Лекция № 10

15.04.2023

Лебегова схема интеграла и её прим.

Ключевые слова: счетные пределы мн-в, мера как σ-адд. ф-ия на системе мн-в (σ-кольцо, σ-алг., δ-кольцо) как непр. изм. отобр.

Ранее: интеграл от огр. ф-ии по мн-ву кон. меры (3 сост. $\forall$ и-ла: 1) инт. ф-ия; 2) мера; 3) мн-во, на кот. бер. инт-л

Теперь: $\mathcal{A}$ - σ-алг., $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty)$, $f: (E = \cup \mathcal{A}) \to \mathbb{B}$. В прошлый раз научились инт-ть неотр ф-ию $f \geq 0$, f явл. $(\mathcal{A}, B(\mathbb{R}))$-измер.,

$\int\limits_E f\mu = \int\limits_E f(x)\,\mu(dx) = \sup\{\int\limits_E \varphi\mu : 0 \leq \varphi \leq f$, где φ - простые инт-е ф-ии $\}) \in [0, +\infty]$

<u>Лемма</u>: для $\forall$ пос-ти измеримых простых $f_n \uparrow f (n \to \infty)$ p.w. вып: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\mu = \int\limits_E f\mu \in [0, +\infty]$, т.е. инт-л может быть и беск.

<u>Лемма</u>: отобр. $\{f: E \to [0, +\infty) \mid f$ измер. отн. $(\mathcal{A}, B(\mathbb{R}))$ и $\int\limits_E f\mu < \infty\}$, т.е. ин-лы конечн.

Значит, f таковы, что $\int\limits_E f\mu \in \mathbb{R}$ явл. лин. (отн. операций над ф-ми)

Пусть $\{f: E \to [0, +\infty) \mid f - (\mathcal{A}, B(\mathbb{R}))$- измеримо, $\int\limits_E f\mu < +\infty\} = L_{1}+(\mu)$

<u>Опр</u>: огр. эл-ты $L_1,+(\mu)$ наз. неотриц. интегрир.-ми на E по μ по схеме Лебега.

Лин. оболочка $\text{lin} < L_1+(\mu) >$ обозн. как $L_1(\mu) \equiv L_1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Если $\int\limits_E f\mu = +\infty$, то такая f не явл. инт-й.

<u>Опр</u>: если F - ф-ия распр., μ_F - соотв. мера распр-я на $\mathbb{R}^n$, то $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dF(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu_F(dx)$

$\mu_F: B(\mathbb{R}^d) \to [0, 1]$

Если ф-ия вещ., то $L_1((E, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{R})$ - пр-во вещ-в инт. - х ф-ий

Лемма: $L_1(\mu) = \{ f - g \mid f, g \in L_{1,+}(\mu) \}$, при этом $\int_E f\mu - \int_E g\mu = \int_E (f-g)\mu$

„мин." разлож. достиг. в виде: $h = h_+ - h_-$, где $h \in L_1(\mu)$

$h_+(x) = \max(0, h(x))$, $h_-(x) = (-h)_+(x) = \max(0, -h(x)) = -\min(0, h(x))$

Опр. Моментами распр-я μ_π наз. инт-лы на $\mathbb{R}^d$ по μ_π от одночленов вида $x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$ ($k_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, обычно, но не обяз.

Лемма: $f_L \in L_1(\mu) \to f^{\pm} \in L_{1,+}(\mu)$ и $|f| = f_+ - f_-$ тоже $\in L_1(\mu)$

Лемма: если $f_1, f_2, f_3, f_4 \in L_{1,+}$ и $f_1 - f_2 = f_3 - f_4$, то $\int_E (f_1 - f_2)\mu = \int_E (f_3 - f_4)\mu$

Д-во: $f_1 + f_4 = f_2 + f_3 \longmapsto \int_E f_1\mu + \int_E f_4\mu = \int_E f_2\mu + \int_E f_3\mu$, поэтому, в виду лин-ти инт-ла, получим требуемое.

Опр. ф-ия $\bar{f}: E \to \mathbb{R}^d$ наз. инт-й по μ по схеме Лебега, если не её веществ. компоненты инт-мы:

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}; \quad \int_E \bar{f}(x)dx = \begin{pmatrix} \int_E f_1(x)\mu(dx) \\ \vdots \\ \int_E f_d(x)\mu(dx) \end{pmatrix}.$$

Спеціаль: отожд. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, обозн. как $L_1(\mu, \mathbb{C})$ компл-ые инт-е ф-ии, и тогда отобр. ф-л):

$L_1(\mu, \mathbb{C}) \ni \bar{f} \longmapsto \int_E \bar{f}(x)\mu(dx)$ явл. $\mathbb{C}$-линейным.

Лемма: $[f \in L_1(\mu, \mathbb{C})] \Leftrightarrow [1) f$ явл. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-измеримой

2) $\int_E |f(x)|_{\mathbb{C}}\, \mu(dx) < \infty]$

$[\bar{f} \in L_1(\mu, \mathbb{R}^d)] \iff [1)\ \bar{f}$ явл $(\mathcal{A}, B(\mathbb{R}^d))]$-измер.

3) $\int_E \|f(x)\|_{\mathbb{R}^d}$, евкл.; $\mu(dx) < +\infty]$

Вероятностным пр-м (колмогоровской тройкой) наз. непустое мн-во Ω с заданными на нем σ-ал. $\mathcal{F}$ (т.ч. $\Omega = (\cup \mathcal{F}) \in \mathcal{F}$) и вер. мерой $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0, 1]$, т.е. σ-адд. неотриц. и „нормир." $(\mathbb{P}(\Omega) = 1)$, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

Опр. Если μ - вер-е мера на σ-алг. $B(\mathbb{R}^d)$, то её характ. ф-й наз.: $\tilde{\mu}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}: \tilde{\mu}(\bar{y}) : \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\bar{x}, \bar{y})} \mu(d\bar{x})$

Опр. Среднее зн-е (барицентр) распр-я μ - это $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{x}\, \mu(d\bar{x})$, если „он сущ" (имеется в виду, что $\int_{\mathbb{R}^d} \|\bar{x}\| \mu(d\bar{x}) < \infty$)

$\mathbb{M}_\mu \bar{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{x}\, \mu(d\bar{x})$ - матем. ожид. $\bar{x}$ отн. вер-й меры μ.

$\nexists$ мат. ож. для распр. Коши: $\int_{B \to \text{бар. мн-во}} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \mu_{cauchy}(B)$,

$B \in B(\mathbb{R}$

$\rho_{cauchy}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ - плотность распр. Коши (одномерн.)

Опр: если E - мн-во, $\mathcal{A}$ - σ-алг. на $E = \cup \mathcal{A} \in \mathcal{A} \to$ $\to \mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-адд., $f \in L_1(\mu)$, то мера $[\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A f \cdot \mu \in \mathbb{R})$ обозн. $f \cdot \mu$ и наз. лебег. произвед. f на μ, и f наз. плотностью меры (f, μ) отн. μ. Если $(f \cdot \mu)$ - вер. мера, то f - плотность вер-ти отн. μ.

Th Хана: если $(E, \mathcal{A})$ - измеримое пр-во, μ:

$\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ σ-адд.-на, то $\exists\ E_+ \in \mathcal{M}$, т.ч. если обозн. $E_- = E \setminus E_+$, то:

1) $\forall A \in \mathcal{M}: A \subset E_+ \to \mu A \geq 0$

2) $\forall A \in \mathcal{M}: A \subset E_- \to \mu A \leq 0$

3) другая такая пара $\tilde{E}_+, \tilde{E}_-$ отл. от E_+, E_- только тем, что $\mu(\tilde{E}_+ \Delta E_+) = 0$ ($\to \forall A \in \mathcal{M}$ выполн.): $A \subset (\tilde{E}_+ \Delta E_+) \to \mu A = 0$)

Для $\mu \geq 0$ и лебегового произв. $f\mu$ можно брать в кач-ве E_+ $\{f \geq 0\} = \{x \mid f(x) \geq 0\}$

<u>Предложение</u>: в условиях Th. Хана о разл. пр-ва мера μ принимает огран. мн-во знач.

<u>Д-во</u>: $\forall A \in \mathcal{M}$; $|\mu(A)| = |\mu((A \cap E_+) \sqcup (A \cap E_-))| =$
$= |\mu(A \cap E_+) + \mu(A \cap E_-)| \leq |\mu(A \cap E_+)| + |\mu(A \cap E_-)| =$
$= \mu(A \cap E_+) - \mu(A \cap E_-) \leq \mu E_+ + |\mu E_-| \in \mathbb{R}$, т.е. мн-во зн-й огран., ч.т.д.

<u>Предл</u>: σ-адд. мера на σ-алг. со зн-м в $\mathbb{R}^d$ принимает огр. мн-во зн.

<u>Пример</u>: если все координаты как ф-ции на $\mathbb{R}^d$ инт-мы по мере $\mu: B(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sigma\text{-адд.}} [0, +\infty)$, то $(id_{\mathbb{R}^d}, \mu)$ — тоже конечная мера.

$B(\mathbb{R}^d) \ni A \mapsto \int_A \bar{x}\ \mu(d\bar{x})$ и она тоже σ-адд.

Распред. значений d приборов ($\bar{x}$ - показание d приборов, $\bar{x}_k$ - результат k-го экс-та из ансамбля) в эксперимент ансамбле из N эл-т. экс-в: $B(\mathbb{R}^d) \ni M \mapsto \mu_{эа}(M) =$
$= \frac{1}{N} |\{k \mid \bar{x}_k \in M\}|$

Забудем о част. приборов, перейдем в пр-во меньшей раз-ти:
пусть $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_{d_0} << d \; (d_0 \le d)$ и $\mathbb{P}_0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_0} \in \mathbb{R}^{d_0}$, т.е. $\mathbb{P}_0$ переводит ное в пр-во меньшей

раз-ти (соотв. более слабому экс-ту), $\mathbb{P}_0$ - проектор.
Пусть $\mu_0(A) = \frac{1}{N} \left| \{ n \in \{1, \ldots, N\} : \mathbb{P}_0 \overline{x_n} \in A \} \right|, \forall A \in$
$\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_0})$. $\mu_0(A)$ - мера, маргинальная по отн. к μ.

μ - марг. отн. μ. распред при выборе коорд. $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{d_0}}$ из него случ. в-ра $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, $\mu_0(A) = \frac{1}{N} \left| \{ n \in \{1, \ldots, N\} : \right.$

$\left. \overline{x_n} \in \mathbb{P}_0^{-1}(A) \} \right| = \mu_{эx}(\mathbb{P}_0^{-1}(A))$
Понятие образа меры: пусть даны измер. пр-ва $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ и измеримое отобр. $f : X \to Y$, тогда $\forall$ отобр. μ: $\mathcal{A} \to S$ (со знач. в вспомогат. мн-ве S)
Через $f(\mu)$ (или $f_*\mu$, или μf^{-1}, или $\mu \circ f^{-1}$) обозн. меру $\mathcal{B} \to S$ такую, что $\forall B \in \mathcal{B} \hookrightarrow (\mu f^{-1})(B) = \mu(f^{-1}(B))$
Следствие: $\mu_0 = \mu \mathbb{P}_0^{-1}$
Св-во марг. распр - соглас-ть, а именно: $I = \{1, \ldots, d\}$, $I_0 =$
$= \{k_1, \ldots, k_{d_0}\}$
$1 \le \delta \le d_0 \; (\delta \in \mathbb{N})$
$\delta = \{k_{i_1} < k_{i_2} < \ldots < k_{i_\delta}\}$, где натур. индексы (упоряд.)
$\mathbb{P}_1 : \mathbb{R}^{d_0} \to \mathbb{R}^{\delta}$; $\mathbb{P}_{01} : \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_{d_0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} J_{i_1} \\ \vdots \\ J_{i_\delta} \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_{01} \circ \mathbb{P}_0$, то

$\mu \cdot \mathbb{P}_{01}^{-1} = \mu \circ \mathbb{P}_1^{-1}$ - это и наз. согл-ть.

Опр. Случ. вещественнозн. процесс (в широком смысле) с мн-м T моментов времени - это с-ма кон.-ных распр. (марг. для него пр-е), индексир. конечн. непустыми подмн-ми $t \subset T$, т.ч. $\mu_t : B(\mathbb{R}^t) = \{x : t \to \mathbb{R}\})$ и если $\emptyset = S \subset t$, то $\mu_S = \mu_t \circ P^{-1}_{t \to S}$, где проектор $P_{t \to S}$ действует из $\mathbb{R}^t$ в $\mathbb{R}^S$ как $P_{t \to S}(x) = x|_S$

Обозначение для такого СЛУПа: $\{\mu_t : t \in \mathcal{P}_{fin}(T)\}$

Такой процесс ещё наз. случ. полем (или случ. ф-цией) $T \to \mathbb{R}$

Случ. ф-ия наз. собств-но случ. пр-м, если $T \to \mathbb{R}$ и $T \subset \mathbb{R}$

СЛУП наз. дискретным (или пр-м с дискрет. временем), если T есть часть одностор., либо двустор. арифм. прогрессии ($T = n \cdot \Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, либо $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}^+$)

СЛУП - проц. с непр. временем, если T явл. промежутком или содержит непр. промежуток длины из $[0, +\infty)$

__Опр.__ Случ. в-р (конечномерный) задаётся его распред. μ_T ($|T| < \infty$, $\dim \mathbb{R}^T = |T|$), и такой в-р наз. гауссовским, если $\exists$ неотриц. симметричн. оператор $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^T, \mathbb{R}^T)$ и $\bar{a} \in \mathbb{R}^T$ такие, что $\int_{\mathbb{R}^T} e^{i(\bar{x}, \bar{y})_{\mathbb{R}^T}} \mu(d\bar{x}) = \tilde{\mu}(\bar{y}) = \exp\left(i(\bar{a}, \bar{y})_{\mathbb{R}^T} - \frac{1}{2}(a\bar{y}, \bar{y})_{\mathbb{R}^T}\right)$, т.е. $\bar{a}$ - случ. гаусс. в-р, если он задаётся гауссовским распределением.

СЛУП – гауссовский, если $\forall t \in \mathfrak{F}_{fin \neq \emptyset}(T) \mapsto$ μ_t явл. гауссовским (см. поле)