Лекция № 3

25.02.2023

$\mathbb{1}_A \overset{2}{+} \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\Delta B}$ ← сумма по модулю

$\mathcal{P}I = \ldots$ (опр-е есть)

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$, мера $\mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$

(нестрого мон. ↑, непр. справа)

$\mu_F(\emptyset) = \mu_F(\emptyset \sqcup \emptyset) =$
$= \mu_F(\emptyset) + \mu_F(\emptyset) \to \mu_F(\emptyset) = 0$

$\mathcal{P}I$ – полукольцо

Мера μ_F обладает св-ми адд-ти на $\mathcal{P}I$, принимает неотриц. зн-е (любой полу к-л → $\to [0,1]$)

Пусть $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ $(I \in \mathcal{P}I \ni I_n, \forall n \in \mathbb{N})$,

из адд-ти следует:

$\forall N \in \mathbb{N} \to \sum\limits_{n=1}^{N} \mu_F(I_n) \le \mu(I) = \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \mu_F(I_n)\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{K} \mu_F(I_k)\right)$

огр. неуб. пос-ть → сх.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n) \le \mu_F\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n\right) \le 1$ – счет. полуадд. сверху

Докажем нер-во в обратную сторону:

$\left[\forall \varepsilon_0 > 0 \to \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu_F(I_n)}_{\text{сх.}} \ge \mu_F(I) - \varepsilon_0\right]$

будет достаточно показать, что:

$\forall \varepsilon_0 > 0 \ \exists N: \sum\limits_{n=1}^{N} \mu_F(I_n) \ge \mu_F(I) - \varepsilon_0$

◁ случай, когда I - огр. и непустое: $\delta < b - a$

$-\infty < a < b < +\infty$, $I = (a, b]$, $I_n = (a_n, b_n] \subset$

$\subset (a_n, b_n + \delta_n]$, все дельты можно выбрать так, что сумма изменений всех длин $< \varepsilon_0$.

$[a+\delta, b] \subset (a,b] = \bigcup (a_n, b_n] \subset \bigcup\limits_n (a_n, b_n + \delta_n]$.

справедливо и рав-во:

$[a+\delta, b) \subset \bigcup\limits_n (a_n, b_n + \delta_n)$

$[a+\delta, b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a_n, b_n + \delta_n)$

Тем более:

$(a+\delta, b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a_n, b_n + \delta_n]$.

Было св-во полукольца:

$\mu_F(a+\delta, b] = F(b) - F(a+\delta) \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \mu_F (a_n, b_n + \delta_n] + \varepsilon_0$

Надо устремить все дельты $\to 0$. Полуадд. снизу $\Leftarrow$ адд.

$I \subset \bigcup\limits_k I_k$ (они могут наклад. друг на друга) $\rightarrow$

$\rightarrow \mu(I) \leq \mu(I_k)$ для нетривиал. мер.

Тогда: $\mu(a, b] \leq \mu(a+\delta, b] + \underbrace{(\mu, (a, b)] - \mu(a+\delta, b]}_{\Delta}$

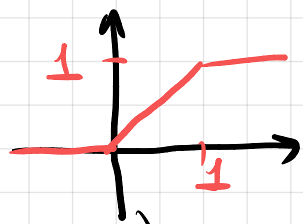
$\leq \sum\limits_{n=1}^{N} \mu (a_n, b_n + \delta_n] + \Delta \;\textcircled{=}$

$\mu (a_n, b_n + \delta_n] = \mu (a_n, b_n] + \mu(b_n, b_n + \delta_n]$

$\textcircled{=} \left(\sum\limits_1^N (\mu(a_n, b_n) + \Delta_n)\right) + \Delta$

$\mu_F(I) \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \mu(I_n)\right) + \varepsilon_0$

Частный случай: $F[0,1]_x = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$



$\mu_{F[0,1]x}$ – мера Жордана на $P_S \cap P([0,1])$

2 случай) I неогр $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = I = (-\infty, c]$

подслучай) $I_n = (-\infty, b_n]$

$\bigcup_{n\neq n_0} I_n = I \setminus I_{n_0} = (b_n, c]$, $I = (b_{n_0}, c] \sqcup$
$\sqcup\, I_{n_0}$

$\mu_F I = \mu_F(I_{n_0}) + \mu_F(b_{n_0}, c] = \mu_F(I_n) + \sum_{n\neq n_0} \mu_F(I_n) \le \sum_{n=1}^{N} \mu_F(I_n)$

$(-\infty, c] = I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (I_n = (a_n, b_n])$

$\lim_{a\to-\infty} (F(c) - F(a))$, $\exists a_0,\ F(a_0) < \varepsilon_0/2$

<u>Замечание</u>: $\mathbb{N} a_0 = \{n : b_n \le a_0\} \to \sum_{n}^{\infty} \mu_F(I_n) \le F(a_0)$

$I = (-\infty, c] = (-\infty, a_0] \sqcup (a_0, c]$

$I_{n_0} = (a_{n_0}, b_{n_0}] = (a_{n_0}, a_0] \cup (a_0, b_{n_0})$

$(a_0, c] = (a_0, b_{n_0}] \sqcup \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\setminus(N_{a_0}\cup\{n_0\})} I_n \right)$

$F(c) = \mu(-\infty, a_0] + \mu(a_0, b_{n_0}] + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F(I_n) \le \frac{\varepsilon_0}{2} + S \le \frac{\varepsilon_0}{2} +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mu F_n$

<u>Следствие</u> (Th о продолжении для счётно-аддитивных мер):
$\forall$ полукольце $S \wedge \forall$ кон.-адд. мер $\mu: S \to [0, M]$ или $[0, +\infty)$
$\exists!$ кон.-адд. мера $\bar\mu$ на $\bar S = \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k \mid n\in \mathbb{N}_1, A_k\in S\}$: $\forall_{A\in S}$,
$\bar\mu(A) = \mu(A$

<u>Д-во</u>: $\exists$: $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ $\quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j \to \bar\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$

Пусть $\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j = \bigsqcup_{\tilde j=1}^{\tilde n} \tilde B_{\tilde j}$, где $\tilde B_{\tilde j} \in S$

$\sum_{j=1}^{n} \mu B_j = \sum_{\tilde j=1}^{\tilde n} \mu \tilde B_{\tilde j}$

$\exists \{C_i\}_{i=1}$ $\quad \forall j\ B_j = \bigsqcup_{i\in m_j} C_i$ и $\forall \tilde j\ \tilde B_{\tilde j} = \bigsqcup_{i\in m_{\tilde j}} C_i$,

$\sum_{j=1}^{m} \mu B_j = \sum_{\tilde j=1}^{\tilde n} \mu \tilde B_{\tilde j}$

<u>Аддитивность</u>: $\forall B \in \tilde S \ni \tilde B_j$, $j = 1, \dots, J$: $\tilde B = \bigsqcup_{j=1}^{J} \tilde B_j$.
Тогда $\mu \tilde B \overset{?}{=} \sum \mu \tilde B_j$

$\tilde{B} = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, $\mu \tilde{B} = \sum_{j=1}^{m} \mu B_j = \sum_{j=1}^{\overline{i}} \mu \tilde{B}_j =$

$= \sum_{j=1}^{\overline{i}} \mu \left(\bigsqcup_{l>1}^{i} B_{j,l} \right) = \sum_{j=1}^{\overline{i}} \sum_{l>1}^{\overline{i}} \mu (B_{jl})$

В условиях теоремы 1 μ монотонна (следствие из теоремы 1). Если $B_1 \subset \overline{S} \ni B_2 \supset B_1 \to$
$\to \mu(B_2) \geqslant \mu(B_1)$

$\mu(B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2 \setminus B_1)$ ∎

<u>Следствие 2</u>: μ_F распр. на конеч. объед. эл-в

<u>Th 2</u>: Если в усл. Th 1 мера μ была сч.-адд., то и $\overline{\mu}$ тоже сч.-адд.

<u>Д-во</u>: Пусть $\tilde{B} \in \underline{S} \ni \tilde{B}_j$, $j \in \mathbb{N}$, $\tilde{B} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \tilde{B}_j$.
Проверим, что $\mu \tilde{B} = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu} \tilde{B}_j$. Из следствия 1 теор. 1

$\overline{\mu} \tilde{B} = \sup_{N} \sum_{j=1}^{N} \overline{\mu} (\tilde{B}_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu} (\tilde{B}_j)$

$\overline{\mu} \tilde{B} = \sum_{j}^{m} \overline{\mu} B_j = \sum_{j=1}^{m} \mu B_j$

$\tilde{B} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \tilde{B}_y$, $\tilde{B} \in \overline{S} \ni \tilde{B}_y$, $y \in \mathbb{N}$, где $\tilde{B}_y = \bigsqcup_{l=1}^{l_j} B_{y,l}$

$\overline{\mu} \tilde{B} \geqslant \sup_{N} \sum^{N} \overline{\mu} (\tilde{B}, y) = \sum_{y=1}^{\infty} \overline{\mu} (\tilde{B}_y) = \sum_{y=1}^{\infty} \overline{\mu} (\tilde{B}_y) =$

$= \sum_{y=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{l_y} \mu B_{yl} \right) = \sum_{j=1} \sum_{l=1}^{l_j} \sum_{y=1}^{w} B_{inl} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{y=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_y} \mu B_{yl} \right)}_{\mu B_j}$

$B_j = \bigsqcup_{y \in N} B_{y l_{ij}}$ ∎

Мн-во $\overline{S}$ - кольцо, порождённое полукольцом S

<u>Св-во п/к</u>: $\overline{S}$ содержит конеч. объед. и попарные разности.

Опр: Теор.-множ. кольцо — непустая система, содержащая конечное объед. своих эл-в и их попарные разности

Th 3: Неотриц. к. -адд. / σ-адд. мера на кольце R продолжается на мин. сист., содерж. R, которая сама явл. кольцом, содерж. счетное объед.

Опр: Если теорет.-мн. кольцо содержит только счетное объед. своих эл-в, то оно наз. σ-кольцом.

Замечание: σ-полукольцо — это σ-кольцо

σ-алгебра наз. σ-кольцо содерж. самое большое из своих мн-в

S наз. σ-алгеброй <=> 1) $\varnothing \in S$

2) $\forall (A, B) \in S \times S \quad A \setminus B \in S$

3) $\forall (A_1, A_2 \ldots) \in S^\infty = S^{\mathbb{N}} \quad \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in S$

4) $\exists\, V \in S \quad \forall A \in S \quad A \subseteq V \quad V_1 \supseteq V_2$

Пример: Миним. среди σ-колец, содерж. $\mathcal{P}I$ явл. алгебра $\mathbb{R} = \bigsqcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1]$

Утв: S — мн-во колец (σ-колец). Тогда пересечение всех этих колец (σ-колец) → $\bigcap\limits_{R \in S} R$ (тоже σ-кольцо)