# zhangl38's Exploring and Analyzing Hockey Scoring Sequences zhangl38's DAR Assignment 3 (Fall 2023)

Liebin Zhang

2023-10-02

## Assignment 3 Notebook Overview

This notebook is broken into two main parts:

```
* Part 1 HOCKEY DATA PREPARATION
```

- \* Part 2 Cluster the unsuccessful shots
- \* Part 3 Build k-means elbow and Visualizes means and build Heatmap without goal
- \* Part 4 Visualize clusters with PCA without goal

#### Part 1: HOCKEY DATA PREPARATION

#### Setup: Define functions

The major functions of this notebook are contained in the file AnalysisCodeFunc.R. This code chunk sources (imports) a helper script that defines various functions used through this notebook for data processing and analysis.

```
# All user-defined functions are contained in the following helper script file.
source(".../AnalysisCodeFunc.R")
```

#### Setting program parameters

This section sets the dimensions of the data structures used in this notebook, based on the captured video.

```
# Size of rink image and of all plots
xsize <- 2000
ysize <- 850

# FPS of the video
fps <- 29.97

# Coordinates to the goal pipes
pipes_x <- 1890
lpipe_y <- 395
rpipe_y <- 455</pre>
```

#### Data preparation for predictive modelling

Based on our settings, this section reads in the captured image data.

The code is highly dependent upon the following directory structure:

- The file path determined by the filepath variable contains folders named with the game number, followed by 'p', followed by the period number
- Each period folder contains a folder named Sequences.
- Each Sequences folder contains sequence\_folders that contain all the relevant sequence data.

```
# Set filepaths and read the rink
# Results suppressed because this can be messy...
# This file path should contain the hockey rink images and all the sequences
filepath <- '../../FinalGoalShots/'</pre>
# See above for explanation of file path syntax
games \leftarrow c(24, 27, 33, 34)
# Only take the first and third periods. These are when the opposing team shoots on our goal. Our shots
periods <- map(games, ~ str_c(., 'p', c(1, 3))) %>% unlist
# Get the 'Sequences' folder for every period
period_folders <- map(periods, ~ {</pre>
 str_c(filepath, ., '/Sequences')
})
# Get every folder inside each 'Sequences' folder
sequence_folders <- period_folders %>%
  map(~ str_c(., '/', list.files(.))) %>%
  unlist
# Read the rink images and format them to a raster used for graphing
rink_raster <- makeRaster(filepath, 'Rink_Template.jpeg')</pre>
half_rink_raster <- makeRaster(filepath, 'Half_Rink_Template.jpeg')
# As every folder is run through the `combinePasses` function, the info.csv file in each sequence folde
info \leftarrow matrix(0, nrow = 0, ncol = 4) %>%
  data.frame %>%
  set_names(c('possessionFrame', 'shotFrame', 'outcome', 'rightHanded'))
# Read in all the sequences
# NOTE: This step takes a long time (minutes)
sequences = sequence_folders %>% map(combinePasses)
# Change outcomes to more verbose names
info$outcome %<>% fct_recode(Goal = 'G', Save = 'GB', 'Defender Block' = 'DB', Miss = 'M')
```

#### Shot statistics retrieval

This section constructs the dataframe used to predict if shots are successful.

```
# Get stats for the shot in every sequence
shots_stats.df <- seq_along(sequences) %>%
  map_dfr(goalShotStats) %>%
  # Some models can't use logical data
  mutate_if(is.logical, as.factor)
```

We first combine the shots data with the outcomes vector;

```
# Split data into training and validation sets
outcomes.goal <- (info$outcome == 'Goal') %>% as.numeric %>% as.factor
```

```
# Append to shots_stats.df
shots_stats_goal.df <- cbind(shots_stats.df, outcomes.goal)

# Save this dataframe on the file system in case we want to simply load it later (to save time)
saveRDS(shots_stats_goal.df, "shots_stats_goal.df.Rds")

Now let's do some basic classification analysis on the shots_stats_goal.df dataset!

We'll use tidymodels, part of the tidyverse, to split the data into an 80% train/20% test split.
```

```
#Create training set
set.seed(100)

# Type ?initial_split , ?training , or ?testing in the R console to see how these work!
hockey_split <- initial_split(shots_stats_goal.df, prop = 0.8)
hockeyTrain <- training(hockey_split)
hockeyTest <- testing(hockey_split)

# Check how many observations for each split we have
nrow(hockeyTrain)

## [1] 84
nrow(hockeyTest)

## [1] 21
# How many features are there
ncol(hockeyTrain)</pre>
```

## [1] 12

library(mltools)

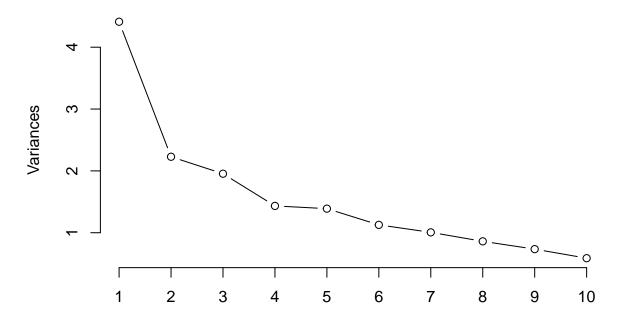
#### Part 2: Cluster the unsuccessful shots

For this part, Step 1: I use new matrix named shotsNum to take off the goals(outcomes) and change the True/False feature to factor Step 2: Using shotsNum to cluster the unsuccessful shots as HockeyTrain.m and prepare to build k-means elobow

```
shots <- readRDS("shots_stats_goal.df.Rds")#Need to make sure this is grabb</pre>
library(data.table)
##
## Attaching package: 'data.table'
## The following objects are masked from 'package:dplyr':
##
       between, first, last
##
## The following object is masked from 'package:purrr':
##
##
       transpose
## The following objects are masked from 'package:reshape2':
##
##
       dcast, melt
```

```
##
## Attaching package: 'mltools'
## The following objects are masked from 'package:yardstick':
##
##
       mcc, rmse
## The following object is masked from 'package:tidyr':
##
##
       replace_na
shotsNum <- shots</pre>
shotsNum$goalieScreened = as.factor(shotsNum$goalieScreened)
shotsNum$oppDefenders = as.factor(shotsNum$oppDefenders)
shotsNum$sameDefenders = as.factor(shotsNum$sameDefenders)
shotsNum <- shotsNum[,1:11]</pre>
shotsNum <- one_hot(dt = as.data.table(shotsNum))</pre>
h.df <- shotsNum %>%
mutate_all(as.numeric)%>% mutate_all(scale)
hockeyTrain.m <- as.matrix(h.df)</pre>
my.pca<-prcomp(hockeyTrain.m,retx=TRUE)</pre>
plot(my.pca, type="line")
```

#### my.pca



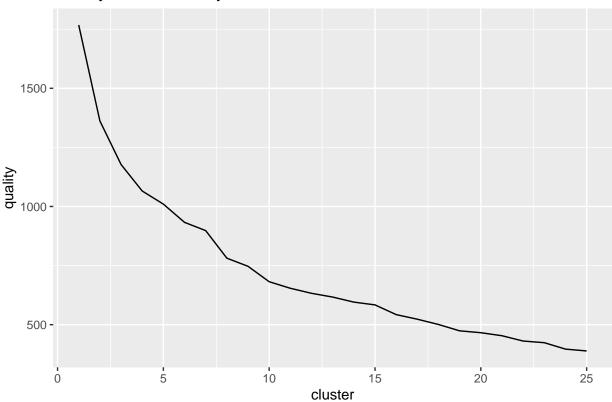
Part 3: Build k-means elbow

Step 1: using wssplot and cluster set(HockeyTrain.m) to build k-means by cluster Step 2: Analysis k-means elbow which is 10

```
wssplot <- function(data, nc=25, seed=20){
wss <- data.frame(cluster=1:nc, quality=c(0))
for (i in 1:nc){
set.seed(seed)</pre>
```

```
wss[i,2] <- kmeans(data, centers=i)$tot.withinss}
ggplot(data=wss,aes(x=cluster,y=quality)) +
geom_line() +
ggtitle("Quality of k-means by Cluster")
}
wssplot(hockeyTrain.m, nc=25)</pre>
```

### Quality of k-means by Cluster



# Part 3: Visualizes means and build Heatmap without goal

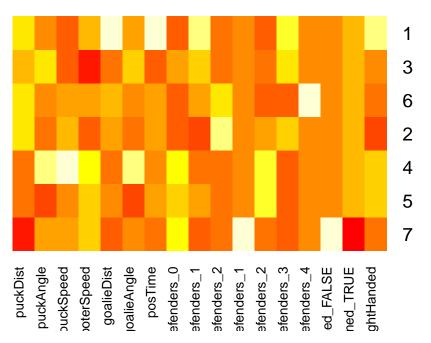
Step 1: Visualizes means in 7 clusters which clusters of sizes are 4, 15, 15, 3, 32, 14, 22 Step 2: Using ggplot to visualize my cluster means. Step 3: Analysis Heatmap: The high relavent in heatmap is pcudistance in cluster 2 and cluster 5, puckAngle has high respective in cluster 1 and cluster 1 and 3. Result: i plan to analysis puck distance influence in Hockey game in the future analysis.

```
## You have loaded plyr after dplyr - this is likely to cause problems.
## If you need functions from both plyr and dplyr, please load plyr first, then dplyr:
## library(plyr); library(dplyr)
## -----
##
## Attaching package: 'plyr'
  The following objects are masked from 'package:dplyr':
##
##
      arrange, count, desc, failwith, id, mutate, rename, summarise,
##
      summarize
  The following object is masked from 'package:purrr':
##
##
##
      compact
  <- kmeans(hockeyTrain.m,7)</pre>
  K-means clustering with 7 clusters of sizes 5, 8, 16, 14, 23, 7, 32
## Cluster means:
##
                             puckSpeed shooterSpeed goalieDist goalieAngle
       puckDist
                  puckAngle
     0.65571693 -0.24690762 -0.63196744
                                         0.09731089 1.7207458 -0.04520701
## 2 0.66195505 -0.36349023 0.07699793 -0.42900536 0.2382595 -0.40360431
## 3 0.47611274 0.54487300 -0.53062681 -0.82596040 -0.1414694 0.45355726
## 4 -0.01427667 1.04652972 1.16360646
                                        0.44081510 -0.2482893 1.09878749
## 5 -0.05530758 -0.73814532 -0.12336714
                                         0.20077936 0.1541647 -0.63049476
## 6 0.69792871 -0.24926116 -0.04197131 -0.11755071 0.5126830 -0.15074069
## 7 -0.61267444 -0.01577355 -0.06641764
                                         0.19357416 -0.3720254 -0.11339085
##
        posTime sameDefenders_0 sameDefenders_1 sameDefenders_2 oppDefenders_1
## 1
     1.12176689
                    -1.19504329
                                      1.5376484
                                                      -0.357496
                                                                   -0.6441500
## 2 0.13075140
                    -1.19504329
                                     -0.6441500
                                                      2.770594
                                                                   -0.6441500
## 3 -0.27352173
                    -0.43609443
                                      0.7194740
                                                      -0.357496
                                                                   -0.5077876
## 4 -0.05577616
                     0.53969697
                                     -0.3324645
                                                      -0.357496
                                                                   -0.6441500
## 5 0.13858983
                     0.03687371
                                      0.2095972
                                                      -0.357496
                                                                   -0.6441500
                    -1.19504329
                                                      1.429984
## 6 0.20645506
                                      0.2909064
                                                                   -0.6441500
## 7 -0.19157448
                     0.70232887
                                     -0.5077876
                                                      -0.357496
                                                                    1.4012860
    oppDefenders_2 oppDefenders_3 oppDefenders_4 goalieScreened_FALSE
## 1
       -0.84524662
                        1.8791655
                                      -0.2659855
                                                          -0.6737717
## 2
       -0.08884695
                        0.9768223
                                      -0.2659855
                                                          -0.6737717
       -0.59311339
## 3
                        1.4279939
                                      -0.2659855
                                                          -0.6737717
## 4
        1.17181917
                       -0.5270830
                                      -0.2659855
                                                           -0.6737717
## 5
        1.17181917
                       -0.5270830
                                      -0.2659855
                                                          -0.5805621
## 6
       -0.84524662
                       -0.5270830
                                       3.7237973
                                                          -0.6737717
## 7
       -0.71918000
                       -0.5270830
                                      -0.2659855
                                                           1.4700473
##
    goalieScreened_TRUE rightHanded
## 1
              0.6737717 1.06394210
## 2
              0.6737717 -0.68158791
## 3
              0.6737717 -0.05818433
## 4
              0.6737717 0.35148087
## 5
              0.5805621 0.37006682
## 6
              0.6737717 -0.36098035
## 7
             -1.4700473 -0.30754576
##
```

```
## Clustering vector:
##
                \begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 6 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 6 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 5 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \end{smallmatrix} 
             [38] \ 7 \ 4 \ 6 \ 7 \ 3 \ 5 \ 3 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5 \ 5 \ 7 \ 5 \ 7 \ 4 \ 2 \ 7 \ 7 \ 5 \ 7 \ 4 \ 5 \ 5 \ 4 \ 3 \ 1 \ 7 \ 4 \ 7 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 7 
##
           [75] 3 3 3 5 3 7 3 7 3 7 4 4 4 3 5 7 1 1 7 4 6 7 5 1 7 5 7 5 7 4 1
##
## Within cluster sum of squares by cluster:
## [1] 26.15541 40.63992 136.97536 103.88666 191.65345 55.64951 300.12181
           (between_SS / total_SS = 51.6 %)
##
## Available components:
## [1] "cluster"
                                                                     "centers"
                                                                                                                                                                   "withinss"
                                                                                                                    "totss"
                                                                                                                                                                                                                 "tot.withinss"
## [6] "betweenss"
                                                                     "size"
                                                                                                                    "iter"
                                                                                                                                                                   "ifault"
par(mar = c(1, 1, 1, 1))
heatmap.2(km$centers,
scale = "column",
dendrogram = "column",
Colv=FALSE,
cexCol=1.0,
main = "Kmeans Cluster Centers", trace ="none")
```

# Color Key and Histogram -2 0 1 2 Column Z-Score

# **Kmeans Cluster Centers**

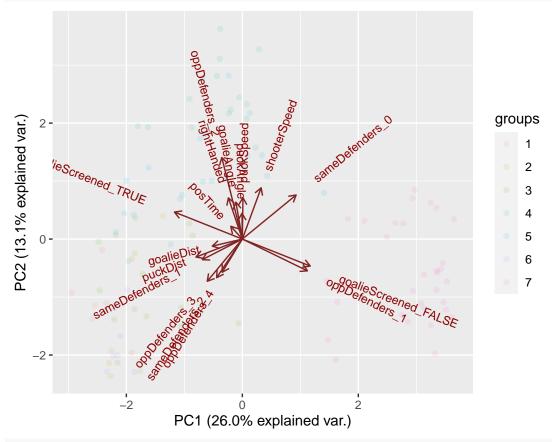


#Part 4: Visualize clusters with PCA without goal

```
# Create a biplot for PC1 and PC2 colored by cluster
t<-1.2*max(abs(my.pca$x[,1:2]))
```

```
p <- ggbiplot(my.pca,
    choices=c(1,2),
    alpha=.1,
    scale = 0,
    groups=as.factor(km$cluster))
p <- p + scale_colour_hue()
    ggtitle('Biplot of PC1 and PC2')+
    xlim(-t,t) + ylim(-t,t)</pre>
## NULL
```

p



p1\_rink <- read\_csv("~/Hockey\_Fall\_2023/FinalGoalShots/24p1/Sequences/Files\_Seq\_1/P1\_rink\_ICP.csv")</pre>

```
## Rows: 67 Columns: 18
## -- Column specification -
## Delimiter: ","
## chr (18): Ses-Frm, V1, V2, V3, V4, V5, H1, H2, H3, H4, H5, GH, GV, R1, R2, R...
##
## i Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.
## i Specify the column types or set `show_col_types = FALSE` to quiet this message.
p1_rink
## # A tibble: 67 x 18
                              `Ses-Frm` V1
##
                                                                                                                  ٧2
                                                                                                                                               VЗ
                                                                                                                                                                           ۷4
                                                                                                                                                                                                        ۷5
                                                                                                                                                                                                                                     H1
                                                                                                                                                                                                                                                                 H2
                                                                                                                                                                                                                                                                                               НЗ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            H4
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         Н5
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     GH
##
                             <chr>
                                                                             <chr>
                                                                                                                  <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr>
                                                                            (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
               1 (1, 1)
```

```
## 2 (1, 2)
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## 3 (1, 3)
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## 4 (1, 4)
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## 5 (1, 5)
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## 6 (1, 6)
## 7 (1, 7)
                                                                                                                                                                                                            (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## 8 (1, 8)
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## 9 (1, 9)
## 10 (1, 10)
                                                                                                                                                                                                              (-1, -~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~ (-1,~
## # i 57 more rows
## # i 6 more variables: GV <chr>, R1 <chr>, R2 <chr>, R3 <chr>, R4 <chr>,
                                                                                        Puck <chr>>
 # Returns whether or not the goalie's line of sight is blocked by a player on the shot frame
goalieSightBlocked = function(sequence, shooter, goalie, frame){
                         lenience = 50
                         puck_shot_xy = sequence %>% frameXY('P', frame)
                         goalie_xy = sequence %>% frameXY(goalie, frame)
                         # A goalie's sight is blocked if someone is on the line between the goalie and the puck
                         sight_line = lineBetween(goalie_xy, puck_shot_xy)
                         player_data = playerXYandAnglesToPuck(sequence, frame, exclude = c(goalie, shooter))
                         # Find all the players who are within a range of the line
                         blocking players = player data %>%
                                                 filter(pointOnLine(x, y, sight_line$slope, sight_line$intercept, lenience))
                       nrow(blocking_players) > 0
}
```