Марковская цепь как случайный процесс

Выполнила Карина Лирисман, группа Б01-008

1 Введение

Марковский процесс - это стохастический процесс, в котором вероятность перехода состояний зависит только от текущего состояния и не зависит от предыдущих состояний (т.е. обладает свойством Маркова). Марковский процесс удобен для моделирования многих систем, таких как финансовые рынки, экономические и социологические процессы, погода и другие случайные явления.

1.1 Марковская цепь

Марковская цепь - это стохастический процесс, который определяется из состояний и переходов между этими состояниями.

Формально, мы можем определить марковскую цепь $\{X_n\}$ на конечном множестве состояний $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ следующим образом. Если X_n находится в состоянии s_i, то вероятность перейти в состояние s_j на следующем шаге (т.е. в момент времени $n+1$) обозначим P_{ij}, где $i, j \in S$ и $\sum_j P_{ij} = 1$.

Марковская цепь является временно *однородной*, если матрица переходных вероятностей P_{ij} не меняется со временем. Если матрица переходных вероятностей зависит от времени, то мы говорим, что марковская цепь *нестационарна*.

2 Случайный процесс

Случайный процесс[1] - это семейство случайных переменных $\{X_t : t \in T\}$ на общем вероятностном пространстве. Для каждого фиксированного $t \in T$, X_t - это случайная переменная. *Случайный процесс в узком смысле* - это коллекция случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, и индексированных некоторым параметром. Например, если мы рассматриваем случайный процесс, описывающий движение частицы в жидкости, то каждая случайная величина может соответствовать координате частицы в разные моменты времени. Таким образом, случайный процесс позволяет нам моделировать эволюцию случайных величин во времени.

Теперь введем понятие *Колмогоровского пространства*: но представляет собой математическую конструкцию, которая позволяет определить вероятностное пространство для любого случайного процесса.

Формально, *колмогоровское пространство*[1] определяется следующим образом. Пусть T - некоторое параметризующее множество, S - множество состояний, и для каждого

$t \in T$ задано вероятностное пространство $(S_t, \mathcal{F}_t, P_t)$, где S_t - множество состояний на момент времени t, $\mathcal{F}_t$ - σ-алгебра событий на S_t, а P_t - вероятностная мера на $(S_t, \mathcal{F}_t)$. Тогда колмогоровское пространство с функциями определяется как пространство функций $X : T \to S$, для которых каждая компонента X_t является случайной величиной на $(S_t, \mathcal{F}_t, P_t)$.

Наконец, введем понятие *сигма-алгебры*. *Сигма-алгебра*[1] - это коллекция подмножеств некоторого множества, которая обладает рядом свойств, например, она замкнута относительно операций объединения, пересечения и дополнения. В контексте вероятностной теории, сигма-алгебра используется для описания множества событий, которые могут возникнуть в результате случайного эксперимента. Сигма-алгебра $\sigma(X_t)$, порожденная случайной величиной X_t, состоит из всех событий, которые можно выразить через X_t. Таким образом, $\sigma(X_t)$ содержит все информацию о состоянии процесса X в момент времени t.

Колмогоровское пространство с функциями и связанная с ним сигма-алгебра $\sigma(X_t)$ являются важными концепциями в теории вероятностей, так как они позволяют определить вероятностное пространство для любого случайного процесса и задать информационную структуру процесса.

Случайный процесс также можно рассматривать как индексированный набор случайных величин в некоторый момент времени. Если множество временных меток T является интервалом времени, то случайный процесс называется непрерывным во времени. Если T конечен или состоит из дискретных меток времени, то случайный процесс называется дискретным во времени.

В данном случае переходы системы из одного в другое состояние возможно в строго определенные моменты времени t_0, t_1, $\ldots$, t_n , а случайный процесс $X(t_i)$ в промежутках между указанными моментами времени сохраняет свое состояние (см рис.1). Такие процессы встречаются при машинной обработке информации в цифровых ЭВМ.

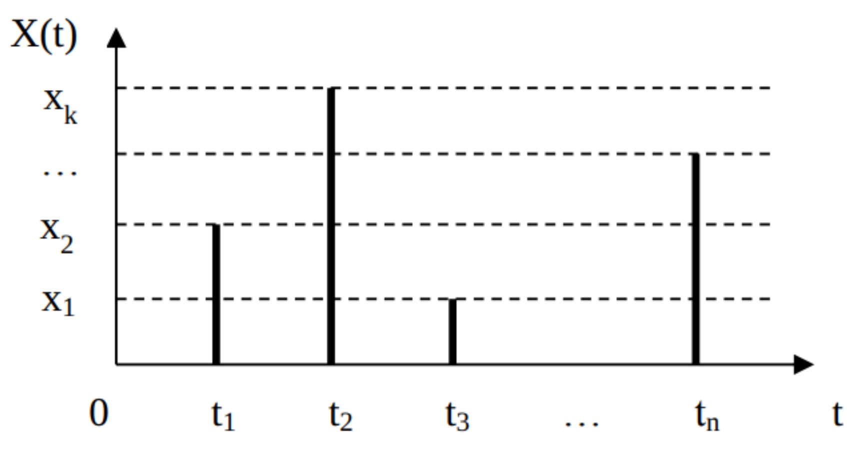

Рис. 1:

Случайный процесс называется *дискретным Марковским процессом*[2], если его состояния можно пронумеровать и переход из одного в другое состояния происходит скачком (см рис.2)

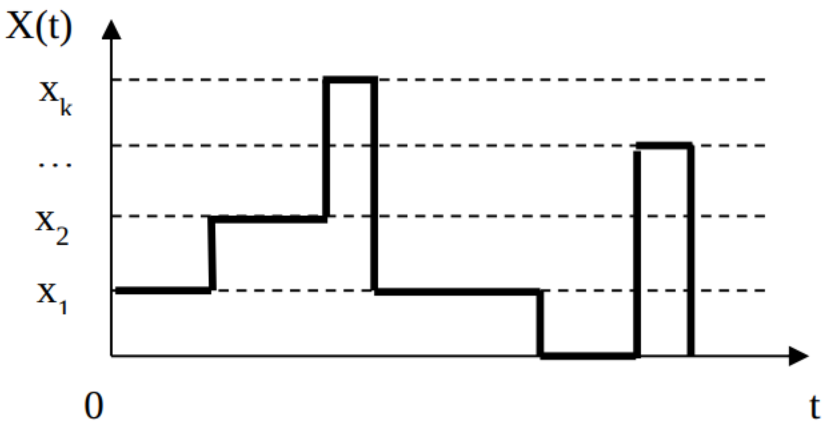

Рис. 2:

В этом случае случайный процесс $X(t)$ принимает дискретные значения ${}_i$, i = 1 ... n, время t изменяется непрерывно.

3 Теорема Колмогорова

Теорема Колмогорова утверждает, что для любой временно однородной марковской цепи с конечным числом состояний существует минимальное неотрицательное целое число n, такое что $P_{ij}^{(n)} > 0$ для всех $i, j \in S$. То есть, начиная с некоторого момента времени, вероятность перехода между любой парой состояний становится положительной.

Теорема Колмогорова устанавливает *свойство стационарности*[2] марковских цепей. Она гласит, что если марковская цепь удовлетворяет условию эргодичности, то существует единственное стационарное распределение вероятностей в этой цепи, которое не зависит от начального состояния.

Теперь, когда определены основные термины, переходим к Марковской цепи.

4 Цепь Маркова как случайный процесс

Марковская цепь[3] – это последовательность случайных событий, где вероятность следующего события зависит только от текущего. В этом смысле марковские цепи являются случайным процессом. В отличие от других случайных процессов, марковские цепи не имеют памяти, то есть не сохраняют информацию о предыдущих событиях.

Особый интерес представляют марковские процессы с конечным числом состояний, которые называются цепями Маркова с дискретным временем. Для таких процессов можно вычислить стационарные распределения и вероятности переходов между состояниями.

4.1 Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова)

Дискретным Марковским процессом с дискретными состояниями и дискретным временем[3] называют процесс, в котором возможные состояния системы $S_1, S_2, \dots, S_n$ можно перечислить (пронумеровать), а сам процесс перехода системы из одного в другое состояние происходит в фиксированные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots\ t_n$. В промежутках между этими моментами времени система сохраняет свое состояние.

При любом шаге перехода системы события переходов образуют полную группу и несовместны, так как система может находиться лишь в одном из состояний, а не в двух и более сразу. При этом рассматриваются все возможные состояния системы.

Если каждое состояние системы в k-й момент времени свяжем с вероятностью, то получим вероятности состояний $P(k)_1, P(k)_2, P(k)_3, \dots, P(k)_n$. Для любого момента времени $P(k)_1 + P(k)_2 +, \dots, + P(k)_n = 1$

Для любого момента времени $t_1,\ t_2,\ t_3, \dots,\ t_k$, существуют вероятности перехода системы из любого состояния в любое другое $P_{ij}(k)$ (i, j = 1, 2, , n). Их называют вероятностями перехода или переходными вероятностями. Эти вероятности отличны от нуля, если система переходит из одного состояния в другое, и равны нулю, если на данном шаге система остается в прежнем состоянии.

Если вероятности перехода не зависят от номера шага (момента времени) и не изменяются от шага к шагу, то такой Марковский процесс называют однородным. В противном случае Марковский процесс называют неоднородным.

Вероятностная картина возможных состояний системы и ее переходов может быть задана матрицей P, элементами которой являются переходные вероятности:

$$P(k) = \begin{bmatrix} p(k)_{11} & p(k)_{12}\dots & p(k)_{1n} \\ p(k)_{21} & p(k)_{22}\dots & p(k)_{2n} \\ p(k)_{n1} & p(k)_{n2}\dots & p(k)_{nn} \end{bmatrix}$$

Матрица переходных вероятностей обладает следующими свойствами:

- сумма вероятностей, стоящих в каждой строке матрицы равна единице
- на главной диагонали матрицы стоят вероятности того, что система не выйдет из состояния S_i а останется в нем
- если переходная вероятность $P_{ij}(k) = 0$, то это означает, что на данном шаге система не может перейти из состояния S_i, в состояние S_j.

Имея размеченный граф состояний или матрицу переходных вероятностей и, зная начальное состояние системы, можно найти все возможные вероятности состояний системы для любого момента времени. Для этого используют следующие уравнения:

- для однородного Марковского процесса:

$$p(k)_j = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij}, j = 1, 2, ..., n$$

- для неоднородного Марковского процесса:

$$p(k)_j = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p(k)_{ij}, j = 1, 2, ..., n$$

5 Литература

1. Ширяев А. Н. Ш64 Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд., перераб. и доп. —М.: МЦНМО, 2004. ISBN 5-94057-036-4 Кн. 2. — 408 с. — ISBN 5-94057-106-9

2. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 408 с. - ISBN 5-9221-0335-0.

3. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы), Лицер Р.Ш., Ширяев А.Н., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука"1974.