Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jacobiego

1 Zastosowanie

Procedura `Jacobi_interval()` rozwiązuje układ równań liniowych postaci $A_x = b$, gdzie A oznacza macierz kwadratową stopnia n, natomiast $x, b \in R^n$, mit to maksymalna ilość iteracji, a epsilon służy do ustawienia dokładności z jaką chcemy uzyskać wynik. Rozwiązywanie problemu odbywa się przy użyciu metody Jacobiego w zmiennopozycyjnej arytmetyce przedziałowej.

2 Opis metody

Macierz A jest przekształcana na sumę trzech różnych macierzy w następujący sposób:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$$

Gdzie L oznacza macierz dolną trójkątną, D to macierz diagonalna, a U jest macierzą trójkątną górną. Uwzględniając ten rozkład, układ równań ten można zapisać w następującej postaci:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{D_x} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Na podstawie powyższego wykonujemy iteracje w następujący sposób:

$$\mathbf{D_x^{k+1}} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x^k} + \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x^{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x^k} + \mathbf{D^{-1}} \cdot \mathbf{b}$$

Jeżeli promień spektralny macierzy $-\mathbf{D^{-1}} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U})$ jest mniejszy od 1, to algorytm iteracyjny jest zbieżny. Z tego faktu wynika, iż (k+1) przybliżenie i-tej wartości składowej rozwiązania określamy takim wzorem:

$$\mathbf{x_i^{k+1}} = \frac{-\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{x_j^k} + \mathbf{b_i}}{\mathbf{a_{ii}}}, \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$$

Założenia do powyższego wzoru są takie, że $\mathbf{j} \neq \mathbf{i}$ oraz $\mathbf{a_{ii}} \neq \mathbf{0}$. Metoda iteracji kończy się, gdy osiągniemy taką sytuację:

$$\frac{\| \mathbf{x^{k+1}} - \mathbf{x^k} \|}{\mathbf{max}(\| \mathbf{x^{k+1}} \|, \| \mathbf{x^k} \|)} \leq \varepsilon, \mathbf{x^{k+1}} \neq \mathbf{0} \text{ lub } \mathbf{x^k} \neq \mathbf{0}$$

Zakładając, że:

$$\| \mathbf{x} \| = \mathbf{max_{1 \leq i \leq n}} \mid \mathbf{x_i} \mid$$

Tutaj ε oznacza zadaną dokładność, do której dążymy, lub gdy $\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} = \mathbf{0}$ lub też, gdy liczba iteracji w procesie jest większa od przyjętej wartości maksymalnej.

3 Wywołanie procedury

`Jacobi_interval()`

4 Dane

n : wielkość macierzy kwadratowej, na której chcemy operować
a_i : tablica z wartościami elementów macierzy A (element a_{ij} powinien zawierać wartość a_{ij}, gdzie $i, j = 1, 2, \ldots, n$)
b_i : tablica z wartościami podanymi do wektora b (element b_i powinien zawierać wartość b_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$)
mit : maksymalna liczba iteracji przy wykonywaniu obliczeń
ε : względna dokładność rozwiązania, jaką chcemy uzyskać
x_i : tablica, która zawiera początkowe przybliżenia wartości x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

5 Wyniki

x_i: tablica z rozwiązaniami dla każdego elementu x_i (i=1,2,...,n)
it: liczba iteracji, które zostały wykonane podczas obliczeń

6 Parametry dodatkowe

st : zmienna, której w procedurze `Jacobi_interval()` przypisuje się jedną z następujących wartości:

- 1, jeżeli $n < 1$
- 2, gdy macierz **A** jest osobliwa (sprawdzanie metodą Eliminacji Gaussa)
- 3, jeżeli wymagana dokładność rozwiązania nie jest osiągnięta po **mit** iteracjach,
- 0, jeśli żadne z powyższych

7 Typy parametrów

int: n, mit, it, st
interval_arithmetic::Interval<long double>: eps, A_i, b_i, $x1_i$, $x2_i$, M_i, N_i

8 Identyfikatory nielokalne

Interval - nazwa typu z biblioteki, używanej w C++ przy pomocy **interval_arithmetic::**.
Biblioteka zawiera operatory oraz funkcje dotyczące obliczeń na arytmetyce przedziałowej zmiennopozycyjnej, a szczegóły dotyczące implementacji zawarte są w **Interval.h**.

9 Przykłady

Przykład nr 1

Dane:

$\mathbf{n} = 4$

$\mathbf{A}[1][1] = [-12.235, -12.235]$, $\mathbf{A}[1][2] = [1.229, 1.229]$, $\mathbf{A}[1][3] = [0.5597, 0.5597]$, $\mathbf{A}[1][4] = [0, 0]$

$\mathbf{A}[2][1] = [1.229, 1.229]$, $\mathbf{A}[2][2] = [-6.78, -6.78]$, $\mathbf{A}[2][3] = [0.765, 0.765]$, $\mathbf{A}[2][4] = [0, 0]$

$\mathbf{A}[3][1] = [0.5597, 0.5597]$, $\mathbf{A}[3][2] = [0.765, 0.765]$, $\mathbf{A}[3][3] = [91.0096, 91.0096]$, $\mathbf{A}[3][4] = [2, 2]$

$\mathbf{A}[4][1] = [0, 0]$, $\mathbf{A}[4][2] = [0, 0]$, $\mathbf{A}[4][3] = [-2, -2]$, $\mathbf{A}[4][4] = [5.5, 5.5]$

$\mathbf{B}[1] = [0.956, 0.956]$, $\mathbf{B}[2] = [51.5603, 51.5603]$, $\mathbf{B}[3] = [2, 2]$, $\mathbf{B}[4] = [5.8, 5.8]$

$\mathbf{x}[1] = [2, 2]$, $\mathbf{x}[2] = [0.75, 0.75]$, $\mathbf{x}[3] = [-1, -1]$, $\mathbf{x}[4] = [0.9, 0.9]$

$\mathbf{mit} = 10$, $\mathbf{eps} = 1e - 14$

Wyniki:

$\mathbf{x}[1] = [-8.53655929630745E-01, -8.53655929630745E-01]$

$\mathbf{szerokosc} = 9.75781955236954E-19$

$\mathbf{x}[2] = [-7.75175766676499E+00, -7.75175766676499E+00]$

$\mathbf{szerokosc} = 4.77048955893622E-18$

$\mathbf{x}[3] = [6.86615394394502E-02, 6.86615394394502E-02]$

$\mathbf{szerokosc} = 1.08420217248550E-19$

$\mathbf{x}[4] = [1.07951328547415E+00, 1.07951328547415E+00]$

$\mathbf{szerokosc} = 4.33680868994202E-19$

$\mathbf{it} = 10$, $\mathbf{st} = 3$

Przykład nr 2

Dane:

$\mathbf{n} = 4$

$\mathbf{A}[1][1] = [-12.235, -12.235]$, $\mathbf{A}[1][2] = [1.229, 1.229]$, $\mathbf{A}[1][3] = [0.5597, 0.5597]$, $\mathbf{A}[1][4] = [0, 0]$

$\mathbf{A}[2][1] = [1.229, 1.229]$, $\mathbf{A}[2][2] = [-6.78, -6.78]$, $\mathbf{A}[2][3] = [0.765, 0.765]$, $\mathbf{A}[2][4] = [0, 0]$

$\mathbf{A}[3][1] = [0.5597, 0.5597]$, $\mathbf{A}[3][2] = [0.765, 0.765]$, $\mathbf{A}[3][3] = [91.0096, 91.0096]$, $\mathbf{A}[3][4] = [2, 2]$

$\mathbf{A}[4][1] = [0, 0]$, $\mathbf{A}[4][2] = [0, 0]$, $\mathbf{A}[4][3] = [-2, -2]$, $\mathbf{A}[4][4] = [5.5, 5.5]$

$\mathbf{B}[1] = [0.956, 0.956]$, $\mathbf{B}[2] = [51.5603, 51.5603]$, $\mathbf{B}[3] = [2, 2]$, $\mathbf{B}[4] = [5.8, 5.8]$

$\mathbf{x}[1] = [2, 2]$, $\mathbf{x}[2] = [0.75, 0.75]$, $\mathbf{x}[3] = [-1, -1]$, $\mathbf{x}[4] = [0.9, 0.9]$

$\mathbf{mit} = 100$, $\mathbf{eps} = 1e - 14$

Wyniki:

$\mathbf{x}[1] = [-8.53655931618862E-01, -8.53655931618862E-01]$

$\mathbf{szerokosc} = 9.75781955236954E-19$

$\mathbf{x}[2] = [-7.75175767876022E+00, -7.75175767876022E+00]$

$\mathbf{szerokosc} = 4.77048955893622E-18$

$\mathbf{x}[3] = [6.86615398239438E-02, 6.86615398239438E-02]$

$\mathbf{szerokosc} = 1.08420217248550E-19$

$\mathbf{x}[4] = [1.07951328720871E+00, 1.07951328720871E+00]$

$\mathbf{szerokosc} = 4.33680868994202E-19$

$\mathbf{it} = 18$, $\mathbf{st} = 0$

Spis treści

1 Zastosowanie 1

2 Opis metody 1

3 Wywołanie procedury 1

4 Dane 2

5 Wyniki 2

6 Parametry dodatkowe 2

7 Typy parametrów 2

8 Identyfikatory nielokalne 2

9 Przykłady 3