
En el meu cas, $B := 5$, ja que la unitat del meu NIU és 2.

1. Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

(a) Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Sigui $F =< (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) >$ i $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$.

Exercici i. Trobeu una base de F i la dimensió de F. Comproveu que el vector $v = (2022, 2022, 0, 0)$ és de F i doneu les coordenades del vector v en la base triada de F.

Solució. Per trobar una base de F, posem el seu sistema generador en forma matricial i reduïm aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0))$ és una base de F, sent $\dim F = 3$. Comprovem que v és de F:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array}\right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector v és linealment dependent, per això pertany a F. A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de v respecte a la base abans calculada. És a dir, $v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0)$. v en coordenades de la base és $(2022, -2022, 2022, 0)$. $\square$

Exercici ii. És el vector de F : $(B, B, B - 1, 0)$, combinació lineal dels vectors $(3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0)$? En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?).

Solució. Com ja hem calculat a l'anterior exercici, $(5,5,4,0)$ no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector $(5,5,4,0)$) no termina reduïda. $\square$

Exercici iii. Amplieu la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$.

Solució. Per ampliar la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$ és trivial, ja que només cal posar el vector $(0,0,0,1)$ per fer-la base de $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exercici iv. Comproveu que el vector $w=(3,3,3,0)$ és de G. Trobeu una base de G. Doneu les coordenades del vector w respecte a la base de G triada.

Solució. Primer, calculem una base de G:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de A.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{Nucli de } A}} \end{array}\right)$$

Llavors, una base de G és $((-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-4,0,0,1))$. Ara, comprovem que w és de G:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, com w és combinació lineal de les bases de G, $w \in G$. Per la base de G triada abans $w = 3(-2,1,0,0)+3(3,0,1,0)$. Les coordenades de w a la base triada de G és $(3,3,0)$. $\square$

Exercici v. Trobeu una base de $F+G$ i la dimensió de $F+G$. És $F \subseteq G$? Per què? És $F+G=\mathbb{R}^4$? Per què?

Solució. Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de G i la resta de F.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Arribat aquest punt, ens podem adonar que l'única manera de fer la forma esglaonada reduïda de la matriu de les bases implica fer un intercanvi de files, de la 3 i la 4, això ens demostra que $F \not\subseteq G$. Una base de $F + G$ és $((1, -\frac{1}{2}, 0, 0), (0, 1, \frac{2}{3}, 0), (0, 0, \frac{4}{3}, 1), (0, 0, -\frac{4}{3}))$, i per allò, $\dim(F + G) = 4$. Com la dimensió és 4, si o si ha de generar un subespai de dimensió 4 de $\mathbb{R}^4$. L'únic subespai possible és el mateix $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exercici vi. Trobeu una base de $F \cap G$ i la dimensió de $F \cap G$.

Solució. Aprofitant els càlculs que he fet a l'anterior exercici amb la matriu ampliada, una base de $F \cap G$ és $((-3, -\frac{5}{3}, 0, 1), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4}))$. Això implica que $\dim(F \cap G) = 2$. Va en concordança amb el resultat trobat amb $\dim(F \cap G) = \dim(F + G) - (\dim(F) + \dim(G))$ $\square$

(b) Considera un subespai vectorial $H :=< 1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} >$ de les funcions contínues de domini $\mathbb{R}$ de funcions reals en una variable.

Exercici i. Proveu que $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H.

Solució. El subespai H està generat per $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$. Com no són linealment dependents, per definició, $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H. $\square$

Exercici ii. Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' :=< B+B\sin(x)+(B-1)\cos(x), 3+2\sin(x)+\cos(x), 1+2\sin(x)+3\cos(x), 4+3\sin(x)+2\cos(x) >$$

$$G' := \{a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c + d = 0\}$$

- Proveu que F', G' són subespais vectorials de H.
- Trobeu una base i dimensió de F', G', $F' + G'$ i $F' \cap G'$

Solució. Primer de tot, provem que F' i G' són subespais vectorials de H:

- Posem la base de H i els vectors generadors de F' en una matriu:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5+5\sin(x)+4\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3+2\sin(x)+\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+2\sin(x)+3\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4+3\sin(x)+2\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Com podem veure, els vectors generadors de F' desapareixen en reduir la matriu, per això F' és un subespai de H.

- Per G', si tenim en compte que $a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} = (a,b,c,d)(1,\sin,\cos,e^{2x})^t$. Sabem que, independentment del valor de (a,b,c,d), els vectors de G' seran combinació lineal de la base de H. Per allò, G' és un subespai de H.

Fixem la base $(1,\sin(x),\cos(x),e^{2x})$. F' està llavors generat per $<(5,5,4,0),(3,2,1,0),(1,2,3,0),(4,3,2,0)>$ en coordenades de la base abans esmentada (això està calculat indirectament a l'ampliada en fer la reducció. Com a petita observació, aquests vectors són els mateixos que generen F a l'apartat a, per això no tornaré a fer certs càlculs). G' en les coordenades ja dites serà el càlcul del nucli següent:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sent el nucli $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$, aquest nucli és la base de G' en coordenades abans dites. Llavors, $\dim(G') = 3$. Per a F', la base serà (calculada a l'apartat 'a' exercici 1) $((1,2,3,0),(0,1,2,0),(0,0,-1,0))$ i $\dim(F') = 3$. Per trobar $F' + G'$ i $F' \cap G'$ es posa en una matriu amb la base de F' primer i després la base de G':

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

com podem observar, una base de $F' + G'$ és $((1,2,3,0),(0,1,2,0),(0,0,0,1),(0,0,-1,1))$, el que fa que $\dim(F'+G') = 4$. En canvi, una base de $F' \cap G'$ és $((1,-3,3,1),(-1,2,-2,0))$, fent que $\dim(F' \cap G') = 2$. Recapitulant:

- Base de F' és $(1 + 2\sin(x) + 3\cos(x), 1\sin(x) + 2\cos(x), \cos(x))$, $\dim(F') = 3$.
- Base de G' és $(-2 + \sin(x), 3 + \cos(x), -4 + e^{2x})$, $\dim(G') = 3$.
- Base de $F' + G'$ és $(1 + 2\sin(x) + 3\cos(x), 1\sin(x) + 2\cos(x), -\cos(x), e^{2x})$, $\dim(F' + G') = 4$.
- Base de $F' \cap G'$ és $(1 - 3\sin(x) + 3\cos(x) + e^{2x}, -1 + 2\sin(x) - 2\cos(x))$, $\dim(F' \cap G') = 2$.

□

2. Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.

(a) Considera l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x,y,z) = (Bx + y + z, x - y + z, x + y + z)$$

Exercici i. Calcula la matriu A associada a $f = T_A$ en les bases canòniques. I calculeu $f(1,2,3)$ i l'antiimatge de $(1,0,0)$, és a dir $f^{-1}(1,0,0)$.

Solució. Per trobar A associada en les bases canòniques, calculem $f(1,0,0), f(0,1,0)$ i $f(0,0,1)$.

$$f(1,0,0) = (5,1,1) \qquad f(0,1,0) = (1,-1,1) \qquad f(0,0,1) = (1,1,1)$$

Ara fet això, ho posem en coordenades de la canònica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara, calculem $f(1,2,3)$ mitjançant la matriu:

$$f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

I ara, calculem $f^{-1}(1,0,0)$. Això és trivial si tenim en compte el següent:

$$Ax = (1,0,0) \Rightarrow x = A^{-1}(1,0,0)$$

Llavors, calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Com A^{-1} existeix, podem fer el que hem dit abans:

$$x = A^{-1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercici ii. Calculeu una base i dimensió del nucli de f i la imatge de f.

Solució. Com, sense voler, hem provat a l'anterior exercici, la matriu A és invertible. Al ser invertible, el rang de A és màxim, i per allò, $\dim(\ker(f)) = 0$ i $\dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rang}(f) = 3$. Trivialment $\ker(f) = 0$ i $\operatorname{im}(f)$ seran les files de la matriu A, és a dir $\operatorname{im}(f) = ((5,1,1),(1,-1,1),(1,1,1))$. $\square$

Exercici iii. Decidiu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Com la matriu A és invertible, f és bijectiva, és a dir, tant injectiva com exhaustiva. $\square$

Exercici iv. Calculeu l'aplicació lineal $(f \circ f)$.

Solució. Calculem $f \circ f$:

$$(f \circ f)(x,y,z) = A^2(x,y,z)$$

Llavors, és tan simple com calcular A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercici v. Considera la base de $\mathbb{R}^3$: $\mathfrak{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Calcula la matriu associada a f amb bases d'inici i sortida $\mathfrak{B}$, és a dir calculeu $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B})$.

Solució. Per calcular $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B})$ faré servir la següent idea:

$$M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B}) = M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{f} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B})$$

Tenint en compte que $M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{f} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i que $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})$ és la matriu de canvi de base, fent que $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B})^{-1}$, trobem $M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})$:

$$M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ara, per trobar $M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B})$ fem servir la inversa de l'anterior matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, ara que tenim les tres matrius, multipliquem:

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Exercici vi. Trobeu una matriu invertible P, on $A = PM(\mathfrak{B} \xleftarrow{f} \mathfrak{B})P^{-1}$. La matriu P és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina alta base és?

Solució. Com ja he calculat a l'anterior exercici, $P = M(\mathfrak{B} \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})$, és a dir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(b) Sigui $\mathbb{R}[x]_2$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≥ 2. Considera l'aplicació $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ definida per

$$g(a + bx + cx^2) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Exercici i. Justifiqueu perquè g és una aplicació lineal.

Solució. G és una aplicació lineal perquè és una aplicació que transforma un espai vectorial a un altre, mantenint la suma de vectors i la multiplicació per un escalar. □

Exercici ii. Fixeu la base $Can := (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_2$. Calculeu la matriu $A = M(Can \xleftarrow{g} Can)$. Calculeu $g(3 + 2x + x^2)$ i $g^{-1}(x)$, directament i usant la matriu A.

Solució. Tenint la base ja esmentada, per calcular la matriu A associada calculem $g(1), g(x)$ i $g(x^2)$.

$$g(1) = (5 + x + x^2) \qquad g(x) = (1 - x + x^2) \qquad g(x^2) = (1 + x + x^2)$$

Llavors, ara calculem $M(Can \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3})$:

$$M(Can \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 5 + x + x^2 & 1 - x + x^2 & 1 + x + x^2 \end{pmatrix}$$

No obstant això, ens demanen $M(Can \xleftarrow{g} Can)$, i per allò hem de trobar un canvi de base $M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} Can)$. Això és tan simple com fer $M(Can \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3})^{-1}$, una matriu trivial.

$$M(Can \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{array}\right)$$

$$M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} Can) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

Una vegada tenim això, calculem A:

$$\begin{aligned} A &= M(Can \xleftarrow{g} Can) \\ &= M(Can \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3}) M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} Can) \\ &= \begin{pmatrix} 5 + x + x^2 & 1 - x + x^2 & 1 + x + x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 + x + x^2 & \frac{1-x+x^2}{x} & \frac{1+x+x^2}{x^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ara, calculem $g(3 + 2x + x^2)$:

- Directament:

$$g(3+2x+x^2) = (5\times 3+2+1)1 + (3-2+1)x + (3+2+1)x^2$$

- Amb la matriu A:

$$\begin{pmatrix} 5+x+x^2 & \frac{1-x+x^2}{x} & \frac{1+x+x^2}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+x+x^2 & \frac{1-x+x^2}{x} & \frac{1+x+x^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

Ara, calculem $g^{-1}(x)$:

- Directament:

$$g^{-1}(a1+bx+cx^2) = (\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c)1 + (-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c)x + (-\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c)x^2$$

- Amb la matriu A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercici iii. Decidiu si g és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

Solució. Com g^{-1} existeix, g ha de ser bijectiva. $\square$

Exercici iv. Proveu que $\mathfrak{B}b = (1+x+x^2, x+x^2, x)$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$. I calculeu la matriu $M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} \mathfrak{B}b)$.

Solució. Posem a una matriu els vectors de la base Can i la base $\mathfrak{B}b$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1+x+x^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x+x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Com en reduir la matriu els vectors de $\mathfrak{B}b$ desapareixen, $\mathfrak{B}b$ és una base d'un subespai de l'espai generat per Can. Com la dimensió de l'espai generat per $\mathfrak{B}b$ és igual a la dimensió de l'espai generat per Can, $\mathfrak{B}b$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$.
Ara, calculem $M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} \mathfrak{B}b)$:
Fem $g(1+x+x^2), g(x+x^2)$ i $g(x)$

$$g(1+x+x^2) = (7+x+3x^2) \qquad g(x+x^2) = (2+2x^2) \qquad g(x) = (1-x+x^2)$$

Posant-ho en una matriu tenim el següent:

$$M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 7+x+3x^2 & 2+2x^2 & 1-x+x^2 \end{pmatrix}$$

Ara, fem un pas similar al de l'exercici 2:

$$M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{id} Can_{\mathbb{R}^3}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 1 & 0 \\ x^2x^20 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{array}\right)$$

$$M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B}b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} \mathfrak{B}b) &= M(\mathfrak{B}b \xleftarrow{g} Can_{\mathbb{R}^3})M(Can_{\mathbb{R}^3} \xleftarrow{id} \mathfrak{B}b) \\ &= \begin{pmatrix} 7+x+3x^2 & 2+2x^2 & 1-x+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \\ &= (5+x+x^2, \frac{1-x+x^2}{x}\frac{1+x+x^2}{x^2}) \end{aligned}$$

$\square$