En el meu cas, $B := 5$, ja que la unitat del meu NIU és 2.

1. Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

   (a) Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Sigui $F =< (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) >$ i $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$.

Exercici i. Trobeu una base de F i la dimensió de F. Comproveu que el vector $v = (2022, 2022, 0, 0)$ és de F i doneu les coordenades del vector v en la base triada de F.

Solució. Per trobar una base de F, posem el seu sistema generador en forma matricial i reduïm aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0))$ és una base de F, sent $\dim F = 3$. Comprovem que v és de F:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array}\right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector v és linealment dependent, per això pertany a F. A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de v respecte a la base abans calculada. És a dir, $v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0)$. v en coordenades de la base és $(2022, -2022, 2022, 0)$. □

Exercici ii. És el vector de F : $(B, B, B-1, 0)$, combinació lineal dels vectors $(3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0)$? En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?).

Solució. Com ja hem calculat a l'anterior exercici, $(5,5,4,0)$ no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector $(5,5,4,0)$) no termina reduïda. $\square$

Exercici iii. Amplieu la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$.

Solució. Per ampliar la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$ és trivial, ja que només cal posar el vector $(0,0,0,1)$ per fer-la base de $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exercici iv. Comproveu que el vector $w=(3,3,3,0)$ és de G. Trobeu una base de G. Doneu les coordenades del vector w respecte a la base de G triada.

Solució. Primer, calculem una base de G:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de A.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-2 \quad 3 \quad -4}}_{\text{Nucli de } A}} \end{array}\right)$$

Llavors, una base de G és $((-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-4,0,0,1))$. Ara, comprovem que w és de G:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, com w és combinació lineal de les bases de G, $w \in G$. Per la base de G triada abans $w = 3(-2,1,0,0)+3(3,0,1,0)$. Les coordenades de w a la base triada de G és $(3,3,0)$. $\square$

Exercici v. Trobeu una base de $F+G$ i la dimensió de $F+G$. És $F \subseteq G$? Per què? És $F+G=\mathbb{R}^4$? Per què?

Solució. Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de G i la resta de F.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Arribat aquest punt, ens podem adonar que l'única manera de fer la forma esglaonada reduïda de la matriu de les bases implica fer un intercanvi de files, de la 3 i la 4, això ens demostra que $F \not\subseteq G$. Una base de $F + G$ és $((1, -\frac{1}{2}, 0, 0), (0, 1, \frac{2}{3}, 0), (0, 0, \frac{4}{3}, 1), (0, 0, -\frac{4}{3}))$, i per allò, $\dim(F + G) = 4$. Com la dimensió és 4, si o si ha de generar un subespai de dimensió 4 de $\mathbb{R}^4$. L'únic subespai possible és el mateix $\mathbb{R}^4$. □

Exercici vi. Trobeu una base de $F \cap G$ i la dimensió de $F \cap G$.

Solució. Aprofitant els càlculs que he fet a l'anterior exercici amb la matriu ampliada, una base de $F \cap G$ és $((-3, -\frac{5}{3}, 0, 1), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4}))$. Això implica que $\dim(F \cap G) = 2$. Va en concordança amb el resultat trobat amb $\dim(F \cap G) = \dim(F + G) - (\dim(F) + \dim(G))$ □

(b) Considera un subespai vectorial $H := < 1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} >$ de les funcions contínues de domini $\mathbb{R}$ de funcions reals en una variable.

Exercici i. Proveu que $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H.

Solució. El subespai H està generat per $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$. Com no són linealment dependents, per definició, $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H. □

Exercici ii. Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' := < B + B\sin(x) + (B-1)\cos(x), 3 + 2\sin(x) + \cos(x), 1 + 2\sin(x) + 3\cos(x), 4 + 3\sin(x) + 2\cos(x) >$$

$$G' := \{a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c + d = 0\}$$

- Proveu que F', G' són subespais vectorials de H.
- Trobeu una base i dimensió de F', G', $F' + G'$ i $F' \cap G'$

Solució. Primer de tot, provem que F' i G' són subespais vectorials de H:

- Posem la base de H i els vectors generadors de F' en una matriu:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5+5\sin(x)+4\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3+2\sin(x)+\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+2\sin(x)+3\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4+3\sin(x)+2\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Com podem veure, els vectors generadors de F' desapareixen en reduir la matriu, per això F' és un subespai de H.

- Per G', si tenim en compte que $a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} = (a, b, c, d)(1, \sin, \cos, e^{2x})^t$. Sabem que, independentment del valor de (a, b, c, d), els vectors de G' seran combinació lineal de la base de H. Per allò, G' és un subespai de H.

Fixem la base $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$. F' està llavors generat per $< (5, 5, 4, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) >$ en coordenades de la base abans esmentada (això està calculat indirectament a l'ampliada en fer la reducció. Com a petita observació, aquests vectors són els mateixos que generen F a l'apartat a, per això no tornaré a fer certs càlculs). G' en les coordenades ja dites serà el càlcul del nucli següent:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sent el nucli $((-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$, aquest nucli és la base de G' en coordenades abans dites. Llavors, $\dim(G') = 3$. Per a F', la base serà (calculada a l'apartat 'a' exercici 1) $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, -1, 0))$ i $\dim(F') = 3$. Per trobar $F' + G'$ i $F' \cap G'$ es posa en una matriu amb la base de F' primer i després la base de G':

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

com podem observar, una base de $F' + G'$ és $((1,2,3,0),(0,1,2,0),(0,0,0,1),(0,0,-1,1))$, el que fa que $\dim(F' + G') = 4$. En canvi, una base de $F' \cap G'$ és $((1,-3,3,1),(-1,2,-2,0))$, fent que $\dim(F' \cap G') = 2$. Recapitulant:

- Base de F' és $(1 + 2\sin(x) + 3\cos(x), 1\sin(x) + 2\cos(x), \cos(x))$, $\dim(F') = 3$.
- Base de G' és $(-2 + \sin(x), 3 + \cos(x), -4 + e^{2x})$, $\dim(G') = 3$.
- Base de $F' + G'$ és $(1 + 2\sin(x) + 3\cos(x), 1\sin(x) + 2\cos(x), -\cos(x), e^{2x})$, $\dim(F' + G') = 4$.
- Base de $F' \cap G'$ és $(1 - 3\sin(x) + 3\cos(x) + e^{2x}, -1 + 2\sin(x) - 2\cos(x))$, $\dim(F' \cap G') = 2$.

□

2. Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.

(a) Considera l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x,y,z) = (Bx + y + z, x - y + z, x + y + z)$$

Exercici i. Calcula la matriu A associada a $f = T_A$ en les bases canòniques. I calculeu $f(1,2,3)$ i l'antiimatge de $(1,0,0)$, és a dir $f^{-1}(1,0,0)$.

Solució. Per trobar A associada en les bases canòniques, calculem $f(1,0,0), f(0,1,0)$ i $f(0,0,1)$.

$$f(1,0,0) = (5,1,1) \qquad f(0,1,0) = (1,-1,1) \qquad f(0,0,1) = (1,1,1)$$

Ara fet això, ho posem en coordenades de la canònica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara, calculem $f(1,2,3)$ mitjançant la matriu:

$$f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

I ara, calculem $f^{-1}(1,0,0)$. Això és trivial si tenim en compte el següent:

$$Ax = (1,0,0) \Rightarrow x = A^{-1}(1,0,0)$$

Llavors, calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Com A^{-1} existeix, podem fer el que hem dit abans:

$$x = A^{-1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

□

Exercici ii. Calculeu una base i dimensió del nucli de f i la imatge de f.

Solució. Com, sense voler, hem provat a l'anterior exercici, la matriu A és invertible. Al ser invertible, el rang de A és màxim, i per allò, $\dim(\ker(f)) = 0$ i $\dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rang}(f) = 3$. Trivialment $\ker(f) = 0$ i $\mathrm{im}(f)$ seran les files de la matriu A, és a dir $\mathrm{im}(f) = ((5,1,1),(1,-1,1),(1,1,1))$. □

Exercici iii. Decidiu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Com la matriu A és invertible, f és bijectiva, és a dir, tant injectiva com exhaustiva. □

Exercici iv. Calculeu l'aplicació lineal $(f \circ f)$.

Solució. Calculem $f \circ f$:

$$(f \circ f)(x,y,z) = A^2(x,y,z)$$

Llavors, és tan simple com calcular A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercici v. Considera la base de $\mathbb{R}^3$: $\mathfrak{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Calcula la matriu associada a f amb bases d'inici i sortida $\mathfrak{B}$, és a dir calculeu $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B})$.

Solució. Per calcular $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B})$ faré servir la següent idea:

$$M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B}) = M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{f} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B})$$

Tenint en compte que $M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{f} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i que $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})$ és la matriu de canvi de base, fent que $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B})^{-1}$, trobem $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})$:

$$M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ara, per trobar $M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B})$ fem servir la inversa de l'anterior matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, ara que tenim les tres matrius, multipliquem:

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Exercici vi. Trobeu una matriu invertible P, on $A = PM(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B})P^{-1}$. La matriu P és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina alta base és?

Solució. Com ja he calculat a l'anterior exercici, $P = M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})$, és a dir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(b) Sigui $\mathbb{R}[x]_2$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≥ 2. Considera l'aplicació $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ definida per

$$g(a + bx + cx^2) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Exercici i. Justifiqueu perquè g és una aplicació lineal.

Solució. G és una aplicació lineal perquè és una aplicació que transforma un espai vectorial a un altre, mantenint la suma de vectors i la multiplicació per un escalar. □

Exercici ii. Fixeu la base $Can := (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_2$. Calculeu la matriu $A = M(Can \xleftarrow{g} Can)$. Calculeu $g(3 + 2x + x^2)$ i $g^{-1}(x)$, directament i usant la matriu A.

Solució. Tenint la base ja esmentada, per calcular la matriu A associada calculem $g(1), g(x)$ i $g(x^2)$.

$$g(1) = (5 + x + x^2) \qquad g(x) = (1 - x + x^2) \qquad g(x^2) = (1 + x + x^2)$$

Llavors, ara calculem $M(Can \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3})$:

$$M(Can \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 5 + x + x^2 & 1 - x + x^2 & 1 + x + x^2 \end{pmatrix}$$

No obstant això, ens demanen $M(Can \xleftarrow{g} Can)$, i per allò hem de trobar un canvi de base $M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} Can)$. Això és tan simple com fer $M(Can \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})^{-1}$, una matriu trivial.

$$M(Can \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{array}\right)$$

$$M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} Can) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

Una vegada tenim això, calculem A:

$$\begin{aligned} A &= M(Can \xleftarrow{g} Can) \\ &= M(Can \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} Can) \\ &= \begin{pmatrix} 5 + x + x^2 & 1 - x + x^2 & 1 + x + x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 + x + x^2 & \frac{1-x+x^2}{x} & \frac{1+x+x^2}{x^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ara, calculem $g(3 + 2x + x^2)$:

- Directament:

$$g(3+2x+x^2) = (5\times 3+2+1)1+(3-2+1)x+(3+2+1)x^2$$

- Amb la matriu A:

$$\begin{pmatrix} 5+x+x^2 & \frac{1-x+x^2}{x} & \frac{1+x+x^2}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+x+x^2 & \frac{1-x+x^2}{x} & \frac{1+x+x^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

Ara, calculem $g^{-1}(x)$:

- Directament:

$$g^{-1}(a1+bx+cx^2) = (\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}c)1+(-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c)x+(-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}c)x^2$$

- Amb la matriu A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x & \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercici iii. Decidiu si g és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

Solució. Com g^{-1} existeix, g ha de ser bijectiva. $\square$

Exercici iv. Proveu que $\mathfrak{B}b = (1+x+x^2, x+x^2, x)$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$. I calculeu la matriu $M(\mathfrak{B}b \overset{g}{\leftarrow} \mathfrak{B}b)$.

Solució. Posem a una matriu els vectors de la base Can i la base $\mathfrak{B}b$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1+x+x^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x+x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Com en reduir la matriu els vectors de $\mathfrak{B}b$ desapareixen, $\mathfrak{B}b$ és una base d'un subespai de l'espai generat per Can. Com la dimensió de l'espai generat per $\mathfrak{B}b$ és igual a la dimensió de l'espai generat per Can, $\mathfrak{B}b$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$.
Ara, calculem $M(\mathfrak{B}b \overset{g}{\leftarrow} \mathfrak{B}b)$:
Fem $g(1+x+x^2), g(x+x^2)$ i $g(x)$

$$g(1+x+x^2) = (7+x+3x^2) \qquad g(x+x^2) = (2+2x^2) \qquad g(x) = (1-x+x^2)$$

Posant-ho en una matriu tenim el següent:

$$M(\mathfrak{B}b \overset{g}{\leftarrow} Can_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 7+x+3x^2 & 2+2x^2 & 1-x+x^2 \end{pmatrix}$$

Ara, fem un pas similar al de l'exercici 2:

$$M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 1 & 0 \\ x^2x^20 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{array}\right)$$

$$M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B}b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} \mathfrak{B}b) &= M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B}b) \\ &= \begin{pmatrix} 7+x+3x^2 & 2+2x^2 & 1-x+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \\ &= (5+x+x^2, \frac{1-x+x^2}{x} \frac{1+x+x^2}{x^2}) \end{aligned}$$

$\square$