Лекция № 14

13.05.2023

Пример СЛУП $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ стац. в широком смысле, с нулевым средним и $D\xi_0<\infty$

Пусть $\{\overline{\varepsilon}_n\}_n \in H$ — белый шум,

$c_j \in \mathbb{C}$, $(j\in\mathbb{Z})$, $\sum\limits_{j\in H} c_k \varepsilon_{n-c}$ — „скользящее среднее“

Частный случай: $c_k=\delta_{0k} \to \xi_n=\varepsilon_n$

Для белого шума: $f_{\text{бел. ш.}}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}$, $\lambda\in(-\pi,\pi]$

$f_\xi(\lambda)$ — ?

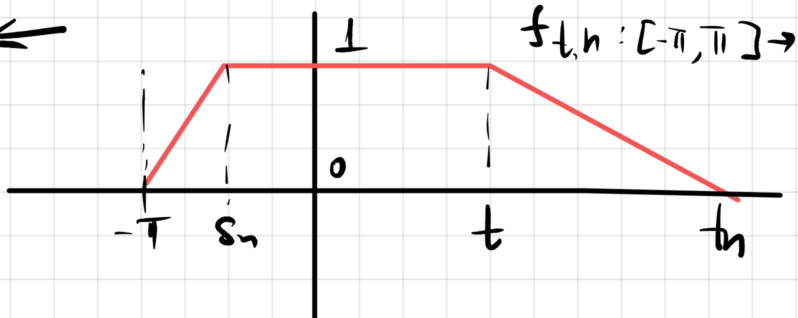
Пусть Z_{ξ_0} — орт. мера процесса ξ. и $Z_{\bar{\xi}_0}$ — белого шума

Напоминание: $Z_\xi : B((-\pi,\pi]) \to H_\xi \cong L_2((-\pi,\pi], m_\xi)$ $\forall t\in(-\pi,\pi]$ $Z_{\xi_0}(-\pi,t] \xleftarrow[n+P]{H}$

$\xi_n \leftarrow e^{i\lambda n}$

$S_{n,t}$, где $S_{n,t}$ получается так: сначала поточечн. приближаем: $\mathbb{1}_{(\pi,t]} \leftarrow$

$f_{t,n}: [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$



$t_n = t+\frac{\pi-t}{n}$

$s_n = -\pi+\frac{\pi+t}{n}$

Затем для $f_{t,n}$ подбираем тригоном. полином вида $S_{n,t}(\lambda)=\sum\limits_{n\in H} c_{n,t}\, e^{i\lambda n}$, т.ч. $\max\limits_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |f_{t,n}(\lambda)-S_{n,t}(\lambda)|<\frac{1}{n}$

Тогда $\forall\lambda$ $|S_{n,t}|<2$ и при $n\to\infty$ $S_t(\lambda)\to \mathbb{1}_{(-\pi,t]}(\lambda)$

Тогда имеем $S_{n,t}(\lambda) \xrightarrow{L_2(m_\xi)}$ и $S_{n,t}(\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{(-\pi,t]}(\lambda)$

$$S_{n,t}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,t} e^{i\lambda t}$$

$$S_{n,t}(\lambda) \xrightarrow{L_2(m_\xi)} \mathbb{1}_{(-\pi,t]}$$

$$\underbrace{S_{n,t}(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{n,t,k}\, e^{i\lambda k} \xrightarrow{L_2(m_\xi)} \mathbb{1}_{(\pi,t]}}$$

$$\int S_{n,t}(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) \xrightarrow{H_\xi} Z_\xi(-\pi,t]$$

суммы конечн. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_{n,t,k}\,\xi_k \quad \| \qquad \int \mathbb{1}_{(-\pi,t]}\, Z_{\xi_0}(?) \quad \|$

$\xi_0 \in \boxed{}$ – мн-во процессов. Продолжаем:

$$\rho_{\varepsilon_0} \to m_{\xi_0}(B) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Leb}(B)$$

$$\| \quad \rho_{\text{бел. шум}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{nj}\,\xi_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\xi_{n-k}$$. "скользящее среднее?"

Част. случай $c_n = \delta_{0,2} \to \xi_n = \xi_m \quad P_{\text{бел. шум}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$

$m_{\xi_0}(\lambda) = ?$ (если сущ. $P_{\xi_0}(\lambda)$ – ?) $\quad \| \quad P_{\xi_0} \Rightarrow m_{\xi_0}(B) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Leb}(B)$

$$e^{in\lambda} Z_\xi(d\lambda) = \sum c_k \int_{(-\pi,\pi]} e^{(n-k)\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda) = \int_{(-\pi,\pi]} \sum c_k$$

$$H = L_2(\mathbb{P})_{\mathbb{C}} \qquad \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Z_\xi(d\lambda) = \sum_\xi(d\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_k \int_{(-\pi,\pi]} e^{i(n-k)\lambda}$$

$$Z_\varepsilon(d\lambda) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{N} c_k \int e^{i(n-k)\lambda} Z_\xi(d\lambda) = \lim_N \int_{(-\pi,\pi]} \Big(\sum_{k=N}^{N} c_k \cdot e^{-ik\lambda}\Big) e^{in\lambda} Z_\varepsilon(d\lambda) = \int \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{-ik\lambda}\Big) e^{in\lambda} Z_\varepsilon(d\lambda) =$$

$$= \int e^{in\lambda} \underbrace{\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ik\lambda}\Big) Z_\varepsilon(d\lambda)}_{Z_{\xi_0}(d\lambda)}$$

Следов. $Z_\xi(B) = \int_B \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{-ik\lambda}\Big) Z_\varepsilon(d\lambda)$

$$Z_{\xi_0}(d\lambda) = \varphi(\lambda)\, Z_\varepsilon(d\lambda) \to m_{\xi_0}(d\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 Z_{\varepsilon_0}(d\lambda)$$

$\forall B \in \mathcal{B}((-\pi,\pi])$

Сл. $m_\xi(B) = \int_B \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{-ik\lambda}\Big|^2 m_\xi(d\lambda)$

$$\int_B \frac{1}{2\pi} \left| Z_{c_k} e^{ik\lambda} \right|^2 leb(d\lambda) \to p_{\xi_0}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \right.$$

Физич. реализ. преобр. в реал. радиотех. : коэф. отл. нулетолько для нескольких положит. индексов при ε_0:
$\varepsilon_{-n}, \varepsilon_{-n+1}, \dots, \varepsilon_0$,

$$\xi_n = \sum_{j=-N}^{0} c_{k-j},\ \xi_j = \sum_{k=0}^{N} C_{nk} \varepsilon_k$$

Упр: выписать ρ для физ. процессов ....

Регрессионная схема порядка $p \in \mathbb{N}$.

$\exists\ \eta_n + b_1 \eta_{n-1} + \dots + b_p \eta_{n-p} = \varepsilon_n = \int e^{i\lambda n} Z_\varepsilon(d\lambda)$

Ищем $m_{\eta_0} + \rho_{\eta_0}$: $\eta_n = \int_{(-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} = Z_{\eta_0}$, $b_0 = 1$

$$\sum_{l=0}^{p} b_l \eta_{n-l} = \int_{(-\pi,\pi]} \left(\sum_{l=0}^{p} b_l e^{i\lambda(n-l)} \right) Z_{\eta_0}(d\lambda) = \int e^{i\lambda n} \varphi(\lambda) \cdot$$

$\cdot Z_\eta(d\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = \sum_{l=0}^{p} b_l e^{-il\lambda} \longrightarrow Z_{\varepsilon_0}(d\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot$

$\cdot Z_{\eta_0}(d\lambda) \iff Z_{\eta_0}(d\lambda) = \varphi(\lambda)^{-1} Z_\varepsilon(d\lambda)$, если мн-н

$\sum_{l=0}^{p} b_l z^l$ не имеет корней на ед. окр-ти в $\mathbb{C}$

$$m_\xi(d\lambda) = \frac{1}{2\pi \left| \sum_{l=0}^{p} b_l e^{-ik\lambda} \right|^2} leb(d\lambda) \to \rho_\eta(\lambda) = \frac{1}{2\pi \left| \sum_{l=0}^{p} b_l e^{-ik\lambda} \right|^2}$$

$$R_{\eta_0}(n) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} \frac{1}{2\pi \left| \sum_{l=0}^{n} b_l e^{i\lambda l} \right|} leb(d\lambda)$$

Говорят, что процесс $\xi_0 \in \boxed{-}$ удовл. смешанной схеме среднего порядка $q \in \mathbb{N}$, если $\exists\ (b_1, b_2, \dots, b_p; c_0, c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{C}^{p+q+1}$,

т.ч. $\xi_n + b_1 \xi_{n-1} + \dots + b_p \eta_{n-p} = c_0 \varepsilon_n + c_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + c_q \varepsilon_{n-q}\ (=\xi_n)$

Можем выписать характеристики : если мн-н

$\sum_{k=0}^{p} b_k z^k$ при $b_0=1$ не имеет корней на $\{z \mid |z|_{\mathbb{C}}=1\}$, то можно найти хар-ки ξ по хар-м ε_0: $\int \left(\sum_{l=0}^{p} b_l e^{-i\lambda l}\right) \cdot e^{in\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda) = \xi_n = \int_{(-\pi,\pi]} \left(\sum_{j=0}^{q} c_j e^{-ik\lambda}\right) \cdot e^{ik\lambda} Z_{\varepsilon_0}(d\lambda)$

$\xi_n = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda)$ в силу ед-ти

$$Z_{\varepsilon_0}(d\lambda) = Q(\lambda) Z_{\varepsilon_0}(d\lambda) = P(\lambda) Z_{\xi}(d\lambda)$$

Следствие: $Z_\xi(d\lambda) = \varphi(\lambda) Z_\varepsilon(d\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}$,

$p_\xi(\lambda) = \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{2\pi}$ и $m_\xi(d\lambda) = p_\xi(\lambda) \cdot Leb_1(d\lambda)$

Раздел терминологии для марковских процессов

Главная теорема. Изучим позже

Пусть $E \neq \varnothing$, $E = \cup \Omega$, где Ω — сигма-алгебра с единицей E, m — неотриц. σ-адд. σ-конечн. мера $\Omega \to [0, +\infty]$. Задали пр-во с мерой (мн-во σ-алг.) измер. Пусть $\varphi \in L_1(m, \mathbb{C})$ — инт-мо по мере m $\to$ сущ-т новая мера $\mu = m_\varphi$ — это новая мера, но уже конечная (знакопеременная) $\Omega \to \mathbb{C}$, т.ч. $m_\varphi(A) = \int_A \varphi(x)\, m(dx)$, измер. мн-во (наша σ-алг.) в дифф. форме пишут $m_\varphi(dx) = \varphi(x) m(dx) = (\varphi m)(dx)$, и m_φ называют результатом Лебег. умножения.

Следствие: $mA = 0 \to m_\varphi(A) = 0$. Связь между мерами аксиоматизируем

Опр. Если еще $\lambda: \Omega \to \mathbb{C}$ σ-адд., т.ч. $\forall A \in \Omega$ $m(A)=0 \to \lambda(A)=0$, то пишут $\lambda \ll m$ и наз. λ абс непр. от-но m.

(Т) Если $\lambda \ll m$, то $\exists\, \varphi \in L_1(m, \mathbb{C})$, т.ч. $\lambda = m_\varphi$ ф-ия комплекснознач. изм, инт.

$= \varphi \cdot \mu$. без доказательства.

При этом φ наз. плотностью λ отн-но μ, а также производной Радона–Никодима меры λ по μ и обозн.

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\lambda}{d\mu}(x)$$

Это была терминология из теории меры. А дальше для марк. процессов:

- Пусть на $\Omega \neq \varnothing$ $\mathcal{F}$ – σ-алг. с единицей $\Omega = \cup \mathcal{F}$, вероятностная мера $\mathbb{P}$ счётно-адд. (σ-адд.), $\mathcal{F} \to [0,1]$, и ещё дано разбиение $n \in \mathbb{N}$ $\underbrace{\{D_1, \dots, D_n\}}_{=\mathcal{D}} \subset \mathcal{F} \setminus \{0\}$, $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^{n} D_j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(D_j) > 0$

- Из вер-ти $\forall A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A / D_j) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D_j)}{\mathbb{P}(D_j)}$.

Возьмем ф-цию, которая на $\forall D_j$ равна условной вер-ти:

$$\mathbb{P}(A | \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A | D_j) \cdot 1_{D_j \in \Omega}, \text{ т.е. } \forall \omega \in \Omega$$

$$\mathbb{P}(A / \mathcal{D})(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A | D_j) \cdot 1_{D_j \subset \Omega}(\omega)$$

Мат. ожидание по станд. ф-ле:

$$M(\mathbb{P}(A/\mathcal{D})) = \int_{\Omega} \mathbb{P}(A|\mathcal{D})(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \sum \frac{\mathbb{P}(AD_j)}{\cancel{\mathbb{P}(D_j)}} \cdot \cancel{\mathbb{P}(D_j)}$$

$$1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} AD_j\right) = \mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} D_j\right) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A)$$

- Назовем сигма-алгебры: $\mathcal{B}_\Omega(\mathcal{D})$ – наим. σ-алг., содерж. элементы этого разбиения, а эл-в

$\ominus \{\cup C / C \subset \mathcal{D}\} \equiv \{\bigcup_{j \in J} D_j / J \in \mathcal{P}\{1, n\}\}$. Хорошо тем, что измерима от-но $\sigma_\Omega(\mathcal{D})$. Очевидно, что измеримо.

изм-ма $\mathbb{P}|_{\mathcal{B}_\Omega(\mathcal{D})}$

$$2)\ \forall C \in \mathcal{B}_\Omega(\mathcal{D}) \to \int_C \mathbb{P}(A|\mathcal{D})(\omega) \,|\, \mathbb{P}_{\mathcal{B}_\Omega(\mathcal{D})}(d\omega) =$$

$$= \sum_{j \in J} ?\ 1_{D_j \subset \Omega}(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(AD_j) = \mathbb{P}\left(A \bigcup_{j \in J} D_j\right) =$$

$= \mathbb{P}(AC)$

$$\int_{AC} 1\!\!1\ \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} 1\!\!1_{AC}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\,1\!\!1_C(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_C 1\!\!1_A(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\mathbb{P}(A) = \int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{M}(1\!\!1_{A\in\Omega})$$

(п. 2) →

Мат. ожид. $m(1\!\!1_C\,\mathbb{P}(A|\mathcal{D})) = \mathbb{M}(1\!\!1_C \cdot 1\!\!1_A)$

Вверем обзн.: $\mathbb{M}(1\!\!1_A|\mathcal{D}) = \mathbb{P}(A|\mathcal{D})$

$\mathbb{M}(1\!\!1_C \cdot \mathbb{M}(1\!\!1_A|\mathcal{D})) = \mathbb{M}(1\!\!1_C \cdot 1\!\!1_A)$ по лин-ти

$\forall \varphi \in L_1(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{D}), \mathbb{P}|_{\sigma_\Omega(\mathcal{D})})$

$\mathbb{M}(\varphi \cdot \mathbb{M}(1\!\!1_A|\mathcal{D})) = \mathbb{M}(\varphi \cdot 1\!\!1_A)$

Усл. вер. и мат. ожид. от-но (под-) меньшей σ-алг.

Опр. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ как выше, и $\mathcal{Y}$ подσ-алг. с той же ф. $\Omega \in \mathcal{Y}$

Тогда $\mathbb{P}(A|\mathcal{Y})$ наз. усл. вер-ть событ. A стр. от-но информации, закл. в этой σ-алг $\mathcal{Y}$

Измер. от-но $\mathcal{Y}$ (т.е. отн $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ т.ч. $\forall C \in \mathcal{Y}$

$\int_C \mathbb{P}(A|\mathcal{Y})(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}(d\omega) = \mathbb{P}(AC)$ - понятие усл. вер.

Аналогично переходим к след. опр.

Для $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P}_{\mathcal{Y}})$. Понятно, что вып. усл. Th Р-Н. о сущ-ии плотности. Рассмотрим $\mathcal{Y} \ni C \xmapsto{\lambda} \mathbb{P}(AC)$ σ-алг. мера

$\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}(C) = 0$, т.к. в процессе это сужение. $\to \mathbb{P}(C) = 0$

$0 \le \mathbb{P}(AC) \le \mathbb{P}(C) = 0 \longrightarrow \lambda C = 0$

$\lambda \ll \mathbb{P}_{\mathcal{Y}} \to \exists\ (\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ед. с точностью до $\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}$ - почти наверху измер.? ф-ия $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$

т.ч. $\lambda = \varphi \cdot \mathbb{P}_{\mathcal{Y}} \iff \lambda(C) = \mathbb{P}(AC) = \int \varphi(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}(d\omega)$ ◼

Точно также определение понятие условного мат. ожидания, только интегралы должны существовать

<u>Опр.</u> Условного мат. ожид. от-но под-σ-алг. событий:

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$ т.е. тогда $\forall \xi \in L_1(\mathbb{P}, \mathbb{C})$

под $\mathbb{M}(\xi / \mathcal{Y})$ понимают $(\mathcal{Y}, B(\mathbb{C}))$ - измеримо сл. вел. $\Omega \to \mathbb{C}$ т.ч.

($\mathbb{P}_{\mathcal{Y}} = \mathbb{P}|_{\mathcal{Y}}$ - сужение имеется в виду)

$$\forall C \in \mathcal{Y} \quad \int_C M(\xi / \mathcal{Y})(\omega) P(\omega) = \int_C \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \qquad (1)$$

$((1) \Longrightarrow \forall$ огр.? $\mathcal{Y}$ - изм. ф.? $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$

$$M(\varphi \cdot \mathbb{M}(\xi / \mathcal{Y})) = \mathbb{M}(\varphi \xi)$$

Это было основная идея. Теперь д-во.

Усл. мат. ожидание от-но случ. величины $\eta : (\Omega, \mathcal{F}) \to$

$\to (\mathbb{C}, B(\mathbb{C}))$. Обозначим $\mathcal{F}_\eta := \{ \eta^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B \},$

$B \in B(\mathbb{C}) \}$ - „порожденная вер-ть"

$M(\xi / \eta) := M(\xi / \mathcal{F}_\eta)$

$M(\xi / \eta = x)$ Для $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$
есть борел. фун. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ т.ч. $\forall B \in B(\mathbb{R})$

$$M(\xi \cdot \mathbb{1}_{\eta(B) \in \Omega}) = \int_{\eta^{-1} B} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int m(x) \mathbb{P}_\eta(dx), \text{ где}$$

$\underline{P_\xi} = P^{-1} \circ \eta$ есть одномерное распределение сл. вел. η.

Д-во: $\exists$ на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \underline{\mathbb{P}_\eta})$ расм. $\lambda: B(\mathbb{R}) \ni B \longrightarrow$

$\int_{\eta(B)} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$, $\mathbb{P}_\eta(B) = 0 \leftrightarrow (\mathbb{P}(\eta^{-1}(B))) = 0 \to \lambda(B) = 0 \to$

$\lambda \ll P_\eta$

λ абс. непр. по η $\to$ существование плотности $\to \exists m \in L_1(P_\eta)$, т.ч.

$\lambda = m \mathbb{P}_\eta$

Переходная вероятность $\underline{\mathbb{P}(A \mid \eta = x) = M(\mathbb{1}_A \mid \eta = x)}$