Apunts

La primera meitat del 2n curs

Autor:

EDUARDO PÉREZ MOTATO

Setembre 2024 - Gener 2025

Índex

1 Bases de Dades Relacionals **1**

2 Equacions Diferencials Ordinàries **2**

2.0 Introducció 3

2.1 Equacions diferencials de 1r ordre 3

2.1.1 Alguns mètodes analítics de resolució d'EDO de 1r ordre 5

3 Modelització i Inferència **6**

4 Tècniques de Disseny d'Algoritmes **7**

5 Visualització 3D **8**

5.1 Geometria euclidiana 3D 9

5.1.1 L'espai euclidia estàndard 3-dimensional 9

5.1.2 Moviments rigids i grup ortogonal 12

5.1.3 Grup de rotacions 14

Bases de Dades Relacionals

Horari

- Dimarts 11-13h.
- Dijous 11-13h.

Equacions Diferencials Ordinàries

Horari

- Dimarts 9-11h.
- Divendres 11-13h.

2.0 Introducció

Les equacions diferenciàls són una eina molt important de modelització.

Definició: Les equacions diferencials son equacions que relacionen una funció (incognita) amb les seves derivades.

Definició: Si la funció és d'una variable $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid\mid t \mapsto u(t)$ es diuen Equacions Diferencials Ordinàries.

Definició: Si la funció és de diverses variables $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Es diuen Equacions de Derviades Parcials.

2.1 Equacions diferencials de 1r ordre

Definició: Una equació diferencial ordinária de primer ordre per una funció $y(x)$ és una equació

$$F(x, y, y') = 0$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(x, f\left(x\right)\right)$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es diu autònoma si f no depèn explicitament de x o sigui, és de la forma $y' = f(y)$

Definició: Una solució de la forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es una funció $y(x)$ diferenciable definida en un interval I tal que per a tot $x \in I$ se satisfà l'equació diferencial ordinària de 1r ordre.

En general, les solucions d'una EDO de 1r ordre formen una família uniparamètrica de funcions d'un paràmetre constant. Aquesta experssío s'anomena solució general de la EDO de 1r ordre.

Definició: Una equació diferencial de primer ordre amb una condició inicial s'anomena problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La solució d'un problema de valor inicial s'anomena solució particular de l'equació.

Definició: Un cas particular de solucions són els equilibris que són les solucions que no depenen de la variable independent.

Una solució d'equilibri de $y' = f(x, y)$ és una solució de la forma $y(x) = y^*$ (numero). Es compleix que $y(x) = y^*$ és solució d'equilibri de $y' = f(x, y)$ si i només si $f(x, y^*) = 0$ per a tot x per al que $f(x, y)$ estigui ben definit.
Si l'equació és autonòma ($y' = f(y)$) les solucions d'equilibri $y(x) = y$ estàn donades pels zeros de f i estan definides $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema (Picardo-Gindelof) Sigui $\mathcal{R}$ una regió rectangular del pla xy definida per $R = \{(x, y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ que conté el punt (x_0, y_0). Suposem que f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sigui continues a $\mathcal{R}$.
Aleshores existeix una única solució $y(x)$ definida a un interval $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ contingut a $[a, b]$ del PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A més a més si denotem la solució de l'anterior sistema per $y(x; x_0, y_0)$ es compleix que $y(x; x_0, y_0)$ és una funció continua respecte x_0, y_0.

Per assegurar unicitat és suficient amb què f sigui de Lipschitz respecte a la variable y

Que sigui de Lipschitz significa que $\exists L > 0 : |f(x,y) - f(x,z)| < L\,|y-z|\,(c,d)\ \forall (y,z,c,d)$

Teorema (de Peano) Si f és contínua, existeix solució del sistema.

Teorema Si f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues a $\mathcal{R}$ aleshores dues corbes solució de $y' = f(x,y)$ diferents no es poden tallar a $\mathbb{R}$.

2.1.1 Alguns mètodes analítics de resolució d'EDO de 1r ordre

1. **EDO separable o de variable separada.**
   Una edo de variables separades és de la forma

   $$y' = g\,(x)\,h\,(y)$$

   Si $h\,(y) \not\equiv 0$ llavors podem fer $\frac{1}{h(y)} y'\,(x) = g\,(x)$
   Integrant respecte a x tenim

   $$\int \frac{1}{h\,(y(x))} y'(x)dx = \int g(x)dx$$

   Denotem per H una primitiva de $\frac{1}{h(y)}$ i per G una primitiva de $g(x)$, llavors tenim

   $$H(y(x)) = G(x) + C$$

   Llavors $y(x) = H^{-1}\,(G(x) + C)$.
   Si $h\,(y) \equiv 0$, llavors $y(x) = y^{*}$, és a dir, té una solucío d'equilibri.

2. **EDO lineals** Una EDO de 1r ordre lìneal és de la forma

   $$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

   on $a(x)$ i $b(x)$ són funcions arbitràries.

   Si $b(x) \equiv 0$ llavors és una equació de variable separada. S'anomena l'equació homogenia associada a l'equació lineal.

Proposició Sigui $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dues solucions de l'equació lineal no homogènia. Aleshores $y_1(x) - y_2(x)$ és solució de l'equació homogènia associada.

> **Corol·lari:** La solució general de l'equació homogènia és igual que una solució particular de la homogenia més la solució general de l'equació homogènia.
> $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Per trobar $y_p(x)$ farem servir el "mètode de variació de les constants". Buscarem una solució particular de la forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Volem que es compleixi $y_p' + a(x)y_p = b_x$, això pasa si

$$b(x) = C'(x)e^{-\int a(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

3. more later

Modelització i Inferència

Horari

- Dilluns 11-13h.
- Dimecres 11-13h.

Tècniques de Disseny d'Algoritmes

Horari

- Dilluns 9-11h.
- Dijous 9-11h.

Visualització 3D

Horari

- Dimecres 9-11h.
- Divendres 9-11h.

5.1 Geometria euclidiana 3D

5.1.1 L'espai euclidia estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb $\mathbb{R}^3$.

Notació. *En l'espai euclidia tenim l'origen a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i un punt arbitrari* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tecnicament.*

Definició: La norma euclidiana d'un vector $V \in \mathbb{R}$ es defineix com $\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$ que compleix $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \, \|V\|$
- $\|V\| \iff V = 0$

Aquesta norma medeix la distància euclidiana entre dos punts $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ per la fórmula $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|$ que compleix

- $\mathcal{D}(P_1, P_3) \leq \mathcal{D}(P_1, P_2) + \mathcal{D}(P_2, P_3)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

La norma euclidiana d'un vector V correspon exactament a la seva longitud.

Demostracio Recordem el teorema de Pitàgores. Aleshores, veiem que $\|V\|$ és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que

- $\|V\| = d^2 + V_3^2$
- $d^2 = V_1^2 + V_2^2$

■

Com la norma d'un vector $V \in \mathbb{R}^3$ correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a $\mathbb{R}^3$ correspon a la longitud del segment que els uneix.
Si tenim P_1 i P_2 punts que defineixen un segment, la longitud $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$
Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longítuds contè la nociò d'ortogonalitat:

Definició: Anomenem producte escalar a $\mathbb{R}^3$ la funció
$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$ que és

- Bilineal: $\langle V + \lambda\bar{V}, W \rangle = \langle V, W \rangle + \lambda \langle \bar{V}, W \rangle$
  idem si $V \leftrightsquigarrow W$
- Simètrica: $\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$
- Definit positiu: $\langle V, V \rangle > 0$ si $V \neq 0$

Observem que $\forall V \in \mathbb{R}^3$, $\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$: la norma es pot definir en funció del producte escalar.
Reciprocament, veiem facilment la <u>Identitat de Polarització</u>

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{2} \left(\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2 \right) \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

Exercici Arribar a la Identitat de Polarització apartir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \, \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

Demostracio Fixem $V, W \in \mathbb{R}^3$ qualsevol. Aleshores definim $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$
Observem que $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W\rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W\rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow$ $\mathcal{P}$ és un polinomi en λ de grau 2. Llavors $\Delta = 4\left(\langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2\right)$ ha de ser ≤ 0, ja que $\mathcal{P} \geq 0$.
Deduim que $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$
Si $\Delta = 0$ això implica que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$, aleshores $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$ ■

Com a conseqüencia, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W\rangle}{\|V\| \, \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \, \|W\|)$$

Definició: L'ùnic $\theta \in [0, \pi] : \cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|}$ s'anomena angle euclidia entre V i W.

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.
Si $V = (1, 0, 0)$ i $W = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ obtenim que $\cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|} = \frac{\cos\alpha}{1\times 1} = \cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

Definició: Diem que V i W són ortogonals si $\langle V, W\rangle = 0$ o, de forma equivalent, si l'angle entre V i W és $\frac{\pi}{2}$.

Notació:. *Denotem dos vectors ortogonals entre si com* $V \perp W$

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si $\langle U, V\rangle = \langle V, W\rangle = \langle U, W\rangle = 0$, És base ortonormal, si és base ortogonal i a més $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

$\mathbb{R}^3$ admet una estructura adicional que permet multiplicar dos vectors:

Definició: $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \left(\begin{smallmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat: $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$ idem a la dreta.
- Antisimetria: $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem facilment que $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ $\langle V \wedge W, V\rangle = 0 = \langle V \wedge W, W\rangle$ Més enllà

Proposició $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3, \langle U, V \wedge W\rangle = \det(U, V, W)$

5.1.2 Moviments rigids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista $\neq$ (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d0un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.
Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preservan un objecte (s'anomenen moviments rigids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.
Començem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

Definició: El grup ortogonal ès el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|\, \langle MV, MW\rangle = \langle V, W\rangle \,\forall V, W \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Si $M \in O(3)$ i $V \in \mathbb{R}^3$, $\|MV\| = \|V\|$
Si $M \in O(3)$ i $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle MV, MW\rangle = V^t M^t M W$ per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|M^t M = \mathbb{I}_3\right\}$$

Proposició Si $M \in O(3)$, llavors $\det(M) = \pm 1$

Definició: Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{M \in O(3) | \det M = 1\}$$

Per contstrucció els elements de $SO(3)$ són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament, (Me_1, Me_2, Me_3) compleix

1. (Me_1, Me_2, Me_3) és una base ortogonal
2. $\det(Me_1, Me_2, Me_3) = \det M = 1$ i doncs $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un example de $M \in O(3) \setminus SO(3)$ és la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Aquestes transformacions de $O(3) \setminus SO(3)$ canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial ènfasi en el subgrup $SO(3)$!

$O(3)$ i $SO(3)$ són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si $M, N \in O(3)$ (o $SO(3)$), $MN \in O(3)$.
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$.
- Si $M \in O(3)$, aleshores M és invertible i $M^{-1} \in O(3)$.

Més generalment,

Definició: Un conjunt G és un grup Si

- $\exists$ operació interna $\cdot : G \cdot G \to G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (element neutre)
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tq $g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e$ (inversa)

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació que preserva les distáncies $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ Aleshores $\exists P_o \in \mathbb{R}^3,\ M \in O(3)$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

Definició: Si a més f preserva l'orientació, obtenim que $M \in SO(3)$. Un tal f s'anomena moviment rigid i correspon al fet de desplaçar un objecte a $\mathbb{R}^3$ (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

5.1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups $O(3)$ i $SO(3)$, i observar que el subgrup $SO(3)$ està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidia de dimensió n (on $n \in \mathbb{N}$), és a dir, treballem a $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar $\langle V, W\rangle = \sum_{i=1}^{n} V_i W_i \; \forall V, W \in \mathbb{R}^n$ podem definir $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$ i $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$
Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$:
  $M = (a) \in O(1) \iff M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \iff (a^2) = 1$
  $\iff a = \pm 1 \iff M = \pm\mathbb{I}_1$
  Deduïm que $O(1) = \{\pm\mathbb{I}_1\}$ i $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$

- $n = 2$

  Proposició Sigui $M \in O(2)$. $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

  Això genera una rotació d'angle θ en el primer cas i en el segon una simètria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle θ.

  En particular, si $M \in SO(2)$, $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$