Exercici 1:

a) Determineu els exterms relatius i els punts de sella de la funció $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$
Solució. Per trobar els extrems relatius d'aquesta funció i els punts de sella hem de trobar quan s'anula el gradient de la funció:

$$\begin{aligned}(0,0) &= \nabla f(x,y) \\ &= \left(3x^2 - 6y, 3y^2 - 6x\right)\end{aligned}$$

Llavors, amb això tenim el seguent:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Llavors, veiem que $y = \frac{x^2}{2}$ i llavors

$$3\frac{x^4}{4} - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 2 \end{cases}$$

Amx això, sabem que els extrems relatius són aquells. □

b) Trobeu els màxims i mínims de la funció $f(x,y) = x - y + z$ sota la condició $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
Solució. (Suposo que $f(x,y,z) = x - y + z$)
Tenim que $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$, llavors apliquem el teorema de multiplicadors de Lagrange:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \nabla\left(f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)\right) \\ &= \nabla\left(x - y + z - \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2\right)\right) \\ &= (1 - 2x\lambda, 1 - 2y\lambda, 1 - 2z\lambda)\end{aligned}$$

Amb això, tenim les seguents equacions:

$$\begin{cases} 1 - 2x\lambda = 0 \\ 1 - 2y\lambda = 0 \\ 1 - 2z\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Veiem que $x = \frac{1}{2\lambda}$ (analogament amb y i z), llavors remplaçem a l'última equació, tal que

$$3\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{8}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

I amb això, $x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{3}$ és un màxim o un mínim. □

c) Trobeu el màxim de $\sum_{k=1}^{n} x_k$ sabent que $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1$.
Solució. La desigualtat de Cauchy-Schwarz ens diu que per qualsevol conjunt de nombres reals $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Usant aquesta desigualtat amb la restricció donada $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1$, obtenim:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \cdot 1 = n$$

Per tant:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{n}$$

$\square$

d) Per quins valors d'α el camp $\mathbf{F}(x, y) = (4xy^2 - 3y^2, 4x^2y - \alpha xy - 4y)$ és conservatiu? En aquests casos, calculeu la funció potencial.
Solució. Sabem que per fer que un camp sigui conservatiu s'ha de cumplir que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ on $p(x, y) = 4xy^2 - 3y^2$ $q(x, y) = 4x^2y - \alpha xy - 4y$. Llavors, apliquem aquest teorema

$$8xy - 6y = 8xy - \alpha y \Rightarrow \alpha = 6.$$

En aquest cas, calculem la funció potencial

$$\int 4xy^2 - 3y^2 \; dx = y^2 \int 4x - 3 \; dx = 2x^2y^2 - 3xy^2 + y^2 C_x$$

$$\int 4x^2y - 6xy - 4y \; dy = 2x^2y^2 - 3xy^2 - 2y^2 + C_y$$

Llavors, tenim el seguent

$$2x^2y^2 - 3xy^2 + y^2 C_x = 2x^2y^2 - 3xy^2 - 2y^2 + C_y$$

I això resulta en $C_x = -2$ i $C_y = 0$. Llavors la funció potencial és $f(x, y) = 2x^2y^2 - 3xy^2 - 2y^2$ $\square$

Exercici 2:

a) Apliqueu el Teorema de Fubini per calcular

$$\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{y} e^{x^2}\, dx\, dy$$

. *Solució.* Primer veiem que

$$\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{y} e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} e^{x^2}\, dy\, dx$$

Ara, calculem això que és més fàcil

$$\int_0^1 \int_{x}^{x^3} e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 e^{x^2} \int_{x}^{x^3} 1\, dy\, dx = \int_0^1 e^{x^2}\left(x^3 - x\right)$$

I aquesta integral es soluciona fàcilment amb $t = x^2$

$$\int_0^1 e^t x\,(t-1)\,\frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,(t-1)\,dt = \frac{1}{2} e^t\,(t-2)\Big|_{t=0}^{t=1} = 1 - \frac{e}{2}$$

$\square$

b) Sigui $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, -x \leq y \leq x\}$. Calculeu

$$\int_\Omega \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Solució. Aquest problema és més fàcil si es fa un canvi de variable tal que $\Omega = \left\{(r,\theta) : r \leq 1, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$. Llavors tenim

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(r^2\right) r\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sin\left(r^2\right) r\, dr$$

I aquesta integral al resoldre dona

$$\frac{1}{2}\pi \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\square$

c) Calculeu el volum de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 > z^2\}$.
Solució. Aquesta integral es resol més fàcilment si fem $\Omega = \{(r,\theta,z) : r^2 + z^2 \leq 4, r^2 > z^2\}$

$$\iiint_\Omega r dr\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{2} \int_{|z|}^{\sqrt{4-z^2}} 1\, dr\, dz\, d\theta$$

Llavors, calculem

$$\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2}\int_{|z|}^{\sqrt{4-z^2}} 1\,dr\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2} \sqrt{4-z^2}-|z|\;dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2\,(\pi-2)\;d\theta = 4\pi\,(\pi-2)$$

$\square$

d) Enuncieu el Teorema de Green. Utilitzant el camp $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$ deduïu una fórmula per trobar l'àrea de l'interior d'una corba tancada simple a $\mathbb{R}^2$.
Solució. El teorema de Green diu que si tenim una corva tancada simple orientada positivament (γ) i un camp $\mathbf{X} = (P,Q)$, aleshores $\int_\gamma \mathbf{X} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy$, on Ω és l'area interior de γ.
Fent servir $\mathbf{F}$, deduim que $\int_\gamma (-y,x) = \iint_\Omega 2\;dx\;dy \Rightarrow \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x) = \iint_\Omega 1\;dx\;dy$ $\square$