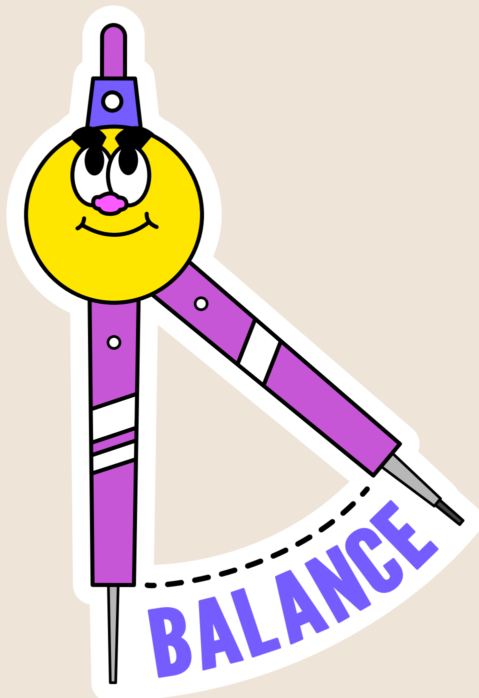
Лекция № 6



18.03.2023

Th. о продл. неотриц. веществ. ограниченн мер на кольце мн-в на порожд. этим кольцом K σ-кольцо $(\mathfrak{K}_\sigma(K))$

$\mu: K \to [0, N]$, $\forall A, B \in K^2 \longrightarrow \rho_\mu(A,B) = \mu(A \Delta B)$.

Р-м ф-цию ρ_μ, назыв. полуметрикой ≥ 0, ρ_μ неотриц., симм.

Если $A = B \to \rho_\mu(A,B) = 0$; $|\rho_\mu(A,B) - \rho_\mu(C,D)| \leq$

$\leq \rho_\mu(A,C) + \rho_\mu(B,D)$. Итак получаем 4 основных св-ва

<u>Опр</u>. пос-ть $(x_n)_{n=1}^\infty : \mathbb{N} \to M$ наз. фунд. отн. ρ, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geq n, m \geq n_\varepsilon) \to \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$

<u>Опр</u>. Если (M, ρ) полуметрика про-во $M_0 \subset M$, $\rho|_{M_0 \times M_0} = \varepsilon_0$,

то (M_0, ρ_0) наз-ся полуметрикой подпр-во в (M, ρ),

которое наз. п/м подпр-м для (M_0, ρ_0)

<u>Теорема</u>: $\forall$ п/м пр-во имеет полное п/м подпр-во

Пусть (X, ρ) — п/м пр-во

Шаг 1: Подстроим вспом: (Y, d): $\exists$ алгебра $J: X \to Y$

т.ч. $\forall (x_1, x_2) \in X \times X \quad \rho(x_2, x_1) = d(J(x_1), J(x_2))$

Шаг 2: $X_1 = (Y \setminus J(x)) \sqcup X$

$\rho_1(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in X$

$\rho_1(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$

$\rho(x, y) = \rho_1(y_1, x_2) = d(y_1, J(x_2))$

Обозн. $A^B = \{ f : B \xrightarrow{f} A \}$

$X_{фund} = \{ (x_n)_{n=1}^\infty : \mathbb{N} \to X$ ф-ие отн. $\rho \}$

$d((x_n)_{n=1}^\infty, (z_n)_{n=1}^\infty) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_0, z_n)$

Функц. $\mathbb{N} \ni n \to \rho(x_n, z_n)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и ищем γ_ε: $\forall m > \gamma_\varepsilon$

$\forall n > \gamma_\varepsilon \quad > |\rho(x_n, z_n) - \rho(x_m, z_m)| \leq \rho(x_n, x_n) + \rho(z_n, z_n)$

$\exists n^x_{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n^x_{\varepsilon/2} \quad \forall m > n^x_{\varepsilon/2}$

$\nu_\varepsilon = \max(n^{\bar{x}}_{\varepsilon/2}, n^{\bar{x}}_{\varepsilon/2})$

$\lim \rho(x_n, y_n) + \lim_n (\rho(y_n, z_n))$

(Y, d) – полное?

Ищем $\forall$ ф-ии п-ти $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots) \in Y^{\mathbb{N}}_{fund}$

т.к. $\bar{y}^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n, \dots) \equiv (x_n^n)_{n=1}^{\infty} \in Y = X^{\mathbb{N}}_{fund}$

предел $\bar{y}^{\infty} = (x_1^{\infty}, \dots, x_n^{\infty}, \dots) = \lim \bar{y}^k$

$\bar{y}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots)$

$\bar{y}^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots)$

$\vdots$

$\bar{y}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \dots)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad (m \geqslant \nu_\varepsilon, n \geqslant \nu_\varepsilon) \to \rho(\bar{y}^m, \bar{y}^n) < \varepsilon$

$\varepsilon_l = \frac{1}{2^l}, \forall l \in \mathbb{N}$

$d(y^{\nu(l+k)}, y^{\nu(l)}) < \frac{1}{2^l}, \quad l_{1+l} > \nu(l)$

$\frac{1}{2} > d(\bar{y}^{\nu(1)}, \bar{y}^{\nu(2)}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n^{\nu_1}, x_n^{\nu_2})$

$\exists n_1 : \forall n \geqslant n_1 \; |\rho(x_n^{\nu_1}, x_n^{\nu_2}) = d(y^{\nu(1)}, y^{\nu(2)})| < 1/2$

$\rho(x_n^{\nu_1}, x_n^{\nu_2}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$2^l > d(\bar{y}^{\nu(l+1)}, y^{\nu_l}) = \lim \rho(x_n^{2/n}, x_n^{\nu(l+1)})$

$\exists n_1 \; \forall n \geqslant n_1 \quad \rho(x_n^{\nu(1)}, x_n^{\nu(2)}) < 2^{-1}$

$\exists n_2 \; \forall n \geqslant n_2 \quad \rho(x_n^{\nu(2)}, x_n^{\nu(3)}) < 2^{-2}$

$\forall l \in \mathbb{N} \quad 2^{-l} > d(y^{\nu(l+1)}, y^{\nu(2)}) \xleftarrow[n\to\infty]{} \rho(x_n^{\nu(l)}, x_n^{\nu(l+1)})$

$\exists n_l > n_{l-1} \quad \forall n > n_l \quad \rho(x_n^{\nu(l)}, x_n^{\nu(l+1)}) < 2^{-l}$

$\forall n, m > m_{l+1} \quad \rho(x_m^{\nu(1)}, x_n^{\nu(1)}) < 2^{-1}$

$\forall n, m \geqslant m_l \quad \rho(x_m^{\nu(l)}, x_n^{\nu(l+1)}) < 2^{-l}$

$(x_l^{\infty})_{l=1}^{\infty}$ fund? $\forall \varepsilon > 0 \; \exists L : \; 2^{-L} < \varepsilon/4$

$\forall l_1, l_2 > L \quad \rho(x_{l_2}^{\infty}, x_{l_1}^{\infty}) = \rho(x_{l_1}^{\infty}, x_{l_1-1}^{\infty}) + \rho(x_{l_2-1}, x_{l_1-2}) + \dots +$

$+ \rho(x_{l_1+1}^{\infty}, x_{l_1}^{\infty})$

$\rho(x_{n(l_2)}^{\nu(l_1)}, x_{n l_2 - 1}^{\nu l_2 - 1}) + \rho(x_{n(l_2-1)}^{\nu l_2 - 1}, x_{n(l_2-2)}^{\nu l_2 - 2}) + \ldots + \rho(x_{n(l_1+1)}^{\nu l_1 + 1}, x_{m_1}^{\nu l_1})$

Проверим сходимость:

$\forall \varepsilon > 0$ ищем $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall k \geq \nu_\varepsilon$

$d(\bar{y}^k, \bar{y}^\infty) < \varepsilon$

$d((x_1^k, x_2^{k_2}, \ldots), (x_1^\infty, x_2^\infty, \ldots)) = \lim\limits_n \rho(x_n^k, x_n^\infty)$

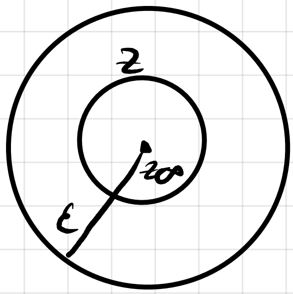
$\exists\, l_{\varepsilon/2}$ $\forall l \geq l_\varepsilon$ dy

Лемма: Если в полуметр. пр-ве (Z, r) пос-ть $(z_n)_{n=1}^\infty$ для сх-ти $z_n \to z_\infty \in Z$ дост. сх-ти по какой-нибудь $(z_{n_k})_{k=1}^\infty$, $(n_k) \uparrow\uparrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.е. $r(z_{n_k}, z_\infty) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Док-во: Дано $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon^r(z_\infty) = \{z \subset Z \mid r(z, z_\infty) < \varepsilon\}$

$\forall n > n_{\varepsilon/2}$ $\forall m > n_{\varepsilon/2}$ $r(z_r, z_m) < \varepsilon/2$

$\exists\, k_{\varepsilon/2}$ $\forall k \geq k_{\varepsilon/2}$ $z_{n_k} \in B_{\varepsilon/2}(z_\infty)$



$\exists\, \tilde{k}$ $\forall k \geq \tilde{k}$ $n_k > n_{\varepsilon/2}$

$\tilde{\tilde{k}} = \max(k_{\varepsilon/2}, \tilde{k})$

$\forall \varepsilon > 0$ ищем $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall l \geq L_\varepsilon$

$2^{-l} < \varepsilon/4$

$L_\varepsilon \stackrel{?}{=} L$

$\bar{y}\nu^{(L)} = (x_1^{\nu L}, \ldots)$