Марковская цепь как случайный процесс

Выполнила Карина Лирисман, группа Б01-008, 2023 г.

1 Введение

Идея А.А. Маркова, лежащая в основе всей развиваемой теории марковских процессов, состоит в том, что выделяется класс процессов, для которых эволюция во времени может быть описана следующим образом: поведение процесса после момента t определяется не всей его предысторией, а лишь значением,которое процесс принял в момент времени t. Здесь уместна аналогия с классическим описанием движения "частицы", поведение которой после момента t определяется лишь ее положением (координатами) и скоростью в момент t. Если время дискретно $(t = 0, 1, ...)$, то сказанное особенно наглядно: изменение состояний изучаемого объекта представляется последовательностью шагов, где каждый шаг определяется предыдущим. Отсюда и возникло понятие *цепи Маркова*, послужившее основой разнообразных дальнейших обобщений.

2 Случайный процесс

Пусть $\xi = \xi(t)$ - случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$ - ее функция распределения *(А.Н. Ширяев 'Вероятность' 1957,* *стр. 260)*. Существует случайная величина, имеющая функцию $F(x)$ своей функцией распределения, то есть существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ на нем такие, что

$$P\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = F(x).$$

Случайный процесс с временным интервалом T - совокупность случайных величин $X = (\xi_t)_{t \in T}$, где T - некоторое подмножество числовой прямой (А.Н. Ширяев 'Вероятность' 1957, стр 194 определение 3).

Итак, $X = (\xi_t)_{t \in T}$ - случайный процесс в смысле данного выше определения, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ для $t \in T \subseteq R$.

С физической точки зрения наиболее важной вероятностной характеристикой случайного процесса является набор

$\{F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)\}$ его конечных функций распределения

$$F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n) = P\{\omega : \xi_{t_1} \le x_1, ..., \xi_{t_n} \le x_n\},$$

заданных для всех наборов $t_1, ...t_n$ с $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n$.

Всякую функцию $F = F_n(x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющую условиям (*А.Н. Ширяев 'Вероятность' 1957 стр 175*):

1. $\Delta_{a_i b_i} ... \Delta_{a_n b_n} F_n(x_1 ... x_n) \ge 0$, где $\Delta_{a_i b_i} : R^n \to R$ - разностный оператор, действующий по формуле $(a_i \le b_i)$:

$$\Delta_{a_i b_i} ... \Delta_{a_n b_n} F_n(x_1 ... x_n) = \\ F_n(x_1, ..., x_{i-1}, b_i, x_{i+1} ...) - F_n(x_1, ..., x_{i-1}, a_i, x_{i+1} ...)$$

2. $F_n(x^{(k)}) \downarrow F_n(x), k \to \infty$

3. $F_n(+\infty, ..., +\infty) = 1$

4. $\lim\limits_{x \downarrow y} F_n(x-1, ..., x_n) = 0$,

будем называть n - мерной функцией распределения в R^n.

Из формулы выше видно, что для каждого набора $t_1, ...t_n$ с $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n$ функции $F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)$ являются n-мерными функциями распределения в смысле данного выше определения, и что набор

$$F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n) = F_{t_1,...t_n}(x_1, ..., x_k, +\infty, ..., +\infty),$$

где $k < n$.

Естественно теперь поставить вопрос о том, при каких условиях заданное семейство функций распределения $F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)$ в смысле упомянутого определения может быть семейством конечномерных функций распределения некоторого случайного процесса? Для ответа на вопрос приведем формулировку теоремы Колмогорова о существовании процесса.

3 Теорема Колмогорова

Теорема Колмогорова о существовании процесса. Пусть

$$\{F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)\}, \text{ где } t_i \in T \subseteq R, t_1 \le t_2 \le ... \le t_n, n \ge 1,$$

заданное семейство конечномерных функций распределения, удовлетворяющих условиям согласованности. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и случайный процесс $X = (\xi_t)_{t \in T}$, такие что

$$P\{\omega : \xi_{t_1} \le x_1, ..., \xi_{t_n} \le x_n\} = F_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)$$

Сформулируем также два следствия данной теоремы.

Следствие №1. Пусть $F_1(x), F_2(x), ...$ - последовательность одномерных функций распределения. Тогда существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ такие, что

$$P\{\omega : \xi_i(w) \leq x\} = F_i(x)$$

В частности, существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, на котором определена бесконечная последовательность бернуллиевских случайных величин. Отмечу, что в качестве Ω можно здесь взять пространство

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ...), a_i = 0, 1\}$$

Для доказательства данного следствия достаточно положить $F_{1,...,n}(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1)...F_n(x_n)$ и применить теорему Колмогорова о существовании процесса.

Следствие №2. Пусть $T = [0, \infty)$ и $\{p(s, x; t, B)\}$ - семейство неотрицательных функций, определенных для $s, t \in T, t > s, x \in R, B \in \mathscr{B}(R)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $p(s, x; t, B)$ является при фиксированных s, x и t вероятностной мерой по B
2. при фиксированных s, t и B $p(s, x; t, B)$ является борелевской функцией по x
3. для всех $0 \leq s \leq t \leq \tau$ и $B \in \mathscr{B}(R)$ выполняется уравнение Колмогорова - Чэпмена

$$p(s, x; t, B) = \int^{R} p(s, x; t, dy) p(t, y; \tau, B)$$

И пусть $\pi = \pi(B)$ - вероятностная мера на $R, \mathscr{B}(R)$. Тогда существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и случайный процесс $X = \{\xi_t\}_{t \geq 0}$ на нем такие, что для $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$,

$$P\{\xi_{t_0} \le x_0, \xi_{t_1} \le x_1, ..., \xi_{t_n} \le x_n\} =$$
$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} \pi(dy_0) \int\limits_{-\infty}^{x_1} p(0, y_0; t_1, dy_1) ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(t_{n-1}, y_{n_1}; t_n, dy_n)$$

Так постоенный процесс X называется *марковским процессом (А.Н. Ширяев 'Вероятность' 1957 стр. 263)*

4 Цепь Маркова как случайный процесс

В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимает случайный процесс $X = (\xi_t)_{t \in T}$ и его параметр время t, различают виды Марковских случайных процессов. Цепь Маркова - дискретный процесс с дискретным временем. В данном случае переходы системы из одного в другое состояние возможно в строго определенные моменты времени t_0, t_1, $\ldots$, t_n, а случайный процесс X в промежутках между указанными моментами времени сохраняет свое состояние.

Если каждое состояние системы в k-й момент времени свяжем с вероятностью, то получим вероятности состояний $P(k)_1$, $P(k)_2$, $P(k)_3$, $\ldots$, $P(k)_n$. Для любого момента времени

$$P(k)_1 + P(k)_2 + \ldots + P(k)_n = 1$$

Существуют функции $P_{n+1}(x; B)$ - регулярные условные вероятности *(А.Н. Ширяев Вероятность 1957 стр 530)*, являющиеся при фиксированном x мерами на $(R, \mathscr{B}(R))$ и при фиксированном B измеримыми функциями по x, такие, что

$$P(X_{n+1} \in B | X_n) = P_{n+1}(X_n; B) \text{ (Р-п. н.)}$$

Функции $P_n = P_n(x; B), n \ge 0$, называют переходными функциями *(А.Н. Ширяев Вероятность 1957 стр 530)* и в том случае, когда они совпадают, т.е. $P_1 = P_2 = ...$, соответствующую марковскую цепь X принято называть однородной по времени.

Вероятностная картина возможных состояний системы и ее переходов может быть задана матрицей P, элементами которой являются переходные вероятности:

$$P(k) = \begin{bmatrix} p(k)_{11} & p(k)_{12}... & p(k)_{1n} \\ p(k)_{21} & p(k)_{22}... & p(k)_{2n} \\ & ... & \\ p(k)_{n1} & p(k)_{n2}... & p(k)_{nn} \end{bmatrix}$$

Матрица переходных вероятностей обладает следующими свойствами:

1. сумма вероятностей, стоящих в каждой строке матрицы равна единице
2. на главной диагонали матрицы стоят вероятности того, что система не выйдет из состояния, а останется в нем
3. если переходная вероятность $p_{ij}(k) = 0$, то это означает, что на данном шаге система не может перейти из одного состояния в другое.

Имея матрицу переходных вероятностей, данные о начальном состоянии системы, можно найти все возможные вероятности состояний системы для любого момента времени. Для этого, в случае однородного Марковского процесса используют следующее уравнение:

$$p(k)_j = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij}, j = 1, 2, ..., n$$

Итак, *марковская цепь* – это последовательность случайных событий, где вероятность следующего события зависит только от текущего. В этом смысле марковские цепи и являются случайным процессом. В отличие от других случайных процессов, марковские процессы не сохраняют информацию о предыдущих событиях.

5 Литература

1. Ширяев А. Н. Вероятность — МГУ, 1957

2. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 408 с. - ISBN 5-9221-0335-0.

3. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы), Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука"1974.