Apunts

La segona meitat del 1r curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Febrer - Juny 2024

Índex

Programació Orientada als Objectes

Càlcul en Diverses Variables

Definició: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Definició: Siguin $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definim $\underbrace{< (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) >}_{\text{(producte escalar)}} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ com a producte escalar.

Definició: $||(x_1, x_2, \dots, x_n)|| = +\sqrt{< x, x >}$ on $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Això és la distància del punt x a $(0, 0, \dots, 0)$.

Propietats de la norma:

1. $||x|| \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Desigualtat triangular: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz: $< x, y > \leq ||x|| ||y||$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Això ho acceptem.

Obs Observem que $-1 \leq \frac{<x,y>}{||x|| ||y||} \leq 1$ i definim l'angle entre els vectors x i y com l'angle α tal que $\cos\alpha = \frac{<x,y>}{||x|| ||y||}$, és a dir, $< x, y >= ||x|| ||y|| \cos\alpha$.

■ **Exemple** Trobem els valors de $\mathbb{R}^3 \perp (-1, -2, 1)$. Busquem $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ tal que $< (x_1, x_2, x_3), (-1, -2, 1) >= 0 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. ■

2.1 Boles a $\mathbb{R}^n$

Si $n = 2$ la bola de centre (x_0, y_0) i radi R és $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < R\} = \text{(disc)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$. Això és una bola oberta, denotada per

Notació. *Fem servir $\mathfrak{B}_R(x_0, y_0, \dots)$ la bola oberta ($< R$) i $\overline{\mathfrak{B}_R}(x_0, y_0, \dots)$ la tancada ($\leq R$). Es farà servir més la bola oberta.*

Definició: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$, definim $\mathring{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : R > 0 | \mathfrak{B}_R(\vec{x}) \subset A\}$

- **Exemple**
  1. $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y) : x > 0\}$
  2. $A = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y, z) : -a < x < a, -b < y < b, -c < z < c\}$

■

Definició: Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ es diu obert si $A = \mathring{A}$, és a dir, si tot punt del conjunt A és també un punt d'$\mathring{A}$.

Algorítmia i Combinatòria en Grafs. Mètodes Heurístics

Definició: Un graf és un objecte combinatori que està format per un parell ordenat de vèrtex i arestes ($G = (V, E)$). Una aresta (E) està etiquetat per un origen i un destí (o extrems si no estan orientades) sent aquests vèrtexs (V).

Definició: Un graf dirigit, o orientat, és un graf on les arestes tenen direcció, com si fos una fletxa.

Definició: Un graf no dirigit serà un graf on les arestes no tenen direccions. Podem suposar que l'aresta és bidireccional.

Definició: Un graf és planar si es pot unir tots els vèrtexs sense que es creuin les arestes. Si s'han de creuar obligatòriament, és un graf no planar.

Teorema Tot graf no planar té un subgraf $K_{3,3}$ o P_5.

Probabilitat

Definició: Un fenomen o experiment aleatori presenten les següents característiques:

- Abans de realitzar l'experiment no sabem el resultat però sí el conjunt de resultats possibles.
- En teoria es pot realitzar sota les mateixes condicions infinites vegades.
- Es pot assignar probabilitats als resultats.

Definició: L'espai mostral és el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori. Es denota per la lletra Ω i els seus elements per ω.

Definició: Un esdeveniment és una col·lecció de subconjunts de l'espai mostral. Es pot calcular la probabilitat d'un esdeveniment. Ha de tenir estructura de σ-àlgebra.

Notació. *Si $\omega \in \Omega$ és un resultat de l'experimental tal que $\omega \in A$, diem que A s'ha realitzat.*

Definició: Sigui $\mathcal{A}$ una col·lecció de subconjunts d'Ω. $\mathcal{A}$ és una σ-àlgebra si es compleix el següent:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$, aleshores $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ són elements d'$\mathcal{A}$, aleshores $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Corolari: (propietats d'una σ-àlgebra) Sent $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$

Definició: (Fórmula de Laplace) La probabilitat d'un esdeveniment $\mathcal{A}$ sempre que el conjunt de resultats possibles sigui finit i equiprobable, la fórmula de Laplace es pot aplicar.

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{\text{Casos probables a } \mathcal{A}}{\text{Casos possibles}}$$

Una altra manera de calcular la probabilitat és fent servir una visió freqüentista:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathcal{A}) \text{ on } f_n(\mathcal{A}) := \frac{\text{nombre de cops que hem obtingut } \mathcal{A}}{n}$$

Definició: (axiomes de Kolmogorov) Siguin Ω un conjunt i $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra sobre Ω. Una probabilitat és qualsevol aplicació $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ que compleix el següent:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ són disjunts dos a dos llavors

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Definició: Un espai de probabilitat és la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Notació. *Per a unions disjuntes fem servir* $\uplus$.

Corolari: Propietats dels axiomes de Kolmogorov.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Càlcul Numèric