Apunts

La segona meitat del 1r curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Febrer - Juny 2024

Índex

Programació Orientada als Objectes

Càlcul en Diverses Variables

Definició: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Definició: Siguin $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definim $\underbrace{\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle}_{\text{(producte escalar)}} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ com a producte escalar.

Definició: $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$ on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Això és la distància del punt x a $(0, 0, \ldots, 0)$.

Propietats de la norma:

1. $\|x\| \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Desigualtat triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz: $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Això ho acceptem.

Observem que $-1 \leq \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$ i definim l'angle entre els vectors x i y com l'angle α tal que $\cos\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\|y\|}$, és a dir, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos\alpha$.

■ **Exemple** Trobem els valors de $\mathbb{R}^3 \perp (-1, -2, 1)$. Busquem $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle (x_1, x_2, x_3), (-1, -2, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. ■

2.1 Boles a $\mathbb{R}^n$

Si $n = 2$ la bola de centre (x_0, y_0) i radi R és $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < R\} = \text{(disc)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$. Això és una bola oberta, denotada per

Notació. *Fem servir* $\mathfrak{B}_R(x_0, y_0, \ldots)$ *la bola oberta* ($< R$) *i* $\overline{\mathfrak{B}_R}(x_0, y_0, \ldots)$ *la tancada* ($\leq R$). *Es farà servir més la bola oberta.*

Definició: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$, definim $\mathring{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists R > 0 | \mathfrak{B}_R(\vec{x}) \subset A\}$

■ **Exemple**

1. $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y) : x > 0\}$
2. $A = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y, z) : -a < x < a, -b < y < b, -c < z < c\}$

■

Definició: Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ es diu obert si $A = \mathring{A}$, és a dir, si tot punt del conjunt A és també un punt d'$\mathring{A}$.

Definició: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$, definim $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall R > 0, \mathfrak{B}_R(x) \cap A \neq \emptyset\}$. Diem que $\overline{A}$ és l'adherència d'A.

■ **Exemple** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : yx \langle 1, x \rangle 0\}$. $\overline{A} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) : yx \leq 1, x > 0\}$ ■

Definició: Un conjunt $(A \subset \mathbb{R}^n)$ és tancat si $A = \overline{A}$.

Proposició A és obert $\Longleftrightarrow$ A^c és tancat.

Definició: La frontera d'un conjunt, $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Definició: $A \subset \mathbb{R}^n$ es diu acotat si A està contingut dins d'una bola.

Definició: $A \subset \mathbb{R}^n$ es diu compacte si A és tancat i acotat.

Exercici (4 de la llista 1) Per als conjunts següents, determineu l'interior, l'adherència i la frontera. Decidiu si són oberts, tancats, acotats o compactes.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y < 0\}$
$\mathring{A} = A \Rightarrow$ obert.
$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \leq 0\}$
$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y = 0\}$
No és acotat ni tancat, per això no és compacte.

b) B és la unió de totes les rectes de pendent nul que tallen l'eix OY en un enter.
$\mathring{B} = \emptyset$.
$\overline{B} = B \Rightarrow$ tancat.

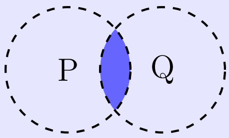
$Fr\,(B) = B$ No és acotat, per això no és compacte.

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, y \geq 0\}$.
$\mathring{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0, y > 0\}$. $\overline{C} = C \Rightarrow$ tancat.
$Fr\,(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0, y = 0\}$ És compacte, ja que és acotat i tancat.

d) D és la intersecció dels discos $D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ i $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1\}$ $(D = D_1 \cap D_2)$.
$\mathring{D} = \mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2$.
$\overline{D} = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ $Fr\,(D) = \left(FrD_1 \cap \mathring{D}_2\right) \cup \left(FrD_2 \cap \mathring{D}_1\right)$

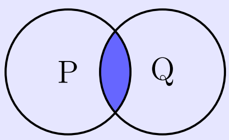
■

Exercici (5 de la llista 1) Proveu que la intersecció de dos oberts és un obert. Feu el mateix per a la unió.



Hem de provar que $P \cap Q$ és obert. $\forall x \in P \cap Q\ \exists B_x \subset P \cap Q$, on B_x és una bola centrada en el punt pertanyent a la intersecció.
Com P és obert, tot punt de P té una bola pertanyent, passa el mateix en Q.
$x \in B_x^P \subset P$, $x \in B_x^Q \subset Q$, $x \in B_x^P \cap B_x^Q \subset P \cap Q$. Llavors, com $P \cap Q$ té les propietats d'ambdues, és obert. ■

Exercici (6 de la llista 1) Proveu que la intersecció de dos tancats és un tancat. Feu el mateix per a la unió.



Sabem llavors que P^c, Q^c són llavors oberts. Per l'exercici anterior, sabem que $P^c \cup Q^c$ és obert. I, finalment, $(P^c \cup Q^c)^c = P \cup Q$ és tancada. ■

Exercici (7 de la llista 1) Poseu un exemple d'una successió d'oberts $V_1, \ldots$ de manera que $\bigcap V_j$ no sigui un obert.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [-1, 1]$$

Una unió de tancats no necessàriament és tancada.

2.2 Límits de funcions i continuïtat

Definició: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R}$, definim $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A\}$.

Definició: El conjunt de nivell de la funció f és $\{x \in A : f(x) = c\}$.

2.2.1 Límit d'una funció a un punt

Siguin $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definició: Diem que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si per tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < \|x - x_0\| < \delta$.

Corolari: (Propietats dels límits) Suposem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \times g(x)) = L_1 \times L_2$
3. Si $L_2 \neq 0$, llavors $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L_1}{L_2}$

■ **Exemple** $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ on $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observem que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2)^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \end{cases}$

- Si $\alpha > 0$, observem $|(x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2+y^2}| \leq (x^2 + y^2) \longrightarrow 0$

- Si $\alpha < 0$ veiem que el límit no existeix.
  Trobem ${}^{(x_n,y_n)\to(0,0)}_{(z_n,w_n)\to(0,0)}$ quan $n \to \infty$ per fer

  $$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} (x_n^2+y_n^2)^\alpha \sin\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{(z_n,w_n)\to(0,0)} (z_n^2+w_n^2)^\alpha \sin\frac{1}{z_n^2+w_n^2}$$

  Triem (x_n, y_n) tal que $x_n^2 + y_n^2 = \frac{1}{n\pi}$ i triem (z_n, w_n) tal que $z_n^2 + w_n^2 = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$.
  Per exemple $x_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, $y_n = 0$, $z_n = 0$ i $w_n = \frac{1}{\sqrt{\pi/2+2\pi n}}$.
  Això provocarà que el primer límit doni 0 i el segon ∞, que, òbviament, no són iguals.

- Si $\alpha = 0$, exercici pel lector. No existeix.

■

2.2.2 Límit seguint rectes i límit a un punt

Proposició Suposem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$, llavors $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx) = L \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Utilitzarem aquest fet de la següent forma:

Corolari: Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx)$ depèn de m, aleshores $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ no existeix.

■ **Exemple** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \nexists$

Si fem $y = mx$, tenim $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2}$. Com depèn de m, no existeix el límit. ■

Que el límit no depengui de m no implica que el límit existeixi.

■ **Exemple** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \nexists$, però si $y = mx$, tenim el següent: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$.
Ara, imaginem que $y = x^2$, llavors resulta $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$ ■

■ **Exemple** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$, fem $y = mx$:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^2} = 0 \leftarrow$ això ha sigut una perdua de temps, no podem deduir res.

Veiem que, en efecte, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$:
si fem $\frac{|x|y^2}{x^2+y^2}$, podem veure que $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, llavors $\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq |x|1 \longrightarrow 0$. Per tant, el límit equival a 0. ∎

Exercici (11 de la llista 2)

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos x}{x^2+y^2}$ Si ho fem "a lo bruto" ens donem compte que el límit seria una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$.
Triem $y = mx$ i tenim llavors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+m^2x^2}$. Després d'aplicar L'Hôpital ens donem compte que $\frac{1}{2(1+m^2)}$. Com depèn de m, el límit no existeix.

f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ Si ho fem "a lo bruto" ens donem compte que el límit seria una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$.
No obstant, com son tres variables no podem fer de manera simple L'Hôpital. Podem fer servir una altra idea: $\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2}$
Llavors, savem que podem fer servir $\frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)|z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{1}{2}|z|$ i com z tendeix a 0, sabem que el límit tendeix a 0.

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+x-y-1}{x^2+y^2-2x+2y+2}$ Si ho fem "a lo bruto" ens donem compte que el límit seria una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$.
Llavors, fem $y = m(x-1) - 1$, tenim, després de molt simplificar, el seguent $\lim\limits_{x\to 1} \frac{m(x-1)^2}{(x-1)^2+m^2(x-1)^2}$. Si simplifiquem una mica més, ens donem compte que depèn de m. Som feliços per que sabem que el límit no exieteix i podem continuar amb la nostra vida.

∎

Definició: Una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és continua a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exercici (14 de la llista 2) Sigui

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comproveu que f no es continua a l'origen.
Sabem que el límit, si existeix, serà igual a α. Fem $y = mx$ per veure si

existeix. Tenim llavors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$, com no depén de m, potser existeix. Y si fem $y = mx^2$? Llavors depén de m, ja que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}$. Per tant, α no existeix i f no és continua a $(0, 0)$. ■

Corolari: (Propietats de la continuitat) Tenim f continua a x_0 i g continua a x_0.

1. $f + g$ és continua a x_0
2. $f \times g$ és continua a x_0
3. $\frac{f}{g}$ és continua a x_0 si $g\left(x_0\right) \neq 0$

Teorema (Weistrass (Te la meto por detrás)) Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte i sigui $f : K \to \mathbb{R}$ continua a K. Aleshores f te un màxim i un minim a K, és a dir, existeix $x_{\min}$ i $x_{\max} \in K$ tals que $f(x_{\min}) \leq f\left(x\right) \leq f(x_{\max})\ \forall x \in K$.

Es fundamental que K sigui compacte. $f\left(x, y\right) = x$ no té máxim a $\mathfrak{B}_R\left(0, 1\right). \leftarrow$ no es compacte.

2.3 Calcul diferencial

Definició: Sigui f una funció definida a $\mathbb{R}^n$ i sigui $x_0 = \{x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}\}$, llavors $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_{0,1},\ldots,x_{0,i}+h,\ldots,x_{0,n})-f(x_0)}{h}$ (és a dir, mantenim les variables fixes menys x_i).

Hi ha funcions amb derivades parcials a tot punt peró no continues.

Això, i la perdua de la visió geometrica de la derivada (amb una variable, genera la recta tangent. La derivada parcial no la genera.) ens fa veure que la derivada parcial no es gaire atractiva.
La soluciò és la diferencial

Notació. *Si f és una funció definida a $\mathbb{R}^n$,* $\underbrace{\nabla f}_{gradient} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Definició: Sigui f una funció definida a $\mathbb{R}^n$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diem que f és diferenciable a x_0 si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existeixen per tot $i = 1, 2, \ldots, n$ i a més $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0$

Proposició Figura tangent a la gràfica de $f(x)$ al punt x_0 es

$$z = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x, y) - x_0 \rangle$$

- El vector normal a la figura tangent d'una grafica al punt x_0 és el $\nabla f(x_0)$ i -1.
- Si f té derivades parcials i totes les derivades parcials son continues al punt x_0 llavors f és diferenciable al punt x_0.

Proposició Si f és diferenciable a $x_0 \to f$ és continua a x_0.

Definició: Sigui f una funció definida a $\mathbb{R}^n$ i sigui $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sigui $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ amb $\|\vec{e}\| = 1$. Definim

$$\mathcal{D}_{\vec{e}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \vec{e}t) - f(x_0)}{t}$$

Això s'anomena derivada direccional.

Proposició

$$\mathcal{D}_e f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \vec{e} \rangle$$

Corolari: Per tot $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ amb $\|\vec{e}\| = 1$, tenim $-\|\nabla f(x_0)\| \leq \mathcal{D}_{\vec{e}} f(x_0) \leq \|\nabla f(x_0)\|$

Definició: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. f és diu diferenciable a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ és diferenciable a x_0.
En aquest cas, escrivim

$$\underbrace{\mathcal{D}f(x_0)}_{\text{matriu diferencial}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definició: Sigui $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$, la regla de la cadena és

$$\mathcal{D}(g \circ f)(x_0) = \mathcal{D}g(f(x_0))\,\mathcal{D}f(x_0)$$

Definició: Una corba a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $\gamma = [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Notació. *Per γ, al fer la derivada, farem servir $\dot{\gamma}$*

Definició: La longitud d'una corba $\gamma = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ és

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

Definició: Una superficie a $\mathbb{R}^3$ és un conjunt de forma $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = c\}$ on $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.

$\nabla f(x,y,z)$ és el vector normal a la superficie $f(x,y,z) = c$.

2.3.1 Extrems relatius

Teorema (de Schwartz) Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$ son funcions continues per tot $i,j = 1,\ldots,n$. Aleshores $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$, per qualsevol i,j

Definició:

$$\underbrace{Hf}_{\text{Matriu Hessiana de } f} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,y=1,\ldots,n}$$

Definició: Una matriu simetrica A és diu positiva si tots els valors propis son positius o equivalentment si $\vec{h}A\vec{h} > 0$.
Analogament, una matriu simetrica B és diu negativa si tots els valors propis son negatius o equivalentment si $\vec{h}A\vec{h} < 0$.

Teorema (Criteri per saber si Hf és definida positiva o negativa) $Hf \equiv$ una matriu $n \times n$.

a) Si $\det \Delta_j > 0$, aleshores Hf és definida positiva, on Δ_j son els succesius menors de Hf.

b) Si $\det \Delta_1 < 0, \det \Delta_2 > 0, \det \Delta_3 < 0, \det \Delta_4 > 0, \ldots,$ aleshores Hf

és definida negativa.

Definició:

a) Diem que x_0 és màxim real de $f(x)$ si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)\ \ \forall x \in \mathfrak{B}(x_0, \delta)$

b) Diem que x_0 és minim real de $f(x)$ si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)\ \ \forall x \in \mathfrak{B}(x_0, \delta)$

c) Diem que x_0 és un punt de sella si existeixen $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) < f(x_0 + th_1)$ i $f(x_0) > f(x_0 + th_2)\ \ \forall |t| \leq \delta$

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ son continues $\forall i, j$. Sigui $x_0 \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x_0) = (0, 0, \ldots, 0)$. Suposem que $Hf(x_0)$ te determinant diferent de zero, aleshores:

a) Si $\det \Delta_j > 0$, aleshores f és minim relatiu a x_0 on Δ_j son els succesius menors de Hf.

b) Si $(-1)^j \det \Delta_j > 0$, aleshores f és un màxim relatiu a x_0 on Δ_j son els succesius menors de Hf.

c) Si a) i b) no es compleixen, llavors x_0 és un punt de sella.

Teorema (dels multiplicadors de Lagrange) Sigui $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Sigui $f : S \to \mathbb{R}$. Sigui $x_0 \in S$ un maxim o minim de f a S. Aleshores, hi ha un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla (f - \lambda g)(x_0) = 0$.

2.4 Integral en diverses variables

Definició: Una funció $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ es diu integrable si
$\exists \lim_{\max \substack{|x_i - x_{i-1}| \\ |y_j - y_{j-1}|} \to 0} \sum f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Definició: Sigui $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $\tilde{f} = \begin{cases} 0 & [a, b] \times [c, d] \setminus \mathcal{U} \\ f & \mathcal{U} \end{cases}$. Diem que f és integrable a $\mathcal{U}$ si $\tilde{f}$ és integrable a $[a, b] \times [c, d]$

Teorema (Fubini) Sigui $\Omega \subset [a,b]\times[c,d]$. Sigui $\Omega \to \mathbb{R}$ integrable. Aleshores $\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{U}_2} dy\right) dx$.

Definició: Sigui $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denotem el jacobià de Φ com el determinant de $\mathcal{D}\Phi$

Teorema (del Canvi de Variable) Sigui $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijectiva i amb derivades parcials continues. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funció integrable a $\Phi(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Aleshores, siguin $x, u \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathcal{V}} f(x)dx = \int_{\Phi^{-1}(\mathcal{U})} (u)\,|J\Phi(u)|\,du$$

Definició: (coordenades polars)
$R \equiv$ distancia de (x,y) a $(0,0)$.
$\theta \equiv$ angle entre (x,y) i l'eix positiu.

Proposició El jacobià de aquest canvi de variable es r.

Definició: (coordenades cilindriques a $\mathbb{R}^3$)
$R \equiv$ distancia de $(x,y,0)$ a $(0,0,0)$.
$\theta \equiv$ angle entre $(x,y,0)$ i l'eix positiu.
$z \equiv$ la mateixa z d'abans.

Es, basicament, coordenades polars amb z mateixa.

Proposició El jacobià també és r.

Definició: (coordenades esferiques a $\mathbb{R}^3$)
$\rho \equiv$ distancia de (x,y,z) a $(0,0,0)$.
$\phi \equiv$ angle entre (x,y,z) i l'eix vertical positiu. OBS: com a máxim aquest angle serà π
$\theta \equiv$ angle entre (x,y,z) i l'eix positiu (com a polars).
això fa que

$$\begin{cases} z = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ x = \rho\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

Proposició El jacobià és $\rho^2\sin\phi$.

Algorítmia i Combinatòria en Grafs. Mètodes Heurístics

Definició: Un graf és un objecte combinatori que està format per un parell ordenat de vèrtex i arestes ($G = (V, E)$). Una aresta (E) està etiquetat per un origen i un destí (o extrems si no estan orientades) sent aquests vèrtexs (V).

Definició: Un graf dirigit, o orientat, és un graf on les arestes tenen direcció, com si fos una fletxa.

Definició: Un graf no dirigit serà un graf on les arestes no tenen direccions. Podem suposar que l'aresta és bidireccional.

Definició: Un graf és planar si es pot unir tots els vèrtexs sense que es creuin les arestes. Si s'han de creuar obligatòriament, és un graf no planar.

Teorema Tot graf no planar té un subgraf $K_{3,3}$ o P_5.

Definició: (Propietats dels grafs)

1. L'**ordre** d'un graf és el nombre de vèrtex
2. La **grandària** d'un graf és el nombre d'arestes
3. La **valència** d'un vèrtex és el nombre d'arestes entrant o sortint del vèrtex. Si surt i es connecta en si mateix compta com dos.
4. La **valència d'entrada** és el nombre d'arestes entrant.
5. La **valència de sortida** és el nombre d'arestes sortint.
6. Els vèrtexs amb valència 1 s'anomenen **fulles**.

7. Els vèrtexs amb valència més gran que dos es diuen **branching** (o **encreuament**).

8. Un **camí** és la seqüència de vèrtexs connectats linealment. La llargària d'un camí és el nombre de vèrtexs.

9. Un **circuit** és un camí tancat, és a dir, un camí que comença i termina al mateix lloc.

Notació. *Probablement, per denotar un camí si és un bàsic, ens bastarà amb dir d'on ve fins on va, és dir $A \to B$. Això no obstant, possiblement la millor forma és posar etiquetes a les arestes, de tal que $\sigma_1 := A \to B$. Si volem denotar que comença en B i termina en A, s'hi diu σ_1^{-1}. Així, un $A \to B \to C$ seria $\sigma_1 \cdot \sigma_2$. Aquest $\cdot$ no és commutatiu.*

Definició: S'hi diu que un circuit és reduït si no té $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1}$.

Definició: Un graf no dirigit és **connex** si hi ha un camí des de tot vèrtex qualsevol fins a tot altre.

Definició: Un component connex és un subgraf connex i maximal.

Definició: Un graf dirigit és **connex** si hi ha un camí des de tot vèrtex qualsevol fins a tot altre.

Proposició Per a un graf (V, E) no orientat les afirmacions següents són equivalents:

1. (V, E) és un graf connex.
2. $\forall v_o \in V$, existeix un camí d'arestes de v_o a v, $\forall v \in V$.
3. $\exists v_o \in V$ tal que existeix un camí d'arestes de v_o a v.

Notació. *Fem servir $\circ$ per multiplicar camins.*

Definició: Un graf dirigit és **feblement connex** si hi ha un camí des de tot vèrtex qualsevol fins a tot altre sense fer servir l'orientació, és a dir, seria connex en cas que fos no orientat.

Definició: Un graf dirigit és **semi connex** si al escullir qualssevol dos vèrtexs del graf hi existeix un camí connectant-los, sigui d'un sentit o d'altre.

Podem representar un graf no orientat amb una matriu de adjaciencia, també la matriu de incidencia, on cada vèrtex és una fila i una aresta és una columna,

problema si hi ha una amb el mateix origen i destí.
Nosaltres farem servir llistes de adjaciencia.

Definició: Un **arbre** és un graf sense circuits reduïts.

Proposició (Tecnicament es un lema) Equivalentment, un arbre és un graf on tota parella de vèrtexs estan connectats per un únic camí reduït.

Exercici (Demostració de l'anterior)

$\Rightarrow$) Suposem que $\exists v, w$ vèrtexs de G que es poden unir per dos (o més) camins reduïts σ i τ. Com que $\tau \neq \sigma$ $\exists j : a_j \neq b_j$. $j_0 = \min\limits_{j}\{a_j \neq b_j\}$ i m com el mínim $m \geq j_0$ tal que $\exists n \geq j_0 : V_m = W_n$. Llavors tenim el circuit $a_{j_0} \circ a_{j_0+1} \circ \cdots \circ a_m \circ b_n^{-1} \circ \cdots \circ b_{j_0}^{-1}$. I per tant, no és un arbre.

$\Leftarrow$) Suposem que no és un arbre, això implica que té un circuit reduït no trivial. Anomenem σ un camí que va de V a V. Llavors tenim dos camins, σ i $\emptyset$. Això, trivialment, no és equivalent.

■

Corolari: (Propietats dels arbres)

- Si s'afegeix qualsevol aresta, deixa de ser un arbre.
- Eliminar qualsevol aresta fa que l'arbre es desconnecti.
- Un arbre de n vèrtex té exactament $n-1$ arestes.

Definició: Si G és un graf, definim la característica d'Euler-Poincaré d'un graf com:

$$\chi(G) = \underbrace{|V|}_{\text{nombre de vèrtexs}} - \underbrace{|E|}_{\text{nombre d'arestes}}$$

Teorema Si G és un graf connex, són equivalents:

a) G és un arbre.

b) $\forall v, w$ vèrtexs de G, existeix un únic camí reduït que els uneix.

c) $\chi(G) = 1$.

Definició: Si G és un graf, $T \subseteq G$ és un arbre maximal si:

- T és un arbre
- $T \subseteq G$ es maximal si considerem $\overline{G}$ un subgraf de G tal que contingui T i sigui diferent de T llavors $\overline{G}$ no és un arbre.

Proposició (Tecnicament un lema) Sigui G un graf connex

a) Tot arbre $T \subseteq G$ està contingut en un arbre maximal.

b) $T \subseteq G$ és un arbre maximal $\Leftrightarrow$

- és un arbre
- té tots els vèrtexs de G

Exercici (Demostració de l'anterior lema)

a) Fem tots els possibles subgrafs (un nombre finit) i ens quedem amb els arbres més grans.

b) G és un graf connex i $T \subseteq G$ és un arbre maximal i que no conté tots els vèrtexs, volem una contradicció. Sigui V un vèrtex de l'arbre, i W un vèrtex que no sigui de l'arbre, com G és connex hi ha un camí que uneix V i W. Sigui $j_0 = \max_j \{V_k \in T \ \forall k \leq j\}$ $j_0 < l$ (W no és part de l'arbre). $V_{j_0} \in T$, $V_{j_0+1} \notin T$. Considerem $\overline{T} = T \cup \{a\} \cup \{V_{j_0} + 1\}$, com $\overline{T}$ és un arbre més gran que T, per tant T no era maximal.

■

Proposició (Tecnicament un lema) Si T és un arbre, llavors $\exists v \in T$ que sigui fulla.

Exercici (Demostració de l'anterior lema) Suposem que tots els vèrtexs de T tenen valència ≥ 2. Sigui $v_0 \in T$, triem una aresta a_1 que surti de v_0 i arribi a v_1. Continuem el camí, perquè té valència ≥ 2, sempre fent que $a_2 \neq a_1$, en continuar aquest camí, triem un camí reduït amb tants vèrtexs com es vulguin, per exemple un amb $|V| + 1$ vèrtexs. Llavors n'hi haurà un de repetit $V_i = V_j$ amb $i < j$. És un circuit reduït, i per tant T no és un arbre. ■

Recordem que també cal demostrar que si G és un graf connex llavors G és un arbre $\iff \chi(G) = 1$

Exercici (Demostració de a) $\iff$ c) de l'ultim teorema possat)

⇒) Suposem que G és un arbre, demostrem per inducció que $|V|$

- $|V| = 1$, llavors $\chi(G) = 1 - 0 = 0$ i G és un arbre.
  Suposem que això es continua complint amb n vèrtexs.
- $|V| = n+1$. Aplicant el lema, si v_0 un vèrtex de G amb València 1, per tant hi ha una única aresta que arriba a v_0 i a_0.
  Sigui $H \subset G$ un subgraf que té tots els vèrtexs i arestes de G excepte a_0 i v_0, llavors $|V_H| = n$ i $|E_H| = n-1$. Com se segueix complint, sabem que $\chi(H) = 1$, i per allò $\chi(G) = 1$

⇐) Sigui G un graf connex amb $\chi(G) = 1$, volem veure que G és un arbre.
Sigui $T \subseteq G$ un arbre maximal. Sigui $n = |V_G|$ i que $|E_G| = n - 1$
Llavors, T té n vèrtexs i com $\chi(T) = 1 \Rightarrow G = T$ i per allò, G és un arbre.

■

Definició: Un arbre amb arrel és un arbre on designem un vèrtex i li diem arrel.

Definició: Ara, té sentit parlar de profunditat, és a dir, la distància de l'arrel fins a un vèrtex.

La profunditat depèn de l'arrel!

Definició: En tenir un arbre arrelat, tot vèrtex té un pare, menys l'arrel. Un pare és el vèrtex connectat a aquell vèrtex que sigui de profunditat menor.

Definició: En tenir un arbre arrelat, tot vèrtex té un o més fills, menys les fulles. Un fill és el vèrtex connectat a aquell vèrtex que sigui de profunditat major.

3.1 Recórrer un graf

(Comienza el sexo) Hi ha dues filosofies:

- Per profunditat.

- Per nivell.

Com un graf és autoreferencial (no el veiem al complet), afegirem dades a un *stack*.

Podem extendre la noció de profunditat si escollim el nombre més

Probabilitat

Definició: Un fenomen o experiment aleatori presenten les següents característiques:

- Abans de realitzar l'experiment no sabem el resultat però sí el conjunt de resultats possibles.
- En teoria es pot realitzar sota les mateixes condicions infinites vegades.
- Es pot assignar probabilitats als resultats.

Definició: L'espai mostral és el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori. Es denota per la lletra Ω i els seus elements per ω.

Definició: Un esdeveniment és una col·lecció de subconjunts de l'espai mostral. Es pot calcular la probabilitat d'un esdeveniment. Ha de tenir estructura de σ-àlgebra.

Notació. *Si $\omega \in \Omega$ és un resultat de l'experimental tal que $\omega \in A$, diem que A s'ha realitzat.*

Definició: Sigui $\mathcal{A}$ una col·lecció de subconjunts d'Ω. $\mathcal{A}$ és una σ-àlgebra si es compleix el següent:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$, aleshores $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ són elements d'$\mathcal{A}$, aleshores $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Corolari: (propietats d'una σ-àlgebra) Sent $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$

Definició: (Fórmula de Laplace) La probabilitat d'un esdeveniment $\mathcal{A}$ sempre que el conjunt de resultats possibles sigui finit i equiprobable, la fórmula de Laplace es pot aplicar.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Casos probables a } A}{\text{Casos possibles}}$$

Una altra manera de calcular la probabilitat és fent servir una visió freqüentista:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) \text{ on } f_n(A) := \frac{\text{nombre de cops que hem obtingut } A}{n}$$

Definició: (axiomes de Kolmogorov) Siguin Ω un conjunt i $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra sobre Ω. Una probabilitat és qualsevol aplicació $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ que compleix el següent:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ són disjunts dos a dos llavors

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Definició: Un espai de probabilitat és la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Notació. *Per a unions disjuntes fem servir* $\uplus$.

Corolari: Propietats dels axiomes de Kolmogorov.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Definició: Quan parlem de *odds* de A, definim:

- Odds a favor de A: $\text{Odds}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)}$
- Odds en contra de A: $\text{Odds}(A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(A)}$

■ **Exemple** $\text{Odds}(A) = \frac{3}{2} \iff \mathbb{P}(A) = \frac{3}{2}\mathbb{P}(A^c)$ i sabem que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, llavors en resoldre tenim $\mathbb{P}(A) = 0.6$ i $\mathbb{P}(A^c) = 0.4$. ■

Notació.

- *Permutacions de n elements:* $\mathbf{P}_n = n!$
- *Variacions de n elements sense reposició on triem $m \leq n$:* $\mathbf{V}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
- *Variacions de n elements amb reposició on triem m:* $\mathbf{VR}_n^m = n^m$
- *Combinacions de n elements:* $\mathbf{C}_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{\mathbf{V}_n^m}{\mathbf{P}_m}$

4.1 Probabilitat condicionada

■ **Exemple** Llancem dos daus distingibles. Sabem llavors que $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots (6,6)\}$, $\#\Omega = 36$ simètric. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ és tal que $\mathbb{P}(\{i,j\}) = \frac{1}{36}$. Sigui $B \equiv$ "la puntuació dels daus és la mateixa" $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.17$ Abans de mirar el resultat del dau, ens diuen que la suma dels daus és 8. Com recalculem la probabilitat de B? ■

Notació. *Denotem que un esdeveniment condicionat per A de la manera $..|A$.*

Definició: Si A, B són esdeveniments tals que $\mathbb{P}(A) > 0$ definim

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple** (continuem l'anterior) Per tant, $A \equiv$ "la suma = 8" llavors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

■

Aquestes dues propietats es compleixen:

- $\mathbb{P}(B^c|A) = 1 - \mathbb{P}(B|A)$
- $\mathbb{P}(C_1 \cup C_2|A) = \mathbb{P}(C_1|A) + \mathbb{P}(C_2|A) - \mathbb{P}(C_1 \cap C_2|A)$

Però, en general, no és cert que $\mathbb{P}(B|A^c) = 1 - \mathbb{P}(B|A)$.

Teorema (Fórmula de les probabilitats compostes) Regla del producte

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)\,, \text{ sempre que } \mathbb{P}(A) > 0$$

Definició: Donats A i B esdeveniments, direm que són independents si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Si $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
Si $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Proposició (Propietats dels esdeveniments independents) Són equivalents

- A i B independents
- A i B^c independents
- A^c i B independents
- A^c i B^c independents

Definició: Diem que 3 esdeveniments A, B, C són independents si compleixen

- Són independents dos a dos, és dir

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) \end{cases}$$

- Compleixen $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$

Teorema (Formula de las probabilitats totals) Considerem $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ que siguin una partició de Ω, és a dir, $\Omega = \biguplus_{i=1}^{n} B_i$, tals que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sigui $A \in \mathcal{A}$, aleshores

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

Teorema (Formula de las probabilitats totals condicionada) Considerem $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ que siguin una partició de Ω, és a dir, $\Omega = \biguplus_{i=1}^{n} B_i$, tals que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sigui $A \in \mathcal{A}$ i $C \in \mathcal{A}$ amb $\mathbb{P}(C) > 0$, aleshores

$$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i \cap C)\,\mathbb{P}(B_i|C)$$

Teorema (Fórmula de Bayes) Considerem $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ que siguin una partició de Ω, és a dir, $\Omega = \biguplus_{i=1}^{n} B_i$, tals que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sigui $A \in \mathcal{A}$ amb $\mathbb{P}(A) > 0$, aleshores

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

$$\underbrace{LR}_{\text{Rao de versemblances}} = \frac{\mathrm{Odds}(A|E)}{\mathrm{Odds}(A)}$$

$$LR \begin{cases} \approx 1 & \text{l'evidència E no dona suport a } A \text{ ni al seu contrari} \\ > 1 & \text{l'evidència E dona suport a } A \\ < 1 & \text{l'evidència E dona suport al contrari de } A \end{cases}$$

4.2 Variables aleatòries

Definició: Diem que una aplicació $x : \Omega \to \mathbb{R}$ és una variable aleatòria si, per a tot interval B (o semirecta), tenim que

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in \mathcal{A}\}$$

La $\mathbb{P}$ no intervé en la definició de v.a., però la motivació és poder calcular-la.

Notació. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B)$

Notació. *Si $B = \{a\}$, ho escriurem $\mathbb{P}(X = a)$. Es farà també amb $<$, $\leq$ i els seus equivalents $>$, $\geq$.*

IMPORTANT: Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, aleshores tota l'aplicació $X : \Omega \to \mathbb{R}$ és una v.a. ($\mathcal{P}(\Omega)$ és el conjunt de totes les particions possibles amb Ω)

Proposició Siguin X, Y v.a. Sigui $a \in \mathbb{R}$. Aleshores:

$$X + Y, XY, aX, |X|, X^2$$

són també v.a.
Si $X(\omega) \neq 0\ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{X}$ és una v.a.

Proposició Tenim $\{X_n, n \geq 1\}$ successió de v.a.

$$x_n : \Omega \to \mathbb{R}$$

Suposem que $\forall \omega \in \Omega\ \{X_n(\omega), n \geq 1\}$ (successió de nombres reals) és convergent, llavors

Definició:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

4.2.1 Funció de distribució d'una v.a.

Definició: Sigui X una v.a. la funció de distribució de X és

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$x \longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

F ben definida, perquè

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]),\ \text{i}\ B = (-\infty, x] \subset \mathbb{R}$$

Proposició (Propietats)

1. F no decreixent: $x < y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$
2. F és contínua per la dreta i té límits per l'esquerra.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. F té, com a màxim, un nombre numerable de discontinuïtats.
5. $\mathbb{P}(s \leq x \leq t) = F(t) - F(s)$
6. $\mathbb{P}(X < s) = F(x^-)$
7. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$ IMPORTANT: F es discontinua en $x \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X = x) > 0$

Definició: Una v.a. X és discreta si $\exists S \subset \mathbb{R}$ finit o numerable tal que

$$\mathbb{P}(X \in S) = 1$$

- S suport de X
- Suposem que tot valor a S compleix que $\mathbb{P}(X = x) > 0$
- Suposem també que $S = \{x_i, i \in I\}, I \subset \mathbb{N}$

Definició: La funció de probabilitat d'una v.a. discreta X amb suport S és

$$p : S \to [0, 1]$$
$$x_i \longmapsto p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$$

Notació. *També, es pot escriure* $p_i = p(x_i)$

IMPORTANT: $\forall B \subset \mathbb{R}$ interval, tindrem que $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \in B}} p_i$

A partir de la funció de probabilitat es pot calcular tot.

Esdeveniment A amb $p := \mathbb{P}(A)$

Notació.

$$\begin{cases} \textit{Si A es realitza} \Longrightarrow & \textit{"Èxit"} \\ \textit{Si A no es realitza} \Longrightarrow & \textit{"Fracàs"} \end{cases}$$

Hi ha els seguents tipus de variables discretes:

1. Degenerat: $X = A$
2. Bernulli: $X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}, \; X \sim \mathcal{B}(p)$
3. Uniforme $X \sim \mathcal{U}\{1, 2, \ldots, n\}$
4. Binomial $X \sim B(n, p)$
5. Geomètrica $X \sim \mathcal{G}(p)$ (Propietat: $\mathbb{P}(X > l + k | x > l) = \mathbb{P}(X > k)\,,\ \forall l, k \in \mathbb{N}$)
6. Binomial negativa $X \sim BN(n, p)$
7. Hipergeomètrica
   - Amb reemplaçament ($\forall n \in \mathbb{N}$): $X \sim B\left(n, \frac{B}{n}\right)$
   - Sense reemplaçament ($m \leq N$) $X \sim H(N, B, n)$
8. Poisson $X \sim P_{oiss}(\lambda)$

4.2.2 Variables aleatories continues

Definició: X és una variable aleatòria contínua si $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

1. $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
2. f és integrable i $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $\forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty : \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$

Aquesta f es coneix com a <u>funció de densitat</u>.

Proposició $\mathbb{P}(X = a) = 0$, ja que aquesta integral resulta aquest valor.

Proposició La funció de distribució és $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, per tant, F és absolutament contiuna.

1. Llei Uniforme: $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$

2. Llei normal (o gaussiana): $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

   - La normal estàndard és $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$\mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Càlcul Numèric

Hi ha 3 tipus d'errors (4 si em comptes a mi):

1. Errors en les dades d'entrada
2. Errors a les operacions
3. Errors de truncament

Aquí es tractaran principalment els dos primers.

Teorema (Representació en punt flotant en base b) Per $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Tot $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ pot ser representat de la següent forma:

$$x = s(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b^{-i}) b^q$$

amb $s \in \{-1, 1\}, q \in \mathbb{Z}$ i $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. A més, la representació anterior és única si $\alpha_1 \neq 0$ i els α_i no són tots $b-1$ d'una posició en endavant.

Definició: (Representació en punt flotant) És la versió finita de la representació. En aquesta representació, tot nombre x consta de

- el signe, s
- la mantissa, que només consta d'un nombre finit de dígits, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ expressats en base b, i
- l'exponent, q, que està limitat a un rang prefixat, $q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$

Notació. *Si x és el valor exacte, $\tilde{x}$ és el valor aproximat.*

Definició: L'error absolut és $\Delta x = x - \tilde{x}$. L'error relatiu és $\frac{\Delta x}{x} = \frac{x - \tilde{x}}{x} = 1 - \frac{\tilde{x}}{x}$

Definició: Definim la fórmula de propagació d'error com $|\Delta f(x_o)| \lesssim h|f'(x_o)|$.

Definició: Amb dues variables, $|f(x+h, y+k)| \lesssim \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| |h| + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| |k|$ (dicho en clase: ¿por qué no se cancelan los ∂?)

Definició: Per derivades succesives, $|f(\tilde{x})| \lesssim \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| |\tilde{x}_i - x_i|$

Exercici Calcular de forma exacta i l'error absolut de $(2 \pm 0.01)(3 \pm 0.2)^2$. De manera exacta, tenim $F(x, y) = xy^2$

$$F(2, 3) = 2 \times 3^2 = 18$$

L'error absolut és el següent

$$|\Delta F(x, y)| \lesssim \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| |h| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| |k| = \left|y^2\right| |h| + |2xy| |k|$$

Si substituïm $x = 2, y = 3, h = 0.01$ i $k = 0.2$

$$|\Delta F(x, y)| \lesssim |9| |0.01| + |12| |0.2| = 0.09 + 2.4 = 2.49$$

■

Exercici Calcular de forma exacta i l'error absolut de $(2 \pm 0.01)e^{-1 \pm 0.2}$. De manera exacta, tenim $F(x, y) = xe^y$

$$F(2, -1) = 2e^{-1}$$

L'error absolut és el següent

$$|\Delta F(x, y)| \lesssim \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| |h| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| |k| = |e^y| |h| + |xe^y| |k|$$

Si substituïm $x = 2, y = -1, h = 0.01$ i $k = 0.2$

$$|\Delta F(x, y)| \lesssim \left|e^{-1}\right| |0.01| + \left|2e^{-1}\right| |0.2|$$

■

Notació. *Denotem un nombre x en punt flotant com $fl(x)$*

Notació. *Quan fem una operació amb punt flotant, ho posem de la següent forma per denotar que existeix error:*

- $x \oplus y = \mathit{fl}(\mathit{fl}(x) + \mathit{fl}(y))$
- $x \ominus y = \mathit{fl}(\mathit{fl}(x) - \mathit{fl}(y))$
- $x \otimes y = \mathit{fl}(\mathit{fl}(x) \cdot \mathit{fl}(y))$
- $x \oslash y = \mathit{fl}(\mathit{fl}(x) / \mathit{fl}(y))$

Posats a donar aproximacions de l'error relatiu, posem més.

Proposició (tecnicament és un Lema) $\Delta \log |f(x)| \approx$ l'error relatiu.

Proposició (Error absolut i relatiu de les operacions elementals)

- Error absolut de la suma o resta: Error absolut de $x\pm$ error absolut de y.
- Error relatiu de la multiplicació: Error relatiu de $x+$ error relatiu de y.
- Error relatiu de la divisió: Error relatiu de $x-$ error relatiu de y.

Definició: Direm que un algorisme és numèricament inestable quan petites pertorbacions dels resultats inicials produeixen una gran diferència en el resultat final. Això el farà inservible des del punt de vista numèric, donat que amplificarà de manera sistemàtica els errors de les dades inicials.

5.1 Zeros de funcions

El millor mètode per trobar un zero d'una funció és el mètode de bisecció, però és molt lent.
Hi ha molts, millor mirar el diaporama.

Exercici Aplicar el mètode de newton per calcular $\sqrt[k]{c}$ on $c \in \mathbb{R}^+$ i $k \geq 2$:

$$x = \sqrt[k]{c} \Rightarrow 0 = x^k - c \Rightarrow f(x) = x^k - c$$

Apliquem el mètode de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{kx_n^{k-1}}$$

Si comencem amb $x_0 = 3$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3.\underline{03}703703 \\
x_2 &= 3.\underline{03658}903 \\
x_3 &= 3.\underline{03658897} \\
x_4 &= 3.\underline{03658897}
\end{aligned}$$

■

Exercici Calculeu, usant quatre dígits de precisió i els mètodes d'eliminació gaussiana, la solució dels sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{8} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = & \frac{19}{16} \\ x_2 = & \frac{29}{16} \\ x_3 = & \frac{7}{9} \end{cases}$$

■

Exercici Obtenir la factoració LU sense pivotatge de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Llavors $U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&-8\end{pmatrix}$. Ara, calculem el L:

$$\begin{aligned}L&=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-7&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-7&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\7&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\7&2&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

Exercici (30)

$$A(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\b&a&b&0\\0&b&a&b\\0&0&b&a\end{pmatrix}$$

amb $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, determineu la regió dels punts del pla (a,b) per als que el mètode de Gauss-Seidel convergeix al resoldre el sistema $A(a,b)\,x=c$. En el cas $A(3,1)$ determineu el nombre de passos que caldria fer per a resoldre el sistema amb $c=(2,2,8,-5)^T$ pel mètode de Gauss-Seidel amb $x^{(0)}=(1,0,0,0)^T$ i amb un error $\left\|x^{(k)}-x\right\|_\infty<10^{-3}$.

$$\begin{vmatrix}\lambda a&b&0&0\\\lambda b&\lambda a&b&0\\0&\lambda b&\lambda a&b\\0&0&\lambda b&\lambda a\end{vmatrix}=0=\lambda^2\left(\lambda^2a^4-3\lambda a^2b^2+b^4\right)$$

$$\Rightarrow\lambda=\begin{cases}0\\\frac{3a^2b^2\pm\sqrt{9a^4b^4-4a^4b^4}}{2a^4}=\frac{(\pm\sqrt{5}-3)b^2}{2a^2}\end{cases}$$

$$R_{GS} = \max |\lambda_i| = \frac{\pm\sqrt{5} - 3}{2a^2} < 1 \Rightarrow a > b\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

Esta malament però dona igual. El procediment està be pero hi ha alguna cosa malament. ■