

En el meu cas,  $B := 5$ , ja que la unitat del meu NIU és 2.

1. Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

- (a) Considera l'espai vectorial  $\mathbb{R}^4$ . Sigui  $F = \langle (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) \rangle$  i  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$ .

**Exercici i.** Trobeu una base de  $F$  i la dimensió de  $F$ . Comproveu que el vector  $v = (2022, 2022, 0, 0)$  és de  $F$  i doneu les coordenades del vector  $v$  en la base triada de  $F$ .

*Solució.* Per trobar una base de  $F$ , posem el seu sistema generador en forma matricial i reduïm aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors,  $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0))$  és una base de  $F$ , sent  $\dim F = 3$ . Comprovem que  $v$  és de  $F$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array} \right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector  $v$  és linealment dependent, per això pertany a  $F$ . A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de  $v$  respecte a la base abans calculada. És a dir,  $v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0)$ .  $v$  en coordenades de la base és  $(2022, -2022, 2022, 0)$ .  $\square$

**Exercici ii.** És el vector de  $F : (B, B, B - 1, 0)$ , combinació lineal dels vectors  $(3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0)$ ? En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?).

*Solució.* Com ja hem calculat a l'anterior exercici,  $(5, 5, 4, 0)$  no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector  $(5, 5, 4, 0)$ ) no termina reduïda.  $\square$

**Exercici iii.** Amplieu la base de  $F$  a una base de  $\mathbb{R}^4$ .

*Solució.* Per ampliar la base de  $F$  a una base de  $\mathbb{R}^4$  és trivial, ja que només cal posar el vector  $(0, 0, 0, 1)$  per fer-la base de  $\mathbb{R}^4$ .  $\square$

**Exercici iv.** Comproveu que el vector  $w = (3, 3, 3, 0)$  és de  $G$ . Trobeu una base de  $G$ . Doneu les coordenades del vector  $w$  respecte a la base de  $G$  triada.

*Solució.* Primer, calculem una base de  $G$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Nucli de } A}$

Llavors, una base de  $G$  és  $((-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$ . Ara, comprovem que  $w$  és de  $G$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & | & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & | & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & | & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors, com  $w$  és combinació lineal de les bases de  $G$ ,  $w \in G$ . Per la base de  $G$  triada abans  $w = 3(-2, 1, 0, 0) + 3(3, 0, 1, 0)$ . Les coordenades de  $w$  a la base triada de  $G$  és  $(3, 3, 0)$ .  $\square$

**Exercici v.** Trobeu una base de  $F + G$  i la dimensió de  $F + G$ . És  $F \subseteq G$ ? Per què? És  $F + G = \mathbb{R}^4$ ? Per què?

*Solució.* Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de  $G$  i la resta de  $F$ .

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & | & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & | & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & | & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & | & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & | & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & | & -2 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & | & -3 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Arribat aquest punt, ens podem adonar que l'única manera de fer la forma esglaonada reduïda de la matriu de les bases implica fer un intercanvi de files, de la 3 i la 4, això ens demostra que  $F \not\subseteq G$ . Una base de  $F + G$  és  $((1, -\frac{1}{2}, 0, 0), (0, 1, \frac{2}{3}, 0), (0, 0, \frac{4}{3}, 1), (0, 0, -\frac{4}{3}, 0))$ , i per allò,  $\dim(F + G) = 4$ . Com la dimensió és 4, si o si ha de generar un subespai de dimensió 4 de  $\mathbb{R}^4$ . L'únic subespai possible és el mateix  $\mathbb{R}^4$ .  $\square$

**Exercici vi.** Trobeu una base de  $F \cap G$  i la dimensió de  $F \cap G$ .

*Solució.* Aprofitant els càlculs que he fet a l'anterior exercici amb la matriu ampliada, una base de  $F \cap G$  és  $((-3, -\frac{5}{3}, 0, 1), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4}))$ . Això implica que  $\dim(F \cap G) = 2$ . Va en concordança amb el resultat trobat amb  $\dim(F \cap G) = \dim(F + G) - (\dim(F) + \dim(G))$   $\square$

- (b) Considera un subespai vectorial  $H := \langle 1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} \rangle$  de les funcions contínues de domini  $\mathbb{R}$  de funcions reals en una variable.

**Exercici i.** Proveu que  $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$  és una base de  $H$ .

*Solució.* El subespai  $H$  està generat per  $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ . Com no són linealment dependents, per definició,  $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$  és una base de  $H$ .  $\square$

**Exercici ii.** Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' := \langle B + B \sin(x) + (B - 1) \cos(x), 3 + 2 \sin(x) + \cos(x), 1 + 2 \sin(x) + 3 \cos(x), 4 + 3 \sin(x) + 2 \cos(x) \rangle$$

$$G' := \{a1 + b \sin(x) + c \cos(x) + d e^{2x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c + d = 0\}$$

- Proveu que  $F', G'$  són subespais vectorials de  $H$ .
- Trobeu una base i dimensió de  $F', G', F' + G'$  i  $F' \cap G'$

*Solució.* Primer de tot, provem que  $F'$  i  $G'$  són subespais vectorials de  $H$ :

- Posem la base de  $H$  i els vectors generadors de  $F'$  en una matriu:

$$\left( \begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 + 5\sin(x) + 4\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 + 2\sin(x) + \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + 2\sin(x) + 3\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 + 3\sin(x) + 2\cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Com podem veure, els vectors generadors de  $F'$  desapareixen en reduir la matriu, per això  $F'$  és un subespai de  $H$ .

- Per  $G'$ , si tenim en compte que  $a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} = (a, b, c, d)(1, \sin, \cos, e^{2x})^t$ . Sabem que, independentment del valor de  $(a, b, c, d)$ , els vectors de  $G'$  seran combinació lineal de la base de  $H$ . Per allò,  $G'$  és un subespai de  $H$ .

Fixem la base  $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ .  $F'$  està llavors generat per  $< (5, 5, 4, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) >$  en coordenades de la base abans esmentada (això està calculat indirectament a l'ampliada en fer la reducció. Com a petita observació, aquests vectors són els mateixos que generen  $F$  a l'apartat a, per això no tornaré a fer certs càlculs).  $G'$  en les coordenades ja dites serà el càlcul del nucli següent:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sent el nucli  $((-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ , aquest nucli és la base de  $G'$  en coordenades abans dites. Llavors,  $\dim(F') = 3$  i  $\dim(G') = 3$ .  $\square$

2. Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.

- (a) Considera l'aplicació lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida per

$$f(x, y, z) = (Bx + y + z, x - y + z, x + y + z)$$

**Exercici i.** Calcula la matriu  $A$  associada a  $f = T_A$  en les bases canòniques. I calculeu  $f(1, 2, 3)$  i l'antiimatge de  $(1, 0, 0)$ , és a dir  $f^{-1}(1, 0, 0)$ .

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici ii.** Calculeu una base i dimensió del nucli de  $f$  i la imatge de  $f$ .

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici iii.** Decidiu si  $f$  és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

*Solució.* Dummy1 □

**Exercici iv.** Calculeu l'aplicació lineal  $f \circ f$ .

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici v.** Considera la base de  $\mathbb{R}^3$  :  $Bgotica = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ . Calcula la matriu associada a  $f$  amb bases d'inici i sortida  $Bgotica$ , és a dir calculeu  $M(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)$ .

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici vi.** Trobeu una matriu invertible  $P$ , on  $A = PM(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)P^{-1}$ . La matriu  $P$  és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina base és?

*Solució.* Dummy0 □

- (b) Sigui  $\mathbb{R}[x]_2$  l'espai vectorial dels polinomis de grau  $\geq 2$ . Considera l'aplicació  $g : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$  definida per

$$g(a + bx + cx^2) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^2$$

**Exercici i.** Justifiqueu perquè  $g$  és una aplicació lineal.

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici ii.** Fixeu la base  $Can := (1, x, x^2)$  de  $\mathbb{R}[x]_2$ . Calculeu la matriu  $A = M(Can \xleftarrow{g} Can)$ . Calculeu  $g(3 + 2x + x^2)$  i  $g^{-1}(x)$ , directament i usant la matriu  $A$ .

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici iii.** Decidiu si  $g$  és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

*Solució.* Dummy0 □

**Exercici iv.** Proveu que  $Bgoticab = (1 + x + x^2, x + x^2, x)$  és una base de  $\mathbb{R}[x]_2$ . I calculeu la matriu  $M(Bgoticab \xleftarrow{g} Bgoticab)$ .

*Solució.* Dummy0 □