Apunts

La primera meitat del 1r curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Setembre 2023 - Gener 2024

Índex

Àlgebra Lineal

Definició: un espai vectorial es finit generat si existeixen vectors que generar aquest espai.
Definició: Donat un espai vectorial finit generat diem que un vector es una base de $\mathbb{E}$ si compleix les següents condicions:

1. Els vectors es un sistema generatiu per a $\mathbb{E}$.
2. Els vectors son linealment independents

Fet: tot espai vectorial $\mathbb{E}$ té una base
Aplicacions lineals: Funcions entre espais vectorials respectant operacions del espai vectorial.

> **Definició:** Una aplicació lineal entre dos espais vectorials $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ és una funció (aplicació) $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ que compleix:
>
> 1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{E}_1$
> 2. $f(kv_1) = kf(v_1)\ \forall v_1 \in \mathbb{E}_1, k \in \mathbb{K}$

Tota $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineal correspon a multiplicar per certa matriu A i escrivim a vegades $f = T_A$
Definició: Una forma lineal $w : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ és una funció amb certs números a_n de $\mathbb{K}$ (son formes lineals)
Definició: Donada $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ lineal definim el nucli de f com: $Ker(f) := e \in \mathbb{E}_1 | f(e) = 0_{\mathbb{E}_2} \subseteq \mathbb{E}_1$ i la imatge de f com: $Im(f) = f(e) | e \in \mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}_2$.
Fet: $Ker(f)$ és un s.e.v. de $\mathbb{E}_1$. $Im(f)$ és un s.e.v de $\mathbb{E}_2$. Té $dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim\mathbb{E}_1$
Definició: $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$

- Diem que f és injectiva si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- Diem que f és exhaustiva si $\forall e \in \mathbb{E}_2\ \exists v_1 \in \mathbb{E}_1 | f(v_1) = e_2$

- Diem que f es <u>bijectiva</u> si és injectiva i exhaustiva. Llavors es pot definir $f^{-1} : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_1$

<u>Fet</u>: $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ llavors

1. f és injectiva $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{0_{\mathbb{E}_1}\}$
2. f és exhaustiva $\Longleftrightarrow Im(f) = \mathbb{E}_2 \Longleftrightarrow dim(Im(f)) = dim(\mathbb{E}_2)$
3. f és bijectiva $\Longleftrightarrow$ es compleix el de dalt i $f^{-1} : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_1$.

<u>Fet</u>: $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

1. T_A injectiva $\Longleftrightarrow dim(Ker(T_A)) = 0 \Longleftrightarrow N - rang(A) = 0$.
2. T_A exhaustiva $\Longleftrightarrow dim(Im(T_A)) = M \Longleftrightarrow rang(A) = M$.
3. T_A bijectiva $\Longleftrightarrow N = rang(A) = M$, ès a dir A invertible i quadrada. En aquest cas, $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.

<u>Teorema</u>: Donada $f : \mathbb{E}_1 \to E_2$ lineal. $B = (V_1, \dots, V_l)$ una base de E_1 i $C = (w_1, \dots, w_t)$ una base de $\mathbb{E}_2$. Llavors f consisteix en coordenades B i C a multiplicar per certa matriu $[f]_{B,C} = M(C \xleftarrow{f} B$ anomenada la matriu associada a f de coordenades en B a coordenades en C complint per $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)_B \in \mathbb{E}_1$.

$$f(v) = f(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{pmatrix}) = \underbrace{M(c \xleftarrow{f} B)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{pmatrix}}_{\text{és en coordenades de } c}$$

<u>Composició d'aplicacions lineals:</u>
Fet: $f : V \to W$ lineal i $g : W \longrightarrow E$ lineal llavors $g \circ f : V \longrightarrow E$ és lineal. Més concret $T_A : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^M; \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ on $A \in M_{M\times N}(\mathbb{K})$ i $T_B : \mathbb{K}^M \longrightarrow \mathbb{K}^L; \vec{x} \longmapsto B\vec{x}$ on $B \in M_{L\times M}(\mathbb{K})$. Llavors $T_B \circ T_A$ té sentit i equival (en forma de notació) a T_{BA}. Fent servir les propietats de les aplicacions lineals, sabem que $T_{BA} : \vec{x} \longmapsto BA\vec{x}$. No tindria sentit fer $T_A \circ T_B$ sempre que $L \neq N$ (si les dimensions de entrada i de sortida no concideixen no es pot fer, tampoc es podrà fer la multiplicació AB).
Amb bases satisfarà el seguent: $M(E \xleftarrow{g\circ f} B) = M(E \xleftarrow{g} C)M(C \xleftarrow{f} B)$.
Podem fer $M(e_1 \xleftarrow{f} b_1) = M(e_1 \xleftarrow{id} e_2)M(e_2 \xleftarrow{f} b_2)M(b_2 \xleftarrow{id} b_1)$. Això significa que cambiem de bases per fer-nos la vida mes facil.
<u>Definició</u>: Diem que dos matrius $A, B \in M_{M\times N}(\mathbb{K})$ son similars si existeixen P i Q invertibles on $PAQ = B$.
<u>Aplicacions lineals i geometria:</u>
Same as estadistica.

1.1 Diagonalització

Definició: Donada $f : E \to E; e \neq 0_E$ lineal diem que $e \in E$ és un vector propi (ó autovector) si $f(e) = \lambda e$ per cert $\lambda \in \mathbb{K}$ i aquest λ s'anomena valor propi (ó autovalor) de f associat a e.
Definició: Denotem per $E_\lambda = \{e \in E | (f - \lambda)(e) = 0_E\} = Ker(f - \lambda)$ és un s.e.v. de E.
Definició: Donada $f : E \to E$ lineal ó $A \in M_N(\mathbb{K})$ $(f = T_A)$ i fixem e una base de E, en cas de f escrivim $A = M$. El polinomi característic de f i A es $P(x) = det(A - x)$
Obs: Canviant la base, el polinomi característic de f és el mateix.
Fet:$f : E \to E$ lineal o $f = T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tenim que els valors propis de f (o de T_A (o de A)) corresponen als zeros en $\mathbb{K}$ del polinomi característic de f ó A els vectors propis de f o T_A o A associats a un valor propi λ son: $E_\lambda \setminus 0_E$.
Algoritme:

1. pas: Calcul A on $f = T_A$ i polinomi característic $P_A(x)$ i buscar $\underbrace{\text{zeros a } \mathbb{K}}_{\text{VAPS de } f}$
2. pas: Per cada λ on $P_A(\lambda) = 0$ calcular base i dimensió del Ker$(A - \lambda I_n)$ $= E_\lambda$. No pot sortir vector 0
3. pas: A diagonalitza a $\mathbb{K}$ si la suma de les dimensions de $E_\lambda = N$
4. pas: En cas que diagonalitza a $\mathbb{K}$ ajuntem bases $E_\lambda : (v_1, \ldots, v_N)$ on $f(v_i) = \mu_i v_i$ on μ_i es el valor propi associat a v_i, tenim $A = PDP^{-1}$ on $P = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}$ i $D = diag(\mu_1, \ldots, \mu_N)$
5. pas: Ser feliz. En cas de que et demani elevar o algo pos lo haces.

Lema: Considerem f (o T_A o A) $(f : E \to E, T_A : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ i siguin v_1, v_2 dos vectors propis de f (o T_A o A) de valor propi diferent. Llavors v_1 i v_2 son L.I.
Definició: $f : E \to E$ diagonalitza si existeix una base de E formada per vectors propis de f.
Definició: Donada $A \in M_N(\mathbb{K})$ diem que diagonalitza si existeix D diagonal i P invertible tal que $A = PDP^{-1}$
Fet: $f : E \to E$ o $T_A : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ o $A \in M_N\mathbb{K}$ calculem els valors propis de f, T_A o A, diem-los-hi: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$. Llavors f diagonalitza (i A també) $\iff \sum_{i=1}^{l} dim(E_{\lambda_i}) = dim(E)$(ó N).

En cas afirmatiu una base de E (o $\mathbb{K}^N$) formada per vectors propis consisteix en ajuntar les bases de E_{λ_i}.

1.2 Espais vectorials amb una distància

Sempre pensem en $E = \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{K}^n$)
Definició: Donats

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ i } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

es defineix el producte escalar euclideà tal que $< u, v >= u * v := u^t v \in \mathbb{K}$
es defineix la norma euclidiana de $u \in \mathbb{K}^n$ per $||u|| := \sqrt{u * u}$
Definició: Dos vectors u, v de $\mathbb{K}^n$ s'anomenen ortogonals si i només si $u*v = 0$.
Definició: Un vector u de $\mathbb{K}^n \setminus 0_{\mathbb{K}^n}$ es diu unitari si $||u|| = 1$
Definició: Una família ortogonal de $\mathbb{K}^n$ és una família de vectors de K^n ortogonals dos a dos.
Definició: Una família ortonormal de $\mathbb{K}^n$ és una família de vectors unitaris de K^n i ortogonals dos a dos.
Fet: Tot subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ té una base ortonormal.
Observació: A $\mathbb{R}^n$ amb $*$ definim distància com $d(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}||$
Lema: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectors de $\mathbb{R}^n$ 2 a 2 ortogonals, llavors son L.I.
Proposició: Si $u_1, u_2, \ldots, u_r$ és base d'un subespai vectorial V de $\mathbb{R}^n$ prenem vectors v_1, v_2, v_r definits recursivament via $v_1 = u_1$ i $v_i = u_i - \frac{v_{i-1} * u_i}{v_{i-1} * v_{i-1}} v_{i-1} - \cdots - \frac{v_1 * v_i}{v_1 * v_1} v_1$ llavors $(v_1, \ldots, v_r)$ és base ortogonal de V i llavors $(\frac{v_1}{||v_1||}, \ldots, \frac{v_r}{||v_r||})$ és base ortogonal de V. Si es vol ortonormal, es fa $v_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$ i $v_i := u_1 - \sum_{j=1}^{i-1} (v_j * u_i) v_j$ Fet: $w_1, w_2, \ldots, w_n$ base de $\mathbb{R}^N$ ortonormal i $Q = (w_1 | w_2 | \ldots | w_n)$ en coordenades de la canònica es té $QQ^t = \mathbb{I}_N$
Fet: Donada $A \in M_{M \times N}(\mathbb{R}$ on $rang(A) = N$, existeixen $Q \in M_{M \times N}(\mathbb{R})$ i $R \in M_N(\mathbb{R}$ triangular superior. Complint:

1. $A = QR$
2. $QQ^t = \mathbb{I}_N$
3. R és matriu triangular superior amb els coeficients de la diagonal positius.

Definició: V es un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ definim l'ortogonal de V i s'anota per $V^\perp$ al subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ seguint $V^\perp := \{v \in \mathbb{R}^N | v * w = 0 \ \forall w \in$

$V\}$.
Fet: V un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ es té:

- $V^{\perp^\perp} = V$
- $V \cap V^\perp = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $V + V^\perp = \mathbb{R}^n$

Fet: (projecció ortogonal)
V un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ donat $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s'escriu $\vec{x} = \vec{x}^\perp + \vec{x}^{\|}$ on $\vec{x}^{\|} \in V$ i $\vec{x}^\perp \in V^\perp$ i aquesta descomposició és única. $\vec{x}^{\|}$ s'anomena la projecció ortogonal de $\vec{x}$ en V i s'anota $pr_v(\vec{x})$.
$proj_{<\vec{l}>}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}*\vec{l}}{\vec{l}*\vec{l}}\vec{l}$
Per calcular la projecció ortogonal de $\vec{x}$: Tenim V un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i $u_1, u_2, \ldots, v_l$ base de V ortonormal de $\mathbb{R}^n$ observem $\underbrace{u_1, u_2, \ldots, u_l}_{\text{base de } V}, \underbrace{u_{l+1}, \ldots, u_n}_{\text{Son ortonormals}}$

es te donat $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$pr_v(\vec{x}) = (\vec{x} * u_1)u_1 + \cdots + (\vec{x} * u_l)u_l$$

Fet: Donat $x \in \mathbb{R}^n$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ tenim $||x - proj_v(x)|| = ||x^\perp|| \leq ||x - v|| \forall v \in V$ dels vectors de V són més a prop de $\vec{x}$ és justament el vector $pr_v(\vec{x})$
Definició: Una solució u^* de mínims quadrats per a un sistema lineal $(A|b)$ és un vector complent $||Au^* - b|| \leq ||Au - b|| \forall u \in \mathbb{R}^m$ on $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
Fet: Donat $(A|b)$ qualsevol, sempre existeix una solució de mínims quadrats on $u^* = proj_{Im(T_A)}(b)$ aquesta u^* correspon solucions de $(A^tA|A^tb)$, que és un Sistema Compatible.
Definició: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal s'anomena ortogonal si conserva la longitud dels vectors, és dir: $||f(v)|| = ||v|| \forall v \in \mathbb{R}^n$ si posem $f = T_A$ amb $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ diem A és una matriu ortogonal.
Fet: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Leftrightarrow f(\vec{u}) * f(\vec{v}) = \vec{u} * \vec{v} \forall u, v \in \mathbb{R}^n$
Fet: Aortogonal $\Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow$ la columna de A formen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$
Definició: Una matriu quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ o $T_A : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m$ diem que diagonalitza per matrius ortogonals si satisfà alguna de les 2 condicions seguents:

1. Existeix una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada pels VEPS de A
2. Existeix una matriu P ortogonal complint $A = PDP^t$ on D és una matriu diagonal

Teorema espectral A o T_A és diagonalitzable per matrius ortogonals $\Leftrightarrow$ A és simètrica.
Diagonalització de valors signgulars:

$$A = u \sum V^t \text{ factorització}$$

Considerem que $T_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Podem triar una base de R^N ortogonal on en fer T_A (d'aquesta base) surten vectors ortogonals 2 a 2?
La resposta es sí.

Corol·lari: $A \in M_{M\times N}(\mathbb{R})$ llavors la matriu (simètrica) A^tA té tots els valors propis reals positius.

Teorema Si $T_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ existeix una base ortonormal $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^N$ complint:

1. $T_A(v_1), \ldots, T_A(v_N)$ son ortogonals 2 a 2
2. $||T_A(v_i)|| = \sigma \geq 0$ per $i \in \{1, \ldots, N\}$

Av_1, Av_2 son ortogonals?
$Av_1 * Av_2 = v_1^t \underbrace{(A^tA)}_{\text{simètrica!}} v_2$
v_1 es un VEP de A^tA de VAP λ_1
v_2 es un VEP de A^tA de VAP λ_2
Si diem v_1, v_2 voctors que son VEP's de A^tA i ortogonals es té $v_1^t(\lambda v_2)$

$v_1 \perp v_2$
$A^tA \in M_N(\mathbb{R})$ i diagonalitza. Del Teorema expectral $\exists(v_1, \ldots, v_N)$ base ortonormal de $\mathbb{R}^N$ formada per VEP's de A^tA i compleix la primera propietat. $(T_Av_i * T_Av_j = v_i^t(A^tA)v_j = \lambda v_i^t v_j = 0)$
Si v_i es un VEP de A^tA de valor propi λ. $||T_A(v_i)||^2 = T_A(v_1) * T_A(v_1) = \lambda \geq 0$. Per allo, $||T_A(v_i)|| = \sqrt{\lambda} = \sigma$.

Definició: Els valors singulars per $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ són les arrels quadrades dels valors propis de A^tA. És usual denotar els valors singulars per $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ amb ordre decreixent.

1.3 Descomposició de vectors singulars

Also known as *Singular Value Decomposition (SVD)*
Tenint $l = rang(A)$

$$\begin{cases} v_1 \text{ associat a } \sigma_1 \\ v_2 \text{ associat a } \sigma_2 \\ \vdots \\ v_n \text{ associat a } \sigma_n \end{cases}$$

Escrivim $u_1 = \frac{1}{\sigma_1}T_A(v_1), u_2 = \frac{1}{\sigma_2}T_A(v_2), \dots, u_l = \frac{1}{\sigma_l}T_A(v_l)$
Aquestos vectors son ortogonals 2 a 2 i unitaris.
<u>Si $l < M$</u> hem de ampliar u_i's a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ diem-la $(u_1, \dots, u_m)$ base de $\mathbb{R}^M$ ortonormal.
$A = M(\text{Can}_{\mathbb{R}^M} \xleftarrow{f=T_A} \text{Can}_{\mathbb{R}^N})$
$A = M(\text{Can}_{\mathbb{R}^M} \xleftarrow{id} h)M(h \xleftarrow{f=T_A} T)M(T \xleftarrow{id} \text{Can}_{\mathbb{R}^N})$

$$A = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_M \\ | & | & & | \end{pmatrix}}^{M\times M}}_{U} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{M\times N}}_{\Sigma} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ | & | & & | \end{pmatrix}^t}^{N\times N}}_{V}$$

■ **Exemple** Troba factorització SVD per a $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

- pas: Buscar base ortonormal formada per vectors propis de A^tA. Aquí trobem V i Σ.
- pas: Trobar U. Calculant $u_i = \frac{1}{\sigma_i}T_A(v_i)$ per a V (base ortogonal del primer pas).
- $A^tA = \begin{pmatrix} 85 & -30 \\ -30 & 90 \end{pmatrix} \leftarrow$ simètrica
  $P_{A^tA}(x) = x^2 - 125x + 2500 \leftarrow P_{A^tA}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{25, 100\}$
  Valors singulars de A seran $\sigma_1 = 10$ i $\sigma_2 = 5$.
  Busquem una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada per VEPS de A^tA. Aquestes serán $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$ i $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.
  Llavors $V := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ i $\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

•

■

Càlcul en una variable

2.1 Funcions hiperbòliques

$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ "la catenària"
$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$
Part entera de $x = [x] =$ màxim enter $\leq x$

2.2 Limit

Definició: Diem que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ si i només si per a cada $\epsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ llavors $|f(x) - L| < \epsilon$.
Definició: Diem que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si per a cada $M > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ si $0 < |x-a| < \delta$.
Definició: Diem que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si per a cada $M > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que $f(x) < -M$ si $0 < |x-a| < \delta$.
Definició: $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$ si i només si per a cada $\epsilon > 0$ hi ha $m > 0$ tal que si $x > m$ llavors $|f(x) - L| < \epsilon$.
Obs: Si hi ha un límit, és únic.

2.2.1 Límits laterals

$\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)$. Si a^+ ens referim que $x > a$ i es tractaria de un límit per la dreta. En cas de que sigui a^- seria el contrari.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$
Recordem que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2.3 Continuitat

Diem que f és continua en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ f és continua a D quan és continua a tots els $x \in D$. f contínua en $a \iff \forall \epsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que a $|x - a| < \delta$ llavors $|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff$ per a tota successió (x_n) amb $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se compleix que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$
Tipus de discontinuïtat

- Evitable (existeix $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ peró aquest límit $\neq f(x)$)
- Salt finit (No existeix el límit)
- Salt infinit (Un limit lateral anirà a més o menys infinit)

2.4 Teorema de Bolzano

Pues me la agarras con la mano. Te falta calle.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua amb $f(a)f(b) < 0$ aleshores hi ha $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Garanteix la existència de un punt, però podria haver-hi més.

2.5 Teorema de Weiestrass

Pues me la agarras por detrás. Te falta calle.
$f : [a, b]$ tancat i fitat. $\to \mathbb{R}$ llavors hi ha extrems absoluts, es a dir $m, M \in [a, b]$ tal que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ per a cada $x \in [a, b]$.

2.6 Derivada en un punt

Diem que f és derivable a x_0 si existeix $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x)$
Obs: Si f es derivable a x_0, llavors f ha de ser continua a x_0.

2.7 Recta tangent

A la gràfica d'una funció al punt $(a, f(a))$. El pendent es $f'(a)$ si hi ha derivada, sino no hi ha pendent.

2.8 Propietats de la derivada

f, g derivables en a, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

- $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
- $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$
- Si f derivable en a i g derivable en $f(a) \Rightarrow (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

Volem derivar $f(x)^{g(x)}$. Recordem $A = e^{\log A}$, llavors $(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x)\log f(x)})' = f(x)^{g(x)}(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$. La f ha de ser positiva!
Definició: màxim relatiu i mínim relatiu:
Diem que la funció f té un màxim relatiu a x_0 si hi ha un interval concentrat a x_0 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tal que $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall |x - x_0| < \varepsilon$.
Diem que la funció f té un mínim relatiu a x_0 si hi ha un interval concentrat a x_0 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall |x - x_0| < \varepsilon$.
Els punts candidats a extrems relatius son aquells on la derivada de la funció f val 0 o no existeix.
Pel Teorema de Weistrass, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua hi ha extrems absoluts.
Els candidats a extrems absoluts son $\{a, b, \text{Punts on } f' = 0 \text{ o bé } f' \text{ no existeix}\}$

2.9 Teorema de Rolle

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua i derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$ aleshores hi ha $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Demostració:
Pel Teorema de Weistrass sabem que hi ha màxim absolut i mínim absolut.
Si el màxim i el mínim s'assoleixen a $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$. Resolt :).
Si el màxim i el mínim es prenen als extrems de l'interval, com que $f(a) = f(b)$ tenim que f és constant $\Rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$.

2.10 Teorema del valor mitjà (de Lagrange)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua i derivable en (a, b). Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
Demostració:
Definim $g(x) = f(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})(x - a)$ g continua i derivable (igual que f).
$g(a) = f(a) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})(a - a) = f(a)$ i $g(b) = f(b) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})(b - a) = f(a)$.
Llavors $g(a) = g(a)$. Pel Teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b)$ amb $g'(c) = 0$, $g'(x) = f'(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Llavors $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Corol · lari: Creixement i decreixement d'una funció a un interval.

- Si $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I \iff f$ creixent a I.

- Si $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I \Longleftrightarrow f$ decreixent a I.
- Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \Longleftrightarrow f$ constant a I.

Observació Si $f'(x) > 0$ a $I \Rightarrow f$ estrictament creixent a I. Anàleg amb les decreixents.
Extrems relatius criteris de la segona derivada.
$f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0 \to$ mínim relatiu.
$f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0 \to$ màxim relatiu.
És un criteri útil? Sí. És imprescindible? No.

2.11 Convexitat i concavitat.

$\bigcup$ CONVEXA ($f''(x) \geq 0$ a I)i $\bigcap$ CÓNCAVA ($f''(x) \leq 0$ a I). El criterio bueno. Como siempre, la cerveza fria y la concavidad $\bigcap$.

2.12 Regla de L'Hôpital

Teorema (L'Hôpital):
f, g derivables amb $g'(x) \neq 0$ en un interval que conté el punt a (excepte, pot ser, el punt a) tals que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup -\infty, \infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

També és vàlid per a límits laterals i límits a l'infinit.

2.13 Polinomis de Taylor

Les funcions més sencilles són els polinomis. Donada una funció f en un interval I volem trobar un polinomi P de manera que P sigui proper a f a l'interval I. Sigui $a \in I$ volem que $f(a) = P(a); f'(a) = P'(a); \cdots ; f^{(N)}(a) = P^{(N)}(a)$. Hi ha un únic polinomi de quin $\leq N$ que compleix aquesta propietat.
Definició: Sigui f una funció N vegades derivable a I. Sigui $a \in I$. El polinomi de Taylor d'ordre N (o grau N) de f en el punt a és:

$$\underbrace{P_N[f,a](x) = P_N(x)}_{\text{Notació}} = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

La propietat fonamental que caracteritza el polinomi de Taylor de grau N de f en el punt a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_N(x)}{(x-a)^N}=0$$

Teorema de Taylor:

Sigui f $N{+}1$ vegades derivable en I. Sigui $a\in I$. Aleshores $\overbrace{f(x)=P_N(x)+R_N(x)}^{\text{Això no te cap merit}}$.
On $R_N=\frac{f^{(N+1)}(c_x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ on c_x és un punt entre x i a.
D'aquest expressió del residu se'n diu residu de Lagrange. Hi ha altres expressions, de Cauchy i de integral, aquestes dos no les utilitzarem. El error serà $|R_N(x)|$. Si fem el limit abans anotat sabem que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_N(x)}{(x-a)^N}=\lim_{x\to a}\frac{R_N(x)}{(x-a)^N}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(N+1)}(c_x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}}{(x-a)^N}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(N+1)}(c_x)}{(N+1)!}(x-a)=0$$

Observació:
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-P_N(X)}{(x-a)^N}=0\Rightarrow$ NOTACIÓ: $f(x)-P_N(x)=o((x-a)^N)$ o $f(x)=P_N(x)+o((x-a)^N)$. Infinitessims:
Diem que f és un infinitèssim quan $x\to a$ si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.
Diem que f i g són inifitèssim equivalents quan $x\to a$ si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ i també $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x}{g(x)}\in\mathbb{R}\setminus 0$.

2.14 Integral de Riemann

Definició: Una partició de l'interval $[a,b]$ és un nombre finit de punts $x_0=a<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n=b$. Això es possa com intervals de la seguent forma: $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{n-1},x_n]$. Llavors la mida es $\delta(P):=max(x_0-x_1,x_1-x_2,x_2-x_3,\ldots,x_{n-1}-x_n)$.
Sigui $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fitada i P una partició de $[a,b]$:
$M_i=\sup\limits_{x\in[x_i-\delta,x_i]}f(x); i=1,2,\ldots,n$
$M_i=\inf\limits_{x\in[x_i-\delta,x_i]}f(x); i=1,2,\ldots,n$ Suma superior de de f en $[a,b]$ respecte la partició P:
$S(f,P)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}$
$I(f,P)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}$
$I(f,P)\le I(f,P')\le S(f,P')\le S(f,P)$
P' més fina que P

Definició:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fitada diem que és integrable en el sentit de Riemann (ho denotem per $f \in \mathfrak{R}[a, b]$) quan $\sup_P I(f, P) = \inf_P S(f, P) = \lim_{\delta P \to 0} I(f, P) = \lim_{\delta P \to 0} S(f, P)$. Quan $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ ho denotem com $\int_a^b f$
Teorema:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fitada. Si f continua, f continua llevat d'un nombre finit de punts o f és monòtona llavors $f \in \mathfrak{R}[a, b]$.
Sabem que l'àrea $= \int_a^b f = \int_a^b f dx$
Propietats de la integral de Riemann:
Tenim $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, i $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $f \pm g \in \mathfrak{R}[a, b]$ i $\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$
2. $\alpha f \in \mathfrak{R}[a, b]$ i $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.
3. $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
4. Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$ (Si $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$)
5. Si $m \leq f \leq M \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$
6. $| \int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$
7. $f \in \mathfrak{R}[a, b] \Rightarrow |f| \in \mathfrak{R}[a, b]$
8. $fg \in \mathfrak{R}[a, b]$ ATENCIÓ! $\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$

Si una funció es integral de Riemann i la canvio en un punt, aquesta funció seguira sent integral de Riemann i el valor de la integral seguira sent.

2.15 Sumes de Riemann

:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fitada
$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$
$Z_i \in [x_{i-1}, x_i]$
Una suma de Riemann respecte la partició P es $\sum_{i=1}^{n} f(Z_i)(x_i - x_{i-1})$
Teorema: $f \in \mathfrak{R}[a, b]$

$\lim_{\delta(P)\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})}_{\text{Suma de Riemann}} = \int_a^b f$

Corol · lari:
Considerem $[0,1]$ i la partició $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.
$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} (\frac{f(\frac{1}{n})}{n} + \frac{f(\frac{2}{n})}{n} + \frac{f(\frac{3}{n})}{n} + \cdots + \frac{f(\frac{n-1}{n})}{n} + \frac{f(1)}{n})$

2.16 Integrals impropies en sentit de Riemann

En la integració de Riemann hi ha dos aspectes a destacar:

- Funcions fitades
- Intervals de longitud finita

Si volem donar sentit als intervals de longitud infinita o a les funcions no fitades tractarem $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) on $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Definició: Diem que f és funció localment integrable a l'interval $[a,b)$ si $f \in \mathfrak{R}[a,c]$ per a cada $c < b$. Idem. per a la resta de tipus de intervals.
Definició: Sigui f localment integrable a $[a,b)$, considerem $\lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$.

- Si aquest límit està a $\mathbb{R}$ direm que la integral impròpia $\int_a^b f(x)dx$ és convergent i el seu valor és aquest límit.
- Si el límit és $\pm\infty$ direm que és divergent cap a $\pm\infty$.
- Si el límit no existeix direm que la integral impròpia no existeix.

Obs: Tenim $f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b)$ tal que f es localment integrable a $[a,b)$. Llavors $\int_a^b f(x)dx$ és convergent $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$
Sigui f localment integrable a (a,b) tal que $a < \alpha < \beta < b$, vol dir $f \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$ diem que $\int_a^b f(x)dx$ és convergent en el sentit impropi de Riemann si fixat $c \in (a,b)$ es compleix $\int_a^c f(x)dx$ és convergent i $\int_c^b f(x)dx$ és convergent. En aquest cas $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Criteri de comparació: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ quan $x \in [a,b)$ f i g dues funcions localment integrables a $[a,b)$ llavors:

$$\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$$

$$\int_a^b f(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \infty$$

Criteri de comparació al límit: $0 \leq f(x)$ $0 < g(x) \forall\ x \in [a,b)$ f i g dues funcions localment integrables a $[a,b)$. Suposem que $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [0,\infty]$.

1. Si $0 < L < \infty$ llavors tenen el mateix caracter.
2. Si $L = 0$ llavors $\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$
3. Si $L = \infty$ llavors $\int_a^b f(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx < \infty$

Criteri de Dirichlet: f, g dues funcions contínues a $[a,b)$ i g amb derivada contínua. Suposem que

- $|\int_a^x f(t)dt| \leq K$ per a cada $x \in (a,b)$
- g monòtonament decreixent tal que $g(t) \longrightarrow 0$ quan $t \to b$

Aleshores $\int_a^b f(t)g(t)dt$ és convergent.

2.17 Sèries de potències

Una sèrie de potencies centrada en a és una expressió del tipus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.
El radi de convergencia d'una sèrie de potències és el valor R tal que

$$\begin{cases} \text{Si } |x_0 - a| < R \text{ llavors } \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ és convergent.} \\ \text{Si } |x_0 - a| > R \text{ llavors } \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ és divergent.} \\ \text{Quan } |x_0 - a| = R \text{ cal estudiar en cada cas si les sèries} \\ \text{correspondents són convergents o divergents.} \end{cases}$$

Apliquem el criteri del quocient a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n|$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|a_n(x-a)^n|} = |x-a| \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$$

Apliquem el criteri de l'arrel n-essima a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n|$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||(x-a)^n|} = |x-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Si aquest límits existeixen sabem que $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

2.18 Derivació i integració de sèries de potències

La sèrie de poténcies $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ defineix una funció $f(x)$ a l'interval de convergència $(-R, R)$ on R és el radi de convergència.
La funció $f(x)$ és contínua i infinitament derivable i integrable a l'interval de convergència.
Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (amb radi de convergència R)
Llavors:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \text{ amb radi } R$$

i també

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Les primitives de f són

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Objectiu "calcular" la suma d'una sèrie de potències

$$|x| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

També tenim l'expressió en sèrie de potències centrada en 0 de les funcions sinus i cosinus.

■ **Exemple** Calculem la funció suma de $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ dir on convergeix.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}.\ R = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Per tant

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

■

Corol · lari: Les sèries de potències compleixen el seguent

- Les sèries de potències és poden derivar terme a terme sense cambiar el radi de convergència
- Les sèries de potències és poden integrar sense coneixer el radi de convergència
- Tota sèrie de potències és una serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

■ **Exemple** Trobar el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}3n}} x^{3n}$$

Llavors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{3n}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{2} = \frac{|x|^3}{2} < 1 \iff |x|^3 < 2 \iff R = \sqrt[3]{2}$$

■

Introducció a la programació

Programari de sistema

Ex 1: git init
git commit -m ”C1”
git commit -m ”C2”
git branch idea1
git checkout idea1
git commit -m ”C3”
git checkout master
git commit -m ”C4”
git checkout idea1
git commit -m ”C5”
git checkout master
git branch idea2
git checkout idea2
git commit -m ”C6”
git commit -m ”C7”

Ex 2:
git init
git commit -m ”C0”
git commit -m ”C1”
git branch idea1
git checkout idea1
git commit -m ”C2”
git checkout master
git commit -m ”C3”
git checkout idea1
git commit -m ”C4”
git branch idea1v2
git commit -m ”C5”
git commit -m ”C6”
git checkout idea1v2
git commit -m ”C7”

```
git commit -m "C8"
git checkout master
git commit -m "C9"
git commit -m "C10"
git checkout idea1v2
git commit -m "C11"
git checkout master
git branch superidea
git checkout superidea
git commit -m "C12"
git commit -m "C13"
```

Ex 3:
git

Fonaments dels computadors

Prob 1, tema 3: MOV ESI, 0
BUCLE:CMP ESI, 128
JGE FI
MOV EAX, A[ESI]
ADD EAX, B[ESI]
MOV C[ESI], EAX
ADD ESI, 4
JMP BUCLE
FI:

Prob 2, tema 3:
INI: MOV ESI, 0
MOV AL, 1
BUCLE: CMP ESI, 80
JGE FI2
MOV EBX, Vector[ESI]
ADD ESI, 4
CMP EBX, Vector[ESI]
JGE FI
JMP BUCLE
FI: MOV AL, 0
FI2: HALT

Prob 3, tema 3:
INI: MOV ESI, 0
MOV EDI, 19
MOV [Palin], 1
BUCLE: MOV AL, NOM[ESI]
CMP AL, NOM[EDI]
JE SEG
MOV [Palin], 0
JMP FI
SEG: ADD ESI, 1

SUB EDI, 1
CMP ESI, EDI
JL BUCLE
FI:

Prob 4, tema 3:
INI: MOV [Sum], 0
MOV ESI, 0
BUCLE: MOV EAX, V[ESI]
ADD Sum, EAX
ADD ESI, 4
CMP ESI, 16
JL BUCLE
FI:

MOV EAX, [Row]
MUL EAX, 5
ADD EAX, [Column]
SHL EAX, 2
MOV [IndexMat], EAX

Registres CPU. Son MOLT ràpids, pero hi ha pocs.
Memoria cache: Memòria que té copiats trocets de la memoria principal, fent que sigui més ràpid.
Memoria Principal: RAM. Es ràpida.
Memoria secundaria: Fa servir altres mitjans de suport (la resta son amb semiconductors, aquesta no). Aquestos son no volàtils (la resta ho son, no es perden al apagar l'ordinador). Bastant lent.
Imaginem que tenim temps de la memoria cache (T_{mc} = 1ns) i temps de la memoria principal (T_{mp} = 15ns), (sempre $T_{mc} < T_{mp}$). La memoria cache funciona en principis de localitat espacial i localitat temporal, fent que hi hagui major *hit ratio* (H). Llavors, el temps mitjà (T_m) serà

$$T_m = T_{mc}H + T_{mp}(1 - H)$$

També podem parlar de *miss ratio* (que es $1 - H$).
Correspondència directa (no tengo): Presentación to guapa.
Correspondència assciocativa (no tengo tampoco): Presentación to guapa.