En el meu cas, B := 5, ja que la unitat del meu NIU és 2.

1. Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

(a) Considera l'espai vectorial \mathbb{R}^4 . Sigui $F = \langle (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) \rangle$ i $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}.$

Exercici i. Trobeu una base de F i la dimensió de F. Comproveu que el vector v = (2022, 2022, 0, 0) és de F i doneu les coordenades del vector v en la base triada de F.

Soluci'o. Per trobar una base de F, posem el seu sistema generador en forma matricial i reduïm aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, ((1,2,3,0),(0,1,2,0),(0,0,1,0)) és una base de F, sent dim F=3. Comprovem que v és de F:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array}\right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector v és linealment dependent, per això pertany a F. A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de v respecte a la base abans calculada. És a dir, v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0). v en coordenades de la base és (2022, -2022, 2022, 0).

Exercici ii. És el vector de F:(B,B,B-1,0), combinació lineal dels vectors (3,2,1,0), (1,2,3,0), (4,3,2,0)? En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?).

Solució. Com ja hem calculat a l'anterior exercici, (5, 5, 4, 0) no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector (5, 5, 4, 0)) no termina reduïda.

Exercici iii. Amplieu la base de F a una base de \mathbb{R}^4 .

Solució. Per ampliar la base de F a una base de \mathbb{R}^4 és trivial, ja que només cal posar el vector (0,0,0,1) per fer-la base de \mathbb{R}^4 .

Exercici iv. Comproveu que el vector w = (3, 3, 3, 0) és de G. Trobeu una base de G. Doneu les coordenades del vector w respecte a la base de G triada.

Solució. Primer, calculem una base de G:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de A.

Llavors, una base de G és ((-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1)). Ara, comprovem que w és de G:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & | \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & | \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, com w és combinació lineal de les bases de G, $w \in G$. Per la base de G triada abans w = 3(-2, 1, 0, 0) + 3(3, 0, 1, 0). Les coordenades de w a la base triada de G és (3, 3, 0).

Exercici v. Trobeu una base de F + G i la dimensió de F + G. És $F \subseteq G$? Per què? És $F + G = \mathbb{R}^4$? Per què?

Soluci'o. Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de G i la resta de F.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercici vi. Trobeu una base de $F \cap G$ i la dimensió de $F \cap G$.

Solució. Dummy0

(b) Considera un subespai vectorial $H := <1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} >$ de les funcions contínues de domini \mathbb{R} de funcions reals en una variable.

Exercici i. Proveu que $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H.

Exercici ii. Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' := \langle B + B \sin(x) + (B - 1) \cos(x), 3 + 2 \sin(x) + \cos(x), 1 + 2 \sin(x) + 3 \cos(x), 4 + 3 \sin(x) + 2 \cos(x) \rangle$$

$$G' := \{ a1 + b \sin(x) + c \cos(x) + de^{2x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c + d = 0 \}$$

- Proveu que F', G' són subespais vectorials de H.
- Trobeu una base i dimensió de F', G', F' + G' i $F' \cap G'$

- 2. Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.
 - (a) Considera l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (Bx + y + z, x - y + z, x + y + z)$$

Exercici i. Calcula la matriu A associada a $f = T_A$ en les bases canòniques. I calculeu f(1,2,3) i l'antiimatge de (1,0,0), és a dir $f^{-1}(1,0,0)$.

Exercici ii. Calculeu una base i dimensió del nucli de f i la imatge de f.

Exercici iii. Decidiu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Exercici iv. Calculeu l'aplicació lineal $f \circ f$.

Solució. Dummy0 **Exercici v.** Considera la base de \mathbb{R}^3 : Bgotica = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)). Calcula la matriu associada a f amb bases d'inici i sortida Bqotica, és a dir calculeu $M(Bqotica \stackrel{f}{\leftarrow} Bqotica).$ Solució. Dummy0 **Exercici vi.** Trobeu una matriu invertible P, on $A = PM(Bgotica \stackrel{f}{\leftarrow} Bgotica)P^{-1}$. La matriu P és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina alta base és? Solució. Dummy0 Sigui $\mathbb{R}[x]_2$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≥ 2 . Considera l'aplicació g: $\mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ definida per $q(a + bx + cx^{2}) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^{2}$ **Exercici i.** Justifiqueu perquè q és una aplicació lineal. Solució. Dummy0 **Exercici ii.** Fixeu la base $Can := (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_2$. Calculeu la matriu A = $M(Can \stackrel{g}{\leftarrow} Can)$. Calculeu $g(3+2x+x^2)$ i $g^{-1}(x)$, directament i usant la matriu A. Solució. Dummy0 **Exercici iii.** Decidiu si q és injectiva, exhaustiva i bijectiva. Solució. Dummy0 **Exercici iv.** Proveu que $Bgoticab = (1 + x + x^2, x + x^2, x)$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$. I calculeu la matriu $M(Bqoticab \stackrel{g}{\leftarrow} Bqoticab)$. Solució. Dummy0