Càlcul numèric Pràctica 2
Eduardo Pérez Motato. (01/03/2024) NIU: 1709992

Exercici 1: Considerar l'equació polinòmica

$$x^3 = x + 40 \tag{1}$$

i la fórmula para el càlcul de la seva arrel real (que s'obté a partir de les fórmules de Cardano)

$$\alpha = \sqrt[3]{20 + \frac{1}{9}\sqrt{32397}} + \sqrt[3]{20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397}}$$

a) Comprovar que es produeix error de cancel·lació al evaluar en precisió simple i doble precisió l'expressió de l'arrel real de l'equació anterior.
Solució. Podem veure com en fer el càlcul de l'arrel mitjançants les fórmules de Cardano, a `Pr2Ex1a.c` en ambdues precisions dona prop de 0, però no prou per a aquestes precisions. □

b) Aplicar el mètode de Newton a la funció

$$f(x) = x^3 - x - 40$$

començant amb $x_0 = 2$ fent servir precisió simple i doble. Obtenir una aproximació de 8 i 15 decimals correctes respectivament.
Solució. En aplicar Newton per ambdues precisions a `Pr2Ex1b.c`, obtenim precisions tal que és prou a prop de 0 per les precisions, ja que tenen 8 i 15 decimals correctes per a precisió simple i doble respectivament. □

c) Considerar l'equació polinòmica, $x^3 = x + 400$
Obtenir una fórmula de Cardano per al càlcul de l'arrel real, β. Comprovar que aquesta arrel compleix

$$2 \leq \beta \leq 8$$

Comprovar l'error de cancel·lació calculant la fórmula explicita en precisió doble.
Solució. Tenint $x^3 - x - 400 = 0$, agafem la fórmula de Cardano[1] i al remplaçar tenim

$$\sqrt[3]{-\frac{-400}{2} + \sqrt{\left(\frac{-400}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-400}{2} - \sqrt{\left(\frac{-400}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3}}$$

simplifiquem i tenim

$$\sqrt[3]{200 + \frac{1}{3}\sqrt{3239997}} + \sqrt[3]{200 - \frac{1}{3}\sqrt{3239997}}$$

[1] Agafada de aquest PDF.

$\square$

Si això ho possem en `c`, en aquest cas al programa `Pr2Ex1c.c`, ens dona ≈ 7.413, un valor que, efectivament, està entre 2 i 8. Això no obstant, tè un error molt alt. Aplicar els següents mètodes iteratius per obtenir 15 decimals correctes de l'arrel.

(a) Mètode de la bisecció partint de l'interval $[2, 8]$
Solució. En aquest cas arriba en 54 iteracions a la soluciò, i tè un error suficientment baix. $\square$

(b) Mètode de Newton partint del pivot $x_0 = 2$.
Solució. En aquest cas arriba en 11 iteracions a la soluciò, arribant al mateix valor que amb el metode de la bisecció. $\square$

Comparar l'ordre de convergència numèrica i determina una estrategia per calcular les arrels d'aquest tipus d'equacions.
Solució. Com ja ben savem, la bisecció tè un ordre de convergència de com minim 1 i Newton com minim 2. Això es veu reflectit en què pel metode de bisecció és necesiten 54 iteracions i en el de Newton 11. Una estrategia simple per calcular les arrels d'aquest itpus d'equacions és obtenir una aproximació mitjançants Cardano i aquest resultat fer-ho servir com a llavor per Newton. $\square$

Exercici 2: Sigui l'equació $f(x) = 0$ amb $f(x)$ contínuament derivable, x^* una arrel simple, $f(x^*) = 0$, amb $f'(x) = 0$ en un entorn de x^*. Considerar la iteració

$$x_{k+1} = x_k - b_k f(x_k)$$

on

$$b_{k+1} = b_k (2 - f'(x_{k+1}) b_k)$$

partint d'un pivot x_0 suficientment pròxim a x^* amb $b_0 = \frac{1}{f'(x_0)}$.

a) Aplicar la iteració a l'equació (1), tomant $b_0 = \frac{1}{3x_0^2-1}$.
Estudiar l'ordre de convergència numèric: suggeriment, calcular $e_k = |x_k - x_{k+1}|$ i compara els cocients $\frac{e_k}{e_{k-1}}, \frac{e_k}{(e_{k-1})^2}, \ldots$.
Solució. A `Pr2Ex2a.c` ho tenim aplicat. Podem veure que ho troba en tan sols 5 iteracions en agafar 4 com a llavor. Si provem de tindre 2 com a llavor, veiem que no ho trobarà, això perquè 2 no és suficientment proxim a 4. Aquest metode dona un valor que al evaluar-ho dona exactament 0. A falta de proves, podem veure que l'ordre de convergència és proxim a 2, ja que en fer $\frac{|x_k - x_{k+1}|}{|x_{k-1} - x_k|^p}$ tindrem que

$$\text{Si } p = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \text{tendeix a 0.} \\ 2 & \Rightarrow \text{no sembla tendir a res, falten iteracions.} \\ 3 & \Rightarrow \text{tendeix a } \infty. \end{cases}$$

$\square$

Exercici 3: (OPCIONAL)

Sigui l'equació $f(x) = 0$ amb $f(x)$ completament derivable, x^* una arrel simple, $f(x^*) = 0$, i $f'(x) \neq 0$ en un entorn de x^*. Considerar la iteració (conocida com mètode de Halley),

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)\, f'(x_k)}{2\left(f'(x_k)\right)^2 - f(x_k)\, f''(x_k)}$$

a) Aplicar la iteració a l'equació polinòmica del Problema 1, $x^3 = x + 400$.
Solució. Fet al `Pr2Ex3a.c`. Veiem que troba la solució en 6 iteracions, considerablement més rapid quant a nombre d'iteracions. També retorna el mateix nombre que en bisecció i Newton. □

b) Comprovar numericament que la convergència és d'ordre 3.
Solució. Fet al `Pr2Ex3b.c`, veiem que fent $\frac{|x_k - x_{k+1}|}{|x_{k-1} - x_k|^p}$, com ja vam fer a l'exercici 2a tenim que quan $p = 4$ tendeix a ∞, mentre que $p = 3$ sembla tendir a un nombre 0.01 i $p = 2$ tendeix a 0, per allò és d'ordre de convergència 3. □