1 Rotacions

1.1 L'espai euclidià estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb $\mathbb{R}^3$.

Notació. *En l'espai euclidià tenim l'origen a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i un punt arbitrari* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tècnicament.*

Definició: La norma euclidiana d'un vector $V \in \mathbb{R}$ es defineix com

$$\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$$

que compleix $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \, \|V\|$
- $\|V\| = 0 \iff V = 0$

Aquesta norma mesura la distància euclidiana entre dos punts P_1 i P_2 per la fórmula

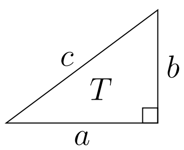
$$\mathcal{D}(P_1, P_2) := \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

que compleix les seguents propietats

- $\mathcal{D}(P_1, P_3) \leq \mathcal{D}(P_1, P_2) + \mathcal{D}(P_2, P_3)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

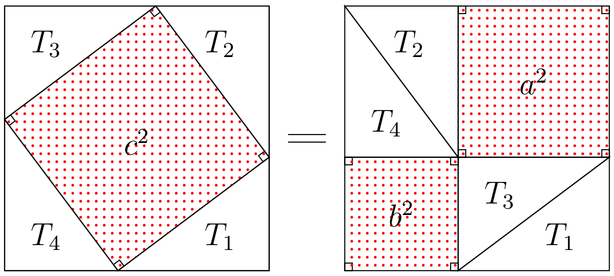
Observació: La norma euclidiana d'un vector V correspon exactament a la seva longitud.

Demostracio Recordem el teorema de Pitàgores.

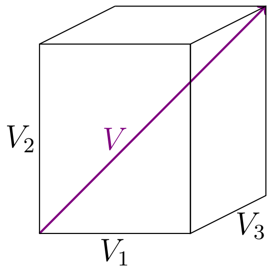


$$a^2 + b^2 = c^2$$

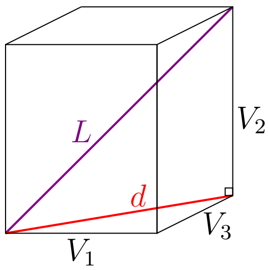
Com



Aleshores, veiem que $\|V\|$ és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que

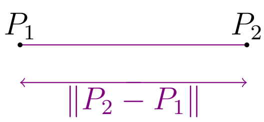


$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} d^2 = V_1^2 + V_2^2 \\ L^2 = d^2 + V_3^2 \end{cases} \Rightarrow L^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \|V\|^2$$

Com la norma d'un vector $V \in \mathbb{R}^3$ correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a $\mathbb{R}^3$ correspon a la longitud del segment que uneix aquests punts:



Si tenim P_1 i P_2 punts que defineixen un segment, la longitud $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$

Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! ■

Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longituds conté la noció d'ortogonalitat:

Definició: Anomenem producte escalar a $\mathbb{R}^3$ la funció
$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(V, W) \mapsto \langle V, W\rangle = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$ que és

- Bilineal: $\left\langle V + \lambda\bar{V}, W\right\rangle = \langle V, W\rangle + \lambda \left\langle \bar{V}, W\right\rangle$ ídem si $V \leftrightsquigarrow W$
- Simètrica: $\langle V, W\rangle = \langle W, V\rangle$
- Definit positiu: $\langle V, V\rangle > 0$ si $V \neq 0$

Observem que $\forall V \in \mathbb{R}^3,\ \|V\| = \sqrt{\langle V, V\rangle}$: la norma es pot definir en funció del producte escalar.
Recíprocament, veiem fàcilment la Identitat de Polarització

$$\langle V, W\rangle = \frac{1}{2}\left(\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2\right) \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

Exercici Arribar a la Identitat de Polarització a partir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \, \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

Demostracio Fixem $V, W \in \mathbb{R}^3$ qualsevol. Aleshores definim $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$
Observem que $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W\rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W\rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow$ $\mathcal{P}$ és un polinomi en λ de grau 2. Llavors $\Delta = 4\left(\langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2\right)$ ha de ser ≤ 0, ja que $\mathcal{P} \geq 0$.
Deduïm que $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$
Si $\Delta = 0$ això implica que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$, aleshores $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$ ■

Com a conseqüència, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W\rangle}{\|V\| \, \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \, \|W\|)$$

Definició: L'únic $\theta \in [0, \pi] : \cos\theta = \frac{\langle V,W \rangle}{\|V\|\|W\|}$ s'anomena angle euclidià entre V i W.

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.
Si $V = (1, 0, 0)$ i $W = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ obtenim que $\cos\theta = \frac{\langle V,W \rangle}{\|V\|\|W\|} = \frac{\cos\alpha}{1\times 1} = \cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

Definició: Diem que V i W són ortogonals si $\langle V, W \rangle = 0$ o, de forma equivalent, si l'angle entre V i W és $\frac{\pi}{2}$.

Notació:. *Denotem dos vectors ortogonals entre si com* $V \perp W$

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si $\langle U, V \rangle = \langle V, W \rangle = \langle U, W \rangle = 0$, És base ortonormal, si és base ortogonal i a més $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

$\mathbb{R}^3$ admet una estructura addicional que permet multiplicar dos vectors:

Definició: $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \begin{pmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat: $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$ ídem a la dreta.
- Antisimètria: $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem fàcilment que $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ $\langle V \wedge W, V \rangle = 0 = \langle V \wedge W, W \rangle$ Més enllà
Proposició $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3, \langle U, V \wedge W \rangle = \det(U, V, W)$

1.2 Moviments rígids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista $\neq$ (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d'un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.
Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preserven un objecte (s'anomenen moviments rígids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.
Comencem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

Definició: El grup ortogonal és el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \langle MV, MW \rangle = \langle V, W \rangle \, \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Observació: Si $M \in O(3)$ i $V \in \mathbb{R}^3$, $\|MV\| = \|V\|$
Si $M \in O(3)$ i $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle MV, MW \rangle = V^t M^t M W$ per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^t M = \mathbb{I}_3 \right\}$$

Proposició Si $M \in O(3)$, llavors $\det(M) = \pm 1$

Definició: Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{ M \in O(3) | \det M = 1 \}$$

Per construcció els elements de $SO(3)$ són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament, (Me_1, Me_2, Me_3) compleix

1. (Me_1, Me_2, Me_3) és una base ortogonal
2. $\det(Me_1, Me_2, Me_3) = \det M = 1$ i doncs $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un exemple de $M \in O(3) \setminus SO(3)$ és la matriu $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Aquestes transformacions de $O(3) \setminus SO(3)$ canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial èmfasi en el subgrup $SO(3)$!
Observació: $O(3)$ i $SO(3)$ són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si $M, N \in O(3)$ (o $SO(3)$), $MN \in O(3)$.
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$.
- Si $M \in O(3)$, aleshores M és invertible i $M^{-1} \in O(3)$.

Més generalment,

Definició: Un conjunt G és un grup Si

- $\exists$ operació interna $\cdot : G \cdot G \to G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (element neutre)
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e$ (inversa)

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació que preserva les distàncies $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ Aleshores $\exists P_o \in \mathbb{R}^3,\ M \in O(3)$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

Definició: Si a més f preserva l'orientació, obtenim que $M \in SO(3)$. Un tal f s'anomena moviment rígid i correspon al fet de desplaçar un objecte a $\mathbb{R}^3$ (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups $O(3)$ i $SO(3)$, i observar que el subgrup $SO(3)$ està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidià de dimensió n (on $n \in \mathbb{N}$), és a dir, treballem a $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar $\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^{n} V_i W_i\ \forall V, W \in \mathbb{R}^n$ podem definir $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$ i $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$
Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$:
  $M = (a) \in O(1) \iff M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \iff (a^2) = 1$
  $\iff a = \pm 1 \iff M = \pm \mathbb{I}_1$
  Deduïm que $O(1) = \{\pm \mathbb{I}_1\}$ i $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$
- $n = 2$

  Proposició Sigui $M \in O(2)$. $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

  Això genera una rotació d'angle θ en el primer cas i en el segon una simetria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle θ.

Observació: En particular, si $M \in SO(2)$, $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$

  Proposició Sigui $M \in O(3)$. Aleshores $\exists B \in SO(3), \exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  Geomètricament, això significa que si $M = \mathcal{M}_{Can}(L)$, $\exists \mathcal{B} = (U, V, W)$ i $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $B = P_{Can \to \mathcal{B}}$ i $BMB^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(L) = \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$

  Com $B \in SO(3)$, vol dir que la base $\mathcal{B}$ és base ortonormal positiva (és a dir, té la mateixa orientació que la base canònica $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 1$)

  - Cas on $\pm 1 = 1$:

    $$\begin{aligned} U &= L(U) \\ L(V) &= \cos\theta V + \sin\theta W \\ L(W) &= -\sin\theta V + \cos\theta W \end{aligned}$$

    Llavors L és una rotació d'eix U i d'angle θ.

  - Cas on $\pm 1 = -1$:

    $$\begin{aligned} U &= -L(U) \\ L(V) &= \cos\theta V - \sin\theta W \\ L(W) &= \sin\theta V + \cos\theta W \end{aligned}$$

    L és la composició d'una simetria $\perp$ al pla $U^\perp = Vect(V, W)$ i de la rotació d'angle θ i eix U

Teorema (de les rotacions d'Euler) Sigui $M \in SO(3)$. Llavors $\exists B \in SO(3)$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Per això, $SO(3)$ rep el nom de grup de les rotacions.
En particular, i no és gens evident, si componem dues rotacions a l'espai, obtenim una tercera.

Cas particular: Si $U = U'$, $R_{\theta_1,U'} \circ R_{\theta_2,U} = R_{\theta,U}$. Això és evident, però $R_{\theta_1,U} \circ R_{\theta_2,V} = R_{\theta,W}$ i és molt difícil obtenir θ i W.

1.4 Representació de $SO(3)$ via l'espai projectiu

Associem a cada punt $p \neq 0$ de la bola B de radi π la rotació d'eix $\frac{p}{\|p\|}$ d'angle $\|p\|$ i a $p = 0$ associem la rotació Identitat $\mathbb{I}_3$.
Com $\forall p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|p\| = \pi$ ($\Leftrightarrow p \in \partial B$), tenim que $R_{\frac{p}{\pi},\pi} = R_{\frac{-p}{\pi},\pi}$, en tenim prou amb B per representar $SO(3)$.
Acabem de definir una aplicació

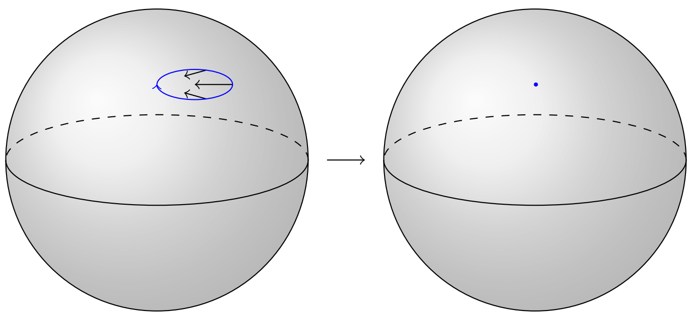
$$\begin{aligned} \Omega : B \left(= B^3(0,\pi)\right) &\longrightarrow SO(3) \\ p &\longmapsto R_{\frac{p}{\|p\|},\|p\|} \end{aligned}$$

Injectiva? No, perquè $\Omega((0,0,\pi)) = \Omega(0,0,-\pi)$.
Però ho és quasi: $\forall p, q$ tal que $\|p\| < \pi$ i $\|q\| < \pi$, tenim que $\Omega(p) \neq \Omega(q)$.
A més si $\|p\| = \|q\| = \pi$, $\Omega(p) = -\Omega(q)$.
Exaustiva? Sí.
Al final, si enganxem els parells de punts antipodals (parells de la forma $(p,-p)$ amb $\|p\| = \pi \iff p \in \partial B$) obtenim un espai quocient que representa rotacions:

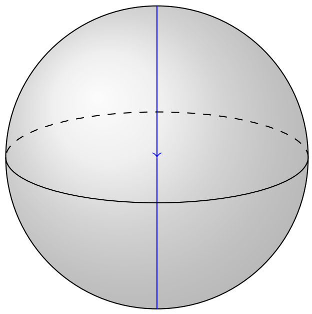
$$SO(3) = B \Big/ \{p = -p \text{ si } p \in \partial B\}$$

Aquest espai s'anomena espai projectiu de dim 3 i es denota $\mathbb{R}P^3$.

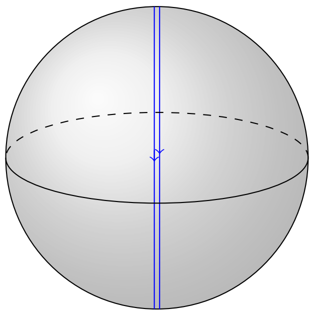
Observació: Existeixen corbes tancades a B^3 que es poden contractar en un punt.



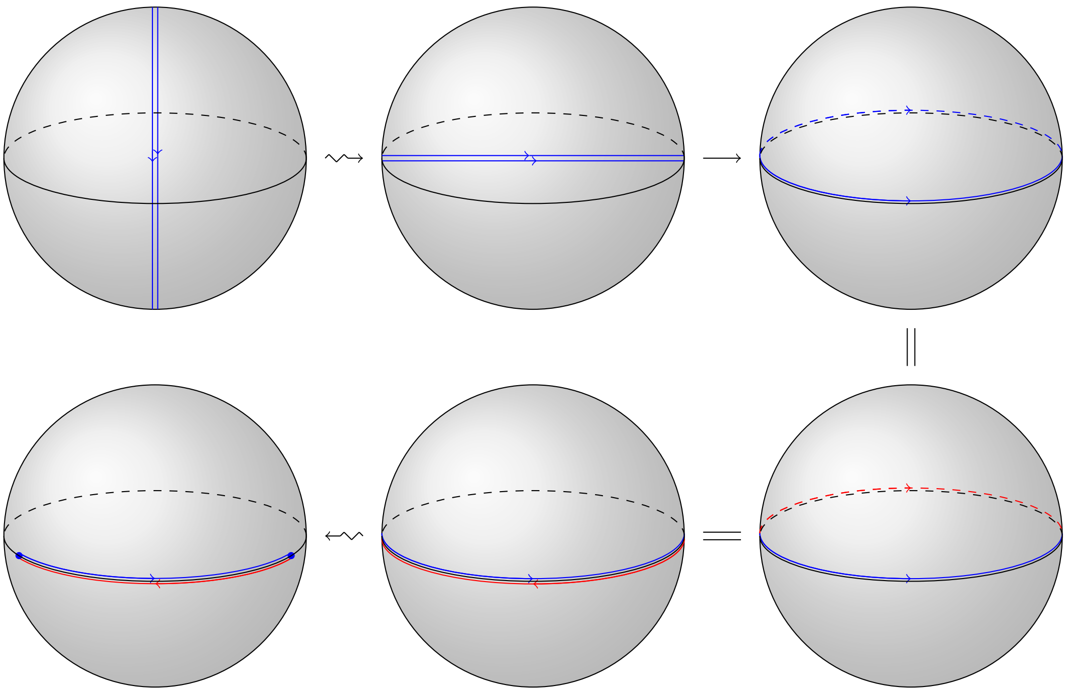
Observació: Existeixen corbes que no es poden contractar en un punt.



Observació: Existeixen dobles corbes que si es poden contractar en un punt.



Expliquem aquesta última observació:



2 Els quaternions

En aquest nou capítol, denotarem la base ortonormal estandard (e_1, e_2, e_3) a $\mathbb{R}^3$ com (i, j, k).
Es a dir, que $i = e_1$, $j = e_2$ i $k = e_3$.

2.1 Definició i primeres propietats:

Definició: Un quaternió q és la suma (formal) d'un escalar $q_0 \in \mathbb{R}$ i d'un vector $Q := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. És a dir, que $q = q_0 + Q$. Farem servir $\mathbb{H}$ (de Hamilton) per el conjunt dels quaternions que es pot identificar a $\mathbb{R}^4$ via l'identificació:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k &\longmapsto (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

Denotarem també que $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$.
Donats dos quaternions $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ i $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim:

- La suma de quaternions com $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \in \mathbb{H}$
- El producte per un escalar com $\lambda p = \lambda p_0 + \lambda p_1 i + \lambda p_2 j + \lambda p_3 k \in \mathbb{H}$
- El producte de quaternions com $pq = \underbrace{p_0 q_0 - \langle P, Q \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p_0 Q + q_0 P + P \wedge Q}_{\in \mathbb{R}^3}$

$$pq \in \mathbb{H}$$

Observació: $\forall p, q \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} pq - qp &= (p_0 q_0 - \langle P, Q \rangle) + (p_0 Q + q_0 P + P \wedge Q) \\ &\quad - (q_0 p_0 - \langle Q, P \rangle) - (q_0 P + p_0 Q + Q \wedge P) \\ &= 2 \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

Observació:

$$\begin{aligned} i^2 &= ii \\ &= (0+1i+0j+0k)(0+1i+0j+0k) \\ &= pq \text{ amb } p_0 = q_0 = 0, p_1 = q_1 = 1, p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = 0 \\ &= 0 - \langle P, Q\rangle + P \wedge Q \\ &= 0 - 1 + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $j^2 = k^2 = -1$.

Observació:

$$\begin{aligned} ij &= (0+1i+0j+0k)(0+0i+1j+0k) \\ &= 0 - \langle P, Q\rangle + P \wedge Q \\ &= 0 - 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= k \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ i $ki = j = -ik$.

Al final, hem obtingut les regles de Hamilton, fonamentals per calcular amb quaternions:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{cases}$$

En particular, veiem que $\mathbb{H}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 4, amb base $(1, i, j, k)$ amb producte que no és conmutatiu: $ij \neq ji$!

En canvi:

Proposició El producte sobre $\mathbb{H}$ és associatiu i distributiu respecte l'addicció.

Observació: $1q = q$ i $0q = 0$

2.2 Conjugació, norma i invers

Definició: Siguin $q = q_0 + \underbrace{q_1 i + q_2 j + q_3 k}_{Q} \in \mathbb{H}$. Definim el conjugat de q com

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k = q_0 - Q$$

Direm que q és:

- $\underline{\text{(quaternió) real}}$ si $q = \overline{q} \iff Q = 0 \iff q = q_0$
- $\underline{\text{(quaternió) imaginari pur}}$ si $q = -\overline{q} \iff q_0 = 0 \iff q = Q$

Denotem $\mathbb{R} = \{q \in \mathbb{H} \mid\mid \overline{q} = q\} \subset \mathbb{H}$ el subconjunt de reals.

Exercici Demostrar que $q \in \mathbb{R} \iff pq = qp,\ \forall p \in \mathbb{H}$ ■

Denotarem $\mathbb{H}^{\text{pur}} = \{q \in \mathbb{H} \mid \overline{q} = -q\} \subset \mathbb{H}$ el subconjunt de quaternions imaginaris purs.

Proposició $\forall p, q \in \mathbb{H},\ \overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$ i $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$

Demostracio El primer punt és evident. Pel segon, ja n'hi ha prou donada la distribuitivitat de verificar-ho per i, j, k i per exemple:

$$\begin{cases} \overline{ij} = \overline{k} = -k \\ \overline{j}\,\overline{i} = -j(-i) = ji = -k \end{cases}$$

■

Definició: Sigui $q \in \mathbb{H}$. Definim la seva norma $N(q) \in \mathbb{R}_+$ per la fòrmula:

$$N(q) = \sqrt{q\overline{q}} \in \mathbb{R}$$

Observació: $\overline{q\overline{q}} = \overline{\overline{q}}\,\overline{q} = q\overline{q} \Rightarrow q\overline{q} \in \mathbb{R}$ i a més

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= q_0^2 - \langle Q, -Q \rangle + \underbrace{q_0\,(-Q) + q_0\,(Q)}_{=0} + \underbrace{Q \wedge (-Q)}_{=0} \\ &= q_0^2 + \langle Q, Q \rangle \end{aligned}$$

es a dir $q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \in \mathbb{R}_+$
En particular, $N(q) \geq 0$ i $N(q) = 0 \iff q = 0$.
Observació: $N(q)$ coincideix amb la norma euclidiana a $\mathbb{R}^4$ per la identificació

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\simeq \mathbb{R}^4 \\ 1 &\leftrightarrow e_1 \\ i &\leftrightarrow e_2 \\ j &\leftrightarrow e_3 \\ k &\leftrightarrow e_4 \end{aligned}$$

Proposició La norma $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_+$ es multiplicativa, és a dir, $N(pq) = N(p)N(q)\ \forall p, q \in \mathbb{H}$.

Demostracio

$$N^2(pq) = pq\overline{pq} = \overline{q}\underbrace{\overline{p}p}_{N^2(p)}q = \underbrace{q}\ N^2(p)q = N^2(p)N^2(q)$$

■

Observació: Denotem

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \{q \in \mathbb{H} \text{ tal que } q_2 = q_3 = 0\} \\ &= \{q_0 + q_1 i | q_0, q_1 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Obeeix que $\mathbb{C}$ és estable per la multiplicació. Tenim llavors que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset (\mathbb{H}, +, \times)$

Definició: Sigui $q \in \mathbb{H}$ i $q \neq 0$, aleshores, la inversa de q, $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)^2}$ que compleix $q^{-1}q = 1$ i $qq^{-1} = 1$.

Teorema $\mathbb{H}$ és un cos (com $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$).

Demostracio

- La suma i la multiplicació són associatives.
- La suma és commutativa.
- Existeix element neutre per la suma i per la multiplicació (0 i 1, respectivament).
- Distribució de multiplicació relativa a suma.
- Tot element admet un invers per la suma ($q + (-q) = 0$).
- Tot element no nul admet un invers per la multiplicació ($qq^{-1} = 1$).

■

Notació. *Si $q \in \mathbb{H}$, Re $q := \frac{1}{2}(q + \overline{q}) \in \mathbb{R}$ i Im $q := \frac{1}{2}(q - \overline{q}) \in \mathbb{H}^{pur}$.*

2.3 Quaternions unitaris

Definició: Un quaternió $u \in \mathbb{H}$ és unitari si satisfà $N(u) = 1$. Denotarem $\mathbb{H}^* = \{q \in \mathbb{H} | N(q) = 1\}$ el conjunt dels quaternions unitaris. Denotarem $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{H} \| N(u) = 1\}$ el subconjunt dels quaternions unitaris.

Aquest subconjunt té les següents propietats:

Proposició

1. $\forall u, v \in \mathbb{U},\ u^{-1} = \overline{u}$ i $uv \in \mathbb{U}$ i en particular, $(\mathbb{U}, \times)$ satisfà les propietats d'un grup.

2. $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$

Demostracio 1. $\forall u \in \mathbb{U}\ u^-1 = \overline{u}$ ja que $N(u) = 1$, aleshores $N(\overline{u}) = N(\overline{u})N(u) = N(u\overline{u}) = 1 \Rightarrow u^{-1} \in \mathbb{U}$

2. Si $u \in \mathbb{R}\ u = u_0$ amb $u_0 \in \mathbb{R}$ i $N^2(u) = u_0^2 = 1 \Rightarrow u = u_0 = \pm 1$

■

Observació: Podem escriure $\mathbb{U} = \{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k | (q_0, q_1, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4$ i $q_0^2 + q_1^2 + q_3^2 + q_4^2\}$, i observem que

$$\mathbb{H} \xleftrightarrow{\sim} R^4$$
$$\breve{\mathbb{U}} \xleftrightarrow{\sim} \breve{S}^3$$

$\mathbb{U}$ s'identifica amb l'esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$

Recordem que $\mathbb{H}^{pur} = \{q \in \mathbb{H} | \overline{q} = -q\}$ i per això podem identificar $\mathbb{H}^{pur}$

$$= \{q \in \mathbb{H} | Re\ q = 0\}$$
$$= \left\{Q | Q \in \mathbb{R}^3\right\}$$

amb $\mathbb{R}^3$ via l'aplicació

$$\mathbb{H}^{pur} \to \mathbb{R}^3$$
$$q = Q = q_1 i + q_2 j + q_3 k \mapsto Q = (q_1, q_2, q_3)$$

Proposició Si $q = Q \in \mathbb{H}^{pur},\ q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$

Demostracio Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur},\ pq = -\langle P, Q\rangle + P \wedge Q$ com $p_0 = q_0 = 1$ i en particular

$$q^2 = -\langle Q, Q\rangle = -\|Q\|^2 = -N^2(q)$$

■

Observació: Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur},\ pq - qp = 2P \wedge Q$

Teorema Siguin $p, q, r \in \mathbb{H}^{pur}$ i denotem els vectors corresponents per $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$. Aleshores

$$(P, Q, R) \text{ BON } \oplus \text{ a } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = q^2 = r^2 = -1 \\ pq = r = -qp \\ qr = p = -rq \\ rp = q = -pr \end{cases}$$

Observació: (i, j, k) compleixen aquestes formules! No es sorpresa ja que (i, j, k) és un BON $\oplus$ a $\mathbb{R}^3$.

Demostracio ($\Leftarrow$) Recordem que si $q \in \mathbb{H}^{pur}$, $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$ i per tant P, Q, R són de norma euclidiana $= 1$

Lema: Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, i $P, Q \in \mathbb{R}^3$ són els vectors associats aleshores

$$\begin{cases} Re\,(pq) & = -\langle P, Q\rangle \\ Im\,(pq) & = P \wedge Q \end{cases}$$

Demostracio $pq = p_0q_0 - \langle P, Q\rangle + p_0Q + q_0P + P \wedge Q = -\langle P, Q\rangle + P \wedge Q$ ja que $p_0 = q_0 = 0$ ■

Ara bé, $P \wedge Q = pq = r = R$ i $\langle P, Q\rangle = -Re(pq) = -Re(r) = 0$ doncs (P, Q, R) BON directe. ($\Rightarrow$) Si (P, Q, R) és BON $\oplus$, $\|P\| = 1 = -p^2$ i idem per Q i R. Aleshores $pq = -\underbrace{\langle P, Q\rangle}_{=0} + P \wedge Q = R = r$ i idem per qr i rp. ■

2.4 Quaternions i Rotacions

Sigui $u \in \mathbb{U}$, considerem l'aplicació $\Phi_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$
$q \mapsto uq\overline{u}$

Proposició $\forall p, q \in \mathbb{H}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. Φ_u és lineal: $\Phi_u(p + \lambda q) = \Phi_u(p) + \lambda\Phi_u(q)$
2. Φ_u és multiplicativa: $\Phi_u(pq) = \Phi_u(p)\Phi_u(q)$
3. $\overline{\Phi_u(p)} = \Phi_u(\overline{p})$
4. $Re(\Phi_u(p)) = Re(p)$, en general $Im(\Phi_u(p)) \neq Im(p)$
5. Φ_u preserva la norma: $N(\Phi_u(p)) = N(p)$

Demostracio 1 i 2 son clares.

3. $\overline{uq\overline{u}} = \overline{\overline{u}}\overline{q}\overline{u} = u\overline{q}\overline{u}$

4. $Re(q) := \frac{1}{2}(q+\overline{q}) \rightsquigarrow Re(\Phi_u(p)) = \dfrac{1}{2}(\Phi_u(p) + \overline{\Phi_u(p)}) = \dfrac{1}{2}(\Phi_u(p) + \Phi_u\overline{p})$
$= \Phi_u(Rep) = Re(p\Phi_u(1))$
$= Re(p)$

5. $N(\Phi_u(p)) = \sqrt{up\overline{u}\overline{up\overline{u}}} = \sqrt{up\overline{p}\overline{u}} = N(p)$

■

A més:

Proposició $\forall u, v \in \mathbb{U}$

- $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}} \iff u = \pm 1$
- $\forall u, v \in \mathbb{U}, \Phi_{uv} = \Phi_u \circ \Phi_v$ i Φ_u és invertible, amb $\Phi_u^{-1} = \Phi_{\overline{u}}$
- $\Phi_u = \Phi_v \iff u = \pm v$

Demostracio 1. Si $u = \pm 1$ aleshores $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$ Reciprocament, si $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$ aleshores $\forall q \in \mathbb{H},\ uq\overline{u} = q \iff u\overline{q} = qu$

> **Lema:** Si $p \in \mathbb{H}$, tal que $\forall q \in \mathbb{H}, pq = qp$ aleshores $p \in \mathbb{R}$.

Demostracio Escribim $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$. En particular,

$$\begin{aligned} pi = ip &\iff p_0 i - p_1 - p_2 k - p_3 j = p_0 i - p_1 + p_2 k + p_3 j \\ &\iff 2p_2 k + 2p_3 j = 0 \\ &\iff p_2 = p_3 = 0 \iff p = p_0 + p_1 i \end{aligned}$$

i la relació $pj = jp \iff p_1 = 0$. Al final $p = p_0 \in \mathbb{R}$. ■

Doncs $u \in \mathbb{R} \cap \mathbb{U}\{\pm 1\}$.

2. $\Phi_u(\Phi_v(p)) = uvp\overline{v}\overline{u} = uvp\overline{uv} = \Phi_{uv}(p)$ Ara bè, $\forall u \in \mathbb{U},\ \Phi_u \circ \Phi_{\overline{u}} = \Phi_{u\overline{u}} = \Phi_1 = Id_{\mathbb{H}} \Rightarrow \Phi_u^{-1} = \Phi_{\overline{u}}$

3. $\Phi_u = \Phi_v \Rightarrow \Phi_u \circ \Phi_{v^{-1}} = Id_{\mathbb{H}}$

■

Ara denotarem $\begin{aligned} \Psi_u : \mathbb{H}^{pur} &\to \mathbb{H}^{pur} \\ q &\mapsto uq\overline{u} \end{aligned}$ la restricció de Φ_u als quaternions imaginaris purs.

Si identifiquem $\begin{aligned} \mathbb{H}^{pur} &\simeq \mathbb{R}^3 \\ p_1 i + p_2 j + p_3 k &\mapsto (p_1, p_2, p_3) \end{aligned}$, obtenim una aplicació induïda $R_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit per $R_u(p_1, p_2, p_3) = \Psi_u(p_1 i + p_2 j + p_3 k)$

Les dues proposicions anteriors impliquen el següent:

- R_u és lineal $\forall p, q \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- R_u és invertible
- De fet, R_u serà una rotació.

Teorema $u, v \in \mathbb{U}$, aleshores

1. $R_u \in SO(3)$ (és a dir, R_u és una rotació)
2. $R_u \circ R_v = R_{uv}$ i $R_u^{-1} = R_{\overline{u}}$
3. $R_u = R_v \iff u = \pm v$

Demostracio 1. Observem que $\Psi_u(i^2) = \Psi_u(i)^2 \iff -1 = \Psi_u(i)^2$ i de la mateixa manera $\Psi_u(j)^2 = \Psi_u(k)^2 = -1$. Després $\Psi_u(ij) = \Psi_u(k) = \Psi_u(-ji) \iff \Psi_u(i)\Psi_u(j) = \Psi_u(k) = -\Psi_u(j)\Psi_u(i)$ i de la mateixa manera obtenim

$$\begin{cases} \Psi_u(j)\Psi_u(k) = \Psi_u(i) = -\Psi_u(k)\Psi_u(j) \\ \Psi_u(k)\Psi_u(i) = \Psi_u(j) = -\Psi_u(i)\Psi_u(k) \end{cases}$$

I doncs deduim que $(\Psi_u(i), \Psi_u(j), \Psi_u(k))$ és un BON $\oplus$ de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow (R_u(1,0,0), R_u(0,1,0), R_u(0,0,1))$ és un BON $\oplus \Rightarrow mat_{(e_1,e_2,e_3)}(R_u) \in SO(3)$.

2 i 3 es dedueixen de la proposició anterior. ∎

Notació. *Des d'ara no distingirem entre R_u i Ψ_u.*

Observació: En particular, obtenim un morfisme de grups:

$$\begin{aligned} R : (\mathbb{U}, \times) &\to (SO(3), \times) \\ u &\mapsto R_u (= \Psi_u \text{ via la identificació} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^{pur}) \end{aligned}$$

Amb $R_u(Q) = R_u(q) = uq\overline{u}$
tal que $R_{uv} = R_u \circ R_v$ i $R_u = R_v \iff u = \pm v$.
Aixi podem identificar $SO(3) \simeq \mathbb{U}\{/_{\pm}Id\} \simeq \mathbb{S}^3\{/_{\pm}1\}$.
Ara veiem que R és exhaustiva i permet descriure qualsevol rotació.

Teorema Sigui $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ amb $\|Q\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Definim $u(Q,\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q$. Aleshores $u(Q,\theta) \in \mathbb{U}$ i $R_{u(Q,\theta)}$ és la rotació a $\mathbb{R}^3$ d'un eix Q i un angle θ. En particular, l'aplicació R és exhaustiva.

Demostracio

$$\begin{aligned} N(u(Q,\theta)) &= u(Q,\theta)\overline{u(Q,\theta)} \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}Q^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Primer, comprovem que $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$ és l'eix de la rotació $R_{u(Q,\theta)}$:

$$\begin{aligned}R_{u(Q,\theta)}(q) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)Q(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}Q)\\ &= \underbrace{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}Q)}_{=u(Q,\theta)\overline{u(Q,\theta)}} \quad = Q \iff R_{u(Q,\theta)}(Q) = Q\end{aligned}$$

Ara comprovem que l'angle de la rotació $R_{u(Q,\theta)}$ és θ:
Per això triem $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow p_1, p_2 \in \mathbb{H}^{pur}$ tals que (P_1, P_2, Q) sigui BON $\oplus$.
Com P_1, P_2, Q és BON $\oplus$ calculem

$$\begin{aligned}R_{u(Q,\theta)}(P_1) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)P_1(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}Q)\\ &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)(\cos\frac{\theta}{2}P_1 - \sin\frac{\theta}{2}\underbrace{P_1Q}_{=-QP_1})\\ &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)(\cos\frac{\theta}{2}P_1 + \sin\frac{\theta}{2}Q)P_1\\ &= (\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Q + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Q + \sin^2\frac{\theta}{2}Q)P_1\\ &= (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})P_1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{QP_1}_{=P_2}\\ &= \cos\theta P_1 + \sin\theta P_2\end{aligned}$$

Per tant, deduim que l'angle de $R_{u(Q,\theta)}$ és θ. ∎

Observació: Podem comprovar que $R_{u(Q,\theta)(P_2)=-\sin\theta}P_1 + \cos\theta P_2$. Deduïm que

$$Mat_(Q, P_1, P_2)(R_{u(Q,\theta)}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

3 Interpolació de rotacions

Pregunta: Si tenim dos punts de vista sobre una situació: aquí tenim dos matrius A_0 i $A_1 \in SO(3)$. Com podem pasar d'un punt de vista (camera 0) a l'altre punt de vista (camera 1)?
De forma equivalent, busquem una familia de matrius

$$\{A_t\}_{t\in[0,1]}\ tq \begin{cases}A_0 = \overline{A_0}\\ A_1 = \overline{A_1}\\ (t \mapsto A_t \text{ es contiuna})\end{cases} \qquad \text{i } A_t \in SO(3)\ \forall t \in [0,1]$$

Trobar la familia $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ se'n diu fer la interpolació entre $\overline{A_0}$ i $\overline{A_1}$.
Sabem inicialment que aquesta interpolació sempre existeix, i a més no és única.
Aquest problema es díficil, com busquem els 9 coeficients de A_t que han de satisfer les equacions següents:

$$\begin{cases} A_t^t A_t = I & \text{(6 quadratiques per simetria)} \\ \det A_t = 1 & \text{(1 cúbica)} \end{cases}$$

Pero ho podem fer "fàcilment" fent servir els quaterinons.
Com ho fem?
Primer representem $\overline{A_0}$ i $\overline{A_1} \in SO(3)$ amb quaternions unitaris:

$$\exists u, v \in \mathbb{U}\ tq\ \overline{A_0} = R_u \text{ i } \overline{A_1} = R_v$$

Sigui $w \in Vect(u, v) \cap \mathbb{U}$ tal que

$$\begin{cases} \langle u, w\rangle = 0 \\ \langle v, w\rangle = 0 \end{cases}$$

$\exists \theta \in [0, \pi)$ tq $v = \cos\theta u + \sin\theta w$
Aleshores obtenim que

$$\begin{aligned} & q := v\overline{u} = (\cos\theta + \sin\theta w)\overline{u} \in \mathbb{U} \\ \Longleftrightarrow\ & q = \cos\theta + \sin\theta w\overline{u} \\ \Longleftrightarrow\ & w = \frac{v - \cos\theta u}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Finalment, posem $\forall t \in [0, 1],\ U_t := \cos t\theta u + \sin t\theta w \in \mathbb{U}$ i com $u_0 = u$ i $u_1 = v$, deduïm que $A_t := R_{U_t}(\forall t \in [0, 1])$ ens defineix una interpolació entre $\overline{A_0}$ i $\overline{A_1}$.
Com trobar w i θ en la pràctica?
Busquem $\theta \in [0, \pi)$ i $q \in \mathbb{U}$ tq $vu^{-1} = \cos\theta + \sin\theta q$.
Aleshores tenim el θ buscat i obtenim

$$w = qu\ (= \frac{v - \cos\theta u}{\sin\theta})$$

Ara expliquem que son els angles d'Euler.

Teorema Posem $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} R_i(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ R_j(\beta) := \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \\ R_k(\gamma) := \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aquestes matrius generen totes les rotacions a l'espai:
$\forall A \in SO(3)$, $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ anomenats angles d'Euler, tal que
$A = R_i(\alpha) R_j(\beta) R_k(\gamma)$

4 Geometria epipolar

4.1 Formació de la imatge i ull ideal

Per això modelitzem l'ull (o una càmera) de la manera següent: El pla infinit $\{z = -f\}$ on f és un número anomenat distància focal.
Llavors tenim $\overline{P} = (x, y, -f)$ i $P = (X, Y, Z)$ on P envia un raig de llum que arribarà a $\overline{P}$.
Suposem que el forat en l'origen és un punt: els raigs de llum només poden passar de $\{z > 0\}$ a $\{z < 0\}$ per l'origen.
Ara determinem les coordenades x i y del punt projectat $\overline{P}$ en termes de les coordenades X, Y, Z del punt $P \in \{z > 0\}$.
La condició geomètrica és que els punts P, O i $\overline{P}$ siguin alineats. De forma equivalent,

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R} : \qquad & \overrightarrow{O\overline{P}} = \lambda \overrightarrow{OP} \\ \iff & \overline{P} - 0 = \lambda(P - 0) \\ \iff & (x, y, -f) = \lambda(X, Y, Z) \\ \iff & \begin{cases} x = \lambda X \\ y = \lambda Y \\ -f = \lambda Z \end{cases} \end{aligned}$$

i, per tant, trobem que $\lambda = -\frac{f}{Z}$ i $x = -\frac{f}{Z}X$ i $y = -\frac{f}{Z}Y$.
Al final hem obtingut l'aplicació

$$\begin{aligned} \pi_f : \{z > 0\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto \left(-\frac{f}{Z}X, -\frac{f}{Z}Y\right) \end{aligned}$$

Observació: El signe $-$ dins de les fórmules de les coordenades de $\overline{P}$ reflecteixen el fet que la imatge sobre el pla de projecció $\{z = -f\}$ està invertida. Com el cervell corregeix aquesta inversió, podem oblidar-nos del signe negatiu.

Llavors l'aplicació se simplifica a

$$\begin{aligned} \pi_f : \{z > 0\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto \left(\frac{f}{Z}X, \frac{f}{Z}Y\right) \end{aligned}$$

Veiem que podem expressar la relació

$$\begin{aligned} & (x, y) = \pi_f(X, Y, Z) \\ \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{Z}X \\ \frac{f}{Z}Y \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff Z & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff Z & \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{homog.}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=K_f} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{:=\pi_0} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{homog.}}} \end{aligned}$$

K_f es diu la matriu de calibració de la càmera i π_0 és la matriu de projecció estàndard.
Per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff Z \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general, la càmera no està centrada en l'origen i el seu eix no coincideix amb l'eix (OZ).

Sabem que les coordenades (x, y) de la projecció de P sobre el pla focal de la càmera està donat com

$$Z_C = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passem de $(\mathcal{R}_0)$ a $(\mathcal{R}_C)$ per un moviment rígid (de càmera) $\Rightarrow \exists M \in SO(3)$ i $P_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + P_0$$

Si posem $X_C = Y_C = Z_C = 0$, obtenim $-MC = P_0$. Doncs trobem que $\left(\begin{smallmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{smallmatrix}\right) = M \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ Z \end{smallmatrix}\right) - MC$

Deduïm que $Z_C \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = K_f \pi_0 \left(\begin{smallmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \iff Z_C \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = K_f \pi_0 R_{M,C} \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Definició:

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} M & -MC \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}_{:=R_{M,C}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general, no coneixem Z_C (la profunditat del punt observat respecte a l'eix de la càmera) i, per tant, posarem $Z_C = \lambda > 0$.

Definició: Una càmera ideal (o ull ideal) de paràmetres (f, M, C) on $f > 0$, $M \in SO(3)$ i $C \in \mathbb{R}^3$ és una projecció.

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 tq (x, y) = \pi_{f,M,C}(X, Y, Z) \iff \exists > 0 \; tq \; \lambda \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = K_f \pi_0 R_{M,C} \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Observació: Si $f = 1$, diem que la càmera està normalitzada.

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + C \iff \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Relació epipolar i la matriu essencial

Considerem dues càmeres ideals normalitzades $\mathcal{C}_1 = (f_1 = 1, M_1, C_1)$ i $\mathcal{C}_2 = (f_2 = 1, M_2, C_2)$. Fent un possible canvi de referència, podem suposar que

$$\begin{cases} M_1 = I_3 \\ C_1 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \end{cases}$$

o de forma equivalent que la càmera $\mathcal{C}_1$ està centrada en l'origen a $\mathbb{R}^3$ i el seu eix amb l'eix $0Z$.

Triem un punt $P \in \mathbb{R}^3$ tal que P sigui davant de les dues càmeres, és a dir

$$P \in \{(x,y,z)_{\mathcal{C}_1} : z > 1\} \cap \{(x_2,y_2,z_2)_{\mathcal{C}_2} : z_2 > 1\}$$

i volem entendre la relació anomenada epipolar que existeix entre les dues coordenades homogènies $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de les imatges corresponents al punt P per la càmera $\mathcal{C}_1$ i la càmera $\mathcal{C}_2$ respectivament.
El punt P es pot descriure fent servir les seves coordenades respecte a $\mathcal{C}_1$: $P = (x_1,y_1,z_1)_{\mathcal{C}_1} = (X,Y,Z)$ i respecte a $\mathcal{C}_2$: $P = (x_2,y_2,z_2)_{\mathcal{C}_2}$
Recordem que aleshores existeix la relació següent

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - M_2 C_2$$

com la posició de $\mathcal{C}_2$ respecte a $\mathcal{C}_1$ diferent d'un moviment rígid. De manera equivalent podem escriure

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tM_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + C_2$$

Per simplificar les notacions, posem que $R = M_2 \in SO(3)$ i $T = -M_2C_2 \subset \mathbb{R}^3$ i direm que les dues càmeres tenen la posició relativa (R,T) on R és la rotació relativa i T la posició relativa. Per tant, tenim la relació

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + T$$

$$\iff Z_2 \begin{pmatrix} X_2/Z_2 \\ Y_2/Z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = ZR \begin{pmatrix} X/Z \\ Y/Z \\ 1 \end{pmatrix} + T$$

$$\iff z_2 \begin{pmatrix} x_2/z_2 \\ y_2/z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = ZR \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + T$$

Definició: Donat $T \in \mathbb{R}^3$ definim

$$\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & -T_3 & T_2 \\ T_3 & 0 & -T_1 \\ -T_2 & T_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores

Proposició 1. ${}^t\hat{T} = -\hat{T}$

2. $\forall Q \in \mathbb{R}^3$, $\hat{T}Q = T \wedge Q$

Demostracio 1. evident.

2. Si $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$, aleshores que $\hat{T}Q = \begin{pmatrix} 0 & -T_3 & T_2 \\ T_3 & 0 & -T_1 \\ -T_2 & T_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_3Q_2+T_2Q_3 \\ T_3Q_1-T_1Q_3 \\ -T_2Q_1+T_1Q_2 \end{pmatrix} = T \wedge Q$

■

Multipliquem la relació anterior per $\hat{T}$ i obtenim

$$\hat{T}Z_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T}ZR \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\hat{T}T}_{=0}$$

i com $\hat{T}$ és lineal

$$Z_2\hat{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = Z\hat{T}R \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si fem el producte escalar de l'equació anterior amb el vector $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenim

$$\left\langle Z_2\hat{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle Z\hat{T}R \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = Z_2 \left\langle T \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff 0 = Z \left\langle \hat{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff 0 = \left\langle \hat{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff 0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definició: Donades dues clameres en posició relativa $(R, T) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ definim la matriu essencial com $E = \hat{T}R$ (matriu 3×3 amb coeficients reals)

Resumint, hem obtingut el resultat següent

Teorema (Relació epipolar) Considerem dues càmeres $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ de posició relativa (R, T) on $R \in SO(3)$ i $T \in \mathbb{R}^3$
Considerem $P \in \mathbb{R}^3$ que sigui davant de les dues càmeres.
$\begin{cases} I_1(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ I_2(P) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ són les coordenades de P en les imatges de les càmeres $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ respectivament.
Aleshores $I_2(P)^t E I_1(P) = 0$ es la relació epipolar, on $E = \hat{T}R$.

Definició: Definim els objectes geomètrics epipolars següents:

- El pla epipolar associat a un punt P és el pla afí determinat pels 3 punts C_1, C_2 i P. Suposarem sempre que aquests punts no estaran alineats.
- L'epipol e_1 és la projecció del punt $\mathcal{C}_2$ sobre el pla imatge de $\mathcal{C}_1$ (respectivament amb e_2). Suposarem sempre que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ interseca els plans imatges de les càmeres en un únic punt.
- La línia epipolar l_1 associada a un punt P serà la intersecció entre el pla imatge de $\mathcal{C}_1$ i el pla epipolar.

Observació:

- El pla epipolar π_p associat a P és $\pi_p = (C_1, C_2, P)$
- Obtenim els epipols fent interseccions $e_1 = \{(C_1, C_2) \cap \{Z_1 = 1\}\}$ i $e_1 = \{(C_1, C_2) \cap \{Z_2 = 1\}\}$
- Obtenim les línies epipolars amb $l_1(P) = \pi_p \cap \{Z_1 = 1\}$ i $l_2(P) = \pi_p \cap \{Z_2 = 1\}$

Proposició Donat una matriu essencial $E = \hat{T}R$ (de forma equivalent, donades dues càmeres en posició relativa (R, T)), aleshores $\forall P$ davant de les dues càmeres

$$l_1(P) = \left\{\left\langle \cdot\,, E^t I_2(P)\right\rangle = 0\right\} \; l_2(P) = \left\{\left\langle \cdot\,, E^t I_1(P)\right\rangle = 0\right\}$$

Demostracio $I_2(P) = I_2(P') \; \forall P' \in (C_2, P)$, llavors

$$\begin{aligned} l_1(P) &= \{I_1(P') : P' \in (C_2, P)\} \\ &= \{I_1(P') : I_2(P) = I_2(P')\} \\ &= \left\{I_1(P') : I_2(P)^t E I_1(P) = 0\right\} \\ &= \left\{I_1(P') : I_1(P)^t E^t I_2(P) = 0\right\} \\ &= \left\{I_1(P') : \left\langle I_1(P), E^t I_2(P)\right\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{I_1(P') : \left\langle \cdot\,, E^t I_2(P)\right\rangle = 0\right\} \end{aligned}$$

De la mateixa manera amb $l_2(P)$. ■

4.3 Reconstrucció 3D

Imaginem que disposem de dues fotografies del mateix objecte fet amb la mateixa càmera des de dos punts de vista $\neq$.
Aquí suposem la (o les) càmera ideal i normalitzada. Primer determinem sobre les 2 imatges una serie de punts corresponents dels quals determinem les coordenades: siguin $P_1, \ldots, P_n$ una sèrie de $n > 1$ punts de l'objecte amb coordenades a $\mathbb{R}^3$ on cada punt $P_i = (x^i, y^i, z^i)$ per $i = 1, \ldots, n$.
Tals que coneixerem les seves coordenades homogènies respecte de la càmera 1 i 2:

$$I_1(P_i) = \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 1 \end{pmatrix} \quad I_2(P_i) = \begin{pmatrix} x_2^i \\ y_2^i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

La pregunta és la següent: Podem determinar les coordenades $(x^i, y^i, z^i) \forall i = 1, \ldots, n$ si coneixem les coordenades (homogènies) (x_1^i, y_1^i) i (x_2^i, y_2^i) $\forall i = 1, \ldots, n$?

1. El primer pas és determinar la matriu essencial E que compleix el següent sistema:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad I_2(P_i)^t E I_1(P_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad (x_2^i, y_2^i, 1) E \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

No oblidem que $E = \hat{T} R \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$
Si denotem $E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ els coeficients buscats, tenim un sistema lineal de n equacions amb 3 incògnites:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad (x_1^i, y_1^i, 1) \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^i \\ y_2^i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad (x_2^i e_{11} + y_2^i e_{21} + e_{31}, x_2^i e_{12} + y_2^i e_{22} + e_{32}, x_2^i e_{13} + y_2^i e_{23} + e_{33}) \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad x_1^i x_2^i e_1 1 + x_1^i y_2^i e_{21} + x_1^i e_{31} + y_1^i x_2^i e_{12} + y_1^i y_2^i e_{22} + y_1^i e_{32} + x_2^i e_{13} + y_2^i e_{23} + e_{33} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^i x_2^i & x_1^i y_2^i & x_1^i & y_1^i x_2^i & y_1^i y_2^i & y_1^i & x_2^i & y_2^i & 1 \end{pmatrix}}_{=:a_i \in \mathbb{R}^9} \underbrace{\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix}}_{=:E^s \in \mathbb{R}^9} = 0$$

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad a_i E^s = 0$$

Si finalment, posem

$$A := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in Mat_{n \times 9}(\mathbb{R})$$

Obtenim l'equació següent $AE^s = 0$.
Veiem que $E^s \in Ker(A)$ i només podrem determinar E^s (i E) llevat de múltiple per un escalar: Si E^s és solució ($\Leftrightarrow AE^s = 0$) aleshores $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λE^s és solució també. No sabrem (de moment!) quina λ és la matriu essencial.
Veiem també que l'aplicació lineal $\begin{aligned} L_A : \mathbb{R}^9 &\to \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$ té nucli de dimensió $1 \iff$ (teorema del rang)

$$9 = \underbrace{\dim(Im(L_A))}_{=rang(A)} + \dim(Ker(L_A)) \iff rang(A) = 8$$

Per tant, des d'ara suposarem que hem triat $n = 8$ punts tal que la matriu A associada compleixi $rang(A) = 8$. (Al nivell pràctic, si triem 8 punts a l'atzar això sempre es complirà i es pot justificar al nivell teòric). Aleshores podem determinar E^s (i E) llevat de múltiple per un escalar. Per triar el múltiple, suposem que $||T|| = 1$, es a dir, suposem que la distància entre les dues posicions de la càmera està normalitzada igual a 1 (metre).
Observació: El fet de no saber la solució llevat de múltiple és perfectament normal. (pel teorema de Tales, si d es distancia entre les càmeres i h l'altura de l'objecte, si canviem la distància per λd i l'altura per λh, la imatge no canvia).

En canvi, si coneixem una de les distàncies entre dos dels 8 punts $P_1, \ldots, P_8$, podem determinar aquest λ i llavors determinar E sense suposar $||T|| = 1$.

Proposició Sigui $E = \hat{T}R$ una matriu essencial. ($T \subset \mathbb{R}^3,\ R \in SO(3)$), aleshores

(a) $\mathrm{Ker}(E^t) = \mathrm{Vect}(T)$

(b) $\mathrm{Tr}(EE^t) = 2||T||^2$

Demostracio (a) $X \in \mathrm{Ker}(E^t) \Leftrightarrow E^tX = 0 \Leftrightarrow (\hat{T}R)^tX = 0 \Leftrightarrow \hat{T}X = 0 \iff T \wedge X = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(T)$

(b) $\mathrm{Tr}(EE^t) = -\mathrm{Tr}(\hat{T}RR^t\hat{T}) = -\mathrm{Tr}(\hat{T}^2)$ i deduïm el resultat com $\hat{T}^2 = \begin{pmatrix} -T_3^2-T_2^2 & T_1T_2 & T_1T_3 \\ T_1T_2 & -T_3^2-T_1^2 & T_2T_3 \\ T_1T_3 & T_2T_3 & -T_2^2-T_1^2 \end{pmatrix}$ i la traça només agafa la diagonal. ∎

Aleshores, com hem suposat que $n = 8$, $\mathrm{rang}(A) = 8$ i $||T|| = 1$ podem determinar E llevat de múltiple per un escalar, però amb $\mathrm{tr}(EE^t) = 2$ podem determinar E llevat d'un signe $\pm$. Triem un dels dos signes.
Observació: Si E descriu la rotació entre les dues càmeres: $X^tEY = 0$ aleshores la matriu $-E$ també: $X^t(-E)Y = 0$.

2. En el segon pas, determinem la posició relativa (R, T) entre les dues cameres. Acabem de determinar E i per tant podem triar $T \in \mathrm{Ker}(E^t)$ de norma 1 que està determinat llevat d'un signe, triem un dels signes.
Observació: Si canviem un signe per l'altre això equival a invertir les posicions de $\mathcal{C}_1$ i de $\mathcal{C}_2$.

Proposició Si E és matriu essencial i $T \in \mathrm{Ker}(E^t)$ aleshores $\exists! R \in SO(3)$ tal que $E = \hat{T}R$.

Demostracio Si $R, R' \in SO(3)$ tal que $E = \hat{T}R = \hat{T}R'$, aleshores $R'R^t\hat{T}^t = \hat{T}^t$ això implica que $R'R^t_{|\mathrm{Im}(\hat{T})} = I_{3|\mathrm{Im}(\hat{T})}$ però $\dim(\mathrm{Im}(\hat{T})) = 2$ i $R'R^t \in SO(3)$. Llavors tenim que $R'R^t = I_3$ i, per tant, $R = R'$. ∎

Per tant, dins del nostre algoritme un cop determinat E i T la matriu R està únicament determinada. Com el determinem? Així:

Proposició Sigui $U \in \mathbb{R}^3$ tal que $||U|| = 1$ i $\langle U, T\rangle = 0$ i posem $V = U \wedge T$. Aleshores

$$R = \begin{pmatrix} V & -U & -T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^tU & E^tV & E^tU \wedge E^tV \end{pmatrix}^t$$

Demostracio Hem obtingut:

$$S\begin{pmatrix} U & V & -T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^tU & E^tV & E^tU \wedge E^tV \end{pmatrix}$$
$$\iff R^tMB = \begin{pmatrix} E^tU & E^tV & E^tU \wedge E^tV \end{pmatrix}$$

i com $MB = \left(\begin{smallmatrix} MU & MV & M(-T) \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right) \iff R^t\left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right) \iff \left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right)R = \left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right)^t$ Si posem $A := \left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right)$ com (U, T, V) és BON $\oplus$ veiem que A és BON $\oplus$ i doncs $A \in SO(3) \Rightarrow A^{-1} = A^t$
Al final tenim $A^{-1}R = \left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right)^t \Rightarrow R = A\left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right)^t$
■

PARÈNTESI: Si tenim (U, V, W) BON $\oplus$ a $\mathbb{R}^3$, i $A = \left(\begin{smallmatrix} U & V & W \end{smallmatrix} \right) \in SO(3)$. Per què?
$A^tA = \left(\begin{smallmatrix} U^t \\ V^t \\ W^t \end{smallmatrix} \right)\left(\begin{smallmatrix} U & V & W \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} U^tU & U^tV & U^tW \\ V^tU & V^tV & V^tW \\ W^tU & W^tV & W^tW \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \langle U,U\rangle & \langle U,V\rangle & \langle U,W\rangle \\ \langle V,U\rangle & \langle V,V\rangle & \langle V,W\rangle \\ \langle W,U\rangle & \langle W,V\rangle & \langle W,W\rangle \end{smallmatrix} \right) = I_3$

3. L'últim pas consisteix en determinar les coordenades a $\mathbb{R}^3$ d'un punt P (qualsevol) donant les seves imatges.
   Tenim un punt $P = (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $I_1(P) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ i $I_2(P) = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ Aleshores $\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0$ tal que

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = K_{f_i}\pi_0 R_{M_i,C_i} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{per } i = 1, 2$$

   Donat que $f_1 = f_2 = 1$ i $M_1 = I_3$ i $C_1 = 0$ tenim

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

   D'altra banda, R_{M_2,C_2} té la posició relativa entre les dues càmeres, per tant

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_0 R_{M_2,C_2} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \iff \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_0 \begin{pmatrix} R\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ Z \end{smallmatrix} \right) + T \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + T$$

Llavors tindrem $\lambda_2 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 R \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} + T$. Un cop λ_i determinat, obtenim les coordenades del punt P a $\mathbb{R}^3$.
Aquest algorisme s'anomena l'Algorisme dels 8 punts de reconstrucció 3D.