

**Exercici 1.** Sigui  $M$  una matriu  $N \times N$  amb coeficients reals tal que la suma dels coeficients de cada columna dona sempre el mateix número  $c$ , o sigui  $\sum_{i=1}^N a_{ij} = c$  per a tota  $1 \leq j \leq N$ . Sigui  $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$  un vector en format columna tal que la suma dels seus coeficients és  $k$ . Demostreu que la suma dels coeficients de  $A\vec{v}$  (on  $\vec{v}$  és el vector escrit en columna) és  $c * k$ .

*Solució.* Definim  $\vec{u} = A\vec{v}$ . Volem demostrar que la suma de coeficients de  $\sum_{i=1}^N u_i = c * k$ . Sabem que cada coeficient de  $\vec{u}$  a posició  $i$  es calcula  $u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} * v_j$ . Com volem calcular la suma de tots els coeficients de  $\vec{u}$ , hem de calcular el sumatori següent:

$$\sum_{i=1}^N u_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} * v_j$$

Per les propietats dels sumatoris es pot canviar l'ordre dels sumatoris, quedant la següent operació:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} * v_j$$

Com la  $v_j$  no canvia al segon sumatori, es pot treure multiplicant, quedant així:

$$\sum_{j=1}^N v_j \sum_{i=1}^N a_{ij}$$

Com ja sabem per l'enunciat,  $\sum_{i=1}^N a_{ij} = c$  per tota  $1 \leq j \leq N$ , llavors ens queda això:

$$\sum_{j=1}^N v_j * c$$

Ara, la  $c$  no depèn de  $j$ , podem treure-la del sumatori com a constant:

$$c \sum_{j=1}^N v_j$$

Finalment, com ja sabíem a l'enunciat, la suma dels coeficients de  $\vec{v} = k$ , i el sumatori que ens queda fa exactament això, una suma dels seus coeficients, per tant:

$$\sum_{i=1}^N u_i = c \sum_{j=1}^N v_j = c * k$$

□

A partir d'aquí fixem:

- $N$  és un enter positiu i  $M$  és una matriu  $N \times N$  amb coeficients reals positius (o zero) tal que la suma dels coeficients de cada columna dona sempre 1.
- També considerarem els vectors escrits en columna per a fer les multiplicacions amb matrius.
- $p$  és un nombre real tal que  $0 < p < 1$  (algunes de les afirmacions que es fan a sota no són certes pels casos  $p = 0$  i  $p = 1$ ).

**Exercici 2.** Sigui  $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^N$  un vector amb tots els coeficients positius (o zero) tal que la suma dels seus coeficients és  $N$ . A partir de  $p \in (0, 1)$ , definim el vector  $\vec{p} = (p, p, \dots, p) \in \mathbb{R}^N$ . Sigui  $\vec{v}_2 = (1 - p)M\vec{v}_1 + \vec{p}$ . Demostreu que tots els coeficients de  $\vec{v}_2$  són positius i la suma dels seus coeficients és  $N$ .

*Solució.* A l'anterior exercici, sabíem que la suma dels coeficients de  $M\vec{v} = c * k$ . En aquest cas, sabem que  $c = 1$  (ja que la suma de coeficients de cada columna de  $M$  dona sempre 1) i per l'enunciat de l'exercici,  $k = N$  (ja que la suma dels coeficients de  $\vec{v}_1$  dona  $N$ ). Això fa que ens quedi el següent:

$$\sum_{i=1}^N v_{2_i} = (1 - p)N + \sum_{i=1}^N p_i$$

De forma trivial  $\sum_{i=1}^N p_i = N * p$ , en reemplaçar-ho tenim:

$$\sum_{i=1}^N v_{2_i} = (1 - p)N + p * N = (1 - p + p) * N = N$$

Per demostrar que tots els coeficients de  $\vec{v}_2$  són positius hem de pensar que  $(1 - p)v_{1_j} \sum_{i=1}^N M_{ij} \geq 0$  per les fixacions anteriors, això ja que  $(1 - p) \in (0, 1)$ ,  $v_{1_j} \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^N M_{ij} \geq 0$  (ja que a qualsevol fila dona 1).

Sabent que  $(1 - p)v_{1_j} \sum_{i=1}^N M_{ij} \geq 0$  per tota  $1 \leq j \leq N$ , llavors  $(1 - p)v_{1_j} \sum_{i=1}^N M_{ij} + p \geq p > 0$  per tota  $1 \leq j \leq N$ . Per allò, sent  $(1 - p)v_{1_j} \sum_{i=1}^N M_{ij} + p$  el coeficient a la posició  $j$  de  $\vec{v}_2$ , això implica que tots els coeficients de  $\vec{v}_2$  són positius.  $\square$

Això permet definir, a partir de  $M$  (matriu com fins ara),  $p \in (0, 1)$  i un vector inicial  $\vec{v}_1$  complint les condicions de l'exercici anterior, una successió de vectors amb la fórmula:

$$\vec{v}_{k+1} = (1 - p)M\vec{v}_k + \vec{p} \quad (1)$$

on  $\vec{v}_k$  té tots els coeficients positius i amb la suma de coeficients constant igual a  $N$  per a tot  $k \geq 1$ .

**Exercici 3.** Demostreu que l'Equació (1) és equivalent a la igualtat:

$$\left( \begin{array}{c} \vec{v}_{k+1} \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} (1 - p)M & \vec{p} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \vec{v}_k \\ 1 \end{array} \right)$$

*Solució.* Sabem el següent:

$$\left( \frac{\vec{v}_{k+1}}{1} \right) = \left( \frac{(1-p)M}{0} \middle| \frac{\vec{p}}{1} \right) \left( \frac{\vec{v}_k}{1} \right) = \left( \frac{(1-p)M\vec{v}_k}{0} \middle| \frac{\vec{p}}{1} \right)$$

I això és equivalent a ampliar ambdós vectors resultants amb un 1.  $\square$

**Exercici 4.** *Demostreu que la matriu  $A = \left( \frac{(1-p)M}{0} \middle| \frac{\vec{p}}{1} \right)$  té 1 com a valor propi. A més, si hi ha algun enllaç entre pàgines web (si i només si la matriu  $M$  no és tot zeros), demostreu que aquest vector propi té alguns coeficients no nul a les primeres  $N$  coordenades.*

*Solució.* Primer, demostrar que té 1 com a valor propi és pràcticament trivial, ja que sempre a l'última filera són tot zero menys l'últim valor, que és 1. Això dit equivaldria al següent:

$$A - \mathbb{I}_{N+1} = \left( \frac{(1-p)M - \mathbb{I}_N}{0} \middle| \frac{\vec{p}}{0} \right)$$

Amb això en compte, per les propietats dels determinants (per ser específics: si els components d'una filera o una columna són zeros, el valor del determinant també serà zero) sabem que  $\det(A - \mathbb{I}_{N+1}) = 0$ . Com els valors propis es poden trobar mitjançant el polinomi característic en resoldre  $\det(A - \lambda \mathbb{I}_{N+1}) = 0$ , sabem que 1 ha de ser un valor propi.  $\blacksquare$

Si hi ha un enllaç entre pàgines web, sabem que per fer el  $\ker(A - \mathbb{I}_{N+1})$  haurem de reduir per columnes (amb una amplificada per així trobar el nucli directament). L'última columna (la de  $\vec{p}$ ) és la idònia per fer la reducció. Ara, la suma de cada component a cada columna serà  $-p$  (ja que  $(1-p) - 1$ ) i per allò, en reduir la matriu, totes les transformacions elementals seran positives o 0. Llavors, sempre hi tindrà com mínim un valor no nul.  $\square$

Altres propietats de la matriu  $A$  són:

- La dimensió de  $\ker(A - \mathbb{I}_{N+1})$  és 1.
- Si  $\lambda \neq 1$  és un altre valor propi (real o complex) d' $A$ , llavors  $|\lambda| \leq (1-p) < 1$ , per tant, 1 és el valor propi de mòdul més gran (valor propi dominant).

També, utilitzant el Teorema del Punt Fix de Browder<sup>1</sup> (se surt una mica de l'esperit del curs) es pot veure que, es pot considerar un vector propi de valor propi 1 amb totes les coordenades positives (els altres seran múltiples d'aquest).

---

<sup>1</sup>**Teorema (Browder):** si  $f : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]^N$  és una aplicació contínua, llavors existeix  $x \in [0, 1]^N$  tal que  $f(x) = x$ .