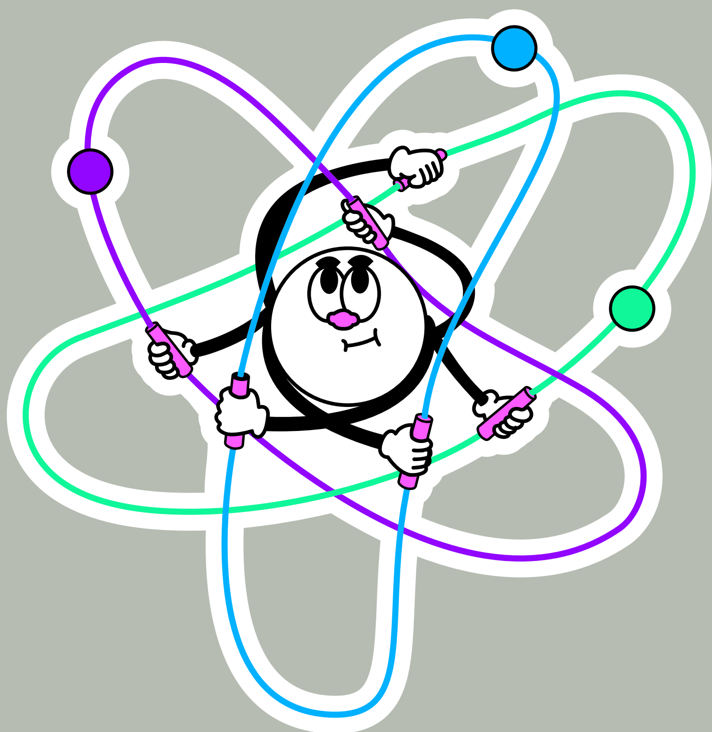
Лекция № 8



01.04.2023

[Th. о ед. продолж. неотриц. огр. счётно-адд. меры с кольца на порождённое им σ-кольцо с сохранением σ-адд. меры — главная Th. курса]

K (т. мн. кольцо $\xrightarrow[\text{σадд.}]{\mu} [0, N]$

$\bigcup K = E = \bigcup_{A \subset K} A = \bigcup \{A \mid A \in K\}$ — обозначим это за E

$M \in E$ назовём K_σ-покрыв.?, если $\exists (A_1, A_2, A_3, \ldots) \in K^{\mathbb{N}}$

$M \overset{+}{\subset} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Эту ф-лу можно переписать $M \overset{+}{\subset} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$

$= \bigsqcup_{m=1}^{\infty} (A_m \setminus \bigcup \{A_k \mid k < m\})$

Итак, можно требовать, что $(A_1, A_2, \ldots)$ попарно не пересек. А можно требовать, чтобы эта посл-ть возр. — без огр. общ.

$\mathcal{P}_{K\sigma}(E) = \{M \mid M$ явл. K_σ-покрываемым $\}$, $\mu^*(M) =$

$= \inf \{ \overset{+}{\sum_{n=1}^{\infty}} \mu(C_k) \mid \forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow C_k \in K, M \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_n \}$ и $\mu^*(M) \leq N$

(никогда не превосходит N — верхнюю границу мн-ва значений ф-ии μ)

<u>Упр.</u> д-ть, что $\mathcal{P}_{K\sigma}(E)$ — это σ-кольцо (легко проверить: M — K_σ-покрывает; поэтому $\mathcal{P}_{K\sigma}(E)$ замкнуто отн-но счёт. объед.; отн-но разностей — тоже, т.к. подмн-во K_σ-покрываемое

$\rho_\mu^* : \mathcal{P}_{K\sigma}(E) \times \mathcal{P}_{K\sigma}(E) \mapsto [0, N] : (A, B) \longmapsto \mu^*(A \Delta B)$

* сверху: верхние (внешние) мера, снизу: нижняя (внутренняя мера)

$\forall M \in \mathcal{P}_{K\sigma}(E) \mapsto \mu_*(M) = \sup \{\mu(A) \mid A \subset M$, причём $A \in K \}$ — опр. нижней меры, $\mu_*(M) \leq N$

<u>Опр</u>: μ^* — измер. подмн-ми в $E = \bigcup K$ назовём такие $M \in \mathcal{P}_{K\sigma}(E)$, что для нек: $(A_1, \ldots, A_n) \in K^{\mathbb{N}}$ (т.ч. $M \subset$

c $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = U$) выполнено соотн:

$$\mu^*(M) + \mu^*(U \setminus M) = \mu^*(U) = \sup_n \{ \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) \}$$

ρ_m^* – измерим.? наз. такое $M \subset E$, что $\exists (A_{k,l})_{k,l=1}^{\infty} \in$ $\in K^{N \times N}$, что $\rho_m^*(\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,l}) M) = 0$ (Лебег)

Упр*: С-ма μ^*-измеримых подмн-в E совпад. с с-мой ρ_m^*-измер. подмн-в E, явл. б-кольцом, к-е наз. б-кольцом мн-в, измер. отн. естественного продолж. меры μ, обозн. $\overline{K}^{\mu}$, $\mu^*|_{\overline{K}^{\mu}} =: \overline{\mu}$

$\overline{\mu}|_K = \mu^*|_K = \mu$

Вообще говоря, $\mu_*|_{\overline{K}^{\mu}} \neq \overline{\mu}$ ∎

Из конструкции Лебега вытекает ед-ть

Замечание: $\rho_{\overline{m}}$ порождает ту же самую метрику на фактор-пр-ве $\overline{K}/\mathcal{D}_{\mu}$, что и копия аналог. получ. метрики из пополнение полу метр. пр-ва (K, ρ_m), т.е классу экв. фунд. пос-тей будет соотв. один класс эквив. измеримых мн-в из $(\overline{K}^{\mu}, \rho_m)$.

$B(\mathbb{R}^d)$ – наим. б-кольцо и б-алг., содерж. все декартов. произв. одномерных промежутков, она же порождается и откр. шарами, и просто открытыми мн-ми в $\mathbb{R}^d$ и, значит, замкн.

<u>Конструкция d-мерной меры Лебега</u>

а) Строим меру Жордана$_{\subset[-N,N]^d}$

$\triangleleft$ те огр. мн-во $M \subset \mathbb{R}^d$, т. что

$1_{M \subset [-N,N]^d} \in R([-N,N]^d)$, такие M наз. измеримыми по Жордану

$$\int\limits_{-N}^{N} \dots \int\limits_{-N}^{N} 1_{M \subset [-N,N]^d}(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d = |M|_d \text{ - } d\text{-мерная мера}$$

Жордана мн-ва М.

б) Кольцо всех измер. по Жордану подмн-в в фикс. кубе не явл. δ-кольцом, но мера Жордана (d-мерная) на этом кольце сч.-адд. и мы можем по Th. продолжить:

Пусть $J([-N,N]^d)$ - кольцо изм. по Ж. подмн-в в $[-N,N]^d$, $\to [0,\infty)$: $M \to |M|_d$

$\lambda_{J,N}$ (мера), тогда: $\overline{\lambda^d_{J,N}}$: $\underbrace{\overline{J([-N,N]^d)}^{\lambda^d_{JN}}}_{=\, m^d_{\lambda,N}} \to [0, 2^d N^d]$ → измер. по Лебегу подмн-во куба

Замечаем, что $0 < N_1 < N_2$ (не обяз. нат.) $\forall M \in m^d_{\lambda,N_1} \to$

$\to \lambda^d_{N_1}(M) = \lambda^d_{N_2}(M) \Longleftrightarrow \lambda^d_{N_1} = \lambda^d_{N_2} \big|_{m^d_{\lambda,N_1}}$ ← сужение

Упр: $\delta_\gamma(\cup m^d_{\lambda,N}) = \delta_\gamma(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} m^d_{\lambda,N}) = \{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \mid : A_k \in m^d_{\lambda,k}\}^* \Rightarrow B(\mathbb{R}^d)$

$\quad\quad \| \quad m^d_\lambda$ - с-ма всех измер. отн-но полной меры Лебега в $\mathbb{R}^d$ подмн-в

$\lambda^d: m^d_\lambda \to [0,+\infty]$, т.ч. $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda^d_k(A_k)$, при $A_k \in$ $\in m^d_{\lambda,k}$

Th: опред. λ^d корректно: λ^d наз. полной d-мерной мерой Лебега

Замечание: $\mathrm{Card}(B(\mathbb{R}^d)) = \mathfrak{c}$ (continuum)
(Card → кол-во эл.-в (кардинальное число), мощность)

Канторовское совершенное мн-во измеримо по Ж., и все его подмн-ва тоже, а этих подмн-в $> \mathfrak{c}$

Опр. Пусть S - с-ма мн-в, $\mu: S \to [0,+\infty)$, μ наз. полной, если $\forall A \in S\ (\mu(A)=0 \to \forall B \subset A)\ B \in S \wedge \mu(B)=0)$.

В этом случае и саму сист. S наз. полной отн. меры μ.

Следствие: λ^d полна, m^d_λ полна отн-но λ^d.

Опр: δ-адд. неотриц. мера на δ-алг. σч с ед. E наз. δ-конечной, если $\exists (A_1, A_2, \dots) \subset$ $\sigma\mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, т.ч.:

1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu A_n < \infty$

<u>Опр.</u>: Пополнение неотриц. σ-конечной меры μ, зад. на σ-алг. $\mathcal{M}$ - это новая мера $\overline{\mu}$ $\overline{\mathcal{M}} \to [0, +\infty)$, т.ч.

$\overline{\mathcal{M}} = \{ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \mid : \mu^* A_k = 0 \} \cup \mathcal{M} \} \overset{\text{Упр.}}{=\!=} \{ B \subset (\cup \mathcal{M}) \mid :$

$: \exists A \in \mathcal{M}.\ \mu^*(A \Delta B) = 0 \}$ и если A и B как только что описано, то $\overline{\mu} B = \mu A$

<u>Опр</u>: $\lambda^d_B = \lambda^d|_{B(\mathbb{R}^d)}$ - „d-мерная борелевская мера Лебега"

<u>Опр</u>: Пусть L - лин. пр-во над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $l: \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ наз. лин. функционал (однор.) $\Leftrightarrow$ $\forall\ \vartheta, w \in \mathcal{L}$ $\forall c \in$ $\in \mathbb{K}$ $l(\vartheta + cw) = l(\vartheta) + cl(w)$

($c = 1 \to$ „адд-ть") ($\vartheta = 0$ „однор. 1ой степени)

Но м.б. и на части пр-ва:

<u>Опр.</u> Пусть $\mathcal{L}$ как выше, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, $f: \mathcal{L}_0 \to \mathbb{R}$ наз. лин. (одн.), если $\exists$ лин. $l: \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, т.ч. $l|_{\mathcal{L}_0} = f$

<u>Упр</u>: Пусть K - теор.-мн. кольцо, $\mu: K \to \mathbb{K}$ адд., $E := \cup K$, $\mathcal{L}_0 = \{ 1_{A \subset E} \mid : A \in K \}$, $\mathcal{L}_0 \subset K^E$, $l_\mu(1_{A \subset E}) = \mu(A)$, $\forall A \in K$, l_μ-лин.

<u>Опр</u>. Все лин. и непр. прод.-е ф-ла l_μ наз. интегралами по μ. Например, на лин. оболочку $\langle 1_{A \in E} \rangle_{\mathbb{K}}$ прод-е l_μ с сохр-м св-ва лин. ед-но и эл-ты $\langle h_0 \rangle_{\mathbb{K}}$ наз. простыми интегрир. по μ ф-ми на E. Если μ неотр. σ-адд. и σ-конеч. на σ-алг. $\mathcal{M}$., то $\mathcal{M}_{fin,\mu} = \{ A \in \mathcal{M} \mid : \mu A < +\infty \}$ явл. δ-кольцом и простыми интегрир. по μ ф-ми наз. эл-ты

$\langle \{ \mathbb{1}_{A \subset E} \mid : A \subset \mathcal{M}_{fin,\mu} \} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{1,0}(\mu)$

$\forall f = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k} \subset E \in \mathcal{L}_{1,0}(\mu)$, т.ч. $A_k \subset \mathcal{M}_{fin,\mu}$ есть $l_\mu(f) =$

$= \sum c_k \mu(A_k) = \int\limits_E f(x)\mu(dx)$