Eduardo Pérez Motato. (27/05/2024) NIU: 1709992

Exercici 57: Sigui $f(x,y,z) = y^3 + xz^2$. Determineu el màxim i el mínim absolut de f sobre la superfície de l'esfera centrada a l'origen i de radi 1.

Solució. Per això hem de fer servir el teorema dels multiplicadors de Lagrange.
Definim $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$, ara si fem $\nabla(f - \lambda g)(x_0) = 0$ llavors x_0 és un extrem relatiu condicionat a la superfície. Ara, calqulem:

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= \nabla(f - \lambda g)(x_0)\\ &= \nabla\left(y^3 + xz^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\right)(x_0)\\ &= \left(z^2 - \lambda(2x), 3y^2 - \lambda(2y), 2xz - \lambda(z^2)\right)(x_0)\end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{cases} z^2 - \lambda(2x) = 0\\ 3y^2 - \lambda(2y) = 0\\ 2xz - \lambda(z^2) = 0\\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\end{cases}$$

Llavors sabem que $y = 0$ o $y = \frac{2\lambda}{3}$. També arribem a què $x = \frac{z^2}{2\lambda}$ i llavors $\frac{z^3 - \lambda z^2}{\lambda} = 0$. Per alló tenim els seguents casos:

$$\begin{cases} z = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ fent que } y = 1\\ z = \lambda \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}, \text{ això no restringeix } y \text{ que pot ser els dos.}\end{cases}$$

En el segon, calculem λ en ambdos casos: $y = 0, y = \frac{2\lambda}{3}$.
En el primer, $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda^2 = 1$, llavors $\lambda = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$
En el segon, $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^2 + \lambda^2 = 1$, llavors $\lambda = \pm\frac{6\sqrt{61}}{61}$

Finalment, tenim els seguents punts:

1. $x_1 = (0,1,0) \Rightarrow f(x_1) = 1$
2. $x_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow f(x_2) = \frac{4\sqrt{5}}{25}$
3. $x_3 = \left(\frac{3\sqrt{61}}{61}, \frac{4\sqrt{61}}{61}, \frac{6\sqrt{61}}{61}\right) \Rightarrow f(x_3) = \frac{172\sqrt{61}}{3721}$
4. $x_4 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow f(x_4) = -\frac{4\sqrt{5}}{25}$
5. $x_5 = \left(-\frac{3\sqrt{61}}{61}, -\frac{4\sqrt{61}}{61}, -\frac{6\sqrt{61}}{61}\right) \Rightarrow f(x_5) = -\frac{172\sqrt{61}}{3721}$

D'aquests, el minim absolut és x_5 i el maxim absolut x_1. □

Exercici 59: Sigui D el disc tancat centrat a l'origen i de radi 1 i sigui $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Justifiqueu per què f té màxim i mínim absoluts sobre D i trobeu-los.

Solució. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Llavors, els máxims i minims absoluts d'un compacte com D es poden calcular gràcies a $g(x,y) := x^2+y^2-1$. Llavors, en aplicar el teorema dels multiplicadors de Lagrange tindrem el següent

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\left(x^2+xy+y^2-\lambda\left(x^2+y^2-1\right)\right) \\ &= \nabla\left((x^2+y^2)(1-\lambda)+xy-\lambda\right) \\ &= (2x(1-\lambda)+y, 2y(1-\lambda)+x) \end{aligned}$$

Això gènera les seguents equacions:

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda)+y=0 \\ x+2y(1-\lambda)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Podem veure que $x=-2y(1-\lambda)$, de alli treiem que $0=(-4(1-\lambda)^2+1)y$.
Si $y=0$, $x=0$. Això no compleix la tercera equació. En canvi, si fem $(-4(1-\lambda)^2-1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$. Això fa que $x=\pm y$.
Si fem això, $2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finalment, tenim aquests quatre punts

1. $x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f(x_1)=3.$
2. $x_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f(x_2)=1.$
3. $x_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f(x_3)=1.$
4. $x_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f(x_4)=3.$

Llavors, els extrems relatius són x_1, x_2, x_3, x_4.
Ara hem de fer $\nabla\left(x^2+xy+y^2\right)=0$. Llavors, $(2x+y, 2y+x)=(0,0)$.
L'unica solució d'aquesta equació és $(0,0)$, que si és evalua és 0.
El máxim absolut és x_1 i x_3 i el mínim és $(0,0)$ □

Exercici 60: Feu el mateix si D és el quadrat tancat de vértexs $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$.

Solució. En aquest cas, sabem que $g_1(x)=1$, $g_2(x)=0$, $g_3(y)=1$, $g_4(x)=0$.
Veiem que si fem $\nabla(f-\lambda g_n)=0$ equival a $\nabla f=0$. Evaluem els seguents punts:

1. $x_1=(0,0) \Rightarrow f(x_1)=0.$
2. $x_2=(1,0) \Rightarrow f(x_2)=1.$
3. $x_3=(0,1) \Rightarrow f(x_3)=1.$
4. $x_4=(1,1) \Rightarrow f(x_4)=3.$

Llavors, veiem clarament que el máxim és $(1,1)$ i el minim és $(0,0)$. $\square$

Exercici 62: Trobeu els extrems absoluts de les funcions següents sobre els conjunts que us indiquen.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ sobre $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$

Solució. Primer calcularem els extrems relatius de f: $\nabla f = 0 \Rightarrow (2x+2, 2y) \Rightarrow (-1,0)$. Aquest punt està al domini.
Ara, farem mitjançants els multiplicadors de Lagrange la resta de punts.

$$\begin{aligned}(0,0) &= \nabla\left(x^2 + y^2 + 2x - \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right) \\ &= \nabla\left(2x + (1-\lambda)\left(x^2 + y^2\right) - \lambda\right) \\ &= (2 + (1-\lambda)\,2x, 2y\,(1-\lambda))\end{aligned}$$

Això ens deixen les seguents equacions

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2x\,(1-\lambda) \\ 0 = 2y\,(1-\lambda) \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Això fa que o $\lambda = 1$ o $y = 0$. La primera ens fa arribar a una contradicció, així que ha de ser la segona, fent que $x = \pm 1$.
$(1,0)$ no está al domini i $(-1,0)$ ja l'hem anotat.
Ara, fem el mateix procés amb $g(x,y) := x - y$.

$$\begin{aligned}(0,0) &= \nabla\left(x^2 + y^2 + 2x - \lambda\,(x-y)\right) \\ &= \nabla\left(x^2 + y^2 + 2x - \lambda\,(x-y)\right) \\ &= \nabla\,(2x + 2 - \lambda, 2y + \lambda)\end{aligned}$$

Això ens deixen aquestes equacions

$$\begin{cases} 0 = 2x + 2 - \lambda \\ 0 = 2y + \lambda \\ 0 = x - y \end{cases}$$

Veiem que $\lambda = -2y$ i $\lambda = 2x+2$, això fa que $2x+2+2y = 0$, el que fa que $x = -\frac{1}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}$, aquests estan dintre del domini. Llavors, ara evaluem els seguents punts:

1. $x_1 = (-1,0) \Rightarrow f(x_1) = -1$
2. $x_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x_2) = -\frac{1}{2}$
3. $x_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f(x_3) = 1 + \sqrt{2}$
4. $x_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f(x_4) = 1 - \sqrt{2}$

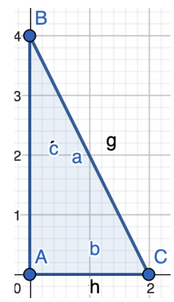
Això ens dona que x_3 és el máxim i x_1 és el minim. $\square$

Exercici 65: Calculeu les integrals següents intercanviant els límits d'integració i dibuixeu el domini sobre el qual esteu integrant.

c)

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dxdy$$

Solució. La regió que això crea és un triangle amb vertex $(0,0)\,,(0,4)\,,(2,0)$, és dir:



Intercanviant, tenim.

$$\int_0^2 \int_{2x}^4 e^{x^2} dydx = \int_0^2 4e^{x^2} - 2xe^{x^2} dx$$

I això després de molta estona no he sabut calcular $\square$

Exercici 67: Escriviu $\iint_D f dxdy$ com a integral iterada i calculeu-la.

a) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ i D és el triangle limitat per les rectes $y = x, y = 2x$ i $x = 2$.

b) $f(x,y) = x$ i D és el sector circular del primer quadrant limitat per la circunferència $x^2 + y^2 = 25$ i les rectes $y = 0$, $y = x$.

Solució.

a) $D = \{(x,y) : x \leq y \leq 2x \leq 4\}$, llavors tenim

$$\int_0^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2} dydx$$

si això ho fem iterativament, primer hem de calcular $\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2} dy$, que és el seguent:

$$\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2} dy = \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{x^2+t} dt = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \bigg|_{y=x}^{y=2x} = \frac{1}{2} \log \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}$$

i ara, tenim el seguent

$$\int_0^2 \frac{1}{2} \log \frac{5}{2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2} \int_0^2 1 dx = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2} x \bigg|_{x=0}^{x=2} = \log \frac{5}{2}$$

i aquesta és la solució.

b) $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 25, x\geq y\geq 0\}=\left\{(r,\theta): r\leq 5, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\right\}$, llavors

$$\int_0^5\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos\theta d\theta dr$$

si això ho fem iterativament, primer hem de calcular $\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos\theta d\theta$, que és el seguent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos\theta d\theta = r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta = r^2\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}r^2}{2}$$

i ara, tenim el seguent

$$\int_0^5\frac{\sqrt{2}r^2}{2}dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^5 r^2dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^5 = \frac{125\sqrt{2}}{6}$$

i aquesta és la solució.

$\square$

Exercici 78: Calculeu el centre de masses de $\{(x,y): 1\leq x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}$, si la densitat de massa ve donada per $\rho(x,y)=x^2+y^2$.

Solució. $x_{cm}=\iint_\Omega x\rho(x,y)\,dxdy$, analogament amb y_{cm}.
$\Omega=\left\{(r,\theta): 1\leq r\leq 2, 0\leq\theta\frac{\pi}{2}\right\}$
Llavors, tenim:

$$x_{cm}=\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos\theta d\theta dr=\int_1^2 r^4dr=\frac{31}{5}$$
$$y_{cm}=\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin\theta d\theta dr=\int_1^2 r^4dr=\frac{31}{5}$$

$\square$

Exercici 79: Poseu els límits d'integració si feu servir coordenades cilíndriques per integrar una funció sobre les regions que us indiquen.

b) $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z^2\leq x^2+y^2\leq z\}$

Solució. $B=\{(r,\theta,z): z^2\leq r^2\leq z\}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{z^2}^z f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrdzd\theta$$

$\square$

Exercici 80: Calculeu, fent servir coordenades cilíndriques, la integral de la funció $f(x,y,z)=xz$ sobre les regions de l'exercici anterior.

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2 + y^2 \le z\}$

Solució.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z^2}^{z} zr^2 \cos\theta drdzd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos\theta \frac{z^7 - z^4}{3} dzd\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{3}{120} d\theta = 0$$

□

Exercici 83: Calculeu les integrals següents.

b)

$$\iiint_\Omega (z^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdydz$$

, on $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \le 0, z^2 \le (x^2 + y^2) \le 2z\}$.

Solució. Aquesta integral és més fàcil si es fa un canvi de variable a coordenades cilindriques $\Omega = \{(r, \theta, z) : 0 \le \theta \le \pi, z^2 \le r^2 \le 2z\}$, llavors l'integral és

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{z^2}^{2z} \int_0^{\pi} (z^2 + r) r d\theta drdz &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{z^2}^{2z} \pi(z^2 + r) rdrdz \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{z^2}^{2z} z^2 r\pi + r^2 \pi drdz \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{12z^4 + 16z^3 - 5z^6}{6} \pi dz \\
&= \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{24} - \frac{5}{5376} \right) \pi \\
&= \frac{477\pi}{8960}
\end{aligned}$$

□

Exercici 84: Calculeu les integrals següents.

b)

$$\iiint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz$$

, on $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

Solució. Aquesta integral és més fàcil si pasem a coordenades esferiques tal que $\Omega = \left\{(\rho,\phi,\theta) : 1 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Llavors, l'integral queda així

$$\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sin\phi \cos\theta}{\rho} \rho^2 \sin\phi d\phi d\theta d\rho$$

Llavors, calculem

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin^2\phi \cos\theta d\phi d\theta d\rho &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi d\phi d\theta d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4} \rho^2 \cos\theta d\theta d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} \rho^2 d\rho \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho^3}{3} \Bigg|_1^{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2} - 1}{12} \pi
\end{aligned}$$

$\square$