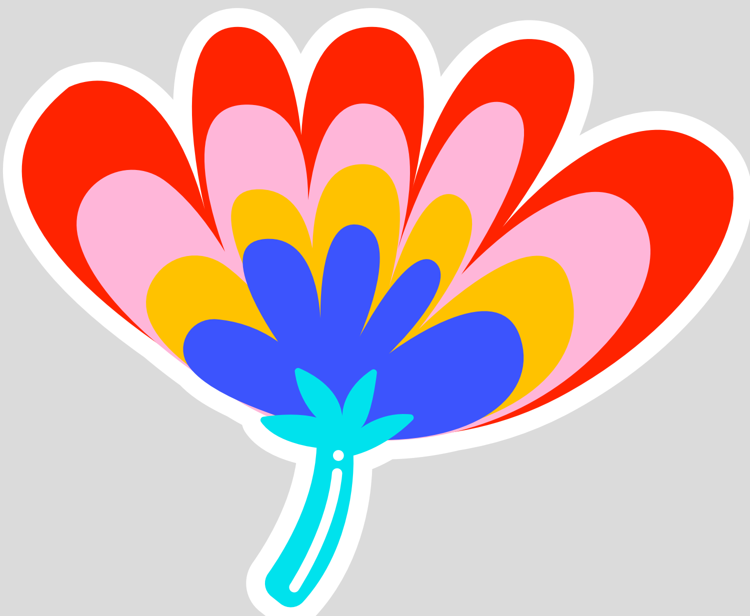
Лекция № 5



11.03.2023

Одномерное эксп. ф-ия распред. непрерывна справа

$F_Э(x) = P_Э(\xi \le x) = \mu_{F_Э}(-\infty, x]$

$F_Э(b) - F_Э(a) = \mu_{F_Э}(a, b] = P_Э(\xi \in (a, b])$

Пример систем: 1) $\overline{L}(\mathbb{R})$ 2) конеч. / дизъ. конечн. объед.

3) $\mathbb{R}$, все борел. мн-ва

Название: 1) полукольцо мн-в ; 2) кольцо ; 3) σ-кольцо

Св-ва меры: • $\mu_{F_Э} \in \mathbb{R}$, конечно адд. $\{1), 2)\}$

• $\mu_{F_Э} \in [0, +\infty)$, σ-адд. $\{1), 2), 3)\}$

Замечание: Пересечение колец в общем случае - не полукольцо

$\left.\begin{array}{l} P_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\} \\ P_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{b, d\}, \{a, b, c, d\}\} \end{array}\right]$ - полукольца

$P_1 \cap P_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b, c, d\}\}$ - не полукольцо

<u>Утв.</u>: Если $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - любое индексир. мн-во колец (σ-колец), то

$\{\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha\}$ - тоже кольцо (σ-кольцо)

<u>Утв</u>: пересечение 2-х алгебр в общем случае - не алгебра

<u>Утв</u>: $K \in P(\Omega)$ - кольцо мн-в $\to \underbrace{\{\Omega \setminus A \mid A \in K\}}_{\tilde{K}} \cap K = A$ - алгебра

с един. Ω.

<u>Д-во</u>: 1) $\varnothing \in K \to \varnothing \in A$

2) $\varnothing \in K \to \Omega \in \tilde{K} \to \Omega \in A$

3) $\exists\, \vartheta \in K, x \in K \to u = \Omega \setminus x \in \tilde{K}$

$\Omega \setminus (u \cup \vartheta) = (\Omega \setminus u) \cap (\Omega \setminus \vartheta) = A \setminus \vartheta \in K$

4) a) $u \setminus \vartheta = (\Omega \setminus x) \setminus \vartheta = \Omega \setminus \underbrace{(x \cup \vartheta)}_{\in K} \in A$

b) $u, \vartheta \in K \to u \setminus \vartheta, \vartheta \setminus u \in K$

c) $u = \Omega \setminus A$, $\vartheta = \Omega \setminus B$; $A, B \in K$

$(\Omega \setminus A) \setminus (\Omega \setminus B) = (\Omega \setminus A) \cap B = B \setminus A \in K$

E.G: $A_1 = \{$ конечн. подмн-ва в $\mathbb{N}$ и их доп. до $\mathbb{R}\}$

$A_2 = \{$ конечн. подмн-ва в $\mathbb{N}$ и их доп. до $\mathbb{C}\}$

$A_1 \cap A_2 = \{$ конечн. подмн-ва в $\mathbb{N}\}$ – не алгебра

Проблема в том, что A_1 и A_2 имеют разные единицы

Утверждение: Если $\mathcal{P}$ – полукольцо, то система $\mathcal{K}(\mathcal{P}) = \{$ все (дизъ.) конеч. объед. эл-в $\mathcal{P}\}$ может быть описана как:

1) наим. среди колец, сод. $\mathcal{P}$ как часть

2) как пересеч. тех колец, что в 1)

<u>Д-во</u>: 1) $\mathcal{P} \subset K \to \mathcal{K}(\mathcal{P}) \subset K$

2) K – кольцо, $\mathcal{P} \subset K \to \cap K \equiv \{K \mid \mathcal{P} \subset K \subset \mathcal{P}(\cup \mathcal{P})\}$

$= \mathcal{K}(K)$

Таким образом, кольцо мн-в, порожд. системой S – наим. среди колец $\supset S$.

Конечно $S \subset P(\cup S)$

Аналог. для δ-колец, алгебр мн-в с общей единицей и σ-алгебр. мн-в с общей единицей.

Наим. δ-кольцо, сод. S, обозн. $\mathcal{K}_\delta(S)$

Наим. σ-алгебра с единицей $\Omega \supset \cup S$, сод. S, обозн. $\mathcal{L}_\sigma(S, \Omega)$

$\mathcal{L}(S, \Omega) = \mathcal{K}(S \cup \{\Omega\})$

$\mathcal{L}_\delta(S, \Omega) = \mathcal{K}_\delta(S \cup \{\Omega\})$

$\left(\mathcal{K}_\delta(\mathcal{I}(\mathbb{R})) \ni \mathbb{R} \sim \text{содерж. наиб. эл-т}\right) \equiv \mathcal{L}_\delta(\mathcal{I}(\mathbb{R}))$

$(a, b) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{1}{n}] \to \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \in \mathcal{L}_\delta(\mathcal{I}(\mathbb{R}))$

<u>Ут.</u> Любые открытые мн-ва в $\mathbb{R}$ представимы в виде не более, чем сч. объед. попарно не пересек. открытых промежутков, включая неогр.

Т.е. любое открытое мн-во на $\mathbb{R}$ представимо как $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$

<u>Д-во</u>: $\exists\, U \subset \mathbb{R}$ – отк. мн-во

$\forall (a,b) \in U \times U$ положим $a \underset{U}{\sim} b \leftrightarrow [a,b]_{\mathbb{R}} \subset U$

$\{(1-t)\cdot a + t\cdot b \mid t \in [0,1]_{\mathbb{R}}\}$

Для большей общности можно рассматривать $[a,b]_{\mathbb{R}}$ как выпукл. лин. комб.

$B(\mathbb{R}) = \mathcal{X}_\sigma(\mathcal{I}(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{I}(\mathbb{R}))$

<u>Утв</u>: В σ-алгебре (и в σ-кольце) разрешены сч. пересечения

<u>Д-во</u>: $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_j) \sim 6$ в соотв. с формулой де Моргана

Для σ-кольца: $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} (A_j \cap A_1) = A_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus (A_j \cap A_1))\right)$

Тогда $[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$

Следствие (сч. адд.): Если $\mu: B(\mathbb{R}) \to [0,N]_{\mathbb{R}}$, $N \geq 0$, то $F_\mu(x) = \mu_F(-\infty, x)_{\mathbb{R}}$ непр. справа

<u>Д-во</u>: $\forall$ монотонно возраст. послед. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $x_{n+1} > x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} (F_\mu(x_n) = \mu(-\infty, x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_1) \sqcup [x_1, x_2) \sqcup \ldots \sqcup [x_{n-1}, x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu[x_{j-1}, x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu[x_{j-1}, x_j) =$

$= \mu(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} [x_{j-1}, x_j)) = \mu(-\infty, x_\infty) = F_\mu(x_\infty)$

<u>Теорема</u>: Правая и левая ф-ии распр. F_n и F_Λ, заданные одним и тем же экспер. [приводим к одной и той же мере распр. на $B(\mathbb{R})$]. Мера на борелевских σ-алг. наз. борелевской

<u>Теорема</u>: $\exists\, \mu: K \to [0,N]_{\mathbb{R}}$ – неотриц. σ-адд. мера на кольце мн-в K. Тогда μ имеет ед.-ое σ-адд. продолжение на $\mathcal{X}_\sigma(K)$

<u>Док-во</u>:

↓

$\exists \rho: K\times K \to [0, N]_{\mathbb{R}} \subset [0, +\infty)_{\mathbb{R}}$ задаётся ф-лой: $\forall (A,B) \in K\times K$ $\rho(A,B) \overset{def}{=} \mu(A \Delta B) = \mu(B \Delta A) = \rho(B,A)$

Нер-во треуг.: Если $C \in K$, то $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$

$\rho(A,B) = \mu(A \Delta B) \leq \mu[(A\Delta C) \cup (C \Delta B)] \leq \mu(A \Delta C) + \mu(C \Delta B) = \rho(A,C) + \rho(C,B)$

<u>Опр.</u>: Если $\forall M$ - мн-во неотриц. ф-ие ρ:

$M\times M \to [0, +\infty)$ симм. и удовл. нер-ву треуг., то ρ называется полуметрикой, а также $\forall a \in M$,

$\rho(a,a) = 0$

<u>Предложение</u>: Если ρ - полуметрика на M, то метрикой на фактор-мн-ве $M/\tilde{\rho}$ будет ф-ие $\tilde{\rho}$ такая, что:

1) $\forall (a,b) \in M\times M$, $a \underset{\rho}{\sim} b \Leftrightarrow \rho(a,b) = 0$

2) $\forall (\tilde{a}, \tilde{b}) \in (M/\tilde{\rho})$ $\tilde{\rho}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \rho(a,b)$