

---

---

# APUNTS

LA PRIMERA MEITAT DEL 2N CURS

---

AUTOR:

EDUARDO PÉREZ MOTATO

SETEMBRE 2024 - GENER 2025

---

---

# Índex

---

<b>1</b>	<b>Bases de Dades Relacionals</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equacions Diferencials Ordinàries</b>	<b>3</b>
2.0	Introducció . . . . .	4
2.1	Equacions diferencials de 1r ordre . . . . .	4
2.1.1	Existència i unicitat i continuïtat de les solucions . . .	5
2.1.2	Alguns mètodes analítics de resolució d'EDO de 1r ordre	6
2.1.3	Mètodes qualitatiu: Camps de direccions . . . . .	7
2.1.4	Equacions diferencials autònomes . . . . .	7
2.2	Sistemes d'equacions diferencials ordinaries lineals i EDOs d'ordre superior . . . . .	9
2.2.1	Equacions lineals de segon ordre . . . . .	9
2.2.2	Equacions lineals de segon ordre amb coeficients con- stants . . . . .	10
2.2.3	Aplicacions . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Modelització i Inferència</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Tècniques de Disseny d'Algoritmes</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Visualització 3D</b>	<b>14</b>
5.1	Rotacions . . . . .	15
5.1.1	L'espai euclidià estàndard 3-dimensional . . . . .	15
5.1.2	Moviments rígids i grup ortogonal . . . . .	19
5.1.3	Grup de rotacions . . . . .	20
5.1.4	Representació de $SO(3)$ via l'espai projectiu . . . . .	22
5.2	Els quaternions . . . . .	24
5.2.1	Definició i primeres propietats: . . . . .	24
5.2.2	Conjugació, norma i invers . . . . .	26
5.2.3	Quaternions unitaris . . . . .	28
5.2.4	Quaternions i Rotacions . . . . .	30

5.3	Interpolació de rotacions . . . . .	33
-----	-------------------------------------	----

---

---

# Bases de Dades Relacionals

---

## Horari

- Dimarts 11-13h.
- Dijous 11-13h.

---

---

# Equacions Diferencials Ordinàries

---

## 2.0 Introducció

Les equacions diferencials són una eina molt important de modelització.

**Definició:** Les equacions diferencials són equacions que relacionen una funció (incògnita) amb les seves derivades.

**Definició:** Si la funció és d'una variable  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \parallel t \mapsto u(t)$  es diuen Equacions Diferencials Ordinàries.

**Definició:** Si la funció és de diverses variables  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Es diuen Equacions de Derivades Parcial.

## 2.1 Equacions diferencials de 1r ordre

**Definició:** Una equació diferencial ordinària de primer ordre per una funció  $y(x)$  és una equació

$$F(x, y, y') = 0$$

**Definició:** La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre és

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1)$$

**Definició:** La equació (1) es diu autònoma si  $f$  no depèn explícitament de  $x$  o sigui, és de la forma

$$y'(y) = f(y)$$

**Definició:** Una solució de (1) és una funció  $y(x)$  diferenciable definida en un interval  $I : \forall x \in I$  es satisfà (1).

En general, les solucions d'una EDO de 1r ordre formen una família uni-paramètrica de funcions d'un paràmetre constant. Aquesta expressió s'anomena solució general de l'EDO de 1r ordre.

**Definició:** Una equació diferencial de primer ordre amb una condició inicial s'anomena problema de valor inicial i es de la forma

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2)$$

La solució d'un problema de valor inicial s'anomena solució particular de l'equació.

**Definició:** Una solució d'equilibri de  $y' = f(x, y)$  és una solució de la forma  $y(x) = y^*$  on  $y^*$  és una constant. Ha de complir que  $y' = f(x, y) \iff f(x, y^*) = 0 \forall x \in \text{dom } f(x, y)$  estigui ben definit.

Si l'equació és autònoma ( $y' = f(y)$ ) les solucions d'equilibri  $y(x) = y$  estan donades pels zeros de  $f$  i estan definides  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### 2.1.1 Existència i unicitat i continuïtat de les solucions

**Teorema (Picardo-Gindelof)** Sigui  $\mathcal{R}$  una regió rectangular del pla  $xy$  definida per  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  que conté el punt  $(x_0, y_0)$ . Suposem que  $f$  i que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  són contínues a  $\mathcal{R}$ .

Aleshores existeix una única solució  $y(x)$  definida a un interval  $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ ,  $h > 0$  contingut a  $[a, b]$  del problema de valor inicial (2).

A més a més si denotem la solució de l'anterior sistema per  $y(x; x_0, y_0)$  es compleix que  $y(x; x_0, y_0)$  és una funció continua respecte  $x_0, y_0$ .



Per assegurar unicitat és suficient amb què  $f$  sigui de Lipschitz respecte a la variable  $y$



Que sigui de Lipschitz significa que  $\exists L > 0 : |f(x, y) - f(x, z)| < L |y - z| \quad (c, d) \quad \forall (y, z, c, d)$

Com a conseqüència del teorema anterior tenim

**Teorema** Si  $f$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  són contínues a  $\mathbb{R}$  aleshores dues corbes solució de  $y' = f(x, y)$  diferents no es poden tallar a  $\mathbb{R}$ .

Un altre teorema útil és el següent

**Teorema (de Peano)** Si  $f$  és contínua, existeix solució del sistema.

### 2.1.2 Alguns mètodes analítics de resolució d'EDO de 1r ordre

#### 1. EDO separable o de variable separada.

Una edo de variables separades és de la forma

$$y' = g(x) h(y)$$

Si  $h(y) \neq 0$  llavors podem fer  $\frac{1}{h(y)} y'(x) = g(x)$   
Integrant respecte a  $x$  tenim

$$\int \frac{1}{h(y(x))} y'(x) dx = \int g(x) dx$$

Denotem per  $H$  una primitiva de  $\frac{1}{h(y)}$  i per  $G$  una primitiva de  $g(x)$ , llavors tenim

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

Llavors  $y(x) = H^{-1}(G(x) + C)$ .

Si  $h(y) \equiv 0$ , llavors  $y(x) = y^*$ , és a dir, té una solució d'equilibri.

#### 2. EDO lineal.

Una EDO de 1r ordre lineal és de la forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad (3)$$

on  $a(x)$  i  $b(x)$  són funcions arbitràries.



Si  $b(x) \equiv 0$  llavors és una equació de variable separada. S'anomena l'equació homogènia associada a l'equació lineal.

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad (4)$$

**Proposició** Sigui  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  dues solucions de l'equació lineal (3). Aleshores  $y_1(x) - y_2(x)$  és solució de l'equació homogènia associada (4).

**Corol·lari:** La solució general de (3) és igual que una solució particular de (4)

$$y(x) = y_{\text{homogènia}}(x) + y_{\text{particular}}(x)$$

Per trobar  $y_p(x)$  farem servir el "mètode de variació de les constants". Buscarem una solució particular de la forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Volem que es compleixi  $y'_p + a(x)y_p = b(x)$ , això passa si

$$b(x) = C'(x)e^{-\int a(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx$$

### 3. EDO homogènia.

Una equació homogènia (de primer grau) és de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \leftarrow \begin{array}{c} \text{Canvi de variable per} \\ \text{transformar-la en variables separades} \end{array} \quad (5)$$

Es tracta d'un tipus d'equacions que fent un canvi de variable es transforma en una equació de variables separades. El canvi de variable serà

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xu(x) \\ y'(x) = u(x) + xu'(x) = f(u(x)) \rightarrow u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}$$

#### 2.1.3 Mètodes qualitatius: Camps de direccions

Tenim  $y' = f(x, y)$ . Sigui  $y(x)$  la solució d'aquesta equació que passa per  $(x_0, y_0)$ . Sabem llavors que  $y(x_0) = y_0$  i  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

A cada punt del pla  $(x, y)$  li podem associar un valor  $f(x, y)$  que representarem dibuixant el punt  $(x, y)$  un petit segment que tingui pendent  $f(x, y)$ . Obtenim així el camp de direccions.

També podem fer  $f(x, y) = m$ , que defineix un conjunt de corbes al pla  $(x, y)$  al llarg de les quals tots els vectors pendents han de ser  $m$ , es diuen isoclines.

#### 2.1.4 Equacions diferencials autònomes

Són de la forma

$$y' = f(y)$$

Aquestes no depèn de manera explícita de la variable independent. Aquestes equacions són de variables separades i els seus equilibris són zeros de la funció  $f$ .



**Teorema (Comportament asimptòtic d'equacions diferencials autònomes)** Donada una equació diferencial autònoma  $y' = f(y)$ , on  $f$  és contínua, aleshores

- Si  $y(x)$  una solució de l'equació autònoma, aleshores per qualsevol constant  $C \in \mathbb{R}$  també és solució  $y_c(x) := y(x + c)$ .
- Si  $y(x)$  és una solució de l'equació autònoma que no és un equilibri, és dir no es constant, aleshores no canvia de monotonia.
- Una solució acotada de l'equació autònoma tendeix (quan  $x \rightarrow \pm\infty$ ) a una solució d'equilibri.
- Si  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = 0$  i  $f(y) > 0$  per a  $y \in (a, b)$  i  $y(x_0) \in (a, b)$  aleshores  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = b$ .  
Si  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = 0$  i  $f(y) < 0$  per a  $y \in (a, b)$  i  $y(x_0) \in (a, b)$  aleshores  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = b$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = a$ .

## 2.2 Sistemes d'equacions diferencials ordinaries lineals i EDOs d'ordre superior

Una EDO d'ordre  $n$  és una equació de la forma  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

La forma estandard és

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (6)$$

Una solució de l'equació es una funció real  $y(x)$  definida a un interval  $I$ ,  $n$  vegades diferenciable i que  $\forall x \in I$  és compleix (6).

L'equació (6) és equivalent a un sistema d'equacions de primer ordre  $\vec{z}' = f(x, \vec{z})$

Una equació diferencial lineal d'ordre  $n$  és una EDO de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Quan  $f(x) \equiv 0$  l'equació s'anomena homogenia.

### 2.2.1 Equacions lineals de segon ordre

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (7)$$

La homogenia associada és

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (8)$$

Com en el cas de les lineals de primer ordre, la solució general de (7) és la suma de la solució de la homogenia (8) i una solució particular de la no homogenia (7).

Anem a veure com solucionar la homogenia

**Proposició** Siguin  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  dues solucions de (8), aleshores  $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$  també és solució (7) per constants  $A$  i  $B$  qualssevol.

**Teorema** Donat el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + a(x)y' + b(x)y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned}$$

Si les funcions  $a, b, f$  són contínues en un interval  $I$  que conté  $x_0$ , aleshores el problema té una única solució en  $I$ .

**Definició:** Si  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  són solucions de l'equació lineal homogènia de segon ordre (8) el determinant  $W(y_1, y_2)(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$  s'anomena Wronskià de  $y_1$  i  $y_2$ .

**Teorema** Si  $y_1$  i  $y_2$  són dues solucions de l'equació lineal homogènia de segon ordre (8) i  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$  per algun  $x_0$  aleshores

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

és la solució general de l'equació.

**Teorema (de Abel)** Si  $y_1$  i  $y_2$  són dues solucions de l'equació lineal homogènia de segon ordre (8) aleshores el Wronskià  $W(y_1, y_2)(x)$  és una funció exponencial i  $\forall x$  serà sempre 0 o no ho serà.

### 2.2.2 Equacions lineals de segon ordre amb coeficients constants

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (9)$$

Tindrem un polinomi característic de l'equació homogènia (9) de la forma  $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Llavors tenim tres casos:

1. Si  $b^2 - 4c > 0$  llavors les arrels són reals i diferents  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i la solució general serà

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

2. Si  $b^2 - 4c = 0$  llavors les arrels són reals i iguals  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  i la solució general serà

$$y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$$

3. Si  $b^2 - 4c < 0$  llavors les arrels són complexes  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  i  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  i la solució general serà

$$y(x) = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$$

També podem fer servir el mètode de variació de paràmetres per trobar la solució general de l'equació no homogènia (7).

Sigui  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  un conjunt fonamental de solucions de l'equació homogènia (8)  $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ . Buscarem  $y_p(x)$  de la forma  $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ .  $y_p'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$ . Imposem  $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$ . Aleshores  $y_p''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)$ . Substituïm a l'equació

no homogènia (7) i trobem  $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = q(x)$ . Resolem aquest sistema d'equacions per trobar  $C_1(x)$  i  $C_2(x)$ .

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

### 2.2.3 Aplicacions

Sistemes mecànics: tenim un sistema massa-molla. La massa es de  $m$  kg i la molla fa  $l$  cm de llargada i  $s$  de llargada quan es posa la massa. Aplicant la segona llei de Newton tenim  $\sum F = mx''$ . Tenim la força de la gravetat  $F_1 = mg$  i la força de la molla per la llei de Hooke  $F_2 = -k(x+s) = -kx - mg$ . En equilibri tenim  $F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow mg - k(x+s) = 0$ . Aleshores tenim l'equació diferencial  $mx'' = ks$ .

També podem tindre la força d'amortiment o fricció, que es presuposa que no hi ha si no es diu el contrari,  $F_3 = -bx'$ . I també podem tindre forces externes  $F_4 = f(t)$ . Aleshores tenim l'equació diferencial  $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0 \Rightarrow mx'' = -bx' - kx + f(t)$ .

Si  $b = 0$  es diu no amortit. Si  $f(t) = 0$  es diu lliure. Si ambdós són 0 es diu oscilador harmònic simple.

El polinomic característic de l'equació diferencial serà  $P(\lambda) = m\lambda^2 + k = 0$ . Llavors,  $x(t) = C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) = A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$ , amb  $\phi = \frac{c_1}{c_2}$ ,  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ .

Cas amortit i lliure  $b > 0$ ,  $k > 0$ ,  $m > 0$ . El polinomic característic serà  $P(\lambda) = m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$ . Llavors tenim tres casos:

- $b^2 - 4mk > 0$  llavors les arrels són reals i diferents  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i la solució general serà

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notem que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Hi ha un màxim (o mínim) a  $t = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left( \frac{-C_1 \lambda_1}{C_2 \lambda_2} \right)$ .

Es diu que aquest moviment és sobreamortit.

- $b^2 - 4mk = 0$  llavors les arrels són reals i iguals  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  i la solució general serà

$$x(t) = e^{\lambda t} (C_1 + C_2 t)$$

Notem que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Hi ha un màxim (o mínim) a  $t = -\frac{c_1}{c_2} + \frac{2m}{b}$ .

Es diu que aquest moviment és críticament amortit.

- $b^2 - 4mk < 0$  llavors les arrels són complexes  $\lambda_1 = -\frac{b}{2m} + i\sqrt{\frac{4mk-b^2}{2m}} = \alpha + i\beta$  i  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  i la solució general serà

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}$$

Notem que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Aquesta sí que oscila, llavors te molts punts crítics. Es diu que aquest moviment és subamortit.

Cas amortit i forçat  $b > 0$ ,  $k > 0$ ,  $m > 0$ ,  $f(t) \neq 0$ . L'equació diferencial serà  $mx'' + bx' + kx = f(t)$ . La solució general serà  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ , on  $x_h(t)$  és la solució general de l'homogènia i  $x_p(t)$  és una solució particular de l'equació diferencial.

Notem que ja hem estudiat la homogenia anteriorment, ja que en el cas lliure es homogenia.  $x_h(t)$  s'anomena terme transitori i  $x_p(t)$  terme estacionari. Això ja que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_p(t)$ , es dir, al límit el  $x_h$  no importa.

Cas no amortit i forçat ressonància  $b = 0$ ,  $k > 0$ ,  $m > 0$ ,  $f(t) = F_0 \sin \omega_0 t$ . L'equació diferencial serà  $mx'' + kx = F_0 \sin \omega_0 t$ . La solució general serà  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ .  $x_h(t) = C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$ . Busquem  $x_p(t)$ . Anotem  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- $\omega \neq \omega_0$  busquem  $x_p(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$ , substituïm  $x_p(t) = \frac{F_0 \sin \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2} \Rightarrow x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \frac{F_0 \sin \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2}$ .
- $\omega = \omega_0$  busquem  $x_p(t) = t(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = -\frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t \Rightarrow x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$ .

---

---

# Modelització i Inferència

---

## Horari

- Dilluns 11-13h.
- Dimecres 11-13h.

---

---

# Tècniques de Disseny d'Algoritmes

---

## Horari

- Dilluns 9-11h.
- Dijous 9-11h.

---

# Visualització 3D

---

## 5.1 Rotacions

### 5.1.1 L'espai euclidià estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb  $\mathbb{R}^3$ .

**Notació.** En l'espai euclidià tenim l'origen a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  i un punt arbitrari  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tècnicament.

**Definició:** La norma euclidiana d'un vector  $V \in \mathbb{R}$  es defineix com

$$\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$$

que compleix  $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \|V\|$
- $\|V\| = 0 \iff V = 0$

Aquesta norma mesura la distància euclidiana entre dos punts  $P_1$  i  $P_2$  per la fórmula

$$\mathcal{D}(P_1, P_2) := \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

que compleix les següents propietats

- $\mathcal{D}(P_1, P_3) \leq \mathcal{D}(P_1, P_2) + \mathcal{D}(P_2, P_3)$

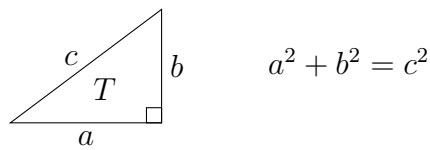


- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

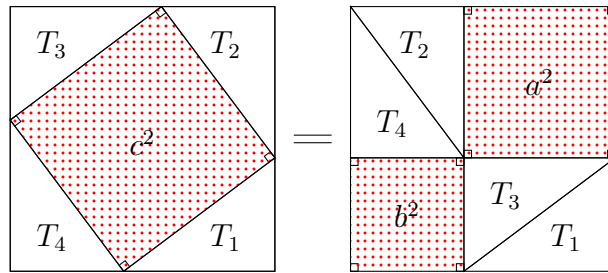


La norma euclidiana d'un vector  $V$  correspon exactament a la seva longitud.

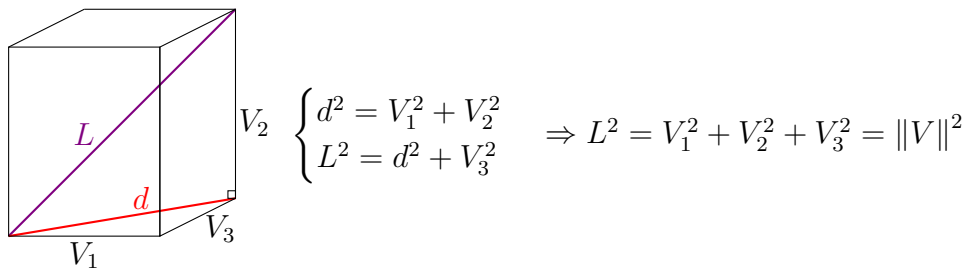
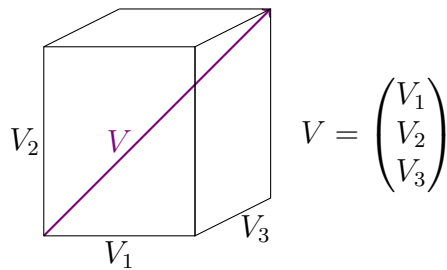
**Demostracio** Recordem el teorema de Pitàgores.



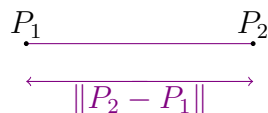
Com



Aleshores, veiem que  $\|V\|$  és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que



Com la norma d'un vector  $V \in \mathbb{R}^3$  correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a  $\mathbb{R}^3$  correspon a la longitud del segment que uneix aquests punts:



Si tenim  $P_1$  i  $P_2$  punts que defineixen un segment, la longitud  $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$

Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! ■

Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longituds conté la noció d'ortogonalitat:

**Definició:** Anomenem producte escalar a  $\mathbb{R}^3$  la funció

$$\langle \dots, \dots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$  que és

- Bilineal:  $\langle V + \lambda \bar{V}, W \rangle = \langle V, W \rangle + \lambda \langle \bar{V}, W \rangle$  ídem si  $V \rightsquigarrow W$
- Simètrica:  $\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$
- Definit positiu:  $\langle V, V \rangle > 0$  si  $V \neq 0$

Observem que  $\forall V \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$ : la norma es pot definir en funció del producte escalar.

Recíprocament, veiem fàcilment la Identitat de Polarització

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{2} (\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2) \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

**Exercici** Arribar a la Identitat de Polarització a partir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

**Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)**

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W \rangle| \leq \|V\| \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

**Demostració** Fixem  $V, W \in \mathbb{R}^3$  qualsevol. Aleshores definim  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 $\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$

Observem que  $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W \rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W \rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow \mathcal{P}$  és un polinomi en  $\lambda$  de grau 2. Llavors  $\Delta = 4(\langle V, W \rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2)$  ha de ser  $\leq 0$ , ja que  $\mathcal{P} \geq 0$ .

Deduïm que  $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W \rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W \rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$

Si  $\Delta = 0$  això implica que  $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$ , aleshores  $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$  ■

Com a conseqüència, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W \rangle| \leq \|V\| \|W\|)$$

**Definició:** L'únic  $\theta \in [0, \pi] : \cos \theta = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|}$  s'anomena angle euclidià entre  $V$  i  $W$ .

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.

Si  $V = (1, 0, 0)$  i  $W = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$  obtenim que  $\cos \theta = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} = \frac{\cos \alpha}{1 \times 1} = \cos \alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

**Definició:** Diem que  $V$  i  $W$  són ortogonals si  $\langle V, W \rangle = 0$  o, de forma equivalent, si l'angle entre  $V$  i  $W$  és  $\frac{\pi}{2}$ .

**Notació:** Denotem dos vectors ortogonals entre si com  $V \perp W$

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si  $\langle U, V \rangle = \langle V, W \rangle = \langle U, W \rangle = 0$ . És base ortonormal, si és base ortogonal i a més  $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$ .

$\mathbb{R}^3$  admet una estructura addicional que permet multiplicar dos vectors:

**Definició:**  $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ , definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \begin{pmatrix} V_2 W_3 - V_3 W_2 \\ V_3 W_1 - V_1 W_3 \\ V_1 W_2 - V_2 W_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat:  $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$  ídem a la dreta.
- Antisimetria:  $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem fàcilment que  $\forall V, W \in \mathbb{R}^3 \langle V \wedge W, V \rangle = 0 = \langle V \wedge W, W \rangle$  Més enllà

**Proposició**  $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3, \langle U, V \wedge W \rangle = \det(U, V, W)$

### 5.1.2 Moviments rígids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista  $\neq$  (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d'un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.

Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preserven un objecte (s'anomenen moviments rígids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.

Comencem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

**Definició:** El grup ortogonal és el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \langle MV, MW \rangle = \langle V, W \rangle \forall V, W \in \mathbb{R}^3\}$$



Si  $M \in O(3)$  i  $V \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|MV\| = \|V\|$   
 Si  $M \in O(3)$  i  $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com  $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ ,  $\langle MV, MW \rangle = V^t M^t M W$  per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^t M = \mathbb{I}_3\}$$

**Proposició** Si  $M \in O(3)$ , llavors  $\det(M) = \pm 1$

**Definició:** Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{M \in O(3) \mid \det M = 1\}$$

Per construcció els elements de  $SO(3)$  són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament,  $(Me_1, Me_2, Me_3)$  compleix

1.  $(Me_1, Me_2, Me_3)$  és una base ortogonal
2.  $\det(Me_1, Me_2, Me_3) = \det M = 1$  i doncs  $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un exemple de  $M \in O(3) \setminus SO(3)$  és la matriu  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aquestes transformacions de  $O(3) \setminus SO(3)$  canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial èmfasi en el subgrup  $SO(3)$ !



$O(3)$  i  $SO(3)$  són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si  $M, N \in O(3)$  (o  $SO(3)$ ),  $MN \in O(3)$ .
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$ .
- Si  $M \in O(3)$ , aleshores  $M$  és invertible i  $M^{-1} \in O(3)$ .

Més generalment,

**Definició:** Un conjunt  $G$  és un grup Si

- $\exists$  operació interna  $\cdot : G \cdot G \rightarrow G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$  tal que  $e \cdot g = g \cdot e = g$  (element neutre)
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1}g = e$  (inversa)

**Teorema** Sigui  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicació que preserva les distàncies  $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$   
Aleshores  $\exists P_o \in \mathbb{R}^3, M \in O(3)$  tal que  $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

**Definició:** Si a més  $f$  preserva l'orientació, obtenim que  $M \in SO(3)$ . Un tal  $f$  s'anomena moviment rígid i correspon al fet de desplaçar un objecte a  $\mathbb{R}^3$  (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

### 5.1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups  $O(3)$  i  $SO(3)$ , i observar que el subgrup  $SO(3)$  està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidià de dimensió  $n$  (on  $n \in \mathbb{N}$ ), és a dir, treballem a  $\mathbb{R}^n$  amb el producte escalar  $\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^n V_i W_i \forall V, W \in \mathbb{R}^n$  podem definir  $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$  i  $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$   
Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$ :

$$M = (a) \in O(1) \iff M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \iff (a^2) = 1$$

$$\iff a = \pm 1 \iff M = \pm \mathbb{I}_1$$

Deduïm que  $O(1) = \{\pm \mathbb{I}_1\}$  i  $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$

- $n = 2$

**Proposició** Sigui  $M \in O(2)$ .  $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$  tal que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Això genera una rotació d'angle  $\theta$  en el primer cas i en el segon una simetria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle  $\theta$ .



En particular, si  $M \in SO(2)$ ,  $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$  tal que

$$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$

**Proposició** Sigui  $M \in O(3)$ . Aleshores  $\exists B \in SO(3), \exists \theta \in [0, 2\pi)$  tal que

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Geomètricament, això significa que si  $M = \mathcal{M}_{Can}(L)$ ,  $\exists \mathcal{B} = (U, V, W)$  i  $\exists \theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $B = P_{Can \rightarrow \mathcal{B}}$  i  $BMB^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Com  $B \in SO(3)$ , vol dir que la base  $\mathcal{B}$  és base ortonormal positiva (és a dir, té la mateixa orientació que la base canònica  $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 1$ )

– Cas on  $\pm 1 = 1$ :

$$U = L(U)$$

$$L(V) = \cos \theta V + \sin \theta W$$

$$L(W) = -\sin \theta V + \cos \theta W$$

Llavors  $L$  és una rotació d'eix  $U$  i d'angle  $\theta$ .

– Cas on  $\pm 1 = -1$ :

$$\begin{aligned}U &= -L(U) \\L(V) &= \cos \theta V - \sin \theta W \\L(W) &= \sin \theta V + \cos \theta W\end{aligned}$$

$L$  és la composició d'una simetria  $\perp$  al pla  $U^\perp = \text{Vect}(V, W)$  i de la rotació d'angle  $\theta$  i eix  $U$

**Teorema (de les rotacions d'Euler)** Sigui  $M \in SO(3)$ . Llavors  $\exists B \in SO(3)$  i  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Per això,  $SO(3)$  rep el nom de grup de les rotacions.

En particular, i no és gens evident, si componem dues rotacions a l'espai, obtenim una tercera.

Cas particular: Si  $U = U'$ ,  $R_{\theta_1, U'} \circ R_{\theta_2, U} = R_{\theta, U}$ . Això és evident, però  $R_{\theta_1, U} \circ R_{\theta_2, V} = R_{\theta, W}$  i és molt difícil obtenir  $\theta$  i  $W$ .

#### 5.1.4 Representació de $SO(3)$ via l'espai projectiu

Associem a cada punt  $p \neq 0$  de la bola  $B$  de radi  $\pi$  la rotació d'eix  $\frac{p}{\|p\|}$  d'angle  $\|p\|$  i a  $p = 0$  associem la rotació Identitat  $\mathbb{I}_3$ .

Com  $\forall p \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\|p\| = \pi$  ( $\Leftrightarrow p \in \partial B$ ), tenim que  $R_{\frac{p}{\pi}, \pi} = R_{\frac{-p}{\pi}, \pi}$ , en tenim prou amb  $B$  per representar  $SO(3)$ .

Acabem de definir una aplicació

$$\begin{aligned}\Omega : B (= B^3(0, \pi)) &\longrightarrow SO(3) \\p &\longmapsto R_{\frac{p}{\|p\|}, \|p\|}\end{aligned}$$

Injectiva? No, perquè  $\Omega((0, 0, \pi)) = \Omega(0, 0, -\pi)$ .

Però ho és quasi:  $\forall p, q$  tal que  $\|p\| < \pi$  i  $\|q\| < \pi$ , tenim que  $\Omega(p) \neq \Omega(q)$ .

A més si  $\|p\| = \|q\| = \pi$ ,  $\Omega(p) = -\Omega(q)$ .

Exhaustiva? Sí.

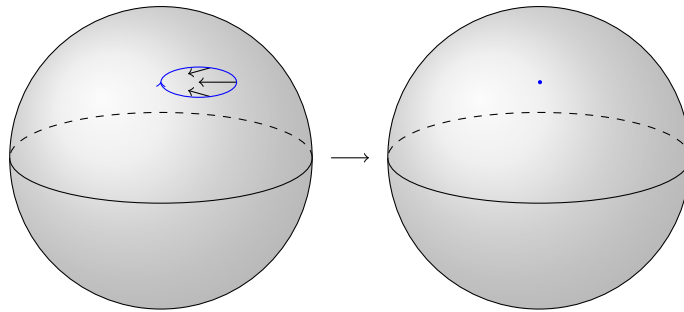
Al final, si enganxem els parells de punts antipodals (parells de la forma  $(p, -p)$  amb  $\|p\| = \pi \iff p \in \partial B$ ) obtenim un espai quocient que representa rotacions:

$$SO(3) = B / \{p = -p \text{ si } p \in \partial B\}$$

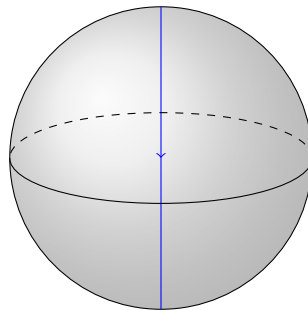
Aquest espai s'anomena espai projectiu de dim 3 i es denota  $\mathbb{R}P^3$ .



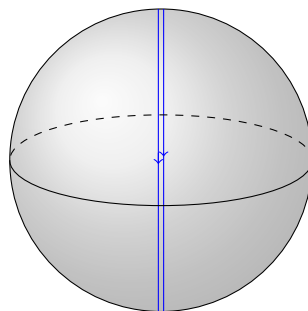
Existeixen corbes tancades a  $B^3$  que es poden contractar en un punt.



Existeixen corbes que no es poden contractar en un punt.

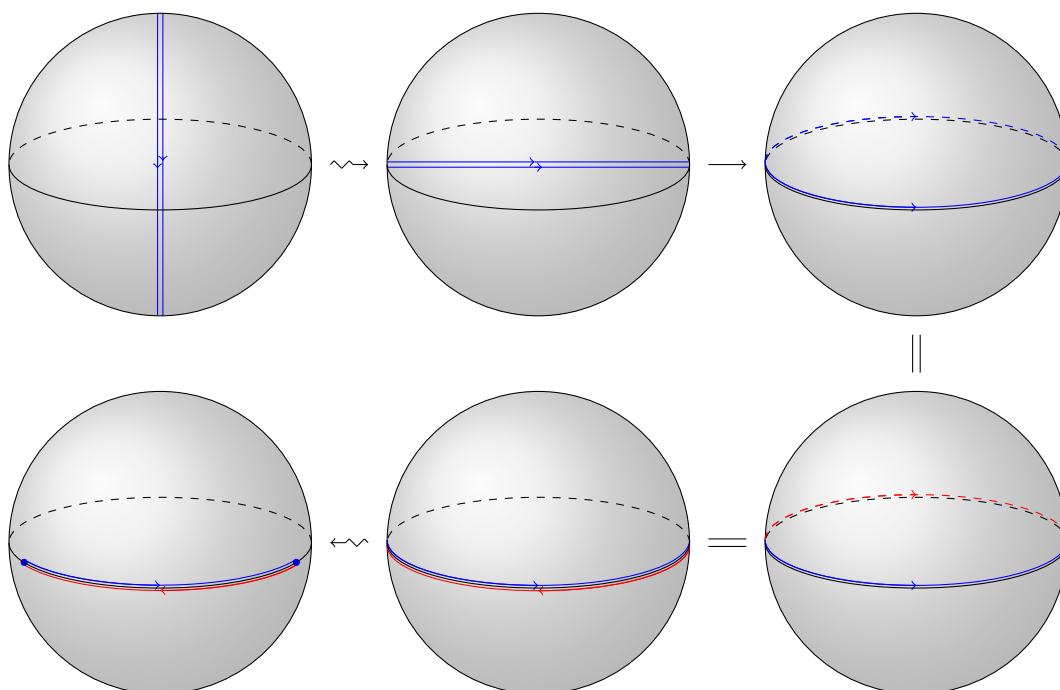


Existeixen dobles corbes que si es poden contractar en un punt.





Expliquem aquesta última observació:



## 5.2 Els quaternions

En aquest nou capítol, denotarem la base ortonormal estandard  $(e_1, e_2, e_3)$  a  $\mathbb{R}^3$  com  $(i, j, k)$ .

Es a dir, que  $i = e_1$ ,  $j = e_2$  i  $k = e_3$ .

### 5.2.1 Definició i primeres propietats:

**Definició:** Un quaternió  $q$  és la suma (formal) d'un escalar  $q_0 \in \mathbb{R}$  i d'un vector  $Q := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ . És a dir, que  $q = q_0 + Q$ . Farem servir  $\mathbb{H}$  (de Hamilton) per el conjunt dels quaternions que es pot identificar a  $\mathbb{R}^4$  via l'identificació:

$$H \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \longmapsto (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

Denotarem també que  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ .

Donats dos quaternions  $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$  i  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definim:

- La suma de quaternions com  $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \in \mathbb{H}$
- El producte per un escalar com  $\lambda p = \lambda p_0 + \lambda p_1i + \lambda p_2j + \lambda p_3k \in \mathbb{H}$
- El producte de quaternions com  $pq = \underbrace{p_0q_0 - \langle P, Q \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p_0Q + q_0P + P \wedge Q}_{\in \mathbb{R}^3}$   
 $pq \in \mathbb{H}$



$\forall p, q \in \mathbb{H}$ ,

$$\begin{aligned} pq - qp &= (p_0q_0 - \langle P, Q \rangle) + (p_0Q + q_0P + P \wedge Q) \\ &\quad - (q_0p_0 - \langle Q, P \rangle) - (q_0P + p_0Q + Q \wedge P) \\ &= 2 \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} i^2 &= ii \\ &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 1i + 0j + 0k) \\ &= pq \text{ amb } p_0 = q_0 = 0, p_1 = q_1 = 1, p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = 0 \\ &= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\ &= 0 - 1 + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que  $j^2 = k^2 = -1$ .



$$\begin{aligned} ij &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 0i + 1j + 0k) \\ &= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\ &= 0 - 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= k \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$  i  $ki = j = -ik$ .

Al final, hem obtingut les regles de Hamilton, fonamentals per calcular amb quaternions:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{cases}$$

En particular, veiem que  $\mathbb{H}$  és un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió 4, amb base  $(1, i, j, k)$  amb producte que no és conmutatiu:  $ij \neq ji$ ! En canvi:

**Proposició** El producte sobre  $\mathbb{H}$  és associatiu i distributiu respecte l'addició.



$$1q = q \text{ i } 0q = 0$$

### 5.2.2 Conjugació, norma i invers

**Definició:** Siguin  $q = q_0 + \underbrace{q_1i + q_2j + q_3k}_Q \in \mathbb{H}$ . Definim el conjugat de  $q$  com

$$\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = q_0 - Q$$

Direm que  $q$  és:

- (quaternion) real si  $q = \bar{q} \iff Q = 0 \iff q = q_0$
- (quaternion) imaginari pur si  $q = -\bar{q} \iff q_0 = 0 \iff q = Q$

Denotem  $\mathbb{R} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = q\} \subset \mathbb{H}$  el subconjunt de reals.

**Exercici** Demostrar que  $q \in \mathbb{R} \iff pq = qp, \forall p \in \mathbb{H}$  ■

Denotarem  $\mathbb{H}^{\text{pur}} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\} \subset \mathbb{H}$  el subconjunt de quaternions imaginaris purs.

**Proposició**  $\forall p, q \in \mathbb{H}, \overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$  i  $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$

**Demostració** El primer punt és evident. Pel segon, ja n'hi ha prou donada la distributivitat de verificar-ho per  $i, j, k$  i per exemple:

$$\begin{cases} \overline{ij} = \bar{k} = -k \\ \overline{ji} = -j(-i) = ji = -k \end{cases}$$

■

**Definició:** Sigui  $q \in \mathbb{H}$ . Definim la seva norma  $N(q) \in \mathbb{R}_+$  per la fórmula:

$$N(q) = \sqrt{q\bar{q}} \in \mathbb{R}$$



$\overline{q\bar{q}} = \overline{q\bar{q}} \Rightarrow q\bar{q} \in \mathbb{R}$  i a més

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= q_0^2 - \langle Q, -Q \rangle + \underbrace{q_0(-Q) + q_0(Q)}_{=0} + \underbrace{Q \wedge (-Q)}_{=0} \\ &= q_0^2 + \langle Q, Q \rangle \end{aligned}$$

es a dir  $q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \in \mathbb{R}_+$

En particular,  $N(q) \geq 0$  i  $N(q) = 0 \iff q = 0$ .



$N(q)$  coincideix amb la norma euclidiana a  $\mathbb{R}^4$  per la identificació

$$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$$

$$1 \leftrightarrow e_1$$

$$i \leftrightarrow e_2$$

$$j \leftrightarrow e_3$$

$$k \leftrightarrow e_4$$

**Proposició** La norma  $N : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$  es multiplicativa, és a dir,  $N(pq) = N(p)N(q) \forall p, q \in \mathbb{H}$ .

**Demostració**

$$N^2(pq) = pq\overline{pq} = \bar{q} \underbrace{\overline{p}p}_{N^2(p)} q = \underbrace{\bar{q}q}_{N^2(q)} = N^2(p)N^2(q)$$

■



Denotem

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{q \in \mathbb{H} \text{ tal que } q_2 = q_3 = 0\} \\ &= \{q_0 + q_1i | q_0, q_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Obeeix que  $\mathbb{C}$  és estable per la multiplicació. Tenim llavors que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset (\mathbb{H}, +, \times)$

**Definició:** Sigui  $q \in \mathbb{H}$  i  $q \neq 0$ , aleshores, la inversa de  $q$ ,  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)^2}$  que compleix  $q^{-1}q = 1$  i  $qq^{-1} = 1$ .

**Teorema**  $\mathbb{H}$  és un cos (com  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ ).

**Demostració** • La suma i la multiplicació són associatives.

- La suma és commutativa.
- Existeix element neutre per la suma i per la multiplicació (0 i 1, respectivament).
- Distribució de multiplicació relativa a suma.
- Tot element admet un invers per la suma ( $q + (-q) = 0$ ).
- Tot element no nul admet un invers per la multiplicació ( $qq^{-1} = 1$ ).

■

**Notació.** Si  $q \in \mathbb{H}$ ,  $Re\ q := \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \in \mathbb{R}$  i  $Im\ q := \frac{1}{2}(q - \bar{q}) \in \mathbb{H}^{pur}$ .

### 5.2.3 Quaternions unitaris

**Definició:** Un quaternió  $u \in \mathbb{H}$  és unitari si satisfà  $N(u) = 1$ . Denotarem  $\mathbb{H}^* = \{q \in \mathbb{H} | N(q) = 1\}$  el conjunt dels quaternions unitaris. Denotarem  $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid N(u) = 1\}$  el subconjunt dels quaternions unitaris.

Aquest subconjunt té les següents propietats:

**Proposició**

1.  $\forall u, v \in \mathbb{U}$ ,  $u^{-1} = \bar{u}$  i  $uv \in \mathbb{U}$  i en particular,  $(\mathbb{U}, \times)$  satisfà les propietats d'un grup.
2.  $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$

**Demostració** 1.  $\forall u \in \mathbb{U}$   $u^{-1} = \bar{u}$  ja que  $N(u) = 1$ , aleshores  $N(\bar{u}) = N(\bar{u})N(u) = N(u\bar{u}) = 1 \Rightarrow u^{-1} \in \mathbb{U}$

2. Si  $u \in \mathbb{R}$   $u = u_0$  amb  $u_0 \in \mathbb{R}$  i  $N^2(u) = u_0^2 = 1 \Rightarrow u = u_0 = \pm 1$

■



Podem escriure  $\mathbb{U} = \{q_0 + q_1i + q_2j + q_3k | (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4 \text{ i } q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$ , i observem que

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4 \\ \check{\mathbb{U}} &\xrightarrow{\sim} \check{\mathbb{S}}^3\end{aligned}$$

$\mathbb{U}$  s'identifica amb l'esfera  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$

Recordem que  $\mathbb{H}^{pur} = \{q \in \mathbb{H} | \bar{q} = -q\}$  i per aixó podem identificar  $\mathbb{H}^{pur}$   
 $= \{q \in \mathbb{H} | \text{Re } q = 0\}$   
 $= \{Q | Q \in \mathbb{R}^3\}$

amb  $\mathbb{R}^3$  via l'aplicació

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^{pur} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ q = Q &= q_1i + q_2j + q_3k \mapsto Q = (q_1, q_2, q_3)\end{aligned}$$

**Proposició** Si  $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$ ,  $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$

**Demostració** Si  $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$ ,  $pq = -\langle P, Q \rangle + P \wedge Q$  com  $p_0 = q_0 = 1$  i en particular

$$q^2 = -\langle Q, Q \rangle = -\|Q\|^2 = -N^2(q)$$

■



Si  $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$ ,  $pq - qp = 2P \wedge Q$

**Teorema** Siguin  $p, q, r \in \mathbb{H}^{pur}$  i denotem els vectors corresponents per  $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ . Aleshores

$$(P, Q, R) \text{ BON} \oplus \text{ a } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = q^2 = r^2 = -1 \\ pq = r = -qp \\ qr = p = -rq \\ rp = q = -pr \end{cases}$$



$(i, j, k)$  compleixen aquestes formules! No es sorpresa ja que  $(i, j, k)$  és un BON  $\oplus$  a  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostració** ( $\Leftarrow$ ) Recordem que si  $q \in \mathbb{H}^{pur}$ ,  $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$  i per tant  $P, Q, R$  són de norma euclidiana = 1

**Lema:** Si  $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$ , i  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  són els vectors associats aleshores

$$\begin{cases} Re(pq) &= -\langle P, Q \rangle \\ Im(pq) &= P \wedge Q \end{cases}$$

**Demostració**  $pq = p_0q_0 - \langle P, Q \rangle + p_0Q + q_0P + P \wedge Q = -\langle P, Q \rangle + P \wedge Q$  ja que  $p_0 = q_0 = 0$  ■

Ara bé,  $P \wedge Q = pq = r = R$  i  $\langle P, Q \rangle = -Re(pq) = -Re(r) = 0$  doncs  $(P, Q, R)$  BON directe.  $(\Rightarrow)$  Si  $(P, Q, R)$  és BON  $\oplus$ ,  $\|P\| = 1 = -p^2$  i idem per  $Q$  i  $R$ . Aleshores  $pq = -\underbrace{\langle P, Q \rangle}_{=0} + P \wedge Q = R = r$  i idem per  $qr$  i  $rp$ . ■

#### 5.2.4 Quaternions i Rotacions

Sigui  $u \in \mathbb{U}$ , considerem l'aplicació  $\Phi_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$q \mapsto uq\bar{u}$$

**Proposició**  $\forall p, q \in \mathbb{H}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $\Phi_u$  és lineal:  $\Phi_u(p + \lambda q) = \Phi_u(p) + \lambda \Phi_u(q)$
2.  $\Phi_u$  és multiplicativa:  $\Phi_u(pq) = \Phi_u(p)\Phi_u(q)$
3.  $\overline{\Phi_u(p)} = \Phi_u(\bar{p})$
4.  $Re(\Phi_u(p)) = Re(p)$ , en general  $Im(\Phi_u(p)) \neq Im(p)$
5.  $\Phi_u$  preserva la norma:  $N(\Phi_u(p)) = N(p)$

**Demostració** 1 i 2 son clares.

$$3. \overline{uq\bar{u}} = \bar{\bar{u}q\bar{u}} = u\bar{q}u$$

$$\begin{aligned} 4. Re(q) &:= \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \rightsquigarrow Re(\Phi_u(p)) = \frac{1}{2}(\Phi_u(p) + \overline{\Phi_u(p)}) = \frac{1}{2}(\Phi_u(p) + \Phi_u(\bar{p})) \\ &= \Phi_u(Re(p)) = Re(p\Phi_u(1)) \\ &= Re(p) \end{aligned}$$

$$5. N(\Phi_u(p)) = \sqrt{u\bar{p}u\bar{p}u} = \sqrt{up\bar{p}u} = N(p)$$

■

A més:

**Proposició**  $\forall u, v \in \mathbb{U}$

- $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}} \iff u = \pm 1$
- $\forall u, v \in \mathbb{U}, \Phi_{uv} = \Phi_u \circ \Phi_v$  i  $\Phi_u$  és invertible, amb  $\Phi_u^{-1} = \Phi_{\bar{u}}$
- $\Phi_u = \Phi_v \iff u = \pm v$

**Demostració** 1. Si  $u = \pm 1$  aleshores  $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$  Recíprocament, si  $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$  aleshores  $\forall q \in \mathbb{H}, uq\bar{u} = q \iff u\bar{q} = qu$

**Lema:** Si  $p \in \mathbb{H}$ , tal que  $\forall q \in \mathbb{H}, pq = qp$  aleshores  $p \in \mathbb{R}$ .

**Demostració** Escrivim  $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ . En particular,

$$\begin{aligned} pi = ip &\iff p_0i - p_1 - p_2k - p_3j = p_0i - p_1 + p_2k + p_3j \\ &\iff 2p_2k + 2p_3j = 0 \\ &\iff p_2 = p_3 = 0 \iff p = p_0 + p_1i \end{aligned}$$

i la relació  $pj = jp \iff p_1 = 0$ . Al final  $p = p_0 \in \mathbb{R}$ . ■

Doncs  $u \in \mathbb{R} \cap \mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$ .

2.  $\Phi_u(\Phi_v(p)) = uv\bar{p}\bar{u} = uv\bar{p}\bar{u} = \Phi_{uv}(p)$  Ara bè,  $\forall u \in \mathbb{U}, \Phi_u \circ \Phi_{\bar{u}} = \Phi_{u\bar{u}} = \Phi_1 = Id_{\mathbb{H}} \Rightarrow \Phi_u^{-1} = \Phi_{\bar{u}}$
3.  $\Phi_u = \Phi_v \Rightarrow \Phi_u \circ \Phi_{v^{-1}} = Id_{\mathbb{H}}$  ■

Ara denotarem  $\Psi_u : \mathbb{H}^{pur} \rightarrow \mathbb{H}^{pur}$  la restricció de  $\Phi_u$  als quaternions imaginaris purs.

Si identifiquem  $\mathbb{H}^{pur} \simeq \mathbb{R}^3$ , obtenim una aplicació induïda

$$p_1i + p_2j + p_3k \mapsto (p_1, p_2, p_3)$$

$R_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definit per  $R_u(p_1, p_2, p_3) = \Psi_u(p_1i + p_2j + p_3k)$

Les dues proposicions anteriors impliquen el següent:

- $R_u$  és lineal  $\forall p, q \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $R_u$  és invertible
- De fet,  $R_u$  serà una rotació.

**Teorema**  $u, v \in \mathbb{U}$ , aleshores

1.  $R_u \in SO(3)$  (és a dir,  $R_u$  és una rotació)
2.  $R_u \circ R_v = R_{uv}$  i  $R_u^{-1} = R_{\bar{u}}$



$$3. R_u = R_v \iff u = \pm v$$

**Demostració** 1. Observem que  $\Psi_u(i)^2 = \Psi_u(i)^2 \iff -1 = \Psi_u(i)^2$  i de la mateixa manera  $\Psi_u(j)^2 = \Psi_u(k)^2 = -1$ . Després  $\Psi_u(ij) = \Psi_u(k) = \Psi_u(-ji) \iff \Psi_u(i)\Psi_u(j) = \Psi_u(k) = -\Psi_u(j)\Psi_u(i)$  i de la mateixa manera obtenim

$$\begin{cases} \Psi_u(j)\Psi_u(k) = \Psi_u(i) = -\Psi_u(k)\Psi_u(j) \\ \Psi_u(k)\Psi_u(i) = \Psi_u(j) = -\Psi_u(i)\Psi_u(k) \end{cases}$$

I doncs deduem que  $(\Psi_u(i), \Psi_u(j), \Psi_u(k))$  és un BON  $\oplus$  de  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow (R_u(1, 0, 0), R_u(0, 1, 0), R_u(0, 0, 1))$  és un BON  $\oplus \Rightarrow \text{mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(R_u) \in SO(3)$ .

2 i 3 es dedueixen de la proposició anterior. ■

**Notació.** Des d'ara no distingirem entre  $R_u$  i  $\Psi_u$ .



En particular, obtenim un morfisme de grups:

$$\begin{aligned} R : (\mathbb{U}, \times) &\rightarrow (SO(3), \times) \\ u &\mapsto R_u (= \Psi_u \text{ via la identificació } \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^{pur}) \end{aligned}$$

Amb  $R_u(Q) = R_u(q) = uq\bar{u}$   
tal que  $R_{uv} = R_u \circ R_v$  i  $R_u = R_v \iff u = \pm v$ .  
Així podem identificar  $SO(3) \simeq \mathbb{U} \setminus \{\pm Id\} \simeq \mathbb{S}^3 \setminus \{\pm 1\}$ .

Ara veiem que  $R$  és exhaustiva i permet descriure qualsevol rotació.

**Teorema** Sigui  $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$  amb  $\|Q\| = 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
Definim  $u(Q, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q$ . Aleshores  $u(Q, \theta) \in \mathbb{U}$  i  $R_{u(Q, \theta)}$  és la rotació a  $\mathbb{R}^3$  d'un eix  $Q$  i un angle  $\theta$ . En particular, l'aplicació  $R$  és exhaustiva.

**Demostració**

$$\begin{aligned} N(u(Q, \theta)) &= u(Q, \theta) \overline{u(Q, \theta)} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} Q^2 \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Primer, comprovem que  $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$  és l'eix de la rotació  $R_{u(Q,\theta)}$ :

$$\begin{aligned} R_{u(Q,\theta)}(q) &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) Q (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Q) \\ &= \underbrace{(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q)(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Q)}_{=u(Q,\theta)\overline{u(Q,\theta)}} = Q \iff R_{u(Q,\theta)}(Q) = Q \end{aligned}$$

Ara comprovem que l'angle de la rotació  $R_{u(Q,\theta)}$  és  $\theta$ :

Per això triem  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow p_1, p_2 \in \mathbb{H}^{pur}$  tals que  $(P_1, P_2, Q)$  sigui BON  $\oplus$ . Com  $P_1, P_2, Q$  és BON  $\oplus$  calculem

$$\begin{aligned} R_{u(Q,\theta)}(P_1) &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) P_1 (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Q) \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) (\cos \frac{\theta}{2} P_1 - \sin \frac{\theta}{2} \underbrace{P_1 Q}_{=-Q P_1}) \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) (\cos \frac{\theta}{2} P_1 + \sin \frac{\theta}{2} Q) P_1 \\ &= (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} Q + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} Q + \sin^2 \frac{\theta}{2} Q) P_1 \\ &= (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) P_1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \underbrace{Q P_1}_{=P_2} \\ &= \cos \theta P_1 + \sin \theta P_2 \end{aligned}$$

Per tant, deduem que l'angle de  $R_{u(Q,\theta)}$  és  $\theta$ . ■



Podem comprovar que  $R_{u(Q,\theta)}(P_2) = -\sin \theta P_1 + \cos \theta P_2$ . Deduïm que

$$Mat(Q, P_1, P_2)(R_{u(Q,\theta)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

### 5.3 Interpolació de rotacions

Pregunta: Si tenim dos punts de vista sobre una situació: aquí tenim dos matrius  $A_0$  i  $A_1 \in SO(3)$ . Com podem passar d'un punt de vista (camera 0) a l'altre punt de vista (camera 1)?

De forma equivalent, busquem una família de matrius

$$\{A_t\}_{t \in [0,1]} \text{ tq } \begin{cases} A_0 = \overline{A_0} \\ A_1 = \overline{A_1} \\ (t \mapsto A_t \text{ es contiuina}) \end{cases} \quad \text{i } A_t \in SO(3) \forall t \in [0, 1]$$

Trobar la família  $\{A_t\}_{t \in [0,1]}$  se'n diu fer la interpolació entre  $\overline{A_0}$  i  $\overline{A_1}$ . Sabem inicialment que aquesta interpolació sempre existeix, i a més no és única.

Aquest problema es difícil, com busquem els 9 coeficients de  $A_t$  que han de satisfer les equacions següents:

$$\begin{cases} A_t^t A_t = I & (6 \text{ quadràtiques per simetria}) \\ \det A_t = 1 & (1 \text{ cúbica}) \end{cases}$$

Pero ho podem fer "fàcilment" fent servir els quaternions.

Com ho fem?

Primer representem  $\overline{A_0}$  i  $\overline{A_1} \in SO(3)$  amb quaternions unitaris:

$$\exists u, v \in \mathbb{U} \text{ tq } \overline{A_0} = R_u \text{ i } \overline{A_1} = R_v$$

Segui  $w \in Vect(u, v) \cap \mathbb{U}$  tal que

$$\begin{cases} \langle u, w \rangle = 0 \\ \langle v, w \rangle = 0 \end{cases}$$

$\exists \theta \in [0, \pi)$  tq  $v = \cos \theta u + \sin \theta w$

Aleshores obtenim que

$$\begin{aligned} q &:= v\overline{u} = (\cos \theta + \sin \theta w)\overline{u} \in \mathbb{U} \\ \iff q &= \cos \theta + \sin \theta w\overline{u} \\ \iff w &= \frac{v - \cos \theta u}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Finalment, posem  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $U_t := \cos t\theta u + \sin t\theta w \in \mathbb{U}$  i com  $u_0 = u$  i  $u_1 = v$ , deduïm que  $A_t := R_{U_t} (\forall t \in [0, 1])$  ens defineix una interpolació entre  $\overline{A_0}$  i  $\overline{A_1}$ .

Com trobar  $w$  i  $\theta$  en la pràctica?

Busquem  $\theta \in [0, \pi)$  i  $q \in \mathbb{U}$  tq  $v u^{-1} = \cos \theta + \sin \theta q$ .

Aleshores tenim el  $\theta$  buscat i obtenim

$$w = qu \left( = \frac{v - \cos \theta u}{\sin \theta} \right)$$

Ara expliquem que son els angles d'Euler.

**Teorema** Posem  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ R_j(\beta) := \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \\ R_k(\gamma) := \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Aquestes matrius generen totes les rotacions a l'espai:

$\forall A \in SO(3)$ ,  $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  anomenats angles d'Euler, tal que  
 $A = R_i(\alpha)R_j(\beta)R_k(\gamma)$