Лекция № 4

04.03.2023

показ. прибора \ n	1	...	k	...	N
Числовые или вект. показатели					
ξ_1					
ξ_j					
ξ_d					

$\overset{\parallel}{\vec{\xi}_Э}$ — единый экспериментальный ансамбль

Ф-ла распределения:

$$\overline{F}_Э = \frac{1}{N} \cdot \left|\{k \in \{1, N\}\} : |\{(x_{1,n} \le x_1) \wedge \dots \wedge (x_{d,n} \le x_d)\}\right| = P_{Эл}|\xi_1 \le x_1, \dots, \xi_d \le x_d| =$$

$$P_{Эл} = P_{Эл}\left(\overline{\xi} \in (-\overline{\infty}, \overline{x}] = \prod_{j=1}^{d}(-\infty, x_j)\right) = \mu_F((-\overline{\infty}, \overline{x}])$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a_1 < x_1 \le b_1 \\ a_2 < x_2 \le b_2 \end{matrix} \right\} = \prod_{j=1}^{d}(a_j, b_j]$$

$$\overline{X}_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{d,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \xrightarrow{F} [0, 1]$$

$$\mu([\overline{a}, \overline{b}]) = \left(\left(\left((F(\overline{b}) - F\begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) - \left(F\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \end{pmatrix}\right)\right) - \left(\left(F\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}\right) - \left(F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)\right) \dots\right) \overset{def}{=} \left(\Delta_{d, a_n, b_d} \dots \left(\Delta_{1, a_2, b_2}(\Delta_{1, a_1, b_1}, F)\right)\right) = \left(\left(F\Big|_{x_1 = a_1}^{x_1 = b_1}\right)\Big|_{x_2 = a_2}^{x_2 = b_2}\dots\right)\Big|_{x_d = a_d}^{x_d = b_d} = \sum \left((-1)^{\overline{x}}\right) F(\overline{x})$$

Th Об однозначн. ф-ии распр. ЭА (экспер. ансамбль) $\rightleftarrows F_Э$, которая позволяет $F_Э \rightleftarrows \mu_F$, где $F_Э : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$; $\mu_F : (PI)^d \to [0, 1]$, σ-аддитивная на п/к; $\mathcal{K}((PI)^d)$, $\sigma(\mathcal{K}(PI)^d)$

Полукольцо множеств: ① $\overset{\varnothing\ \in}{\ne \varnothing}$ ② $\cap$ ③ $\setminus \rightsquigarrow \overset{n}{\sqcup}$

Кольцо множеств: ① $\overset{\varnothing\ \in}{\ne \varnothing}$ ② $\cap$ ③ $\setminus$

$$F_Э(\overline{x}) = P_Э\{\overline{\xi} \in (-\overline{\infty}, \overline{x}]\}$$

$$\mu_{F_Э} = \mu_Э(\overline{a}, \overline{b}] \to \mu_Э(\overline{a}, \overline{b}] = P_Э(\overline{\xi} \in (\overline{a}, \overline{b}]\}$$

$$\mu_Э\left(\bigsqcup_{i=1}^{I}(\overline{a}_i, \overline{b}_i]\right) = \sum_{i=1}^{I} \mu(\overline{a}_i, \overline{b}_i]$$

Кольцом мн-в порождённых полукольцом $\mathcal{P}$ называется

$$\left\{\bigcup_{j=1}^{J} A_j \mid J \in \mathbb{N}, (\forall j \in \{1, \dots, J\})\ A_j \in \mathcal{P}J\right\} = \left\{\bigsqcup_{j=1}^{J} A_j \mid ++\right\} = \mathcal{K}|\mathcal{P}$$

$$N = 1,\ F = 1\left(\prod_{j=1}^{d}[x_{j1}, +\infty)\right) \in \mathbb{R}^d,\ \mu_Э(M) = P_Э(\xi \in M) =$$

$= \frac{1}{N} \{k \mid \bar{x}_n \in M\}| = \mu_F = \delta\bar{x}_1$, где $\delta\bar{x}_1$ – Дираковская мера:

$\delta\bar{x}_1 : M \to \mathbb{1}(\bar{x}_1)$

$\delta\bar{x}_1 . M \to \underset{M=\mathbb{R}^d}{\mathbb{1}(\bar{x}_1)} = \begin{cases} 1, & \bar{x}_1 \in M \\ 0, & \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus M \end{cases}$

Заметим, что $\mu_Э\, (\bar{a}, \bar{b}] = \frac{1}{N} |\{k \in \{1, \dots, N\} \mid \bar{x}_k \in (\bar{a}, \bar{b}]\}| =$

$= \frac{1}{N} |\{k \mid \bar{x}_n \in M\}|$

$\mu_Э : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]_{\mathbb{R}}$

$\forall n$ Ω - единое – в Th. случ. процессов

Опр. Говорят, что мера μ на системе подмн-в в $\mathbb{R}^d$ содержится на этом подмн-ве $Z \subset \mathbb{R}^d$, если $\forall\, U \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ $(\exists \mu(U)) \Rightarrow \mu(U) = 0$

Замечание: $\forall \mu_Э$ есть лин. комб. не более N дираковских

$\frac{1}{N} |(\bigcup\limits_{n=1}^{N} \{n\} \cap \{k \mid \bar{x}_k \in M\})| = \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1} |\{k \mid x_n \in M\}| = \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta x_n \{M\} =$

$= \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{N} \delta\bar{x}_n\right)(M)$

Упр. Проверить, что сч. мера счетно-адд.: $\forall$ мн-ва E $\mathcal{P}(E) \ni$

$\ni M \mapsto \mathbb{1}_{M \subset E} \in \{0,1\}$

$+_2$ – сложение по mod_2

Сложение на мн-ве всех индикаторных ф-ий опр. на E

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\mathbb{1}_A +_2 \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \Delta B}$

$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$

Алгебра, σ - алгебра, σ - аддитивное $\leftarrow$ непр. интервалы (Лоб. теорема)

Опр. Если в кольце мн-в $\mathbb{R}$ $\exists A \in R$, $R \subset P(A)$, то такие A наз. единицей этого кольца и само кольцо наз. алгеброй мн-в

✓

Опр. Если алгебра мн-в с единицей Ω явл. σ-кольцом, то её наз. σ-алгеброй с единицей Ω $(\emptyset, \bigcap\limits_{\infty}, \bigcup\limits^{\infty}, \Omega)$