
Exercici 21: Decidiu si les funcions següents són diferenciables:

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3 - y^3)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solució. Per veure si aquesta funció és diferenciable recorrerem a la definició de diferenciabilitat, f és diferenciable si totes les derivades parcials existeixen i $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-\langle\nabla f(x_0), x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|} = 0$.

Primer, calculem les parcials:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 3x^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^3-y^3)\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 3y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^3-y^3)\left(\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Veiem que existeixen, llavors ara, calculem el límit,

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \langle\overbrace{\nabla f(0,0)}^{=(0,0)}, (x,y)\rangle}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{\langle(0,0),(x,y)\rangle}^{=0}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)\overbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}^{\in[-1,1]}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3-y^3|\overbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}^{\leq 1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3-y^3|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\stackrel{?}{\geq} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3-y^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$\stackrel{?}{\geq} \left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = |0-0|$$

$$= 0$$

Llavors, veiem que és diferenciable. $\square$

Exercici 23: En quina direcció, des del punt $(0,1)$, creix més ràpidament la funció $f(x,y) = x^2 - y^2$?

Solució. Per saber això, hem de calcular $\nabla f(0,1)$ i aquest vector resultant serà el vector cap a on creix més ràpidament la funció en aquest punt. Primer, calculem ∇f, que serà $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

En aquest cas, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, llavors $\nabla f = (2x, -2y)$. Avaluant-ho, dona $\nabla f(0,1) = (0,-2)$. Llavors $(0,-2)$ és la direcció on creix més la funció f al punt $(0,1)$. □

Exercici 26: Sigui f una funció diferenciable de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$. Calculeu les derivades que us indiquen deixant el que calgui en funció de f.

d) Si $g(x,y,z) = f(yz, xz, xy)$, calculeu el gradient de g.

Solució. Per calcular ∇g, haurem de fer el ja abans dit a l'exercici anterior, però amb la regla de la cadena, així que farem les parcials respectives:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial (yz)}\frac{\partial (yz)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial (xz)}\frac{\partial (xz)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial (xy)}\frac{\partial (xy)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial (yz)}\frac{\partial (yz)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial (xz)}\frac{\partial (xz)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial (xy)}\frac{\partial (xy)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial (yz)}\frac{\partial (yz)}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial (xz)}\frac{\partial (xz)}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial (xy)}\frac{\partial (xy)}{\partial z}$$

I ara, si simplifiquem i fem les parcials corresponents tenim:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial (xz)}z + \frac{\partial f}{\partial (xy)}y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial (yz)}y + \frac{\partial f}{\partial (xy)}z$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial (yz)}y + \frac{\partial f}{\partial (xz)}x$$

Llavors, recordant que $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$, aleshores:

$$\nabla g = \left(\frac{\partial f}{\partial (xz)}z + \frac{\partial f}{\partial (xy)}y, \frac{\partial f}{\partial (yz)}y + \frac{\partial f}{\partial (xy)}z, \frac{\partial f}{\partial (yz)}y + \frac{\partial f}{\partial (xz)}x, \right)$$

□

Exercici 28: Siguin $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dues funcions diferenciables. La funció g ve donada per $g(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Si sabem que $f(1,3) = (2,0)$ i que

$$D(g \circ f)(1,3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

Determineu $Df(1,3)$.
Solució. Sabem que $D\left(g\circ f\right)(x) = Dg(f(x))Df(x)$. Suposant que $Dg(f(x))$ és invertible, podem trobar $Dg(f(x))^{-1}D\left(g\circ f\right)(x) = Df(x)$, i això és el que volem calcular. Llavors, calculem $Dg(f(1,3))$:

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial y} \\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x} & \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Llavors, $Dg(f(1,3)) = Dg(2,0) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Aquesta matriu és, evidentment, invertible amb inversa $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Llavors, podem fer servir l'abans esmentat:

$$Df(1,3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercici 30: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció. Diem que f és homogènia de grau m si $f(tx) = t^m f(x) \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.
Proveu que si f és diferenciable i homogènia de grau m, aleshores

$$mf(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(Indicació: Considereu la funció $g(t) = f(tx)$ i calculeu $g'(1)$.)
Solució. Seguint la indicació, calculem la derivada de $g(t)$ on $g(t) := f(tx)$:

$$g'(t) = f'(tx)t$$

i com $f'(x) = Df(x)$, tenim

$$g'(t) = x \cdot Df(tx)$$

però si tenim en compte que f és homogènia, podem fer el següent:

$$g(t) = t^m f(x)$$

i llavors, fer un altre càlcul:

$$g'(t) = mt^{m-1}f(x)$$

Ambdues $g'(t)$ les avaluem a $t = 1$, llavors ens dona el següent

$$g'(1) = x \cdot Df(x)$$
$$g'(1) = mf(x)$$

Això, clarament, ha de donar el mateix, per això els igualem:

$$mf(x) = x \cdot Df(x) \tag{1}$$

Això s'assembla molt al que havíem de demostrar, i amb una mica d'ull ens adonem que es exactament equivalent a causa de com es multipliquen els, en aquest cas de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vectors. Com $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$, la multiplicació de vectors és $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$. Si això ho posem a (1), ens queda el següent:

$$mf(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

I això era el que volíem demostrar. $\square$

Exercici 33: Proveu que no hi ha cap punt de la superfície $xyz = 1$ on el vector normal sigui horitzontal.
Solució. El vector normal de la superfície $xyz = 1$ el calcularé fent $Df(x, y, z)$, on $f(x, y, z) = xyz$.

Com el concepte "horitzontal" em sembla ambigu, comprovaré que exactament dos vectors de $\{OX, OY, OZ\}$ en fer el producte escalar el resultat sigui 0.

Com $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, calculem les derivades parcials següents:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

Recordant que $xyz = 1$, posem aquesta restricció en la nostra Df avaluant $\left(\frac{1}{yz}, y, z\right)$

$$Df\left(\frac{1}{yz}, y, z\right) = \left(yz, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$$

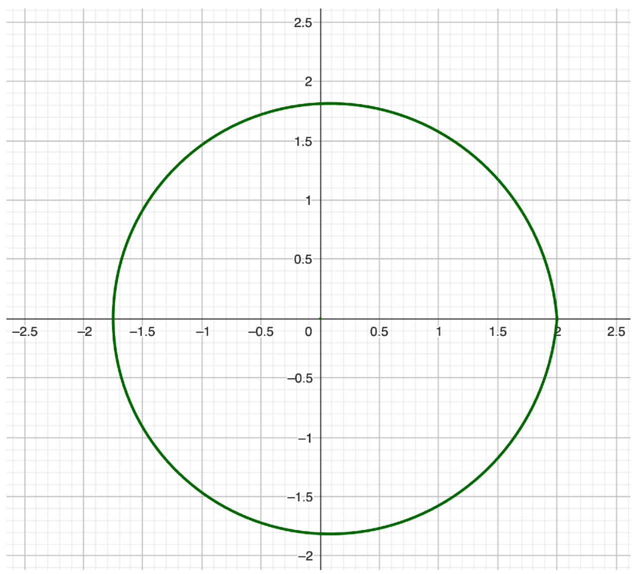
Amb aquest vector resultant podem veure que per fer que el producte escalar sigui igual a 0 és imposible, degut al següent:

- $\left\langle OX, \left(yz, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)\right\rangle = 0 \iff yz = 0$, per això $y = 0$ o $z = 0$. Ambdues opcions són invàlides ja que provocaría problemes a $\frac{1}{y}$ o $\frac{1}{z}$.
- $\left\langle OY, \left(yz, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)\right\rangle = 0 \iff \frac{1}{y} = 0$, i això no passa mai.
- Anàlogament, $\left\langle OZ, \left(yz, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)\right\rangle = 0 \iff \frac{1}{z} = 0$, i això tampoc passa mai.

$\square$

Exercici 36: Considerem la corba $\gamma(t) = ((t^2 - t + 2)\cos(2\pi t), (t^2 - t + 2)\sin(2\pi t)), t \in [0, 1]$.

a) Feu un dibuix de $\gamma(t)$.
Solució. Primer veiem on creua els eixos. En els eixos de les x, y ha de ser equivalent a 0, és dir $(t^2 - t + 2)\sin(2\pi t) = 0$, en aquest cas o $t^2 - t + 2 = 0$ o $\sin(2\pi t) = 0$. $t^2 - t + 2 = 0 \iff t \notin \mathbb{R}$ i $\sin(2\pi t) = 0 \iff t = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Llavors, $t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.
En els eixos de les y, x ha de ser equivalent a 0, és dir $(t^2 - t + 2)\cos(2\pi t) = 0$, també en aquest cas només té solució real a $t = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. Llavors, $t \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$. Aquests punts són $\left\{(0, 2), \left(0, -\frac{7}{4}\right), (0, 2), \left(\frac{29}{16}, 0\right), \left(-\frac{29}{16}, 0\right)\right\}$.
El gràfic resultant és aquest:



Fet amb GeoGebra, ja que LaTeX no el genera bé.

$\square$

b) Determineu quin punt de $\gamma(t)$ està més lluny de l'origen.
Solució. Per fer això, calcularem $\|\gamma(t) - (0, 0)\|$, o el que és equivalent, $\|\gamma(t)\|$. Això és el següent:

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t)\| &= \sqrt{((t^2 - t + 2)\sin(2\pi t))^2 + ((t^2 - t + 2)\cos(2\pi t))^2} \\
&= \sqrt{(t^2 - t + 2)^2 \sin^2(2\pi t) + (t^2 - t + 2)^2 \cos^2(2\pi t)} \\
&= \sqrt{(t^2 - t + 2)^2 \left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right)} \\
&= t^2 - t + 2
\end{aligned}$$

Gràcies a això, sabem que $\|\gamma(t)\|$ és, òbviament, continua i derivable. Ara, derivem per trobar on són els extrems relatius,

$$\|\gamma(t)\|' = 2t - 1$$

$\|\gamma(t)\|' = 0 \iff t = \frac{1}{2}$. Llavors, ara mirem els extrems de definició i els extrems relatius:

t	$\gamma(t)$
0	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
1	2

Llavors, veiem com els punts més lluny de l'origen corresponen amb $t = 0$ o $t = 1$ Aquests punts, més ben dit, aquest punt (ja que és el mateix) és $(0, 2)$. □

c) Determineu el vector tangent a la corba en el punt anterior.
Solució. El vector tangent es treu mitjançant $\dot{\gamma}(t)$:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} (2t-1)\cos(2\pi t) - 2\pi\left(t^2 - t + 2\right)\sin(2\pi t) \\ (2t-1)\sin(2\pi t) + 2\pi\left(t^2 - t + 2\right)\cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Si avaluem $\dot{\gamma}(0)$, tenim

$$\dot{\gamma}(0) = (-1, 4\pi)$$

Notem que si avaluem $\dot{\gamma}(1)$, tenim

$$\dot{\gamma}(1) = (1, 4\pi)$$

Aquests vectors no són pas equivalents, per això, no existeix com tal. □

d) Per al punt anterior, determineu l'angle que formen la posició i la velocitat.
Solució. Per fer això, farem servir $\cos\alpha = \frac{\langle \gamma(0), \dot{\gamma}(0)\rangle}{\|\gamma(0)\|\|\dot{\gamma}(0)\|}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle (0,2), (1,4\pi)\rangle}{\|(0,2)\|\,\|(1,4\pi)\|} = \frac{4\pi}{2\sqrt{1+16\pi^2}}$$

Si invertim el cos, tenim α:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4\pi}{2\sqrt{1+16\pi^2}}\right) \approx 1.0490160175847 \text{ rad} = 60.1041904492239^o$$

□