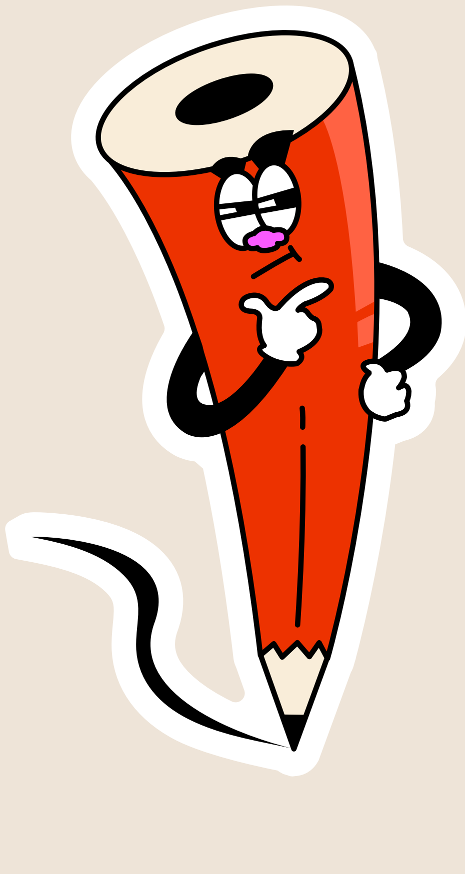
Лекция № 11



22.04.2023

$(\xi_t)_{t\in T} = \xi_0$

САУП — случ. процесс с вещ. зн. с мн-м T, параметриз. случ. величины (значение) процесса, в широком смысле — семейство борелевских вероятностных мер, парам. не пустыми под-ми $\forall \subset T$ и согласованное в след. смысле: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$,

$$P_s(B) = \mathbb{P}_t(B \times \mathbb{R}^{t\setminus s})$$

N прибора \ номера эл. экспер.	1 . . .	N
1	$\left(\right.$	
2	$n\,\bar{\xi}_0^{\,4}$	
$\vdots$		
d	$\left.\right)$	

подмн-во

$$\mathbb{P}_t : \mathcal{B}(\mathbb{R}^t) \longrightarrow [0,1], \quad s \subset t$$

$$\mathbb{P}_s = \mathbb{P}_t \circ (P_{\mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s})^{-1}, \text{ где } \left(P^t_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^s}(x, t\to\mathbb{R}) = x|_s\right) : s \to \mathbb{R}$$

$$F_t(\bar{x}) = \mathbb{P}_t(\{\bar{y} \in \mathbb{R}^t \mid \forall t \in t \quad y(t) \le x(t)\})$$

Согласование в терминах ф-ий распределения

$$F_s(\bar{z}) = \lim_{x(t)\to\infty} F_{s\sqcup\{t\}}(\bar{x} \equiv \bar{z} \sqcup \{t, x(t)\})$$

Если $s = \{1, \dots, d\}$, $t = \{1, 2, 3, \dots, d, t+1\}$

$$F_s = F_{1,2,\dots,d} \equiv F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_d}(z_1,\dots,z_d) = \lim_{\mathbb{R}\ni x\to+\infty} F_{\xi_1,\dots,\xi_d,\xi_{d+1}}(z_1,\dots,z_d, x) = \mathbb{P}\begin{pmatrix} y_1 \le z_1 \\ \vdots \\ y_{d+1} \le x \end{pmatrix}$$

Согласование в терминах хар. ф-ий конечномерн. распр-ий

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{x\in t} x(t)^2 \qquad h_s : \mathbb{R}^s \ni \bar{y} \mapsto \int_{\mathbb{R}^s} e^{i(\bar{y},\bar{z})}\,\mathbb{P}_s(d\bar{z}) = h_{s\sqcup\{t\}}(\bar{y} \sqcup \{(t,0)\}) = \int_{\mathbb{R}^{s\sqcup\{t\}}} e^{i(\bar{y},\bar{z})}\,\mathbb{P}_{s\cup\{t\}}(d\bar{z}\times dx)$$

$\mathbb{P}_s(B) = \int_{\mathbb{R}^s} \mathbb{1}_{B\subset\mathbb{R}^3}(\bar z)\,\mathbb{P}_s(d\bar z) = \mathbb{P}_t(B\times\mathbb{R}^{\{t\}}) = \int_{\mathbb{R}^{s\sqcup\{t\}}} \mathbb{1}_{B\times\mathbb{R}^{\{t\}}}(\bar x =$

$= \bar z \sqcup x_t)\,\mathbb{P}_{s\sqcup\{t\}}(d\bar z\times dx_t) = \int_{\mathbb{R}^{s\sqcup\{t\}}} \mathbb{1}_{B\in\mathbb{R}^3}(z)\,\mathbb{P}_{s\sqcup\{t\}}(d\bar z\times dx_t)$

Согласование в терминах хар. ф-ий кон-м-х распред.

$\boxed{\|\bar x\|^2 = \sum_{x\in t} x(t)^2}$ $h_s: \mathbb{R}^s \ni \bar y \mapsto \int_{\mathbb{R}^s} e^{i(\bar y,\bar z)}\,\mathbb{P}_s(d\bar z) =$

$= h_{s\sqcup\{t\}}(\bar y \sqcup\{(t,0)\}) = \int_{\mathbb{R}^{s\sqcup\{t\}}} e^{i(\bar y,\bar z)}\,P_{s\sqcup\{t\}}(d\bar z\times dx_t)$

$\mathbb{P}_s(B) = \int_{\mathbb{R}^s} \mathbb{1}_{B\subset\mathbb{R}^3}(\bar z)\,\mathbb{P}_s(d\bar z) = \mathbb{P}_t(B\times\mathbb{R}^{\{t\}}) = \ldots = \int_{\mathbb{R}^{s\sqcup\{t\}}} \mathbb{1}_{B\subset\mathbb{R}^3}(z)\,\cdot$

$\cdot\,\mathbb{P}_{s\sqcup\{t\}}(d\bar z\times dx_t)$

Согласование конечномерных распр. процесса в терминах плотностей

Если $\mathbb{P}_t(d\bar x) = \rho_t(\bar x)\cdot leb_{\mathbb{R}^t}(d\bar x)$ для $\rho\in L_1(\mathbb{R}^t)$ и $\mathbb{P}_s(d\bar z) =$

$= \rho_s(\bar z)\,leb_{\mathbb{R}^s}(d\bar z)$, то при $t = s\sqcup\{t\setminus s\}$

$\rho_s(\bar z) = \int_{\mathbb{R}^{t\setminus s}} s_t(\bar z\sqcup\bar u)\,leb(d\bar u)$

Д-во:

$\forall$ простейших интегрир. ф-ий $\varphi = \mathbb{1}_B$, $B\in B(\mathbb{R}^s)$. $\mathbb{P}_s(B) =$

$= \int_B \rho_s(\bar z)\,leb_{\mathbb{R}^z}(d z) = \int_{B\times\mathbb{R}^{t\setminus s}} s_t(\bar x)\,leb_{\mathbb{R}^t}(d\bar x)$

$\mathbb{P}_s(B) = \int_{\mathbb{R}^s} \mathbb{1}_B(\bar z)\,\rho_s(\bar z)\,leb_{\mathbb{R}^s}(d\bar z) = \int_{\mathbb{R}^t} \mathbb{1}_B(\bar z)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{t\setminus s}}(\bar u)\,\rho_t(\bar z\sqcup\bar u)$

$leb_{\mathbb{R}^s}(d\bar z)\times leb(\mathbb{R}^{t\setminus s})(d\bar u)$

<u>Th Фубини</u>: Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ - σ-алгебры с ед-ми $E_1 = \bigcup\mathcal{A}_1 \in$

$\in\mathcal{A}_1$, $E_2 = (\bigcup\mathcal{A}_2)\in\mathcal{A}_2$

$\mu_k: \mathcal{A}_k\to[0,+\infty]$, $k\in\{1,2\}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_1\sqcap\mathcal{A}_2)$, где

$\mathcal{A}_1\sqcap\mathcal{A}_2 = \{A_1\in\mathcal{A}_1, A_2\in\mathcal{A}_2\}$, тогда $\exists!$ σ-адд. мера μ:

$\mathcal{A}\to[0,+\infty]$, т.ч. $\underbrace{\mu(A_1\times A_2) = \mu_1(A_1)\times\mu_2(A_2)}_{\forall A_1\in\mathcal{A}_1,\ \forall A_2\in\mathcal{A}_2}$

$(0\cdot\infty = 0)$ и $\forall f\in L_1(\mu)$

$\int_{E_1\times E_2} f(z)\,\mu(dz) = \int_{E_1\times E_2} f(x_1,x_2)\,\mu(dx_1,dx_2) = \int_{E_1}\Big(\int_{E_2} f(x_1,x_2)\ \cdot$

$\cdot \mu(dx_2))\mu_1(dx_1) = \int\limits_{E_2} \left(\int\limits_{E_1} f((x_3, x_2))\, \mu_1(dx_1)\right) \mu_2(dx_2)$

__Д-во__: Для $f = \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}$ (2) $\Leftrightarrow$ (1), далее линейность и монотонн. непр-ть по схеме интеграла Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}^S} \mathbb{1}_B(\bar{z}) \int\limits_{\mathbb{R}^{t/S}} \underbrace{\int (\bar{z} \sqcup \bar{u})\, leb_{\mathbb{R}^{t/S}}(d\bar{u}))}_{\varphi(\bar{z})} \Big) leb_{\mathbb{R}^S}(d\bar{z})$$

Теорема Лебега о мат. сходимости:

Если $(E, \mathcal{A})$ измер. пр-во с неотриц. σ-адд. $\mu: \mathcal{A} \to [0; +\infty]$, $f_\infty, g, f_1, f_2, \ldots$ – измер. $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Причем: $f_n \to f_\infty$ п.в. на E и $\forall j \in \mathbb{N}$ $|f_j|_{\text{п.в.}} \le g$, $\int\limits_E g\mu < \infty$,

тогда $f_\infty \in L_1(\mu)$ и $\int\limits_E f_n \mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_E f_\infty \mu \in \mathbb{R}$

"$\int \mathbb{1}_{B \cdot S}\, ds = \int \mathbb{1}_B \varphi\, ds$" $\longrightarrow$ $\forall$ простых инт-х ψ на $\mathbb{R}^S$

$\int \psi \rho_S\, ds = \int \psi\varphi\, ds \leftrightarrow \int \psi(\rho_S \to \varphi)\, ds$

$\psi \rightrightarrows \operatorname{sign}(\rho_S - \varphi), |\psi_n| \le 1$; $|\psi_n(\rho_S - \varphi)| \underset{\text{Th. Лебега}}{\le} \rho_S + \varphi$

$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^S} \psi_n(\rho_S - \varphi) \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} |\rho_S - \varphi|\, ds = 0 \to \rho_S \underset{\text{п.в.}}{=} \varphi$

$\forall t \in T$

Мат. ожид. вещ. сл. величина ξ_t с распред. $P_t = \mathbb{P}_{\{t\}}$ это $\int\limits_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_t(dx)$, если ф-ия $f \equiv id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = x$ интегрир. в смысле Лебега по $\mathbb{P}_t$

$\rho_{\{t\}}(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ не имеет мат. ожид.

α-й момент $(\alpha \in \mathbb{R})$ распр. μ это $\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \mu(dx)$, если α-момент. целое, то $\int x^2 \mu(dx)$ тоже назыв. α-момент

нерав-во Коши-Буняковского: если $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0, N]$, $N < \infty$ σ-адд. на σ алг., $E = \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$

$f: E \to \mathbb{R}$ $\int\limits_E f^2 \mu < \infty$, тогда $\int\limits_E |f| \mu < \infty$

$|f| \le \max(1, f^2) \le 1 + f^2$

$0 \le f_t \le |f|$

Если ещё и g инт. и $\int g^2 \mu < \infty$, то $\exists \int fg\mu$ и $|\int fg\mu| \le$

$\le \sqrt{\int f^2 \mu} \sqrt{\int g^2 \mu}$

$0 \le (f \pm \lambda g)^2 \equiv f^2 \pm 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$

$|f \cdot g| = |f| \cdot |g| = \sqrt{|f^2| \cdot |g^2|} \le \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$

$0 \le \int (f \pm \lambda g)^2 \mu \equiv \lambda^2 \int g^2 \mu \pm 2\lambda \int fg\mu + \int f^2 \mu$

$\frac{D}{4} \le 0: \quad 0 \geqslant \left(\int fg\mu\right)^2 - \left(\int g^2 \mu\right)\left(\int f^2 \mu\right)$

$\left|\int fg\mu\right| \le \int |f||g|\mu \le \|f\|_{L_2(\mu)}, \quad \|f\|_{L_p(\mu)} = \sqrt[p]{\int_E |f|^p \mu}$

<u>Следствие</u>: $\int x^2 \mathbb{P}_t(dx) < \infty \rightarrow |x| \mathbb{P}_t(dx) = \left|\int_1 |x| \mathbb{P}_t(dx)\right| \le$

$\le \sqrt{\int 1 \cdot \mathbb{P}_t} \cdot \sqrt{\int x^2 \mathbb{P}_t(dx)} \rightarrow \exists \int x \mathbb{P}_t(dx) = E \quad \xi_t = M \xi_t$

$\int (x - E\xi_t)^2 \mathbb{P}_t = D\xi_t \equiv \int x^2 \mathbb{P}_t - (E\xi_t)^2$

<u>Следствие</u>: в случае процесс ср. зн. в $\forall$ момент и дисперсия в $\forall$ момент, если они существ., то явл. ф-ми

$T \rightarrow \mathbb{R}$

Пусть теперь $T \ni t \longmapsto D\xi_t \in \mathbb{R}$ — конечная ф-ия

Ковариантной ф-ией процесса наз. $T^2 = T \times T \ni (s,t) \longmapsto$

$\operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} (x - \mathbb{P}_s)(y - E\xi_t)\, \mathbb{P}_{[t,s]}(dx, dy)$

$D\xi_s = D\xi_t$, если $t = s$

Корреляционное ф-ие $\rho: T \times T \ni (s,t) \mapsto \dfrac{\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s)}{\sqrt{D\xi_t} \cdot \sqrt{D\xi_s}}$

<u>Th. Колмогорова</u> о сущ общего распр.

Если $(\xi_t)_{t \in T}$ — вещ. процесс с распр. $(\mathbb{P}_t)_{\varnothing \ne t \in \mathcal{P}(T)}$ на $\mathbb{R}^T$ сущ. σ-адд. мера $\mathbb{P}_T$ на $\sigma(\{P^{-1}_{tcT} B \backslash B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^t)\})$

$\{x: T \rightarrow \mathbb{R} \mid x|_t \in B\}$ „ цилиндрич. борел. подмн-в $\mathbb{R}^T$,

т.ч. $\forall t \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\varnothing\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^t)$

$\mathbb{P}_t(B) = \mathbb{P}_T(\mathbb{P}^{-1}_{t \in T}(B))$

При этом, если задать $\Omega = \mathbb{R}^T$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ (σ-алгебра, порождённая борел. цилиндрами в $\mathbb{R}^T$), то $\forall t \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\varnothing\}$ и $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^t)$

$P_t(B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \{(t, x_t(\omega))\} \in B$

Тогда $\mathbb{E}\xi_t = \int_\Omega x_t(\omega)\, \mathbb{P}_t(d\omega)$ и $\forall (s,t) \in T^2$ $\operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) =$

$= \int_\Omega (x_t(\omega) - \mathbb{E}\xi_t)(x_s(\omega) - \mathbb{E}\xi_s)\, \mathbb{P}_T(d\omega)$