Лекция № 9

08.04.2023

$\mu: \mathcal{M} \to [0; +\infty]$ (μ - сч. адд.); $\mathcal{M}$ — сигма-алг.

Простейшие интегрир. по μ ф-ии — это индикаторы мн-в в конечн. меры $\cup \mathcal{M} = E$ (необяз. Ω)

Опр. Простейшая интегр. по μ ф-ия это $\mathbb{1}_{A \subset E}$, т.ч.:

1) $A \in \mathcal{M}$; 2) $\mu(A) < \infty$; $\int_E \mathbb{1}_{A \subset E}(x)\, \mu(dx) = \mu(A)$

Опр. Простые интегр. по μ ф-ии — конечн. лин. комб. простейших (с коэф-ми из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)\right) \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k)$$

Лемма: интеграл определён корректно.

Опр: Интеграл — лин. ф-л на лин. пр-ве простых ф-ий (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соот-но)

Следствие: $\left| \int_E f(x) \mu(dx) \right| \le \int_E |f(x)| \mu(dx)$

Упр: Для простых $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ (свести к лин. комб. попарно не пересек. мн-в)

$\forall A \in \mathcal{M} \longrightarrow \int_A f(x) \mu(dx) = \int_E \mathbb{1}_{A \subset E}(x) \cdot f(x)$.

$\cdot \mu(dx)$ — для простых f

Конструкция Лебега интеграла по σ-адд. неотриц. мере.

Пусть $A \in \mathcal{M}$, $\mu A < \infty$; $\mathcal{M}|_A = \{B \in \mathcal{M} \mid B \subset A\}$, $\mathcal{M}$ — σ-алгебра с единицей A. Тогда из того, что f_n — простые и $\{f_n\}$ — рав-но сходящ. функц. посл-ть ($f_n \rightrightarrows g$), то $\left(\int_A f_n(x) \mu(dx)\right)_{n=1}^{\infty}$ — фунд., причем $\lim_{n \to \infty} \left(\int_A f_n(x) \mu(dx)\right)$ не зависит от выбора простых

$f_n \overset{x\in A}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} g(x)$. Он поэтому обозначается как $\int_A g(x)\,\mu(dx)$

Д-во:

$$\left|\int_A f_n(x)\,\mu(dx) - \int_A f_m(x)\,\mu(dx)\right| = \left|\int_E 1\!\!1_{A\subset E}(x)\cdot(f_n(x)-f_m(x))\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\mu(dx)\right| \le \int_E 1\!\!1_{A\subset E}\,|f_n(x)-f_m(x)|\,\mu(dx) \le \int_E 1\!\!1_{A\subset E}\,\|f_n - f_m\|_{B(A)}\cdot$$
$$\cdot\,\mu(dx)$$

где (*): $\|f\|_{B(A)} := \sup_{x\in A}|f(x)|$ „равн. на A норма ф-ии f" (или норма, задающая равномерную сх-ть:

$f_n \overset{A}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} g \iff \|f_n - g\|_{B(A)} \to 0$ (упр.)

$$\|f_n - f_m\|_{B(A)} \int_E 1\!\!1_{A\subset E}\,\mu(dx) = \|f_n - f_m\|_{B(A)}\cdot\mu(A) \le \mu(A)\cdot$$
$$\cdot\left(\|f_n - g\|_{B(A)} + \|f_m - g\|_{B(A)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$ поэтому числовая пос-ть

$\left(\int_A f_n(x)\,\mu(dx)\right)_{n=1}^{\infty}$ – фунд.

Теперь – почему инт-л не завис. от пос-ти простых ф-ий?

$g_n \overset{x\in A}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} g$; $\|f_n - g_n\| \le \|f_n - g\| + \|g_n - g\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\left|\int_A f_n(x)\,\mu(dx) - \int_A g_n(x)\,\mu(dx)\right| \le \mu(A)\cdot\|f_n - g_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Примечание: $B(A) = B(A,\mathbb{K}) = \{\varphi : A \to \mathbb{K} :$ огр.$\}$, где $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ – поле чисел.

Опр. Равномерн. пределы g простых ф-ий f_n на мн-ве A конечн. меры μ наз. огр. интегрир. по Лебегу по мере μ ф-ии на A, обознач. $BL(A, \mathfrak{m}|_A, \mu) = BL(\mu|_{\mathfrak{m}|A})$

Критерий принадл. ф-ии классу $BL(A, \mathfrak{m}|_A, \mu) = BL(\mu)$ для $E = A$

Th: I. $[g \in BL(\mu)$ (для огр. μ)$] \Leftrightarrow$ II $[$а) g - огр. на $E = A$;
б) $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{K}) \mapsto g^{-1}(B) = \{x \in A \mid g(x) \in B\}$ (прообраз B) $\in$
$\in$ м. $\equiv \mathcal{M}|_A]$

III $\Leftrightarrow [\exists$ пос-ть простых ф-ий $f_n(x)$, огр. в сов-ти $((\sup_{n \in N} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < \infty) \Leftrightarrow \sup_n \|f_n(x)\|_{B(A)} < \infty)$ и поточечно сходящ. к $g]$

<u>Опр</u>. S_1 - с-ма подмн-в мн-ва E_1, S_2 -- // -- E_2; $f: E_1 \to E_2$,
тогда: $([f$ назыв. (S_1, S_2) - измер.$] \Leftrightarrow [\forall B \in S_2 \mapsto$
$\mapsto f^{-1}(B) \in S_1])$

В свете введенного опр., пункт б) можно переписать так:
ф-ия g обладает (м., $\mathcal{B}(\mathbb{K})$) измер-ю.

<u>Лемма</u>: Пусть в усл. опр-ия S_1, S_2 - это σ - алгебры с
ед-ми $E_j \equiv \cup S_j$ $(j \in \{1, 2\})$, $S_{20} \subset S_2$, т.ч. $\sigma(S_{20}) = S_2$
Тогда для (S_1, S_2) -изм-ти ф-ии $g: E_1 \to E_2$ необх. и дост.,
чтобы $\forall C \in S_{20} \mapsto g^{-1}(C) \in S_1$ (S_2- наим. σ - алг., содерж. $S_{2,0}$)

<u>Д-во</u>: $S_{2,1} := \{B \in S_2 \mid g^{-1}(B) \in S_1\} \supset S_{2,0}$. Тогда достаточно
проверить, что S_{21} явл. σ-алг. с ед-й E_2.

1) $E_2 \in S_{21}$, т.к. $g^{-1}(E_2) = E_1 \in S_1$

2) $\forall D \in S_{2,1} \to g^{-1}(E_2 \setminus D) = g^{-1}(E_2) \setminus g^{-1}(D) =$
$= E \setminus g^{-1}(D) \in S_{2,1}$, т.к. $g^{-1}(D) \in S_1$

3) Если $\forall j \in \mathbb{N} \to B_j \in S_{21}$, то $g^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) =$
$= \bigcup_{j=1}^{\infty} g^{-1}(B_j) \in S_1$, т.к. $g^{-1}(B_j) \in S_1$ для $\forall j \in \mathbb{N}$

Итак, $S_{21} \supset S_2$, ч.т.д. S_{21} действ. явл. σ-алг. с ед-й E_2

<u>Д-во теоремы</u>: I $\to$ II;

а) вып. б) пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ дост. проверить, что $\forall x \to g^{-1}$

$(\!(-\infty, x])\in \mathcal{M} \Leftarrow \{\omega\in E = A \mid g(\omega)\le x\}\in \mathcal{M}$.

$\exists$ посл-ть f_n простых вещ-ных ф-ий $\xrightarrow[\text{поточечн.}]{p.w.} g$; $g(\omega) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = \underline{\lim}_{n} f_n(\omega)$

$\{\omega\in E \mid x \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(\omega) = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\omega)\} = \{\omega\in E \mid \forall N\in\mathbb{N} \to$

$\to (\inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\omega) \le x)\} = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \{\omega\in E \mid \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\omega)\le x\}$ чтобы показать, что $\{\omega\in E \mid x\geqslant g(\omega)\}\in\mathcal{M}$, достаточно показать: при $\forall N\in\mathbb{N} \to \mathcal{M}\ni\{\omega \mid \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\omega)\le x\}$ (тогда их счетное пересеч. тоже будет $\in \mathcal{M}$.)

$[\inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\omega)\le x] \Leftrightarrow [\forall\varepsilon\ \exists n\geqslant N \to f_n(\omega)\le x+\varepsilon] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\forall k\in\mathbb{N}\ \exists n\geqslant N \to f_n(\omega)\le x+\frac{1}{k}]$

$\{\omega \mid \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(\omega)\le x\} = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \{\omega\in E \mid \exists n\geqslant N \to (f_n(\omega))\le x+\frac{1}{k})\}$

Дост. проверить, что $\{\omega\in E \mid \exists n\geqslant N: (f_n(\omega)\le x+1/k)\}\in\mathcal{M}$.

$f_n(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{J} c_j \mathbb{1}_{A_j}(\omega)$, где $A_j\in\mathcal{M}$ попарно не пересек. и
$\bigsqcup\limits_{j=1}^{J} A_j = E$; $\{f_n(\omega)\le c\} = \bigcup\limits_{j=1} \{A_j \mid c_j\le c\}$

Доказали следствие (I) $\Rightarrow$ (II)

Критерий. (I) $g \rightleftarrows f_n$ (простые);

(II) g огранич; $(\mathcal{M}, B(\mathbb{R}))$ - измер;

(III) $g \leftarrow f_n$ поточечн. на E; $\{f_n\}$ огран. в сов-ти

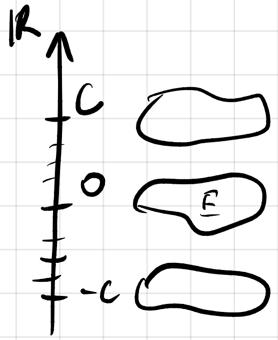
Доказали: $1\to 2$, $3\to 2$, $1\to 3$. Достаточно сделать $2\to 1$.

Пока что $K=\mathbb{R}$

$C_g = \|g\|_{B(E)} = \sup\limits_{\omega\in E} |g(\omega)| \geqslant 0$

Возьмем $C = [C_g]+1$

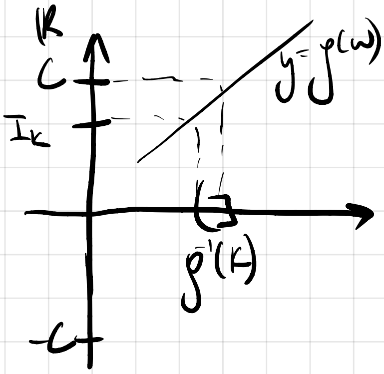
$\downarrow$



Отрезки разбиения — каждый длины 2^{-n}, их него $2^n \cdot 2C$, $-C < g < C$, $\forall\, \omega \in E$

$-\frac{1}{2n} < g(\omega) - \left(\sum_{k=-C\cdot 2^n+1}^{C\cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbb{1}\left(g^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right]\right)\right)(\omega)\right) \leq 0$; при $n \to \infty$: равенство

$I_k = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$



Идея — разбить отрезок $[-C, C]$ на $2^n \cdot 2C$ отрезков, для каждого отрезка $I_k = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ взять прообраз $g^{-1}(I_k)$ по верхнему пределу

$f_n \rightrightarrows g$, что и требовалось. Т.о. критерий полностью доказан

__Следствие__: поточечн. предел измер. вещественнозн. ф-ций измерим.

__Опр__: Отобр. $\mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ наз. борелевским, если оно $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}))$-измеримо.

__Лемма__: любое непр. отобр. $g: \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ явл. борелевским.

__Д-во__: достаточно проверить, что $\forall$ открытого $U \subset \mathbb{R}^{d_2} \longmapsto \underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{откр.}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$

__Д-во__: тот же критерий для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(I): $g \leftleftarrows f_n$ (простое)

(II): g — огр., $g(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ — измеримо

(III): $g \xleftarrow[E]{p.w.} f_n$ (простое, огр. в совокупности)

__Опр__: Мн-во с фикс. σ-алг. называется измер. прост.-м (хотя никакой меры там заранее не задано).

__Лемма__: $\mathbb{C}$-значная ф-ия g на $(E, \mathcal{M})$ явл. $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-измер. $\iff$ $\operatorname{Re} g$ и $\operatorname{Im} g$ явл. $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измер.

__Д-во__:

$\Rightarrow$: дост. показать, что $\forall x \in \mathbb{R} \longmapsto (\operatorname{Re} g)^{-1}((-\infty, x)_{\mathbb{R}}) \in \mathcal{M}$

$(\operatorname{Re} g)^{-1}((-\infty, x)_{\mathbb{R}}) = \{\omega \mid \operatorname{Re}(g(\omega)) < x\} = \{\omega \mid g(\omega) \in \{z \in

$\in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < x \} \in$ сч.

$(\operatorname{Im} g)^{-1}((-\infty, y)_{\mathbb{R}}) = \{ w \mid g(w) \in \{ z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z < y \}\} \in$

$\in$ сч. доказано

$\Leftarrow$: $B(\mathbb{C}) = B(\mathbb{R}^2)$ порожд. „углами" вида $z \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$;

$U_{x,y} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < x, \operatorname{Im} z < y \}$;

$g^{-1}(U_{x,y}) = g^{-1}(\{\operatorname{Re} < x\} \cap \{\operatorname{Im} < y\}) = g^{-1}(\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < x \}) \cap$

$\cap\, g^{-1}(\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < y \}) \equiv \{ w \in E \mid \operatorname{Re}(g(w)) < x \} \cap$

$\cap \{ w \in E \mid \operatorname{Im}(g(w)) < y \} \in$ сч., поэтому g – (сч., $B(\mathbb{C})$) –

– измерима. ч.т.д.

Re и Im – лин., непр. ф-ции из $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: f_n (простые) $\xrightarrow[n\to\infty]{p.w.} g$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.w.} \operatorname{Re} g \\ \operatorname{Im} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.w.} \operatorname{Im} g \end{array} \right\}$ Возвращение к д-ву критерия.

<u>Следствие</u>: (II) $\to$ (I)

g (компл) (сч., $B(\mathbb{C})$) – измер. и огр., поэтому Re g тоже огр. и по лемме (сч., $B(\mathbb{R})$) – измеримо, Im g – тоже

$\exists\, f_n$ (простые вещи) $\rightrightarrows \operatorname{Re} g$; $\exists\, g_n$ (прост. вещ.) $\rightrightarrows \operatorname{Im} g$

$\psi_n = f_n + i g_n \Rightarrow \underset{\text{прост. компл.}}{f_n + i g_n} \rightrightarrows \psi$, ч.т.д. (по лемме, $\psi_n \rightrightarrows g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g$)

$f_n = \operatorname{Re}(f_n + i g_n)$

$g_n = \operatorname{Im}(f_n + i g_n)$

<u>Лемма</u>: [f – простая] $\Leftrightarrow$ [f измерима $\wedge$ card $(f(E)) < \infty$]

<u>Св-во</u>: по пустому мн-ву все интегралы $= 0$

Закончим д-во критерия для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Интегр. неотр. ф-ций по огран. мере в общем случае.

μ: сч $\to [0, N]$ – σ-адд., сч. – это σ-алгебра с ед-й $E = \bigcup$ сч

<u>Лемма</u>: $\forall$ неотриц., (сч., $B(\mathbb{R})$) – измеримая ф-ия f на $(E, \text{сч.})$

есть предел поточечно сх. монотонно-возраст. пос-ти $\{f_n\}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(\mu) = \sup\limits_n \int_E f_n(\mu)$ – не зависит от выбора описанной пос-ти f_n

Д-во:

$f = \sum\limits_{k=1}^{(2^m)^2} \frac{k-1}{2^m}\cdot \mathbb{1}_{f^{-1}\left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right)}$, берём по нижней границе: $M=1$, $2^{-M} = 1/2$