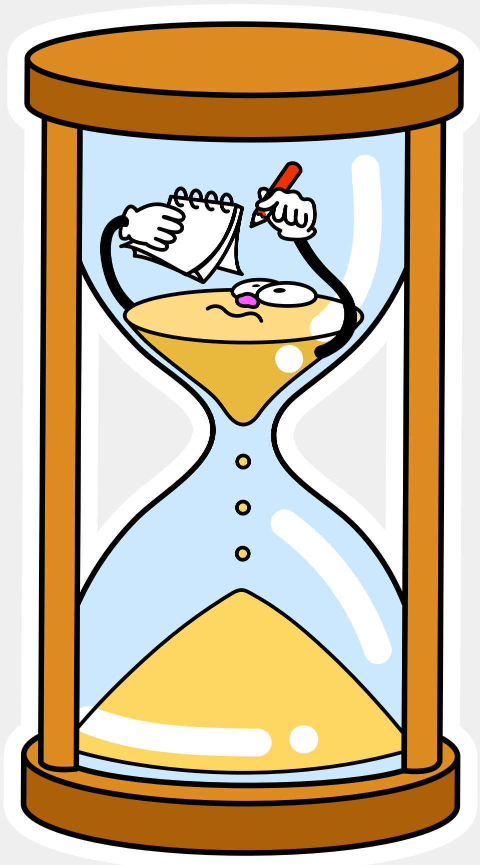
Лекция № 12



29.04.2023

1) Белый шум с дискретным временем. Стандартный белый шум

Плотность $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (гауссиан с нулевым средним и ед. дисперсией) $T \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0 - \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

$\forall t \in \mathcal{P}_{fin}(T) \setminus \{\emptyset\}$; непустое подмн-во моментов времени можно перенумеровать: $t = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_{card\, t}\}$

Мера: $\mathbb{P}_t = P_{\xi_{t_1} \ldots \xi_{t_{card\, t}}}: B(\mathbb{R}^t) \to [0, 1]: \mathbb{P}_t(B) =$

$$= \int_{\bar{x} \in \mathbb{R}^t} \frac{1}{(2\pi)^{1/2\, card\, t}} \exp\left(-\frac{\|\bar{x}\|^2}{2}\right) Leb_{\mathbb{R}^t}(d\bar{x})$$

2) Симметричные случайные блуждания на $\mathbb{Z}$

Построим стандартное броуновское движ. (на $\mathbb{N} \cup \{0\}$)

Пусть $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – колмогоровская реализация белого шума с $T_{Ш} = \mathbb{N}$, тогда для $T_{БР} \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $\forall t \in T_{БР}$

Сокращения: $b_t = b(t) = b_t(\omega) := \sum_{\substack{s \in \mathbb{N} \\ s \le t}} \xi_s \left(= \sum_{s=1}^{t} \xi_s, \text{ при } t > 0\right)$.

Это ещё не симметричные блуждания: нужны отрицательные времена.

Симм. блуждания (стандартные): $T_{сим.Б} = \mathbb{Z}$

Упр. выписать все остальные хар-ки белого шума, симм. случ. блужд.

$\forall n \in \mathbb{N} \longmapsto P^{симм.Б}_{[-n,n] \cap \mathbb{Z}} = \mathbb{P}_{T_n}: B(\mathbb{R}^{T_n}) \ni B \longmapsto \mathbb{P}_n^{симм.Б}(B) =$

$= \mathbb{P}^{симБ}_{\substack{T_n \\ ст.БР}}\left(\begin{pmatrix} s-n \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix} \in B\right) = \mathbb{1}_{pr_0(B)}(0) \left(\mathbb{P}_{\{n, \ldots, 1\}} \otimes \mathbb{P}^{ст.Б}_{\{1, \ldots, n\}}\right) *$

$* \left(P^{T_n}_{T \setminus \{0\}} = \{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}(B)\right)$ – выразим симм. блужд. через станд. броун. движ.

Упр. выписать конечномерн. распред. явно

Вспомним: $P^t_s: \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s$, $P^t_s = P_{\mathbb{R}^s} \hookrightarrow \mathbb{R}^t$

3) Стандартное броуновское движение с непр. временем

$T_{ст.бр.н.} = [0, +\infty)$ или $[0, T]$, где $T > 0$

$\forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}:\ p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n),\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\{0, t_1, \ldots, t_n\}})$

$P^{\text{ст. бр. н.}}_{\{0, t_1, \ldots, t_n\}}(B) = \mathbb{1}_{P_{\{0\}}(B)}(0) \cdot \int \ldots \int\limits_{P^{\{0, t_1, \ldots, t_n\}}_{\{t_1, \ldots, t_n\}}} p_{t_1 - 0}(x_1 - 0) \cdot p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdot \ldots$

$\cdot\ p_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\ dx_1 \ldots dx_n$

<u>Упр</u>: выписать меры всех конечномерн. распред. (мы взяли с нулём, а что будет без нуля?)

4) Теория стацион. (в широком смысле) СЛУПов с дискр. и непр. временем.

T - либо ось $\mathbb{R}$, либо полуось $[t_0, +\infty)$ (если время непр.), либо $\{t_0 + \Delta t \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, либо $\{t_0 + \Delta t \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Delta t > 0$ (если время дискретно)

$\xi: T \times \Omega \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в колмог. постановке СЛУП - среднее времени и элементарного события)

Пр-ес наз. стац. в широком смысле, если:

1) $\forall t \in T:\ \mathbb{E}|\xi_t|^2 < \infty$, т.е. второй момент конечен $\to$ $\mathbb{E}|\xi_t| < +\infty$, значит и первый момент конечен

2) $\forall t_0 \in T,\ \forall S \in S_T \longrightarrow \underset{m}{\mathbb{E}\xi_{t_0+s}} = \mathbb{E}\xi_{t_0}$ (т.е. после $\forall$ сдвига МО сохраняется)

// Введём обозначение:

$S_T := [0, +\infty)$ - непр. моменты времени (полугруппы допустим. сдвигов в T)

Для дискр: $S_T = \{\Delta t \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ - допуст. сдвиг в T //

Продолж. 2) $\forall (t_1, t_2) \in T \times T,\ \forall S \in S_T:\ \operatorname{cov}(\xi_{t_1+s}, \xi_{t_2+s}) =$
$= \operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}) = \mathbb{E}((\xi_1 - m) \cdot \overline{(\xi_{t_2} - m)})$, т.е. ковариация не завис. от сдвига - только от разницы t_1, t_2 - вот в

чей стационарность

<u>Пример:</u> станд. дискр. белый шум стац., а броун. дв. (и дискр., и непр.) и симм. блуждание — нестац. $cov(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}) = (cov(\xi_{t_2}, \xi_{t_1}))^*$: при перемене аргументов местами — компл. сопр.

<u>Далее</u>: $t_0 = 0$, $\Delta t = 1$, $T = \mathbb{Z}$, значения компл. $\forall$ стац. процесс есть Σ пост. вел. (m) и пр-са с „нулевым" средним $(\xi_t - m)$

Далее часто $m = 0$, при этом ковар. средней стац. в шир. смысле пр-са ξ_0 наз. $R \equiv R^{\xi_0} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{Z} \mapsto R^{\xi_0}(n) = cov(\xi_{n+s}, s) = cov(\xi_n, \xi_0)$, $\forall s \in \mathbb{Z}$

<u>Св-ва ковариации:</u>

1) $R(0) = cov(\xi_0, \xi_0) = E((\xi_0 - m)\overline{(\xi_0 - m)}) = \mathbb{E}(|\xi_0 - m|^2) = D(\xi_0) = \underbrace{D(\xi_n)}_{\geq 0}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ($=0 \Leftrightarrow$ пр-с „почти наверное" неслучаен)

2) $|R(n)| \leq R(0)$, т.к. $|R(n)| = \left|\int_\Omega (\xi_n - m)\overline{(\xi_0 - m)}\, \mathbb{P}\right| \leq \sqrt{D\xi_n} \cdot \sqrt{D\xi_0} = \sqrt{R(0)} \cdot \sqrt{R(0)} = R(0)$, р-ми исп. нер-во К.-Б.

// Нер-во К.-Б. в полунорм. пр-ве квадр. — интегр. компл. средних на пр-ве с мерой:

пусть $\mu : \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — σ адд. мера на σ-алг. $\mathcal{A}$ с её ед. $E = \cup \mathcal{A}$; g, f — измеримы $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, $\int_E (|g(x)|^2 + |f(x)|^2)\mu(dx) < \infty$, тогда $\exists \int_E f(x)\overline{g(x)}\mu(dx) \in \mathbb{C}$ и $\left|\int_E f(x)\overline{g(x)} \cdot \mu(dx)\right| \leq \sqrt{\int_E |f(x)|^2 \mu(dx)} \cdot \sqrt{\int_E |g(x)|^2 \mu(dx)}$

3) $\forall n \in \mathbb{Z} \longmapsto R(-n) = \overline{R(n)}$

Д-во: $R(-n) = \operatorname{cov}(\xi_{-n}, \xi_0) = \operatorname{cov}(\xi_0, \xi_n) = \overline{\operatorname{cov}(\xi_n, \xi_0)} =$
$= \overline{R(n)} = R(0)^+$

5) Гильбертово пр-во классов экв-ти случ. величин с конечн. D и нулевым средним

$\mathbb{H} = \{X : \Omega \to \mathbb{C} \mid : \underline{X}$ измеримо отн. $((\Omega, \mathcal{F}), (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})))$;
$\{\int |X(\omega)|^2 < \infty\} / \underbrace{\{X \mid : X \overset{\text{п.н.}}{=} 0\}}$

т.е. это фактор пр-во, мы же Δем классы экв

<u>Замечание</u>: X - лин. пр-во

$\int |X_1 + X_2|^2 \mathbb{P} = \int (X_1 + X_2)(X_1 + X_2)^+ \mathbb{P} = \left| \int X_1 X_1^+ P_+ + \int X_2 X_2^+ \mathbb{P}_+ \right.$
$\left. + 2 \operatorname{Re} \int X_1 X_2^+ \mathbb{P} \right| \le \int |X_1|^2 \mathbb{P} + \int |X_2|^2 \mathbb{P} + 2 \left| \int X_1 X_2^+ \mathbb{P} \right| \le$
$\le \sqrt{\int |X_1|^2 \mathbb{P}} \sqrt{\int |X_2|^2 \mathbb{P}}$

На H корректно опред. скал. произв. $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)_H :=$
$= \int_\Omega X_1 X_2^+ \mathbb{P} \in \mathbb{C}$, т.к. оно линейно по $\tilde{X}_1$, антилинейно по $\tilde{X}_2$, неотриц. невырожд.:

$0 = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \longmapsto \int_\Omega |X_1|^2 \mathbb{P} = 0 \longmapsto X_1 = 0 \longrightarrow \tilde{X}_1 = \tilde{0}_H$ и

оно эрмитово симметр.: $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)_H = (\tilde{X}_2, \tilde{X}_1)_H^T$, т.к.

$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1) \ge 0$, $\forall \tilde{X}_1 \in H$, то $\exists!$ арифм. $\sqrt{(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1)_H} \ge 0$

($\mathbb{C}^n$ рв-во св-ва нормы $\sqrt{(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1)_H} \ge 0$
$= \|\tilde{X}_1\|_H$

- положит. опр. $\|\lambda \tilde{X}\|_H = |\lambda|_{\mathbb{C}} \cdot \|\tilde{X}\|_H$
- неотриц.
- невырожд.

$\|\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2\|_H \le \|\tilde{X}_1\|_H + \|\tilde{X}_2\|_H$

$\rho(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = \|\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1\|$ метрика (невыр., неотриц., симм. → вып. Δ-ка)

Нер-во Δ-ка: $\rho(\tilde{X}_1, \tilde{X}_3) = \|\tilde{X}_1 - \tilde{X}_3\|_H = \|(\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2) +$

$+ (\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3)\|_H \le \rho_H(\overline{X_1}, \overline{X_2}) + \rho_H(\overline{X_1}, \overline{X_3})$

Замкнутое подмн-во полного пр-ва полно → замкнут. лин. подпр-во в гильбертовом снова гильберт.

$H_0 = \{\overline{X} \in H \mid : EX = 0\}$ → лин. $\subset H$

Пусть $\tilde{X}_n \in H_0$, $\tilde{X}_\infty \subset H$ $\rho_H(\overline{X_n}, \overline{X_\infty}) \to 0$

$|(\tilde{X}_n, 1) - (\tilde{X}_\infty, 1)|_C = |(\tilde{X}_n - \tilde{X}_\infty, 1)| \le \|X_n - X_\infty\| * \|\mathbb{I}\|_H =$

$= \rho_H(\overline{X_n}, \overline{X_\infty})$ при $n \to \infty$ → $EX_\infty = (\tilde{X}_\infty, \tilde{I}) = 0$

Будем писать $\forall \tilde{X} \in H$ $\mathbb{E}\tilde{X} : \mathbb{E}X$ (убрали волну для со стац. в широком смысле случай ξ удобство) с $T =$

$= \mathbb{Z}$ и нулевым средним и $\mathbb{C}$-знач. связем „пос-ть"

$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \xi_n \in \mathbb{H}_0$

$\mathbb{Z} \ni n \mapsto R^\xi(n) \in \mathbb{C}$

Пример: „Неслуч. стац. случ. проц"

Пусть $(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ и $\xi_n \equiv \rho_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ → $M\xi_n = \rho_n$ не не зависит от n → $g_0 = const$ // $\overset{\text{if } m=0 \to}{\to \rho_0 = 0}$ //

Пусть X — фикс. случ. величина. Какие усл. на $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in$ $\in \mathbb{C}^K$ наложить, чтобы $(g_n \cdot X)$ стала стац. $0 \le R(0) =$

$= \mathbb{D}(g_n, X) = (g, \tilde{X}, \rho_n \tilde{X})_H = |\rho_n|^2 DX = |\rho_n|^2 = 1$

$g_n = \exp(i\varphi_n)$

$R(s) \in \mathbb{Z} = (\rho_s \tilde{X}, g_0 \tilde{X})_H = g_s g_0^T \mathbb{D}X = g_s g_0^+$

$R(-s)^+ = (g_{-s} \tilde{X}, g_0 \tilde{X}) = g_{-s}^+ g_0 \cdot 1 = e^{xp(-i\varphi_{-s})} \Rightarrow g_s = g_{-s}^+ =$

$= e^{i\varphi_s} = e^{-i\varphi_{-s}}$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{-s} = -\varphi_s$

$g_s = R_s = (\xi_{s+t}, \xi_t) \equiv (g_{s+t}, g_t X) = e^{i\varphi_{s+t}} \cdot e^{-i\varphi_t} \cdot 1$

$\varphi_s = \varphi_{s+t} - \varphi_t \pmod{2\pi}$

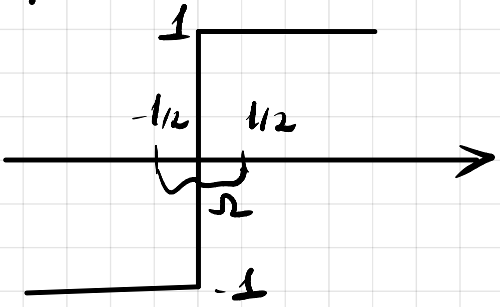
$\varphi_{s+T} = \varphi_s + \varphi_t$, $\varphi_0 = 0$ мы подбираем φ сами

$\varphi_s = s \cdot \varphi_1 \cdot \mathrm{mod}(2\pi) \to g_s = (g_1)^s \quad \forall s \in \mathbb{Z}$ (гомоморфизм)

$\xi_s = \lambda (g_1)^s X$, $|g_1| = 1 \to g_s = (g_1)^s \quad \forall s \in \mathbb{Z}$

$\xi_s = e^{is\varphi} \cdot \xi_0 \to$ не одномерные стац. в шир. смысле случ. послед-ти с $T - \mathbb{Z}$ и нулевым спектром

φ играет роль частоты колебаний $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, $\mathbb{E}|\xi_0|^2 < \infty$



Пример „конечного спектра": $\forall$ попарно ортог. $\xi_{01}, \xi_{02}, \dots, \xi_{0n} \in H_0$, $\forall \underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_n}$ $\in \mathbb{R} \to$ спектр для ξ

<u>Упр</u>: $\xi_s = \sum\limits_{k=1}^{n} \exp(is\varphi_k)\, \xi_{0k}$ — стац. в широком смысле