Apunts

La primera meitat del 2n curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Setembre 2024 - Gener 2025

Índex

Bases de Dades Relacionals

Horari

- Dimarts 11-13h.
- Dijous 11-13h.

Equacions Diferencials Ordinàries

Horari

- Dimarts 9-11h.
- Divendres 11-13h.

2.0 Introducció

Les equacions diferenciàls són una eina molt important de modelització.

Definició: Les equacions diferencials son equacions que relacionen una funció (incognita) amb les seves derivades.

Definició: Si la funció és d'una variable $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid\mid t \mapsto u(t)$ es diuen Equacions Diferencials Ordinàries.

Definició: Si la funció és de diverses variables $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Es diuen Equacions de Derviades Parcials.

2.1 Equacions diferencials de 1r ordre

Definició: Una equació diferencial ordinária de primer ordre per una funció $y(x)$ és una equació

$$F(x, y, y') = 0$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(x, f\left(x\right)\right)$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es diu autònoma si f no depèn explicitament de x o sigui, és de la forma $y' = f(y)$

Definició: Una solució de la forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es una funció $y(x)$ diferenciable definida en un interval I tal que per a tot $x \in I$ se satisfà l'equació diferencial ordinària de 1r ordre.

En general, les solucions d'una EDO de 1r ordre formen una família uniparamètrica de funcions d'un paràmetre constant. Aquesta experssío s'anomena solució general de la EDO de 1r ordre.

Definició: Una equació diferencial de primer ordre amb una condició inicial s'anomena problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La solució d'un problema de valor inicial s'anomena solució particular de l'equació.

Definició: Un cas particular de solucions són els equilibris que són les solucions que no depenen de la variable independent.

Una solució d'equilibri de $y' = f(x, y)$ és una solució de la forma $y(x) = y^*$ (numero). Es compleix que $y(x) = y^*$ és solució d'equilibri de $y' = f(x, y)$ si i només si $f(x, y^*) = 0$ per a tot x per al que $f(x, y)$ estigui ben definit.
Si l'equació és autonòma ($y' = f(y)$) les solucions d'equilibri $y(x) = y$ estàn donades pels zeros de f i estan definides $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema (Picardo-Gindelof) Sigui $\mathcal{R}$ una regió rectangular del pla xy definida per $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ que conté el punt (x_0, y_0). Suposem que f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sigui continues a $\mathcal{R}$.
Aleshores existeix una única solució $y(x)$ definida a un interval $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ contingut a $[a, b]$ del PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A més a més si denotem la solució de l'anterior sistema per $y(x; x_0, y_0)$ es compleix que $y(x; x_0, y_0)$ és una funció continua respecte x_0, y_0.

Per assegurar unicitat és suficient amb què f sigui de Lipschitz respecte a la variable y

Que sigui de Lipschitz significa que $\exists L > 0 : |f(x,y) - f(x,z)| < L\,|y-z|\,(c,d)\ \forall (y,z,c,d)$

Teorema (de Peano) Si f és contínua, existeix solució del sistema.

Teorema Si f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues a $\mathcal{R}$ aleshores dues corbes solució de $y' = f(x,y)$ diferents no es poden tallar a $\mathbb{R}$.

Modelització i Inferència

Horari

- Dilluns 11-13h.
- Dimecres 11-13h.

Tècniques de Disseny d'Algoritmes

Horari

- Dilluns 9-11h.
- Dijous 9-11h.

Visualització 3D

Horari

- Dimecres 9-11h.
- Divendres 9-11h.