En el meu cas, $B := 5$, ja que la unitat del meu NIU és 2.

1 Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

1.1 Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Sigui $F =< (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0$ i $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$.

Exercici 1: Trobeu una base de F i la dimensió de F. Comproveu que el vector $v = (2022, 2022, 0, 0)$ és de F i doneu les coordenades del vector v en la base triada de F. *Solució.* Per trobar una base de F, posem el seu sistema generador en forma matricial i reduïm aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0))$ és una base de F, sent $\dim F = 3$. Comprovem que v és de F:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array}\right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector v és linealment dependent, per això pertany a F. A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de v respecte a la base abans calculada. És a dir, $v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0)$. v en coordenades de la base és $(2022, -2022, 2022, 0)$. □

Exercici 2: És el vector de $F : (B, B, B-1, 0)$, combinació lineal dels vectors $(3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0$ En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?). *Solució.* Com ja hem calculat a l'anterior exercici, $(5, 5, 4, 0)$ no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector $(5,5,4,0)$) no termina reduïda. $\square$

Exercici 3: Amplieu la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$. *Solució.* Per ampliar la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$ és trivial, ja que només cal posar el vector $(0,0,0,1)$ per fer-la base de $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exercici 4: Comproveu que el vector $w = (3,3,3,0)$ és de G. Trobeu una base de G. Doneu les coordenades del vector w respecte a la base de G triada. *Solució.* Primer, calculem una base de G:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de A.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{\text{Nucli de } A}} \end{array}\right)$$

Llavors, una base de G és $((-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-4,0,0,1))$. Ara, comprovem que w és de G:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, com w és combinació lineal de les bases de G, $w \in G$. Per la base de G triada abans $w = 3(-2,1,0,0) + 3(3,0,1,0)$. Les coordenades de w a la base triada de G és $(3,3,0)$. $\square$

Exercici 5: Trobeu una base de $F+G$ i la dimensió de $F+G$. És $F \subseteq G$? Per què? És $F+G = \mathbb{R}^4$? Per què? *Solució.* Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de G i la resta de F.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Arribat aquest punt, ens podem adonar que l'única manera de fer la forma esglaonada reduïda de la matriu de les bases implica fer un intercanvi de files, de la 3 i la 4, això ens demostra que $F \not\subseteq G$. Una base de $F+G$ és $((1,-\frac{1}{2},0,0),(0,1,\frac{2}{3},0),(0,0,\frac{4}{3},1),(0,0,-\frac{4}{3}))$, i per allò, $\dim(F+G)=4$. Com la dimensió és 4, si o si ha de generar un subespai de dimensió 4 de $\mathbb{R}^4$. L'únic subespai possible és el mateix $\mathbb{R}^4$. □

Exercici 6: Trobeu una base de $F \cap G$ i la dimensió de $F \cap G$. *Solució.* Aprofitant els càlculs que he fet a l'anterior exercici amb la matriu ampliada, una base de $F \cap G$ és $((-3,-\frac{5}{3},0,1),(-\frac{3}{2},-\frac{5}{4},0,\frac{3}{4}))$. Això implica que $\dim(F \cap G)=2$. Va en concordança amb el resultat trobat amb $\dim(F \cap G) = \dim(F+G) - (\dim(F) + \dim(G))$ □

1.2 Considera un subespai vectorial $H :=< 1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} >$ de les funcions contínues de domini $\mathbb{R}$ de funcions reals en una variable.

Exercici 7: Proveu que $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H. *Solució.* El subespai H està generat per $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$. Com no són linealment dependents, per definició, $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H. □

Exercici 8: Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' :=< B+B\sin(x)+(B-1)\cos(x), 3+2\sin(x)+\cos(x), 1+2\sin(x)+3\cos(x), 4+3\sin(x)+2\cos(x) >$$

$$G' := \{a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, a+b-c+d=0\}$$

- Proveu que F', G' són subespais vectorials de H.
- Trobeu una base i dimensió de F', G', $F'+G'$ i $F' \cap G'$

Solució. Primer de tot, provem que F' i G' són subespais vectorials de H:

- Posem la base de H i els vectors generadors de F' en una matriu:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5+5\sin(x)+4\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3+2\sin(x)+\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+2\sin(x)+3\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4+3\sin(x)+2\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|cccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -5 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Com podem veure, els vectors generadors de F' desapareixen en reduir la matriu, per això F' és un subespai de H.

- Per G', si tenim en compte que $a1+b\sin(x)+c\cos(x)+de^{2x} = (a,b,c,d)(1,\sin,\cos,e^{2x})^t$. Sabem que, independentment del valor de (a,b,c,d), els vectors de G' seran combinació lineal de la base de H. Per allò, G' és un subespai de H.

Fixem la base $(1,\sin(x),\cos(x),e^{2x})$. F' està llavors generat per $< (5,5,4,0),(3,2,1,0),(1,2,3,0),(4,3,2,0)$ en coordenades de la base abans esmentada (això està calculat indirectament a l'ampliada en fer la reducció. Com a petita observació, aquests vectors són els mateixos que generen F a l'apartat a, per això no tornaré a fer certs càlculs). G' en les coordenades ja dites serà el càlcul del nucli següent:

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Sent el nucli $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$, aquest nucli és la base de G' en coordenades abans dites. Llavors, $\dim(F') = 3$ i $\dim(G') = 3$. $\square$

2 Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.

2.1 Considera l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x,y,z) = (Bx+y+z, x-y+z, x+y+z)$$

Exercici 9: Calcula la matriu A associada a $f = T_A$ en les bases canòniques. I calculeu $f(1,2,3)$ i l'antiimatge de $(1,0,0)$, és a dir $f^{-1}(1,0,0)$. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 10: Calculeu una base i dimensió del nucli de f i la imatge de f. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 11: Decidiu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva. *Solució.* Dummy1 $\square$

Exercici 12: Calculeu l'aplicació lineal $f \circ f$. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 13: Considera la base de $\mathbb{R}^3$: *Bgotica* $= ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Calcula la matriu associada a f amb bases d'inici i sortida $Bgotica$, és a dir calculeu $M(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)$. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 14: Trobeu una matriu invertible P, on $A = PM(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)P^{-1}$. La matriu P és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina alta base és? *Solució.* Dummy0 $\square$

2.2 Sigui $\mathbb{R}[x]_2$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≥ 2. Considera l'aplicació $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ definida per

$$g(a + bx + cx^2) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Exercici 15: Justifiqueu perquè g és una aplicació lineal. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 16: Fixeu la base $Can := (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_2$. Calculeu la matriu $A = M(Can \xleftarrow{g} Can)$. Calculeu $g(3+2x+x^2)$ i $g^{-1}(x)$, directament i usant la matriu A. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 17: Decidiu si g és injectiva, exhaustiva i bijectiva. *Solució.* Dummy0 $\square$

Exercici 18: Proveu que $Bgoticab = (1 + x + x^2, x + x^2, x)$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$. I calculeu la matriu $M(Bgoticab \xleftarrow{g} Bgoticab)$. *Solució.* Dummy0 $\square$