

En el meu cas, $B := 5$, ja que la unitat del meu NIU és 2.

1 Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

1.1 Considera l'espai vectorial \mathbb{R}^4 . Sigui $F = \langle (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0) \rangle$ i $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$.

Exercici 1: Trobeu una base de F i la dimensió de F . Comproveu que el vector $v = (2022, 2022, 0, 0)$ és de F i doneu les coordenades del vector v en la base triada de F .

Solució. Per trobar una base de F , posem el seu sistema generador en forma matricial i reduïm aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0))$ és una base de F , sent $\dim F = 3$. Comprovem que v és de F :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array} \right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector v és linealment dependent, per això pertany a F . A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de v respecte a la base abans calculada. És a dir, $v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0)$. v en coordenades de la base és $(2022, -2022, 2022, 0)$. \square

Exercici 2: És el vector de $F : (B, B, B-1, 0)$, combinació lineal dels vectors $(3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0)$. En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?).

Solució. Com ja hem calculat a l'anterior exercici, $(5, 5, 4, 0)$ no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector $(5, 5, 4, 0)$) no termina reduïda. \square

Exercici 3: Amplieu la base de F a una base de \mathbb{R}^4 .

Solució. Per ampliar la base de F a una base de \mathbb{R}^4 és trivial, ja que només cal posar el vector $(0, 0, 0, 1)$ per fer-la base de \mathbb{R}^4 . \square

Exercici 4: Comproveu que el vector $w = (3, 3, 3, 0)$ és de G . Trobeu una base de G . Doneu les coordenades del vector w respecte a la base de G triada.

Solució. Primer, calculem una base de G :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Nucli de } A}$

Llavors, una base de G és $((-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$. Ara, comprovem que w és de G :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & | & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & | & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & | & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors, com w és combinació lineal de les bases de G , $w \in G$. Per la base de G triada abans $w = 3(-2, 1, 0, 0) + 3(3, 0, 1, 0)$. Les coordenades de w a la base triada de G és $(3, 3, 0)$. \square

Exercici 5: Trobeu una base de $F + G$ i la dimensió de $F + G$. És $F \subseteq G$? Per què? És $F + G = \mathbb{R}^4$? Per què?

Solució. Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de G i la resta de F .

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -3 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Arribat aquest punt, ens podem adonar que l'única manera de fer la forma esglaonada reduïda de la matriu de les bases implica fer un intercanvi de files, de la 3 i la 4, això ens demostra que $F \not\subseteq G$. Una base de $F + G$ és $((1, -\frac{1}{2}, 0, 0), (0, 1, \frac{2}{3}, 0), (0, 0, \frac{4}{3}, 1), (0, 0, -\frac{4}{3}, 0))$, i per allò, $\dim(F + G) = 4$. Com la dimensió és 4, si o si ha de generar un subespai de dimensió 4 de \mathbb{R}^4 . L'únic subespai possible és el mateix \mathbb{R}^4 . \square

Exercici 6: Trobeu una base de $F \cap G$ i la dimensió de $F \cap G$.

Solució. Aprofitant els càlculs que he fet a l'anterior exercici amb la matriu ampliada, una base de $F \cap G$ és $((-3, -\frac{5}{3}, 0, 1), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4}))$. Això implica que $\dim(F \cap G) = 2$. Va en concordança amb el resultat trobat amb $\dim(F \cap G) = \dim(F + G) - (\dim(F) + \dim(G))$ \square

1.2 Considera un subespai vectorial $H := \langle 1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} \rangle$ de les funcions contínues de domini \mathbb{R} de funcions reals en una variable.

Exercici 7: Proveu que $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H .

Solució. El subespai H està generat per $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$. Com no són linealment dependents, per definició, $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H . \square

Exercici 8: Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' := \langle B + B \sin(x) + (B - 1) \cos(x), 3 + 2 \sin(x) + \cos(x), 1 + 2 \sin(x) + 3 \cos(x), 4 + 3 \sin(x) + 2 \cos(x) \rangle$$

$$G' := \{a1 + b \sin(x) + c \cos(x) + d e^{2x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c + d = 0\}$$

- Proveu que F', G' són subespais vectorials de H .
- Trobeu una base i dimensió de $F', G', F' + G'$ i $F' \cap G'$

Solució. Primer de tot, provem que F' i G' són subespais vectorials de H :

- Posem la base de H i els vectors generadors de F' en una matriu:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 + 5 \sin(x) + 4 \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 + 2 \sin(x) + \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + 2 \sin(x) + 3 \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 + 3 \sin(x) + 2 \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Com podem veure, els vectors generadors de F' desapareixen en reduir la matriu, per això F' és un subespai de H .

- Per G' , si tenim en compte que $a1+b\sin(x)+c\cos(x)+de^{2x} = (a,b,c,d)(1,\sin,\cos,e^{2x})^t$. Sabem que, independentment del valor de (a,b,c,d) , els vectors de G' seran combinació lineal de la base de H . Per allò, G' és un subespai de H .

Fixem la base $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$. F' està llavors generat per $< (5, 5, 4, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) >$ en coordenades de la base abans esmentada (això està calculat indirectament a l'ampliada en fer la reducció. Com a petita observació, aquests vectors són els mateixos que generen F a l'apartat a, per això no tornaré a fer certs càlculs). G' en les coordenades ja dites serà el càlcul del nucli següent:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sent el nucli $((-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$, aquest nucli és la base de G' en coordenades abans dites. Llavors, $\dim(F') = 3$ i $\dim(G') = 3$. \square

2 Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.

2.1 Considera l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (Bx + y + z, x - y + z, x + y + z)$$

Exercici 9: Calcula la matriu A associada a $f = T_A$ en les bases canòniques. I calculeu $f(1, 2, 3)$ i l'antiimatge de $(1, 0, 0)$, és a dir $f^{-1}(1, 0, 0)$.

Solució. Dummy0 \square

Exercici 10: Calculeu una base i dimensió del nucli de f i la imatge de f .

Solució. Dummy0 \square

Exercici 11: Decidiu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Dummy1 \square

Exercici 12: Calculeu l'aplicació lineal $f \circ f$.

Solució. Dummy0

□

Exercici 13: Considera la base de \mathbb{R}^3 : $Bgotica = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$. Calcula la matriu associada a f amb bases d'inici i sortida $Bgotica$, és a dir calculeu $M(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)$.

Solució. Dummy0

□

Exercici 14: Trobeu una matriu invertible P , on $A = PM(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)P^{-1}$. La matriu P és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina alta base és?

Solució. Dummy0

□

2.2 Sigui $\mathbb{R}[x]_2$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≥ 2 . Considera l'aplicació $g : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ definida per

$$g(a + bx + cx^2) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Exercici 15: Justifiqueu perquè g és una aplicació lineal.

Solució. Dummy0

□

Exercici 16: Fixeu la base $Can := (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_2$. Calculeu la matriu $A = M(Can \xleftarrow{g} Can)$. Calculeu $g(3 + 2x + x^2)$ i $g^{-1}(x)$, directament i usant la matriu A .

Solució. Dummy0

□

Exercici 17: Decidiu si g és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

Solució. Dummy0

□

Exercici 18: Proveu que $Bgoticab = (1 + x + x^2, x + x^2, x)$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$. I calculeu la matriu $M(Bgoticab \xleftarrow{g} Bgoticab)$.

Solució. Dummy0

□