Apunts

La segona meitat del 1r curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Febrer - Juny 2024

Índex

Programació Orientada als Objectes

Càlcul en Diverses Variables

Definició: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Definició: Siguin $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definim $\underbrace{< (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) >}_{\text{(producte escalar)}} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ com a producte escalar.

Definició: $||(x_1, x_2, \dots, x_n)|| = +\sqrt{< x, x >}$ on $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Això és la distància del punt x a $(0, 0, \dots, 0)$.

Propietats de la norma:

1. $||x|| \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$
2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Desigualtat triangular: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz: $< x, y > \leq ||x||||y||$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Això ho acceptem.

Obs Observem que $-1 \leq \frac{<x,y>}{||x||||y||} \leq 1$ i definim l'angle entre els vectors x i y com l'angle α tal que $\cos\alpha = \frac{<x,y>}{||x||||y||}$, és a dir, $< x, y >= ||x||||y|| \cos\alpha$.

■ **Exemple** Trobem els valors de $\mathbb{R}^3 \perp (-1, -2, 1)$. Busquem $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ tal que $< (x_1, x_2, x_3), (-1, -2, 1) >= 0 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. ■

2.1 Boles a $\mathbb{R}^n$

Si $n = 2$ la bola de centre (x_0, y_0) i radi R és $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < R\} = \text{(disc)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0) < R^2\}$. Això és una bola oberta, denotada per

Notació. *Fem servir* $\mathfrak{B}_R(x_0, y_0, \dots)$ *la bola oberta* ($< R$) *i* $\overline{\mathfrak{B}_R}(x_0, y_0, \dots)$ *la tancada* ($\leq R$). *Es farà servir més la bola oberta.*

Definició: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$, definim $\mathring{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : R > 0 | \mathfrak{B}_R(\vec{x}) \subset A\}$

- **Exemple**
  1. $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y) : x > 0\}$
  2. $A = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y, z) : -a < x < a, -b < y < b, -c < z < c\}$

■

Definició: Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ es diu obert si $A = \mathring{A}$, és a dir, si tot punt del conjunt A és també un punt d'$\mathring{A}$.

Algorítmia i Combinatòria en Grafs. Mètodes Heurístics

Probabilitat

Càlcul Numèric