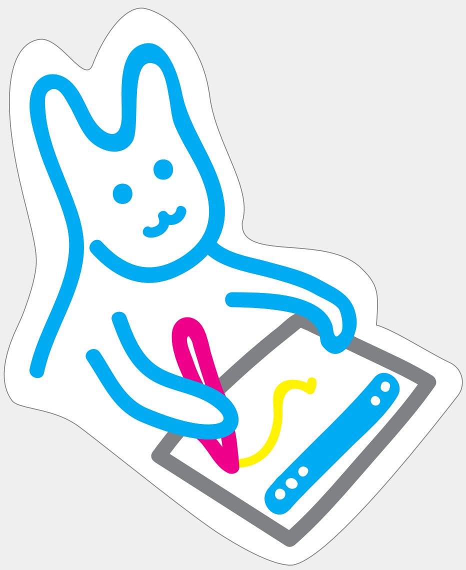
Лекция № 7



25.03.2023

Теорема: $\forall$ п/м (X,ρ) $\exists$ полное п/м надпр-во (Y,d) т.ч. $X\subset Y$, $d|_{X=X} = \rho$

1) схема
2) $(\tilde{Y}_{полн}, \tilde{d}) = (X^{\mathbb{N}}_{fund}, \tilde{d})$
3) инъективное вложение $X \xrightarrow{J} X^{\mathbb{N}}_{fund}$ $\forall x\in X$
$J(x) = (x,x,\dots) \in \{x\}^{\mathbb{N}}$

Решение упр:
$\forall \varepsilon>0$ ищем N т.ч. $\forall n\geq N$, $\tilde{d}(\bar{x}, J(x_n)) \leq \varepsilon$
Возьмем N_ε (из усл. ф-ти) $(\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n\geq N_\varepsilon\ \forall m\geq N_\varepsilon$
$\rho(x_n,x_m)\leq\varepsilon$
При фикс. n $m\in\mathbb{N} \to \rho(x_n,x_m)$ фунд. $|\rho(x_n,x_{m_1}) - \rho(x_n,x_{m_2})| \leq \rho(x_{m_1},x_{m_2})$
$\operatorname{diam}_\rho |x_n, n\geq N_\varepsilon| \leq \varepsilon$

Опр. $\operatorname{diam} X_0 = \sup\{\rho(x_1,x_2) : (x_1,x_2)\in X_0\times X_0\}$

Схема: а) Строим полное $(\tilde{Y},\tilde{\rho})$
б) Строим инъект. изометрию $X \xrightarrow{J} \tilde{Y}$
в) $Y = (\tilde{Y}\setminus J(X)) \sqcup X$
г) метрику на Y

Упр: $(x_1,x_2,\dots)\in X^{\mathbb{N}}_{fun}$ $(\lim_{n\to\infty} J(x_n)) \ni \bar{x}$

Следствие для метрических пр-в

Опр. Пополнением полуметр. пр-ва (X,ρ) наз. такое п/м надпр-во $(Y,d)\supset(X,\rho)$, что $\forall y\in Y$ $\exists$
$\exists (x_1,x_2,\dots)\in X^{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \bar{x}\ni y$

Опр. Пополнением метрич. пр-ва (X,ρ) наз. полное его метрич. надпр-во (Y,d) т.ч. $\bar{X}^d = Y$

A наз. ρ плотн. в $B \iff B \subset \overline{A}^{\rho}$

Th. Каждое метрич. пр-во имеет метрич. пополн.

Д-во. Пусть (X, ρ) метр., $(Z, \tilde{d})$ - полуметрич.
пополнение для (X, ρ). Пусть $R \subset Z \times Z$ т.ч.

$(z_1, z_2) \in R \iff \tilde{d}(z_1, z_2) = 0$

$\Updownarrow$

$z_1 R z_2 \iff z_1 \tilde{R} z_2$

$X \ni x_1 \neq x_2 \in X \longrightarrow x_1 \overset{\sim}{\underset{R}{\not}} x_2$

„Стандартная проекция" $Z \ni z \xrightarrow{\Pi_R} \{ u \in Z :$

$: u_{\tilde{R}} z \} = \tilde{z} \rightarrow \Pi_R|_X$ - инъектив.

Упр. $(Z, \tilde{d})$ - полное п/м, R из ρ-во, то
$(Z/R, d)$ полное метр. $d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \tilde{d}(z_1, z_2)$

Пусть $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots)$ - фунд. пос-ть в $(Z/R, \tilde{d})$

$\tilde{d}(z_{n}, z_m) = \tilde{d}(\tilde{z}_n, \tilde{z}_m)$

$\Rightarrow (z_1, z_2, \ldots)$ фунд. в $(Z, \tilde{d}) \rightarrow \exists z_\infty \in \lim\limits_{n\to\infty} z_n$

$\tilde{d}(\tilde{z}_\infty, \tilde{z}_n) = \tilde{d}(z_\infty, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$Y = (Z/R, \Pi_R(X)) \sqcup X$

$\tilde{d}(\Pi_R(X), \tilde{z}) = d(x, \tilde{z})$

Пусть K - кольцо мн-в, $\mathbb{R} \ni N > 0$, $\mu: K \to [0, N]$

Назовём n-ть мн-в $(A_1, A_2, \ldots) \in K^{\mathbb{N}}$ стрем.

к $\varnothing$ если $(A_1 \supset A_2 \supset \ldots) \wedge \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$

Замечание: μ явл. счетно - адд. $\iff \forall$ п-ти
$(A_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}}$, т.е. $A_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} \varnothing$, $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \mu(\varnothing)$

$\Rightarrow$ $A_1 = A_2 \sqcup (A_1 \setminus A_2) = (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_3) \sqcup$
$\sqcup A_3 = \ldots = \left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{k} (A_n \setminus A_{n+1})\right) \sqcup A_{k+1} \overset{?}{=}$
$\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$

$\mu(A_1) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n+1})$

ряд сх.

$r_K = \sum_{n=K}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n+1}) = \mu\left(\bigsqcup_{n=K}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}\right) = \mu A_K$

$\downarrow_{k\to\infty} 0$

$A_K = (A_K \setminus A_{K+1}) \sqcup A_{K+1} = \ldots = \bigsqcup_{n=K}^{\infty} (A_n, A_{n+1})$

$(\Leftarrow)$ Пусть $B \subset K$, $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k \in K$, $N \geq \mu$

$\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$

$A_n = \bigsqcup_{k=n}^{\infty} B_k \qquad \mu B = \mu A_1 = \mu\left(\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) \sqcup A_{n+1}\right) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \mu B_k\right)}_{\text{сх}} +$

$+ \underbrace{\mu A_n}_{\text{сх к } 0}$

$\bigcap_n A_n = \varnothing$

$\bigcup K = \Omega \notin K$

$\parallel$

$\bigcup_{A \in K} A$

$1_{A \subset \Omega} = 1_A : \Omega \to \{0, 1\};\ 1_A(A) = \{1\},\ 1_A(\Omega \setminus A) = \{0\}$

Замечание: $K \ni A_n \downarrow_{n\to\infty} \varnothing \iff 1_{A_n}$ поточечно $\downarrow 0 \equiv 1_\varnothing$

$\forall w \in \Omega\ \exists n_w \quad A_{n_w} \not\ni \omega \quad 1_{A_{n_w}}(\omega) = 0 \equiv 1_{A_{n_w+k}}(\omega)$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad A \subset B \iff 1_A \leq 1_B$

Вспомним т.о. продолж. σ-ад. неотр. меры с кольца не в кольцо $\mu: K \to [0, N]$, $\forall (A, B) \in K \times K$,

$\rho_m(A, B) = \mu(A \Delta B) \equiv \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$

$\mu(A) = \mu(A \setminus \varnothing) + \mu(\varnothing, A) = \mu(A \Delta \varnothing) = \rho_m(A, \varnothing)$

$(K, \rho_m) \xleftrightarrow{\text{Н}} (\tilde{K}, \tilde{\rho})$ полное пополнение пр-ва (K, ρ_m)

$(A_n \downarrow \varnothing \Longrightarrow 0 \leftarrow \mu A_n = \rho_m(A_n, \varnothing)) \iff \varnothing \in \lim_\rho A_n$

$\downarrow$

Сх-ть в терминах мн-в и сверху к $\varnothing$	сх-ть индикат. ф-ий	сх-ть в К отн. ρ_m	Сх-ть в $(\tilde{K}, \tilde{\rho})$

$\Leftrightarrow$ $\Longrightarrow$

$A_n \uparrow \Longleftrightarrow (A_1 \subset A_2 \subset \ldots) \qquad \infty > \sup \mu(A_n) = \lim \mu A_n \overset{n>m}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \mu(A_n \Delta A_m)$

$\mu(A_n) = \mu A_m + \mu(A_n \setminus A_m)$

$\ominus \ \rho_m(A_n, A_m) = |\mu A_n - \mu A_m|$

$\inf \{ \rho(A_m, A_n) \mid : m, n \geq N \} = \inf\limits_{m,n \geq N} |\mu A_n - \mu A_m|$

мон. растёт $A_n \to \tilde{\rho}(\lim A_n, \varnothing) = \tilde{\mu}(\cup A_n)$

Пусть $\underset{K?}{B_n \uparrow}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \overset{?}{\longrightarrow} \underset{\lim \mu B_n = \sup \mu B_n}{\tilde{\rho}(\lim B_n, \varnothing)} = \underset{\lim \mu A_m = \sup \mu A_m}{\tilde{\rho}(\lim A_m, \varnothing)}$

<u>Лемма</u>: Пусть (X, ρ) полуметрич. $\forall x_0 \in X$ ф-ие $f\ X \ni x \to$
$\to \rho(x, x_0) \in \mathbb{R}$ непр.

<u>Д-во</u>: Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x_\infty \in X$, т.е. $\rho(x_n, x_\infty) \to 0$

$0 \leq |f(x_n) - f(x_\infty)| = |\rho(x_n, x_0) - \rho(x_\infty, x_0)| \leq$

$\leq \rho(x_n, x_\infty) \to 0$

$K \ni A_n \to \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \tilde{K} \to \underset{\mu(A_n) = \rho_m(A_n, \varnothing)}{\tilde{\rho}(\underset{K}{A_n}, \underset{\mathbb{R}}{\varnothing})} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\rho}(\lim\limits_{k} A_k, \varnothing)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu B_n = \mu\left(B_n \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right)\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (B_n \cap A_m)\right) =$

$= \cancel{\lim} \mu(B_n \cap A_n)$ $\sup \leq \sup(\mu A_m)$

$C_m \uparrow C \in K \to \mu C_m \xrightarrow{m\to\infty} \mu C$

$C = C_1 \sqcup (C_2 \setminus C_1) \sqcup (C_3 \setminus C_2) \sqcup \ldots$

$\mu C = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(C_k \setminus C_{k-1}) = \lim\limits_{m} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(C_k \setminus C_{k-1})\right) =$

$= \mu C_m$

<u>Опр</u>: $A_1, A_2, \ldots \to \subset \Omega$, если $\forall \omega \in \Omega$, $1_{A_n} \subset \Omega(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1_A \subset \Omega(\omega)$

<u>Опр</u>: $1_{\overline{\lim} A} := \overline{\lim}\, 1_A$;

<u>Упр</u>: $\overline{\lim\limits_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n\ge N} A_n\right) = \bigcup_{\tilde N = N}^{\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{\tilde N} A_n\right)$

$\underline{\lim\limits_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n\ge N} A_n\right)$

$(K,\rho_\mu) \xhookrightarrow{id} (\tilde K, \tilde\rho)$ полное пополнение пр-ва (K,ρ_μ)

$(A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow 0 \leftarrow \mu A_n = \rho_\mu(A_n,\varnothing)) \Leftrightarrow \varnothing \in \lim_\rho A_n$

сх-ть в терминах мн-в и сверху к $\varnothing$	сх-ть индикат. ф-ций	сх-ть в K отн. ρ_μ	сх-ть в $(\tilde K, \tilde\rho)$
$\Leftrightarrow$	$\Longrightarrow$		

$A_n \uparrow \leftrightarrow (A_1 \subset A_2 \subset \ldots)$ $\quad \infty > \sup \mu(A_n) = \lim \mu A_n \overset{n>m}{\Longrightarrow}$

$\mu(A_n \triangle A_m) = \mu(A_n \setminus A_m) \ominus \mu(A_n) = \mu A_m + \mu(A_n \setminus A_m)$

$\ominus\ \rho_\mu(A_n, A_m) = |\mu A_n - \mu A_m|$

$\inf\{|\rho(A_m, A_n)| : m,n \ge N\} = \inf\limits_{m,n\ge N} |\mu A_n - \mu A_m|$

мон. растёт $A_n \to \tilde\rho(\lim A_n, \varnothing) = \tilde\mu(\cup A_n)$

Пусть $\underset{K\ni}{B_n} \uparrow$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \xrightarrow{?} \underbrace{\tilde\rho(\lim B_n, \varnothing)}_{\lim(\mu B_n) = \sup(\mu B_n)} = \underbrace{\tilde\rho(\lim A_m, \varnothing)}_{\lim \mu A_m = \sup \mu A_m}$

<u>Лемма</u>: Пусть (X,ρ) полуметрич. $\forall x_0 \in X$ ф-ция f $X \ni x \to \rho(x, x_0) \in \mathbb{R}$ непр.

<u>Д-во</u>: Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x_\infty \in X$, т.е. $\rho(x_n, x_\infty) \to 0$

$0 \le |f(x_n) - f(x_\infty)| = |\rho(x_n, x_0) - \rho(x_\infty, x_0)| \le \rho(x_n, x_\infty) \to 0$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_\infty)$

$K \ni A_n \to \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \tilde K \Rightarrow \underbrace{\tilde\rho(A_n, \varnothing)}_{\tilde\mu(A_n) = \tilde\rho(A_n, \varnothing)} \xrightarrow{?} \tilde\rho(\lim\limits_k A_k, \varnothing)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu B_n = \mu\left(B_n \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (B_n \cap A_m)\right) =$

$= \overset{\sup}{\cancel{\lim}}\ \mu(B_n \cap A_n) \quad \le \sup(\mu A_m)$

$C_m \uparrow C \in K \to \mu C_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu C, \quad C = C_1 \sqcup (C_2 \setminus C_1) \sqcup (C_3 \setminus C_2) \sqcup$

$\sqcup \ldots \qquad , \quad C_0 \neq 0$

$\mu C = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k \setminus C_{k-1}) = \lim_m \left(\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k \setminus C_{k-1})\right) = \mu C_m$

<u>Опр</u>: $A_1, A_2 \ldots \subset \Omega$, если $\forall w \in \Omega$, $1_{A_n} \subset \Omega(w) \to$

$\xrightarrow[]{n\to\infty} 1_A \subset \Omega(w)$

<u>Опр</u>: $1_{\overline{\lim} A} := \overline{\lim}\, 1_A$; $\quad 1_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim}\, 1_{A_n}$

<u>Утв</u>: $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) = \bigcup_{\tilde{N}=N}^{\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{\tilde{N}} A_n\right)$

$\underline{\lim}_n\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n \geq N} A_n\right)$