Лекция № 2

11.02.2023

$Pd = \{(c,d) \mid -\infty \le c \le d < \infty\}$

Ф-ие распределение F мон. опр. на $\mathbb{R}$, F имеет односторонние пределы, т.к. монотонно $F\uparrow$

CORLOL -?

Свойства счетной аддитивности

Мера $\mu_F((c,d]) = F(d) - F(c)$, $F(-\infty)=0$

- **Опр 1.** Теоретико-множ. мера (ф-ие на множествах), пусть S – система мн-в $\emptyset \in S$.

$$\mu : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

наз. счетно-аддитивной (δ-адд.), если $\forall$ послед.-ти попарно. пересек. мн-в $A_j \in S$ $(j = 1, 2, \dots N)$.

Если $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in S \to \mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\right)$

(расходится, абс. если л.ч. $< \infty$)

- **Опр 2.** Теор.-множ. мера (ф-ие на мн-х), пусть S – система мн-в $\emptyset \in S$

$$\mu : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

или $\mu : S \to V$, где V – вещ / комплекс. векторное пр-во.

Тогда μ наз. конечно-аддитив. (или просто

аддитив.), если $\forall N \in \mathbb{N}$ и $\forall$ конеч. пос-ти попарно не пересек. мн-в $A_j \in S$ $(j=\overline{1,N})$.
Если $\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j \in S\right) \to \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)$

Конечная аддитивность μ_F: ...

- **Th**: μ_F на системе $\underline{P}$ явл. счетно-аддитив.

Д-во

1) $c > -\infty$, считаем $\bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j] = (c, d]$

хотим д-ть $\underset{F(d)-F(c)}{\mu_F (c,d]} = \sum_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j]$

Хотим с точ-ю $\varepsilon/2$, $\varepsilon > 0$:

$F(d) - F(c) \sim F(d) - F(c')$, $c' > c$, $d_j' > d_j$

$\varepsilon_j = \varepsilon/(2^{j+1}) \to \mu_F (c_j, d_j] \overset{\varepsilon_j}{\sim} F(d_j')$

$(c', d] \subset [c, d] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j')$

$\to \sum_{j=1}^{N} \underbrace{(F(d_j) - F(c_j))}_{\mu_F (c_j, d_j]} \leq F(d) - F(c) = \mu_F (c, d]$

Сумма изменилась с 2 сторон не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$

$\to$ сумм. изм. $< \varepsilon$

2) $c = -\infty$

$\bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j] = (-\infty, d]$

2a) 1 из $(c_j, d_j]$ явл. левым лучом, $\exists$ $(c_1, d_1]$ – луч $(c_1 = -\infty) \to \bigcup_{i=2}^{\infty} (c_j, d_j] = (d_1, d]$

Для $(d_1, d]$ из (1): $\mu_F (d_1, d] = \sum_{j=2}^{\infty} \mu_F (c_j, d_j]$

Добавим к обеим частям рав-во $F(d_1)$

$$\underbrace{\underbrace{(F(d_1) - F(-c_1))}_{\mu[(c_1, d_1]} + \mu_F(d_1, d]}_{\mu[(-\infty, d]} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \mu_F((c_j, d_j] + F(d_1) - F(c_1)}_{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F((c_j, d_j]}$$

$F(c_1) \to 0$

Из непр. справа $\to$ счет адд. в обрат. сторону:

Th. Если ф-ия F локально возрастает $(\mathbb{R} \to [0, 1])$, $\mu_F((c, d] = F(d) - F(c)$ на $\mathcal{P}_L$ и равно, что μ – сч.-адд., то F непр. справа

Д-во: Р-м пос-ть Гейне (сход.) строго мон. убыв. справа: $x_j \downarrow\downarrow x_0$, $x_j \to x_0$. Проверим рав-во: $F(x_0) = \lim F(x_j)$. Берем полуинтервал...

Свойства из сч. адд: 1) $\mu(\varnothing) = 0$

2) конеч. адд.

Опр 3. Система мн-в S наз. полукольцом, если

0) $S \neq \varnothing$ $(\varnothing \in S)$

1) $\forall A \in S, \forall B \in S$: $A \cap B \in S$ (мультиплик.)

2) $\forall A \in S, \forall B \in S$: $\exists N \in \mathbb{N}, \exists (A_1, \dots, A_N) \in S^N$

такая, что а) $A_k \cap A_L = \varnothing$, $k \neq L$

б) $B \setminus A = \bigcup_{j=1}^{N} A_j$

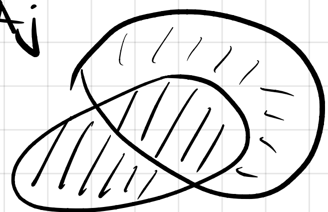
$\cup S = E = \cup A = \cup \{A \mid A \in S\}$

$V \subset E$

....

Ув: $\overline{M_F}$ тоже полукольцо

Св-во полукольца: если S – полукольцо, $A_1, \dots, A_N \in S$ ($N < \infty$), тогда $\exists \{B_k, k = 1, \dots, K\} \subset S$ такое, что при $k \neq l$: $B_k \cap B_l = \emptyset$ и $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ $\exists S_j \subset S_0$ такое, что $\cup S_j = A_j$



Следствие 1: объедин. конеч. числа любых эл-в полукольца совпадает с конечным объед. (м.б. других) попарно не пересек. эл-в полукольца

Следствие 2: $\forall$ п/к S система $\tilde{S}$ всех конечных объединений эл-в из S снова полукольцо и $\forall$ аддитивной меры на S $\exists!$ её аддитивное продолжение $\tilde{\mu}$ на $\tilde{S}$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup \underbrace{\Big(\underset{\in S}{A_2} \setminus \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in S}\Big)}_{B_1 \cup B_2 \sqcup \dots B_N} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_N$$

Упр*: по индукции продолжить

Свойства (проверяем, что $\tilde{S}$ - полукольцо)

$\{\emptyset\} \subset S$

0) $\cup \{\emptyset\} = \emptyset \in S$

1) $U \in \tilde{S} \ni V$

$U = \bigcup_{i=1}^{J} A_j \qquad V = \bigcup_{k=1}^{K} B_k$

$U \cap V = \bigcup_{j,k} (A_j \cap B_k)$

Д-во: пусть т-х $\in$ пересечению $\to$ т.к. a в одном из A_j и одном из B_k $\boxtimes$

2) $U \in \tilde{S} \ni V$

Который эл-т из S явл. эл-том из $\tilde{S}$: $s \in \tilde{S}$, $\tilde{S} \in \cup\{A\}$

$S_0 = \{B_j\}$ - непересек. мн-ва, сост. из S_0:
$\{A_{k,u}\}_{k=1}^{N_U} \cup \{A_{j,v}\}_{j=1}^{N_V}$

$$U \setminus V = \Big(\bigcup_{B_j \subset U} B_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_{B_j \in V} B_j\Big) = \bigsqcup_{B_j \in (U \setminus V)} B_j \in \tilde{S}$$

симметр. разность: $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$

$\tilde{S}$ заметим, что попарных $\cup$ и $\setminus$ $\to$ отн. $\sqcap$ попарн.

$\tilde{S}$ - кольцо множ-в

$\cup S = \cup \tilde{S} = E$, $\mathbb{1}_{U \cap V} = \mathbb{1}_U \cdot \mathbb{1}_V$

Определение кольца: 3 аксиомы

$\neq \varnothing$	$= \varnothing$	$\neq \varnothing$
$\cup$	$\cup$	$\cap$
$\setminus$	Δ	Δ

Д-во: выразим операции через друг друга

$(A \cup B) \Delta A = B \setminus A$

$A \cap B = (A \cup B) \Delta (A \Delta B)$

$A \cup B = (A \cap B) \Delta (A \Delta B)$ (пересеч. и симм. р-ть не пересек.)

$\boxtimes$

$A, B \in \tilde{S}$