ En $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1} = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } x = 0 \text{ par la valeur } 0.}$
On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée.
$\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables.
En $x = 0$: $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \dfrac{x}{e^x - 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. $\boxed{\tilde{f} \text{ n'est pas dérivable en } x = 0.}$

2. $\boxed{\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[.}$ En $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $x = 1$.
En $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } x = 0 \text{ par la valeur } 0.}$

On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée.
$\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
En $x = 0$: $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \exp(\dfrac{1}{\ln x}) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$. $\boxed{\tilde{f} \text{ est dérivable en } x = 0 \text{ et } \tilde{f}'(0) = 1.}$
$\forall x \neq 0$ et $x \neq 1$, $f'(x) = \exp(1/\ln x)(1 - \dfrac{1}{(\ln x)^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1 = \tilde{f}'(0)$. Donc $\boxed{\tilde{f}' \text{ est continue en 0 : elle est } \mathcal{C}^1 \text{ en 0.}}$

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto 1 + |x| \sin x$.

1. Montrer que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Solution.

1. $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ comme somme de fonctions continues.}}$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables.
   En $x = 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{|x|}{x} \sin x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. (bornée $\times$ limite nulle). Donc f est dérivable en 0.
   Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.
   Pour $x > 0$, $f'(x) = x \cos x + \sin x$ et pour $x < 0$, $f'(x) = -x \cos x - \sin x$.
2. f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions continues.
   En $x = 0$: pour $x > 0$, $f'(x) = x \cos x + \sin x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$
   Pour $x < 0$, $f'(x) = -x \cos x - \sin x \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$.
   Donc $\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$ On vient donc de démontrer que $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$
3. Pour $x > 0$, $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 2$ et pour $x < 0$, $f'(x) = -2 \cos x + x \sin x \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -2$.
   On constate que les limites sont différentes. Donc f'' ne peut pas être continue en 0 : $\boxed{f \text{ n'est pas } \mathcal{C}^2}$

Exercice 4.

1. Déterminer la dérivée k-ième de $f : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $g : x \mapsto \ln x$.
2. En déduire la dérivée p-ième $h : x \mapsto x^{p-1} \ln x$.

Solution.

1. $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ si $k \leqslant n$ et 0 sinon. (conjecture à démontrer par récurrence)
   $g'(x) = x^{-1}$ et $g^{(k)} = (-1)^{k-1} x^{-k} (k-1)!$ pour $k \geqslant 1$. (conjecture à démontrer par récurrence)
2. On pose $f(x) = x^{p-1}$ et $g(x) = \ln x$. f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la formule de Leibniz :
   $h^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} g^{(k)} f^{(p-k)}$. Pour $k = 0$, $g^{(0)} = \ln$ et $f^{(p)} = 0$. On peut donc retirer le terme en $k = 0$.
   $h^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} g^{(k)} f^{(p-k)} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{k-1} x^{-k} (k-1)! \times \dfrac{(p-1)!}{(p-1-(p-k))!} x^{p-1-(p-k)}$
   $h^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{k-1} x^{-1} (p-1)! = -\dfrac{(p-1)!}{x} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k = -\dfrac{(p-1)!}{x}((1-1)^p - 1)$
   (le $-1-$ est là parce que la somme démarre à 1, alors que dans la formule du binome de Newton, la somme doit commencer à 0).
   $\boxed{h^{(p)}(x) = \dfrac{(p-1)!}{x}.}$

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer la dérivée k-ième de $f(x) = x^n$.

2. Déterminer la dérivée n-ième de $g(x) = x^{2n}$.

3. Pour calculer la dérivée n-ième de g, appliquer la formule de Leibniz à $g(x) = f(x) \times f(x)$. En déduire que
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Solution.

1. $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ si $k \leqslant n$ et 0 sinon. (conjecture à démontrer par récurrence)

2. Donc $g^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{(2n-n)!} x^{2n-n}$. $\boxed{g^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{(n)!} x^n.}$

3. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz :
$g^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$.
$g^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{(n-(n-k))!} x^{n-(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^n \frac{n!}{k!}$.
$g^{(n)}(x) = x^n n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Or on connait $g^{(n)}$. Donc on obtient l'égalité :
$\dfrac{(2n)!}{(n)!} x^n = x^n n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Après division : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.}$

Exercice 6. Soit f définie par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est continue.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ existe et est continue.

4. En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Solution.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues.
En $x = 0$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} 0 = 0 = f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0. Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
Si $x \neq 0$, : $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

En $x=0$: $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ par croissance comparée
Donc f' admet une limite en 0 qui vaut 0.
On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $\lim_{x\to 0} f'(x)$ qui existe.
Par théorème, $f'(0)$ existe et vaut $f'(0)=0$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonction continues. Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, $\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

3. Par récurrence. On note $\mathcal{P}_n$: "$\forall x\neq 0, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp(-1/x^2)$ avec P_n polynôme".
Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Initialisation : $n=0$. On prend $P_0=1$.
Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vérifié.
$f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
Si $x\neq 0$, : $f^{(n+1)}(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)(\dfrac{P_n(x)}{2x^{3n+3}} + \dfrac{P_n'(x)}{x^{3n}} + \dfrac{-2nP_n(x)}{x^{3n+1}} = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{x^3P_n(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^3n+1}$.
En posant $P_{n+1}(x) = x^3P_n(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x)$, on obtient $\mathcal{P}_{n+1}(x)$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall x\neq 0, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp(-1/x^2) \text{ avec } P_n \text{ polynôme}}$.
Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
Par récurrence, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$, que $f^{(n)}$ est continue en 0, dérivable en zéro et $f^{n+1)}(0)=0$.
Donc : $\boxed{f^{(n)} \text{ existe et est continue.}}$

4. Par définition : $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty.}$

Exercice 7. On considère la fonction $f\colon x\mapsto e^{-x^2}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que : $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.
Établir une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Déterminer P_1, P_2 et déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.
4. Montrer la relation $(R)\colon f'(x) = -2xf(x)$.
En dérivant (R), déterminer une relation entre $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$.
En déduire : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$.
5. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad P_n' = -2nP_{n-1}$.
Montrer que le polynôme P_n vérifie l'équation diffŕentielle : $P_n''(x) - 2xP_n'(x) + 2nP_n(x) = 0$.
6. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x)$.
7. Montrer par récurrence que P_n admet n racines réelles distinctes.

Exercice 8. En utilisant l'égalité des accroissements finis, déterminer $\lim_{t\to+\infty} t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{t+1}}\right)$.

Solution. On pose $f(x)=e^x$. Pour $t\neq 0$, f est définie et dérivable sur $[\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t}]$.

D'après l'égalité des accroissements finis appliquées à f sur $[\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t}]$, il existe $x\in[\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t}]$ tel que $\dfrac{f(\frac{1}{t}) - f(\frac{1}{t+1})}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}} = f'(x) = e^x$.

Donc pour $x \in [\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t}]$, on a : $\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{t+1}}\right) = \dfrac{1}{t(t+1)}e^x$.

Alors : pour $x \in [\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t}]$, on a : $t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{t+1}}\right) = \dfrac{t^2}{t(t+1)}e^x$. Quand t tend vers l'infini, on a toujours $\frac{1}{t+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{t}$. Donc x tend vers 0 et $\dfrac{t^2}{t(t+1)}$ tend vers 1.

Finalement, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2}{t(t+1)}e^x = 1$. $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{t+1}}\right) = 1}$

Exercice 9.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$. A l'aide d'un passage à la somme, montrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n$.
3. Montrer que la suite u est convergente.

Solution.

1. On considère $f(x) = \ln x$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable sur $[k, k+1]$.
   $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Si $k \leqslant x \leqslant k+1$, alors $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis appliquées à f sur $[k, k+1]$:
   $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}}$
2. Par passage à la somme dans l'inégalité précédente, on obtient :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   La somme du milieu est une somme télescopique. Il reste : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.
   A droite, on reconnait $u_n + \ln n$. Donc : $\ln(n+1) \leqslant u_n + \ln n$.
   Alors : $\boxed{u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant \dfrac{1}{n+1}}$
3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leqslant 0$. Donc la suite est décroissante. Elle est minorée par 0 car $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$ (pas de minorant qui dépend de n !)
   $\boxed{\text{Donc } u \text{ converge.}}$

Exercice 10. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels, qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

Solution. On note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les n racines distinctes de P.
On obtient $n-1$ intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ quand $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.
P est dérivable sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et $P(a_i) = 0 = P(a_{i+1})$.
Da'preès le théorème de Rolle, P' s'annule sur $[a_i, a_{i+1}]$. On obtient donc $\boxed{n-1 \text{ racines pour } P'.}$
Comme P' est de degré $n-1$, il ne peut pas avoir plus de $n-1$ racines. Donc, on les a toutes.

Exercice 11.

1. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ pour tout $x \in [0; 1]$.

(a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

(b) Étudier le sens de variation de f sur $[0,1]$. Quelle est l'image de $[0,1]$ par f ?

(c) Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.

(d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On note ℓ cette valeur.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \ell|$.

   (c) En déduire que (u_n) converge vers ℓ, et déterminer un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Solution.

1. (a) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
$f'(x) = \dfrac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$. $f''(x) = \dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^3}$.

   (b) Sur $[0,1]$, $f'(x) > 0$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	$1/2$	↗	$e/3$

On a : $\boxed{f([0,1]) = [1/2, e/3]}$

   (c) On étudie le signe de $f''(x)$ pour avoir les variations de f'.
$x^2 + 2x + 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc $f''(x) > 0$ sur $[0,1]$.

x	0		1
$f''(x)$		$+$	
f'	$1/4$	↗	$2e/9$

On a : $\boxed{\text{sur } [0,1], \quad \dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2e}{9} \leqslant \dfrac{2}{3}}$

   (d) On considère la fonction $g(x) = f(x) - x$. g est définie et dérivable sur $[0,1]$.
$g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant 2/3 - 1 \leqslant 0$ sur $[0,1]$.

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
g	$1/2$	↘	$(e-3)/3$

g est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ avec $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. D'après le théorème de la bijection g s'annule une fois et une seule sur $[0,1]$. $\boxed{\text{donc } f(x) = x \text{ admet une unique solution sur } [0,1].}$

2. (a) Récurrence en utilisant : $f([0,1]) = [1/2, e/3] \subset [0,1]$.

   (b) f est continu et dérivable sur $[0,1]$. On sait aussi : $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| = f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis appliquées à f pour $a = u_n \in [0,1]$ et $b = \ell \in [0,1]$:
$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \ell|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$ car ℓ est solution de $f(x) = x$.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \ell|.}$

(c) Par récurrence, on monte que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant (\frac{2}{3})^n |u_0 - \ell|$.
Or $2/3 \in]-1,1[$. Donc $(2/3)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par théorème d'encadrement : $\boxed{/dlim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$
Pour avoir $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$, il suffit d'avoir : $(\frac{2}{3})^n |u_0 - \ell| \leqslant 10^{-3}$.
On sait que $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\ell \in [0,1]$. Donc on peut majorer la distance $u_0 - \ell$ par 1.
On résout donc : $(\frac{2}{3})^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln(2/3) \leqslant -3\ln 10 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln(2/3)}$ (car $\ln(2/3) < 0$).
Donc, à partir de $\boxed{n_0 = \left\lfloor \dfrac{-3\ln 10}{\ln(2/3)} \right\rfloor + 1, \text{ on obtient l'inégalité demandée.}}$

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore f la fonction ainsi prolongée. La fonction f prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t}{(t+1)^2}$, en déduire que :
$$\forall x \in [1; +\infty[, \qquad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$
5. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie en la minorant.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$.
   (c) En déduire que (x_n) converge et déterminer la limite de la suite.

Solution.

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{f \text{ est prolongeable en 0 par la valeur 0.}}$
En $x = 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{\ln x + 1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc $\boxed{\text{la fonction prolongée est dérivable en 0}}$
2. f est dérivable sur son domaine comme quotient de fonctions dérivables.
$f'(x) = \dfrac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$.

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. On résout : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln x + 1} = x$ ou $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
$\boxed{\text{Il y a deux points fixes : 0 et 1}}$
4. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables.
$g'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} + \dfrac{-2t}{(t+1)^3} = \dfrac{1-t}{(t+1)^3}$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g' est du signe de $t-1$.

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
			$1/4$		
g		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

On constate : $\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On prend $t = \ln x$ pour $x \in [1, +\infty[$. On en déduit : $\boxed{\forall x \in [1; +\infty[, \qquad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}}$

5. (a) Par récurrence. $\mathcal{P}_n$: "x_n existe et $x_n \geqslant 1$".
   Clé de l'hérédité : $x_n \geqslant 1 > \dfrac{1}{e}$ donc x_{n+1} existe.
   f est croissante sur $[1, +\infty[$ donc $x_n \geqslant 1 \Longrightarrow f(x_n) \geqslant f(1) \Longrightarrow x_{n+1} \geqslant 1$.
   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n \text{ existe et } x_n \geqslant 1}$

   (b) f est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$. On a vu : $\forall x \geqslant 1, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis appliquées à f pour $a = x_n \geqslant 1$ et $b = 1 \geqslant 1$:
   $|f(x_n) - f(1)| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$. Or $f(x_n) = x_{n+1}$ et $f(1) = 1$.
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|x_n - 1|.}$

   (c) Par récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - 1| \leq (\dfrac{1}{4})^n$.
   Comme $\dfrac{1}{4} \in]-1, 1[$, $(1/4)^n \to 0$. Par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1}$