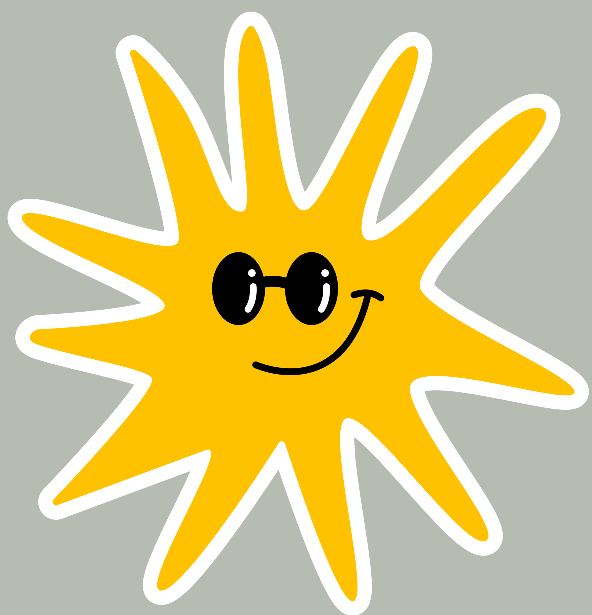
# Лекция № 13



06.05.2023

$H = L_2((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{C})$ — гильб. пр-во (сл. вел. с квадр.)

$H \supset H_0 = \{ v \in H \mid \mathbb{E} v = 0 \}$. $H_0$ — квадр. инт. с нулевым средним. Стац. в шир. смысле пос-ти: $\mathbb{Z} \xrightarrow{\xi_0} H_0$;

$R_\xi(n) = (\xi_{n+k}, \xi_k)_H$ — скалярное произведение совпадает с ковариацией (в подпр-ве $H_0$)

**Опр**: положит. опр-я ф-ция $R_{\xi_0}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — это неотриц. опр-ть эрмит. кв. формы $\forall$ матрицы вида $(R_{k,l})$, где $(k,l) \in [-n, n]^2$, для $\forall n \in \mathbb{N}$. Это м-ца $(2n+1) \times (2n+1)$

**Th**: для $\forall$ стац. в шир. смысле пос-ти $\xi_0: \mathbb{Z} \to H_0$ её ковар. $R_{\xi_0}$ явл. положит. опред.

**Д-во**: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \begin{pmatrix} z_{-n} \\ z_{-n+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n+1}$;

Обозначим: $R_{\xi_0}(k,l) = M_n$;

Значение квадр. формы матрицы $M_n$ имеет вид:

$$\sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} z_k R_{\xi_0}(k-l) \bar{z}_l = \sum_{k,l=-n}^{+n} z_k \bar{z}_l (\xi_k, \xi_l)_H =$$

$$= \sum_{k,l=-n}^{n} (z_k \xi_k, z_l \xi_l)_H = \left( \sum_{k=-n}^{n} z_k \xi_k, \sum_{l=-n}^{n} z_l \xi_l \right)_H \geq 0, \text{ ч.т.д.}$$

**Th**. (Герглотц): для $\forall$ стац. в шир. смысле посл-ти $\xi_0: H_0$ $\exists!$ неотриц. конечн. мера $m_{\xi_0}: \mathcal{B}((-\pi, \pi]) \to [0, R_{\xi_0}(0)]$, т.ч.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \longmapsto R_{\xi_0}(n) \overset{(1)}{=} \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda} m_{\xi_0}(d\lambda)$$

**Опр**. Мера $m_{\xi_0}$ наз. спектрал. структ. мерой (числ., неотриц.) процесса $\xi_0$

Рав-во (1) — спектр. предст. ковар. ф-ции пр-са

Сл1: в условиях т. Герглотца $\exists!$ счетно-адд мера $Z_\xi$: $\mathcal{B}((-\pi, \pi]) \to H_0$, т.ч.

1) $\forall n \in \mathbb{Z} \longmapsto \xi_n = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda)$ (2), где инв.

считаем либо как предел инт-в от простых ф-ий, п-но сх. к подынт-й, либо как тот вектор $v \in H_0$, для которого $\forall h \in H_0 \hookrightarrow (v, h)_H = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} (z_\xi(d\lambda), h)$ („слабый инт-л" через скал. пр.)

2) $z$ „ортогонально" в том смысле, что $\forall A, B \in \mathcal{B}(-\pi,\pi]$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (z_{\xi_0}(A), z_{\xi_0}(B))_H = 0$

3) $m_\xi(A) = \| z_{\xi_0}(A)\|_H^2$

Сл. 2: $m_{\xi_0}((-\pi,\pi]) = \int_{(-\pi,\pi]} \mathbb{1} m_{\xi_0}(d\lambda) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{i \cdot 0 \cdot \lambda} m_{\xi_0}(d\lambda) = R_{\xi_0}(0)$

Примеры: $\xi_n = e^{in\varphi} \xi_0$, $\xi_0 \in H_0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (пример стац. процесса)

$]$ $\lambda_0$ – единств. $\in (-\pi,\pi]$, т.ч. $\varphi - \lambda_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ ($\lambda_0 = \begin{cases} \varphi - 2\pi[\frac{\varphi}{2\pi}] \to \text{в I половину отрезка} \\ \varphi - 2\pi[\frac{\varphi}{2\pi}] \to \text{во II половину отрезка} \end{cases}$)

порождает $m_{\xi_0} = \delta_{\lambda_0} \|\xi_0\|_H^2$, где $\delta_{\lambda_0}(A) = \mathbb{1}_{A \in (-\pi,\pi]}(\lambda_0)$

Вместо $\int$ здесь можно написать $\lambda_0$, т.к. есть кратность $2\pi$.

В кач-ве $z_{\xi_0}$ подходит $\delta_{\lambda_0}\xi_0$

Сл. 3: Введём (подпр-во) подпр-во в $H_0$ — $H_\xi \in H_0$

$]$ $H_{\xi_0} = \mathrm{clos}_H(\mathrm{span}_H \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ (замык., лин. об.)

$H_0 \overset{?}{=} \mathrm{Ker}(\cdot, \mathbb{1}_\Omega)_H$, тогда: $\exists!$ изоморфизм $J_\xi$ пр-ва $H_{\xi_0}$ на $L_2((-\pi,\pi], \mathcal{B}(-\pi,\pi], m_{\xi_0})$, т.ч. $J_{\xi_0}(\xi_n) = e^{in} \equiv$

$\equiv \{(-\pi,\pi] \ni \lambda \mapsto \exp(in\lambda) \in \mathbb{C}\}$ при этом $J_{\xi_0}^{-1}(\psi) \overset{(3)}{=}$

$= \int_{(-\pi,\pi]} \psi(\lambda) z_{\xi_0}(d\lambda)$ $\forall$ непр. $\psi: [-\pi,\pi]$, т.ч. $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и

изоморфизм гильбертовых пр-в → это не только лин. биекция, но и изометрия, т.е. $\|\int_{(-\pi,\pi]} \psi(\lambda) z_{\xi_0}(d\lambda)\|_H^2 \overset{(4)}{=} \int |\psi(\lambda)|^2 m_{\xi_0}(d\lambda) \equiv$

$\equiv \|\psi\|^2_{L_2(m_\xi)}$

Ш.4: В силу (4) р-во (3) распростр. на все эти эл-ты $\psi \in L_2(m_{\xi 0})$. Докажем сущ-е и ед-ть такого распростр. при условии сохр. (4)

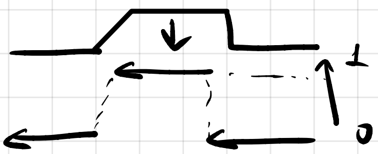
Д-во: Из лин-ти (4) фунд. пос-ти $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in C[-\pi, \pi]$ переходит при инт-ии по $Z_{\xi 0}$ в фунд. пос-ти $H_{\xi 0}$, т.к.

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2_{L_2(m_\xi)} = \|(\psi_n(\lambda) - \psi_m(\lambda)) Z_{\xi 0}(d\lambda)\|^2_{H_{\xi 0}} = \|\int \psi_n Z_{\xi 0} - \int \psi_n Z_{\xi 0}\|^2_{H_{\xi 0}} = \|J^{-1}_{\xi 0}(\psi_n) - J^{-1}_{\xi 0}(\psi_m)\|^2_{H_{\xi 0}}$$

$C_{2\pi\text{-пер}}(-\pi, \pi) \underset{\text{плотн.}}{\subset} L_2(m_{\xi 0})$

$\psi_n \to \psi \in L_2 \Rightarrow J^{-1}(\psi_n) = \int \psi_n Z_{\xi 0} \to J^{-1}(\psi)$

$J^{-1} = \int \cdot Z_{\xi 0}$; $\exp(in\cdot) \to \xi_n$; лин. комб. $\to$ лин. комб. $\xi_n$ и




если $\psi_n \rightrightarrows \psi \in C_{2\pi\text{-пер.}}[-\pi, \pi]$ $(n \to \infty)$

$f_n \rightrightarrows 0$ в —//—//—, то $\|\int(\psi_n - \psi) Z_n\| = \|\lim \int \sum_{k=1}^{n} f_n(-\pi + \frac{k}{N} 2\pi) \cdot Z_{\xi 0}((-\pi + \frac{k-1}{N} 2\pi, -\pi + \frac{k}{N} 2\pi])\|^2 =$

$= \lim_{N \to \infty} \|\sum_{k=1}^{N} f_n(-\pi + \frac{k}{N} 2\pi) \cdot Z_{\xi 0}((\ldots])\|^2 \overset{\text{т. Пиф.}}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N}$

$|f_n(—//—)|^2 m_{\xi 0}((\ldots]) = \lim_{N \to \infty} \int \sum_{k=1}^{N} |f_n(\ldots)|^2 \mathbb{1}_{(\ldots, \ldots]}(\lambda) m_{\xi 0}(d\lambda) =$

$= \int |f_n(\lambda)|^2 \cdot m_{\xi 0}(d\lambda)$

Как работает изоморфизм?

1) $H_{\xi 0} = C_{\xi 0}$, $\|\xi_0\| = 0$, $H_{\xi 0} = \{0\}$, $L_2(m_\xi) = \{0\}_{L_2}$, т.к. $m_\xi = 0$. Теперь нетрив. случай: $\|\xi\| \neq 0$ $\Leftrightarrow$

Лемма: полное подпр-во в метрич. подпр-ве замкнуто

Д-во: $\exists (M, \rho)$, $C \subset M$, $(C, \rho|_{C \times C})$ полна. Тогда $C$ з-то в $(M, \rho)$, т.к. $\forall m \in \overline{C}$, $\exists$ п-ть $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in C^{\mathbb{N}}$, $\rho(x_n, m) \to 0$; $\rho|_{C \times C}(x_n, x_k) = \rho(x_n, x_k) \leq \rho(x_n, m) + \rho(x_k, m) \xrightarrow{m \to \infty} 0$; при $\min(n, k) \to \infty$

$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ фунд. $\Rightarrow \exists x_0 \in C$ т.ч. $\rho^{\Psi_{cc}}(X_n, X_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$0 \le \rho(X_\infty, m) \le \rho(X_\infty, X_n) + \rho(X_n, m) \to 0$

$X_\infty = m \quad C \subset \overline{C}^\rho \check{\subset} C \Rightarrow C = \overline{C}^\rho$

$\Rightarrow h_2\ (m_\xi = \delta_{\lambda_0} \|\xi_0\|^2) \ni \forall \psi \in h_2 \sim \psi(\lambda_0) \mathbb{1}_{(-\pi,\pi]}$

$\{\lambda \in (-\pi,\pi] : \psi(\lambda) \neq \psi(\lambda_0) \mathbb{1}_{(-\pi,\pi]}(\lambda)\} = \{\lambda \mid : \psi(\lambda) \neq \psi(\lambda_0)\} =$

$= \psi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{\psi(\lambda_0)\})$ изм. $\neq \lambda_0 \to h_2$ - одномерн. (ф-ли)

$\xi_n \to (e^{in0} \sim e^{in\lambda_0} \cdot 1)$

<u>Пример 2</u>: $\exists v_1 \dots v_k$ вз. ортог. в $\mathcal{H}$, $-\pi < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \le \pi$,

$\xi_n = \sum_{j=1}^{k} e^{in\lambda_j} v_j, \quad v_j = \xi_{j,0}$

$m_{\xi_0} = \sum_{j=1}^{k} \delta_{\lambda_j} \cdot \|v_j\|^2, \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j} v_j$

$\int e^{i\lambda n} Z(d\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \left( \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} \delta_{\lambda_j}(d\lambda) \right) v_j = \sum_{j=1}^{k} e^{i\lambda_j n} v_j = \xi_n$

Тогда ковариация $R_{\xi_0}(n) = (\xi_n, \xi_0)_{\mathcal{H}} = \left( \sum_{j=1}^{k} e^{i\lambda_j n} v_j, \sum_{l=1}^{k} v_l \right) \underset{\text{опт. } l=j \text{ нео}}{\overset{\text{в силу}}{=}} \sum_{j=1}^{k} e^{i\lambda_j n} \|v\|_j^2$ - с одной стороны

$\int e^{i\lambda n} \sum_{j=1}^{} \delta_{\lambda_j}(d\lambda) \|v_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 \int e^{i\lambda n} \delta_{\lambda_j}(d\lambda)$ - с др. стороны -

- совпало

Нашли меру, а она по th. ед-на

Случай непрер. спектра (помним белый шум)

$(\xi_n)$ ОНС в $H_0$

$n = 0 : \quad R_{\xi_0}(0) = D_{\xi_m} = \|\xi_m\|^2 = 1$

$n \neq 0 : \quad R_0(n) = (\xi_n, \xi_0)_{\mathcal{H}} = 0$ (ортог)

$\Rightarrow R_{\xi_0} \equiv 1_{\{0\}}$ — ковар. ф-ия белого шума

$m_{\xi_0} = \frac{1}{2\pi} Leb(-\pi,\pi]$

Какую меру подобрать?

$1 = \int_{(-\pi,\pi]} 1 \cdot \frac{1}{2\pi} Leb(-\pi,\pi]$ ; $Leb_{(-\pi,\pi]} = Leb_1 \restriction_{\mathcal{B}((-\pi,\pi])}$

$1 = \int_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{2\pi} Leb(-\pi,\pi] \to$ выбранная спектр. мера, проверим, что подходит $(n=0 \to V)$

$n \neq 0$ : $\int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \frac{1}{2\pi} Leb(d\lambda) = \frac{1}{2\pi \cdot in} e^{in\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 = R_{\xi_n}(n)$

(инт. Лебега по мере Лебега ≡ инт. Римана)

Опр. Если $m_{\xi_0}(d\lambda) = \rho(\lambda) Leb_{[-\pi,\pi]}$, то $\rho(\lambda)$ наз. структур. спектрал. плотностью (все частоты представ. равноправно с одной и той же пл-ю ≡ белый шум поэтому)

Структурную помним, теперь ортог. хотим постр. векторн. ортог. меру.

$Z(A) = \int 1\!\!1_A(\lambda) Z_{\xi_0}(d\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \xi_k$, где $c_k$ - коэф. ряда Фурье для $1\!\!1_A$ в $L_2\left(\frac{Leb}{2\pi}\right)$

$1\!\!1_A \xleftarrow{L_2} T_n \rightarrow$ триг. полином, $\xi_k$ - нормированы

$c_k = (1\!\!1_A, e^{ik\cdot})_{L_2\left(\frac{Leb}{2\pi}\right)}$ на $[-\pi,\pi]$

Для регрессии: $m_{\xi_0}(d\lambda) = \rho(\lambda) m_{\eta_0}(d\lambda)$ (отн. $\forall$ меры, общий случай).

Если $Z_\xi(\lambda) = \varphi(\lambda) Z_{\eta_0}(d\lambda) \rightarrow \rho(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2$

В th. Котельникова тоже РФ, $\underset{(\omega)}{f(x)} = \underset{(\omega)}{f(x_j)} D_j(x)$

в. слуг. случае