1 Rotacions

1.1 L'espai euclidià estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb $\mathbb{R}^3$.

Notació. *En l'espai euclidià tenim l'origen a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i un punt arbitrari* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tècnicament.*

Definició: La norma euclidiana d'un vector $V \in \mathbb{R}$ es defineix com $\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$ que compleix $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

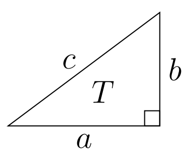
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \, \|V\|$
- $\|V\| \iff V = 0$

Aquesta norma mesura la distància euclidiana entre dos punts $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ per la fórmula $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|$ que compleix

- $\mathcal{D}(P_1, P_3) \leq \mathcal{D}(P_1, P_2) + \mathcal{D}(P_2, P_3)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

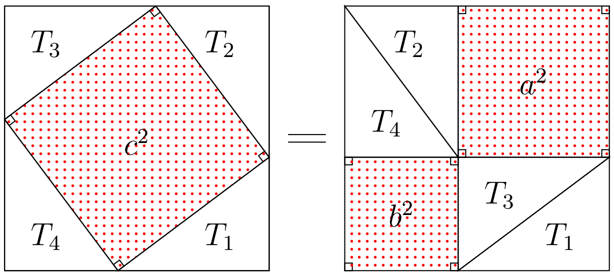
Observació: La norma euclidiana d'un vector V correspon exactament a la seva longitud.

Demostracio Recordem el teorema de Pitàgores.

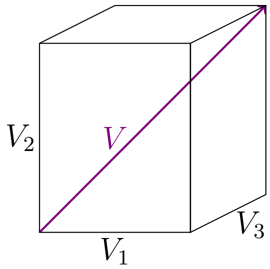


$$a^2 + b^2 = c^2$$

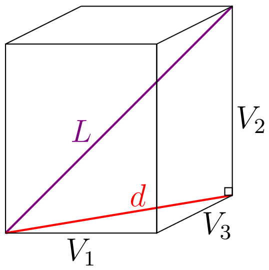
Com



Aleshores, veiem que $\|V\|$ és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que



$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} d^2 = V_1^2 + V_2^2 \\ L^2 = d^2 + V_3^2 \end{cases} \Rightarrow L^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \|V\|^2$$

■

Com la norma d'un vector $V \in \mathbb{R}^3$ correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a $\mathbb{R}^3$ correspon a la longitud del segment que els uneix.
Si tenim P_1 i P_2 punts que defineixen un segment, la longitud $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$
Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longituds conté la noció d'ortogonalitat:

Definició: Anomenem producte escalar a $\mathbb{R}^3$ la funció
$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$ que és

- Bilineal: $\langle V + \lambda \bar{V}, W \rangle = \langle V, W \rangle + \lambda \langle \bar{V}, W \rangle$ ídem si $V \leftrightsquigarrow W$

- Simètrica: $\langle V, W\rangle = \langle W, V\rangle$
- Definit positiu: $\langle V, V\rangle > 0$ si $V \neq 0$

Observem que $\forall V \in \mathbb{R}^3$, $\|V\| = \sqrt{\langle V, V\rangle}$: la norma es pot definir en funció del producte escalar.
Recíprocament, veiem fàcilment la Identitat de Polarització

$$\langle V, W\rangle = \frac{1}{2}\left(\|V+W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2\right) \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

Exercici Arribar a la Identitat de Polarització a partir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \, \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

Demostracio Fixem $V, W \in \mathbb{R}^3$ qualsevol. Aleshores definim $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$
Observem que $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W\rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W\rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow$ $\mathcal{P}$ és un polinomi en λ de grau 2. Llavors $\Delta = 4\left(\langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2\right)$ ha de ser ≤ 0, ja que $\mathcal{P} \geq 0$.
Deduïm que $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$
Si $\Delta = 0$ això implica que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$, aleshores $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$ ■

Com a conseqüència, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W\rangle}{\|V\| \, \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \, \|W\|)$$

Definició: L'únic $\theta \in [0, \pi] : \cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|}$ s'anomena angle euclidià entre V i W.

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.
Si $V = (1, 0, 0)$ i $W = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ obtenim que $\cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|} = \frac{\cos\alpha}{1\times 1} = \cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

Definició: Diem que V i W són ortogonals si $\langle V, W\rangle = 0$ o, de forma equivalent, si l'angle entre V i W és $\frac{\pi}{2}$.

Notació:. *Denotem dos vectors ortogonals entre si com* $V \perp W$

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si $\langle U, V\rangle = \langle V, W\rangle = \langle U, W\rangle = 0$, És base ortonormal, si és base ortogonal i a més $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

$\mathbb{R}^3$ admet una estructura addicional que permet multiplicar dos vectors:

Definició: $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \left(\begin{smallmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat: $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$ ídem a la dreta.
- Antisimètria: $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem fàcilment que $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ $\langle V \wedge W, V\rangle = 0 = \langle V \wedge W, W\rangle$ Més enllà

Proposició $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3, \langle U, V \wedge W\rangle = \det(U, V, W)$

1.2 Moviments rígids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista $\neq$ (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d'un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.
Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preserven un objecte (s'anomenen moviments rígids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.
Comencem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

Definició: El grup ortogonal és el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \langle MV, MW\rangle = \langle V, W\rangle \, \forall V, W \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Observació: Si $M \in O(3)$ i $V \in \mathbb{R}^3$, $\|MV\| = \|V\|$
Si $M \in O(3)$ i $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle MV, MW \rangle = V^t M^t M W$ per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \left\{ M \in \mathcal{M}_3 \left(\mathbb{R} \right) | M^t M = \mathbb{I}_3 \right\}$$

Proposició Si $M \in O(3)$, llavors $\det \left(M \right) = \pm 1$

Definició: Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{ M \in O(3) | \det M = 1 \}$$

Per construcció els elements de $SO(3)$ són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament, (Me_1, Me_2, Me_3) compleix

1. (Me_1, Me_2, Me_3) és una base ortogonal
2. $\det \left(Me_1, Me_2, Me_3 \right) = \det M = 1$ i doncs $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un exemple de $M \in O(3) \setminus SO(3)$ és la matriu $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$

Aquestes transformacions de $O(3) \setminus SO(3)$ canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial èmfasi en el subgrup $SO(3)$!
Observació: $O(3)$ i $SO(3)$ són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si $M, N \in O(3)$ (o $SO(3)$), $MN \in O(3)$.
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$.
- Si $M \in O(3)$, aleshores M és invertible i $M^{-1} \in O(3)$.

Més generalment,

Definició: Un conjunt G és un grup Si

- $\exists$ operació interna $\cdot : G \cdot G \to G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (element neutre)

- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1}g = e$ (inversa)

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació que preserva les distàncies $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ Aleshores $\exists P_o \in \mathbb{R}^3,\ M \in O(3)$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

Definició: Si a més f preserva l'orientació, obtenim que $M \in SO(3)$. Un tal f s'anomena moviment rígid i correspon al fet de desplaçar un objecte a $\mathbb{R}^3$ (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups $O(3)$ i $SO(3)$, i observar que el subgrup $SO(3)$ està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidià de dimensió n (on $n \in \mathbb{N}$), és a dir, treballem a $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar $\langle V, W\rangle = \sum_{i=1}^{n} V_i W_i\ \forall V, W \in \mathbb{R}^n$ podem definir $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$ i $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$
Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$:
  $M = (a) \in O(1) \iff M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \iff (a^2) = 1$
  $\iff a = \pm 1 \iff M = \pm\mathbb{I}_1$
  Deduïm que $O(1) = \{\pm\mathbb{I}_1\}$ i $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$

- $n = 2$

  Proposició Sigui $M \in O(2)$. $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

  Això genera una rotació d'angle θ en el primer cas i en el segon una simetria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle θ.

  Observació: En particular, si $M \in SO(2)$, $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$

Proposició Sigui $M \in O(3)$. Aleshores $\exists B \in SO(3), \exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Geomètricament, això significa que si $M = \mathcal{M}_{Can}(L)$, $\exists \mathcal{B} = (U, V, W)$ i $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $B = P_{Can \to \mathcal{B}}$ i $BMB^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Com $B \in SO(3)$, vol dir que la base $\mathcal{B}$ és base ortonormal positiva (és a dir, té la mateixa orientació que la base canònica $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 1$)

- Cas on $\pm 1 = 1$:

$$\begin{aligned} U &= L(U) \\ L(V) &= \cos\theta V + \sin\theta W \\ L(W) &= -\sin\theta V + \cos\theta W \end{aligned}$$

  Llavors L és una rotació d'eix U i d'angle θ.

- Cas on $\pm 1 = -1$:

$$\begin{aligned} U &= -L(U) \\ L(V) &= \cos\theta V - \sin\theta W \\ L(W) &= \sin\theta V + \cos\theta W \end{aligned}$$

  L és la composició d'una simetria $\perp$ al pla $U^{\perp} = Vect(V, W)$ i de la rotació d'angle θ i eix U

Teorema (de les rotacions d'Euler) Sigui $M \in SO(3)$. Llavors $\exists B \in SO(3)$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Per això, $SO(3)$ rep el nom de grup de les rotacions.
En particular, i no és gens evident, si componem dues rotacions a l'espai, obtenim una tercera.

Cas particular: Si $U = U'$, $R_{\theta_1, U'} \circ R_{\theta_2, U} = R_{\theta, U}$. Això és evident, però $R_{\theta_1, U} \circ R_{\theta_2, V} = R_{\theta, W}$ i és molt difícil obtenir θ i W.

1.4 Representació de $SO(3)$ via l'espai projectiu

Associem a cada punt $p \neq 0$ de la bola B de radi π la rotació d'eix $\frac{p}{\|p\|}$ d'angle $\|p\|$ i a $p = 0$ associem la rotació Identitat $\mathbb{I}_3$.
Com $\forall p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|p\| = \pi$ ($\Leftrightarrow p \in \partial B$), tenim que $R_{\frac{p}{\pi},\pi} = R_{\frac{-p}{\pi},\pi}$, en tenim prou amb B per representar $SO(3)$.
Acabem de definir una aplicació

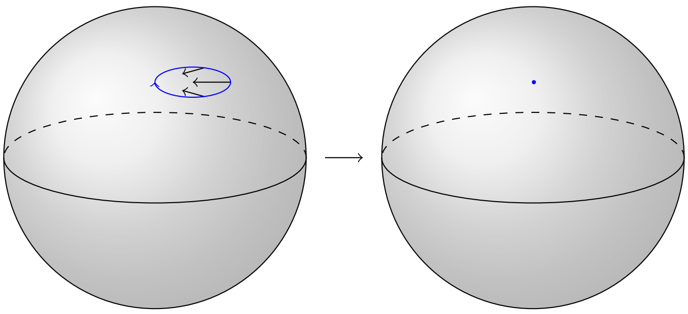
$$\begin{aligned} \Omega : B\left(= B^3(0,\pi)\right) &\longrightarrow SO(3) \\ p &\longmapsto R_{\frac{p}{\|p\|},\|p\|} \end{aligned}$$

Injectiva? No, perquè $\Omega((0,0,\pi)) = \Omega(0,0,-\pi)$.
Però ho és quasi: $\forall p, q$ tal que $\|p\| < \pi$ i $\|q\| < \pi$, tenim que $\Omega(p) \neq \Omega(q)$.
A més si $\|p\| = \|q\| = \pi$, $\Omega(p) = -\Omega(q)$.
Exaustiva? Sí.
Al final, si enganxem els parells de punts antipodals (parells de la forma $(p, -p)$ amb $\|p\| = \pi \iff p \in \partial B$) obtenim un espai quocient que representa rotacions:

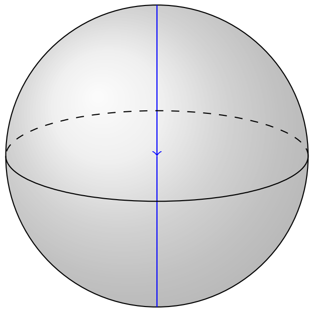
$$SO(3) = B \Big/ \{p = -p \text{ si } p \in \partial B\}$$

Aquest espai s'anomena espai projectiu de dim 3 i es denota $\mathbb{R}P^3$.

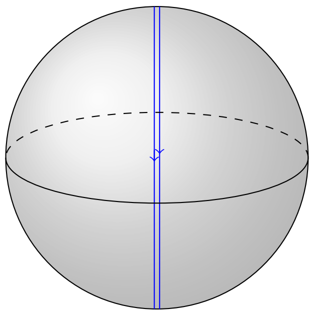
Observació: Existeixen corbes tancades a B^3 que es poden contractar en un punt.



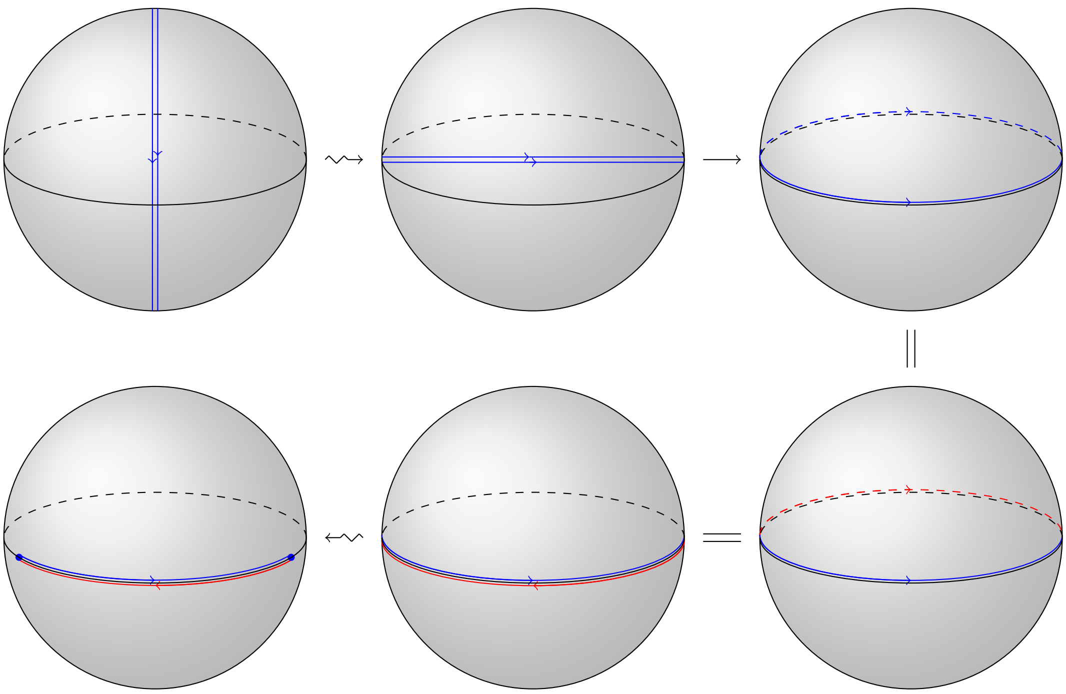
Observació: Existeixen corbes que no es poden contractar en un punt.



Observació: Existeixen doble corbes que si es poden contractar en un punt.



Expliquem aquesta última observació:



2 Els quaternions

En aquest nou capítol, denotarem la base ortonormal estandard (e_1, e_2, e_3) a $\mathbb{R}^3$ com (i, j, k).
Es a dir, que $i = e_1$, $j = e_2$ i $k = e_3$.

2.1 Definició i primeres propietats:

Definició: Un quaternion q és la suma (formal) d'un escalar $q_0 \in \mathbb{R}$ i d'un vector $Q := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. És a dir, que $q = q_0 + Q$. Farem servir $\mathbb{H}$ (de Hamilton) per el conjunt dels quaternions que es pot identificar a $\mathbb{R}^4$ via l'identificació:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k &\longmapsto (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

Denotarem també que $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$.
Donats dos quaternions $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ i $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim:

- La suma de quaternions com $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \in \mathbb{H}$
- El producte per un escalar com $\lambda p = \lambda p_0 + \lambda p_1 i + \lambda p_2 j + \lambda p_3 k \in \mathbb{H}$
- El producte de quaternions com $pq = \underbrace{p_0 q_0 - \langle P, Q \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p_0 Q + q_0 P + P \wedge Q}_{\in \mathbb{R}^3}$

$$pq \in \mathbb{H}$$

Observació: $\forall p, q \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} pq - qp &= (p_0 q_0 - \langle P, Q \rangle) + (p_0 Q + q_0 P + P \wedge Q) \\ &\quad - (q_0 p_0 - \langle Q, P \rangle) - (q_0 P + p_0 Q + Q \wedge P) \\ &= 2 \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

Observació:

$$\begin{aligned}
i^2 &= ii \\
&= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 1i + 0j + 0k) \\
&= pq \text{ amb } p_0 = q_0 = 0, p_1 = q_1 = 1, p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = 0 \\
&= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\
&= 0 - 1 + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $j^2 = k^2 = -1$.
Observació:

$$\begin{aligned}
ij &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 0i + 1j + 0k) \\
&= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\
&= 0 - 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= k
\end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ i $ki = j = -ik$.

Al final, hem obtingut les regles de Hamilton, fonamentals per calcular amb quaternions:

$$\begin{cases}
i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\
ij = k = -ji \\
jk = i = -kj \\
ki = j = -ik
\end{cases}$$

En particular, veiem que $\mathbb{H}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 4, amb base $(1, i, j, k)$ amb producte que no és conmutatiu: $ij \neq ji$!
En canvi:

Proposició El producte sobre $\mathbb{H}$ és associatiu i distributiu respecte l'addicció.

Observació: $1q = q$ i $0q = 0$