

1 Rotacions

1.1 L'espai euclidià estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb \mathbb{R}^3 .

Notació. En l'espai euclidià tenim l'origen a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i un punt arbitrari $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tècnicament.

Definició: La norma euclidiana d'un vector $V \in \mathbb{R}$ es defineix com

$$\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$$

que compleix $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \|V\|$
- $\|V\| = 0 \iff V = 0$

Aquesta norma mesura la distància euclidiana entre dos punts P_1 i P_2 per la fórmula

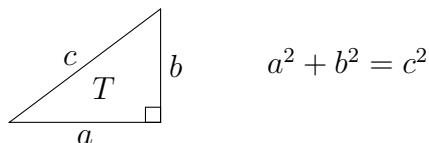
$$\mathcal{D}(P_1, P_2) := \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

que compleix les següents propietats

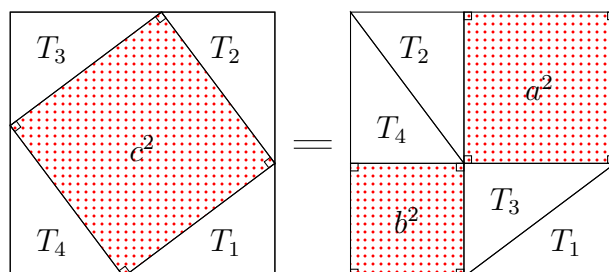
- $\mathcal{D}(P_1, P_3) \leq \mathcal{D}(P_1, P_2) + \mathcal{D}(P_2, P_3)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

Observació: La norma euclidiana d'un vector V correspon exactament a la seva longitud.

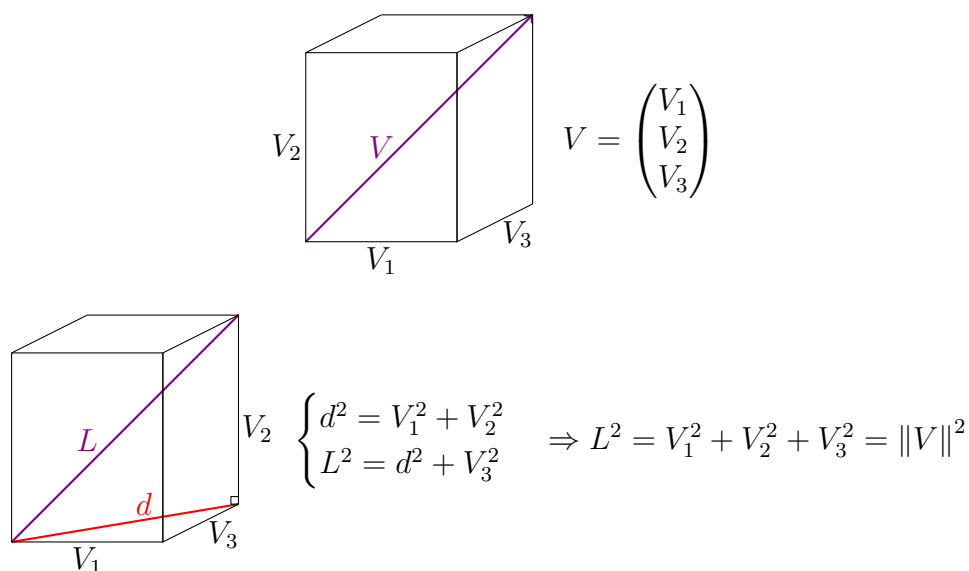
Demostració Recordem el teorema de Pitàgores.



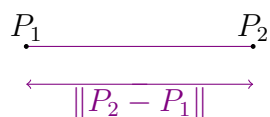
Com



Aleshores, veiem que $\|V\|$ és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que



Com la norma d'un vector $V \in \mathbb{R}^3$ correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a \mathbb{R}^3 correspon a la longitud del segment que uneix aquests punts:



Si tenim P_1 i P_2 punts que defineixen un segment, la longitud $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$

Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! ■

Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longituds conté la noció d'ortogonalitat:

Definició: Anomenem producte escalar a \mathbb{R}^3 la funció

$$\langle \dots, \dots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle = V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3$ que és

- Bilineal: $\langle V + \lambda \bar{V}, W \rangle = \langle V, W \rangle + \lambda \langle \bar{V}, W \rangle$ ídem si $V \rightsquigarrow W$
- Simètrica: $\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$
- Definit positiu: $\langle V, V \rangle > 0$ si $V \neq 0$

Observem que $\forall V \in \mathbb{R}^3$, $\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$: la norma es pot definir en funció del producte escalar.

Recíprocament, veiem fàcilment la Identitat de Polarització

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{2} (\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2) \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

Exercici Arribar a la Identitat de Polarització a partir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W \rangle| \leq \|V\| \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

Demostració Fixem $V, W \in \mathbb{R}^3$ qualsevol. Aleshores definim $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$$

Observem que $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W \rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W \rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow \mathcal{P}$ és un polinomi en λ de grau 2. Llavors $\Delta = 4(\langle V, W \rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2)$ ha de ser ≤ 0 , ja que $\mathcal{P} \geq 0$.

Deduïm que $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W \rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W \rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$

Si $\Delta = 0$ això implica que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$, aleshores $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$ ■

Com a conseqüència, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W \rangle| \leq \|V\| \|W\|)$$

Definició: L'únic $\theta \in [0, \pi]$: $\cos \theta = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|}$ s'anomena angle euclidià entre V i W .

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.

Si $V = (1, 0, 0)$ i $W = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ obtenim que $\cos \theta = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} = \frac{\cos \alpha}{1 \times 1} = \cos \alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

Definició: Diem que V i W són ortogonals si $\langle V, W \rangle = 0$ o, de forma equivalent, si l'angle entre V i W és $\frac{\pi}{2}$.

Notació: Denotem dos vectors ortogonals entre si com $V \perp W$

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si $\langle U, V \rangle = \langle V, W \rangle = \langle U, W \rangle = 0$, És base ortonormal, si és base ortogonal i a més $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

\mathbb{R}^3 admet una estructura addicional que permet multiplicar dos vectors:

Definició: $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \begin{pmatrix} V_2 W_3 - V_3 W_2 \\ V_3 W_1 - V_1 W_3 \\ V_1 W_2 - V_2 W_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat: $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$ ídem a la dreta.
- Antisimetria: $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem fàcilment que $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ $\langle V \wedge W, V \rangle = 0 = \langle V \wedge W, W \rangle$ Més enllà

Proposició $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle U, V \wedge W \rangle = \det(U, V, W)$

1.2 Moviments rígids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista \neq (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d'un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.

Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preserven un objecte (s'anomenen moviments rígids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.

Comencem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

Definició: El grup ortogonal és el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \langle MV, MW \rangle = \langle V, W \rangle \forall V, W \in \mathbb{R}^3\}$$

Observació: Si $M \in O(3)$ i $V \in \mathbb{R}^3$, $\|MV\| = \|V\|$

Si $M \in O(3)$ i $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle MV, MW \rangle = V^t M^t M W$ per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^t M = \mathbb{I}_3\}$$

Proposició Si $M \in O(3)$, llavors $\det(M) = \pm 1$

Definició: Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{M \in O(3) \mid \det M = 1\}$$

Per construcció els elements de $SO(3)$ són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament, (Me_1, Me_2, Me_3) compleix

1. (Me_1, Me_2, Me_3) és una base ortogonal
2. $\det(Me_1, Me_2, Me_3) = \det M = 1$ i doncs $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un exemple de $M \in O(3) \setminus SO(3)$ és la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aquestes transformacions de $O(3) \setminus SO(3)$ canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial èmfasi en el subgrup $SO(3)$!

Observació: $O(3)$ i $SO(3)$ són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si $M, N \in O(3)$ (o $SO(3)$), $MN \in O(3)$.
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$.
- Si $M \in O(3)$, aleshores M és invertible i $M^{-1} \in O(3)$.

Més generalment,

Definició: Un conjunt G és un grup Si

- \exists operació interna $\cdot : G \cdot G \rightarrow G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (element neutre)
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1}g = e$ (inversa)

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació que preserva les distàncies $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$
 Aleshores $\exists P_o \in \mathbb{R}^3, M \in O(3)$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

Definició: Si a més f preserva l'orientació, obtenim que $M \in SO(3)$. Un tal f s'anomena moviment rígid i correspon al fet de desplaçar un objecte a \mathbb{R}^3 (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups $O(3)$ i $SO(3)$, i observar que el subgrup $SO(3)$ està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidià de dimensió n (on $n \in \mathbb{N}$), és a dir, treballem a \mathbb{R}^n amb el producte escalar $\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^n V_i W_i \forall V, W \in \mathbb{R}^n$ podem definir $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$ i $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$
 Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$:
 $M = (a) \in O(1) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \Leftrightarrow (a^2) = 1$
 $\Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow M = \pm \mathbb{I}_1$
 Deduïm que $O(1) = \{\pm \mathbb{I}_1\}$ i $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$
- $n = 2$

Proposició Sigui $M \in O(2)$. $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Això genera una rotació d'angle θ en el primer cas i en el segon una simetria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle θ .

Observació: En particular, si $M \in SO(2)$, $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$

Proposició Sigui $M \in O(3)$. Aleshores $\exists B \in SO(3), \exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Geomètricament, això significa que si $M = \mathcal{M}_{Can}(L)$, $\exists \mathcal{B} = (U, V, W)$ i $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $B = P_{Can \rightarrow \mathcal{B}}$ i $BMB^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Com $B \in SO(3)$, vol dir que la base \mathcal{B} és base ortonormal positiva (és a dir, té la mateixa orientació que la base canònica $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 1$)

- Cas on $\pm 1 = 1$:

$$\begin{aligned} U &= L(U) \\ L(V) &= \cos \theta V + \sin \theta W \\ L(W) &= -\sin \theta V + \cos \theta W \end{aligned}$$

Llavors L és una rotació d'eix U i d'angle θ .

- Cas on $\pm 1 = -1$:

$$\begin{aligned} U &= -L(U) \\ L(V) &= \cos \theta V - \sin \theta W \\ L(W) &= \sin \theta V + \cos \theta W \end{aligned}$$

L és la composició d'una simetria \perp al pla $U^\perp = Vect(V, W)$ i de la rotació d'angle θ i eix U

Teorema (de les rotacions d'Euler) Sigui $M \in SO(3)$. Llavors $\exists B \in SO(3)$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Per això, $SO(3)$ rep el nom de grup de les rotacions.

En particular, i no és gens evident, si componem dues rotacions a l'espai, obtenim una tercera.

Cas particular: Si $U = U'$, $R_{\theta_1, U'} \circ R_{\theta_2, U} = R_{\theta, U}$. Això és evident, però $R_{\theta_1, U} \circ R_{\theta_2, V} = R_{\theta, W}$ i és molt difícil obtenir θ i W .

1.4 Representació de $SO(3)$ via l'espai projectiu

Associem a cada punt $p \neq 0$ de la bola B de radi π la rotació d'eix $\frac{p}{\|p\|}$ d'angle $\|p\|$ i a $p = 0$ associem la rotació Identitat \mathbb{I}_3 .

Com $\forall p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|p\| = \pi$ ($\Leftrightarrow p \in \partial B$), tenim que $R_{\frac{p}{\pi}, \pi} = R_{\frac{-p}{\pi}, \pi}$, en tenim prou amb B per representar $SO(3)$.

Acabem de definir una aplicació

$$\begin{aligned} \Omega : B (= B^3(0, \pi)) &\longrightarrow SO(3) \\ p &\longmapsto R_{\frac{p}{\|p\|}, \|p\|} \end{aligned}$$

Injectiva? No, perquè $\Omega((0, 0, \pi)) = \Omega(0, 0, -\pi)$.

Però ho és quasi: $\forall p, q$ tal que $\|p\| < \pi$ i $\|q\| < \pi$, tenim que $\Omega(p) \neq \Omega(q)$.

A més si $\|p\| = \|q\| = \pi$, $\Omega(p) = -\Omega(q)$.

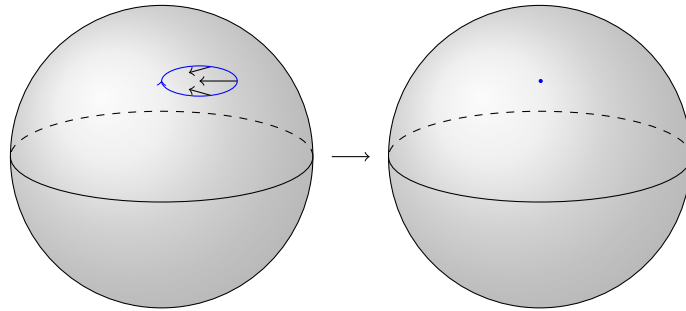
Exhaustiva? Sí.

Al final, si enganxem els parells de punts antipodals (parells de la forma $(p, -p)$ amb $\|p\| = \pi \iff p \in \partial B$) obtenim un espai quocient que representa rotacions:

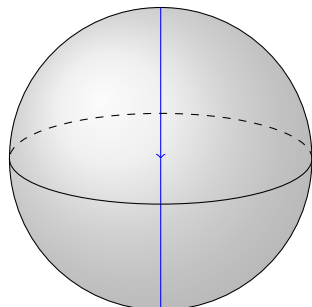
$$SO(3) = B / \{p = -p \text{ si } p \in \partial B\}$$

Aquest espai s'anomena espai projectiu de dim 3 i es denota $\mathbb{R}P^3$.

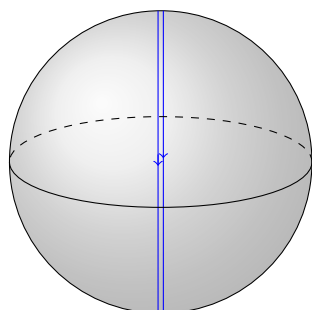
Observació: Existeixen corbes tancades a B^3 que es poden contractar en un punt.



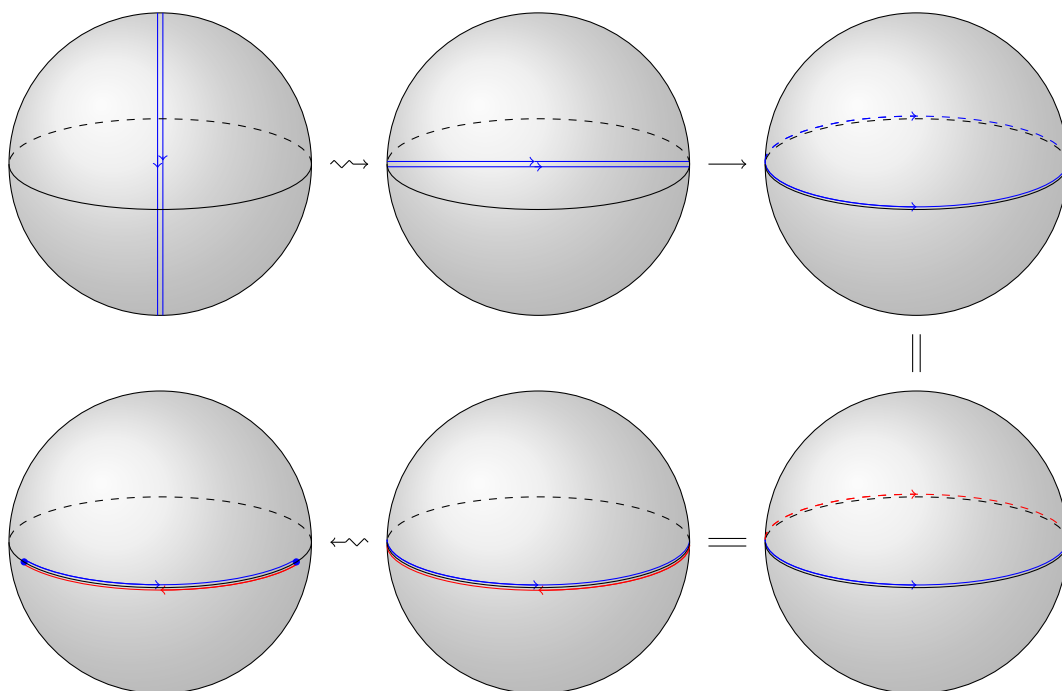
Observació: Existeixen corbes que no es poden contractar en un punt.



Observació: Existeixen dobles corbes que si es poden contractar en un punt.



Expliquem aquesta última observació:



2 Els quaternions

En aquest nou capítol, denotarem la base ortonormal estandard (e_1, e_2, e_3) a \mathbb{R}^3 com (i, j, k) .

Es a dir, que $i = e_1$, $j = e_2$ i $k = e_3$.

2.1 Definició i primeres propietats:

Definició: Un quaternió q és la suma (formal) d'un escalar $q_0 \in \mathbb{R}$ i d'un vector $Q := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. És a dir, que $q = q_0 + Q$. Farem servir \mathbb{H} (de Hamilton) per el conjunt dels quaternions que es pot identificar a \mathbb{R}^4 via l'identificació:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k &\longmapsto (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

Denotarem també que $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$.

Donats dos quaternions $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ i $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim:

- La suma de quaternions com $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \in \mathbb{H}$
- El producte per un escalar com $\lambda p = \lambda p_0 + \lambda p_1i + \lambda p_2j + \lambda p_3k \in \mathbb{H}$
- El producte de quaternions com $pq = \underbrace{p_0q_0 - \langle P, Q \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p_0Q + q_0P + P \wedge Q}_{\in \mathbb{R}^3}$
 $pq \in \mathbb{H}$

Observació: $\forall p, q \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} pq - qp &= (p_0q_0 - \langle P, Q \rangle) + (p_0Q + q_0P + P \wedge Q) \\ &\quad - (q_0p_0 - \langle Q, P \rangle) - (q_0P + p_0Q + Q \wedge P) \\ &= 2 \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

Observació:

$$\begin{aligned}
 i^2 &= ii \\
 &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 1i + 0j + 0k) \\
 &= pq \text{ amb } p_0 = q_0 = 0, p_1 = q_1 = 1, p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = 0 \\
 &= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\
 &= 0 - 1 + 0 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $j^2 = k^2 = -1$.

Observació:

$$\begin{aligned}
 ij &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 0i + 1j + 0k) \\
 &= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\
 &= 0 - 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= k
 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ i $ki = j = -ik$.

Al final, hem obtingut les regles de Hamilton, fonamentals per calcular amb quaternions:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{cases}$$

En particular, veiem que \mathbb{H} és un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió 4, amb base $(1, i, j, k)$ amb producte que no és conmutatiu: $ij \neq ji$!

En canvi:

Proposició El producte sobre \mathbb{H} és associatiu i distributiu respecte l'addició.

Observació: $1q = q$ i $0q = 0$

2.2 Conjugació, norma i invers

Definició: Siguin $q = q_0 + \underbrace{q_1i + q_2j + q_3k}_Q \in \mathbb{H}$. Definim el conjugat de q

com

$$\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = q_0 - Q$$

Direm que q és:

- (quaternió) real si $q = \bar{q} \iff Q = 0 \iff q = q_0$
- (quaternió) imaginari pur si $q = -\bar{q} \iff q_0 = 0 \iff q = Q$

Denotem $\mathbb{R} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = q\} \subset \mathbb{H}$ el subconjunt de reals.

Exercici Demostrar que $q \in \mathbb{R} \iff pq = qp, \forall p \in \mathbb{H}$ ■

Denotarem $\mathbb{H}^{\text{pur}} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\} \subset \mathbb{H}$ el subconjunt de quaternions imaginaris purs.

Proposició $\forall p, q \in \mathbb{H}, \overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$ i $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$

Demostració El primer punt és evident. Pel segon, ja n'hi ha prou donada la distributivitat de verificar-ho per i, j, k i per exemple:

$$\begin{cases} \overline{ij} = \bar{k} = -k \\ \overline{ji} = -j(-i) = ji = -k \end{cases}$$

■

Definició: Sigui $q \in \mathbb{H}$. Definim la seva norma $N(q) \in \mathbb{R}_+$ per la fórmula:

$$N(q) = \sqrt{q\bar{q}} \in \mathbb{R}$$

Observació: $\overline{q\bar{q}} = \overline{q\bar{q}} \Rightarrow q\bar{q} \in \mathbb{R}$ i a més

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= q_0^2 - \langle Q, -Q \rangle + \underbrace{q_0(-Q) + q_0(Q)}_{=0} + \underbrace{Q \wedge (-Q)}_{=0} \\ &= q_0^2 + \langle Q, Q \rangle \end{aligned}$$

es a dir $q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \in \mathbb{R}_+$

En particular, $N(q) \geq 0$ i $N(q) = 0 \iff q = 0$.

Observació: $N(q)$ coincideix amb la norma euclidiana a \mathbb{R}^4 per la identificació

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\simeq \mathbb{R}^4 \\ 1 &\leftrightarrow e_1 \\ i &\leftrightarrow e_2 \\ j &\leftrightarrow e_3 \\ k &\leftrightarrow e_4 \end{aligned}$$

Proposició La norma $N : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es multiplicativa, és a dir, $N(pq) = N(p)N(q) \forall p, q \in \mathbb{H}$.

Demostració

$$N^2(pq) = pq\overline{pq} = \overline{q} \underbrace{\overline{p}p}_{N^2(p)} q = \underbrace{q}_{N^2(p)} N^2(p)q = N^2(p)N^2(q)$$

■

Observació: Denotem

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \{q \in \mathbb{H} \text{ tal que } q_2 = q_3 = 0\} \\ &= \{q_0 + q_1 i \mid q_0, q_1 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Obeeix que \mathbb{C} és estable per la multiplicació. Tenim llavors que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset (\mathbb{H}, +, \times)$

Definició: Sigui $q \in \mathbb{H}$ i $q \neq 0$, aleshores, la inversa de q , $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)^2}$ que compleix $q^{-1}q = 1$ i $qq^{-1} = 1$.

Teorema \mathbb{H} és un cos (com \mathbb{R} i \mathbb{C}).

Demostració • La suma i la multiplicació són associatives.

- La suma és commutativa.
- Existeix element neutre per la suma i per la multiplicació (0 i 1, respectivament).
- Distribució de multiplicació relativa a suma.
- Tot element admet un invers per la suma ($q + (-q) = 0$).
- Tot element no nul admet un invers per la multiplicació ($qq^{-1} = 1$).

■

Notació. Si $q \in \mathbb{H}$, $Re\ q := \frac{1}{2}(q + \overline{q}) \in \mathbb{R}$ i $Im\ q := \frac{1}{2}(q - \overline{q}) \in \mathbb{H}^{pur}$.

2.3 Quaternions unitaris

Definició: Un quaternió $u \in \mathbb{H}$ és unitari si satisfà $N(u) = 1$. Denotarem $\mathbb{H}^* = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$ el conjunt dels quaternions unitaris. Denotarem $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid N(u) = 1\}$ el subconjunt dels quaternions unitaris.

Aquest subconjunt té les següents propietats:

Proposició

1. $\forall u, v \in \mathbb{U}, u^{-1} = \bar{u}$ i $uv \in \mathbb{U}$ i en particular, (\mathbb{U}, \times) satisfà les propietats d'un grup.
2. $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$

Demostració 1. $\forall u \in \mathbb{U} u^{-1} = \bar{u}$ ja que $N(u) = 1$, aleshores $N(\bar{u}) = N(\bar{u})N(u) = N(u\bar{u}) = 1 \Rightarrow u^{-1} \in \mathbb{U}$

2. Si $u \in \mathbb{R} u = u_0$ amb $u_0 \in \mathbb{R}$ i $N^2(u) = u_0^2 = 1 \Rightarrow u = u_0 = \pm 1$

■

Observació: Podem escriure $\mathbb{U} = \{q_0 + q_1i + q_2j + q_3k | (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4 \text{ i } q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$, i observem que

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4 \\ \check{\mathbb{U}} &\xrightarrow{\sim} \check{S}^3 \end{aligned}$$

\mathbb{U} s'identifica amb l'esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \text{Recordem que } \mathbb{H}^{pur} &= \{q \in \mathbb{H} | \bar{q} = -q\} \quad \text{i per aixó podem identificar } \mathbb{H}^{pur} \\ &= \{q \in \mathbb{H} | \text{Re } q = 0\} \\ &= \{Q | Q \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

amb \mathbb{R}^3 via l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{pur} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ q = Q &= q_1i + q_2j + q_3k \mapsto Q = (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

Proposició Si $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$, $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$

Demostració Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, $pq = -\langle P, Q \rangle + P \wedge Q$ com $p_0 = q_0 = 1$ i en particular

$$q^2 = -\langle Q, Q \rangle = -\|Q\|^2 = -N^2(q)$$

■

Observació: Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, $pq - qp = 2P \wedge Q$

Teorema Siguin $p, q, r \in \mathbb{H}^{pur}$ i denotem els vectors corresponents per $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$. Aleshores

$$(P, Q, R) \text{ BON} \oplus \text{ a } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = q^2 = r^2 = -1 \\ pq = r = -qp \\ qr = p = -rq \\ rp = q = -pr \end{cases}$$

Observació: (i, j, k) compleixen aquestes formules! No es sorpresa ja que (i, j, k) és un BON \oplus a \mathbb{R}^3 .

Demostració (\Leftarrow) Recordem que si $q \in \mathbb{H}^{pur}$, $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$ i per tant P, Q, R són de norma euclidiana $= 1$

Lema: Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, i $P, Q \in \mathbb{R}^3$ són els vectors associats aleshores

$$\begin{cases} Re(pq) &= -\langle P, Q \rangle \\ Im(pq) &= P \wedge Q \end{cases}$$

Demostració $pq = p_0q_0 - \langle P, Q \rangle + p_0Q + q_0P + P \wedge Q = -\langle P, Q \rangle + P \wedge Q$ ja que $p_0 = q_0 = 0$ ■

Ara bé, $P \wedge Q = pq = r = R$ i $\langle P, Q \rangle = -Re(pq) = -Re(r) = 0$ doncs (P, Q, R) BON directe. (\Rightarrow) Si (P, Q, R) és BON \oplus , $\|P\| = 1 = -p^2$ i idem per Q i R . Aleshores $pq = \underbrace{-\langle P, Q \rangle}_{=0} + P \wedge Q = R = r$ i idem per qr i rp . ■

2.4 Quaternions i Rotacions

Sigui $u \in \mathbb{U}$, considerem l'aplicació $\Phi_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$q \mapsto uq\bar{u}$$

Proposició $\forall p, q \in \mathbb{H}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. Φ_u és lineal: $\Phi_u(p + \lambda q) = \Phi_u(p) + \lambda \Phi_u(q)$
2. Φ_u és multiplicativa: $\Phi_u(pq) = \Phi_u(p)\Phi_u(q)$
3. $\overline{\Phi_u(p)} = \Phi_u(\bar{p})$
4. $Re(\Phi_u(p)) = Re(p)$, en general $Im(\Phi_u(p)) \neq Im(p)$
5. Φ_u preserva la norma: $N(\Phi_u(p)) = N(p)$

Demostració 1 i 2 son clares.

$$3. \overline{uq\bar{u}} = \bar{\bar{u}q\bar{u}} = u\bar{q}u$$

$$\begin{aligned} 4. Re(q) &:= \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \rightsquigarrow Re(\Phi_u(p)) = \frac{1}{2}(\Phi_u(p) + \overline{\Phi_u(p)}) = \frac{1}{2}(\Phi_u(p) + \Phi_u(\bar{p})) \\ &= \Phi_u(Re(p)) = Re(p\Phi_u(1)) \\ &= Re(p) \end{aligned}$$

$$5. N(\Phi_u(p)) = \sqrt{u\bar{p}u\bar{u}p} = \sqrt{u\bar{p}p} = N(p)$$

■

A més:

Proposició $\forall u, v \in \mathbb{U}$

- $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}} \iff u = \pm 1$
- $\forall u, v \in \mathbb{U}, \Phi_{uv} = \Phi_u \circ \Phi_v$ i Φ_u és invertible, amb $\Phi_u^{-1} = \Phi_{\bar{u}}$
- $\Phi_u = \Phi_v \iff u = \pm v$

Demostració 1. Si $u = \pm 1$ aleshores $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$ Recíprocament, si $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$ aleshores $\forall q \in \mathbb{H}, uq\bar{u} = q \iff u\bar{q} = qu$

Lema: Si $p \in \mathbb{H}$, tal que $\forall q \in \mathbb{H}, pq = qp$ aleshores $p \in \mathbb{R}$.

Demostració Escrivim $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$. En particular,

$$\begin{aligned} pi = ip &\iff p_0i - p_1 - p_2k - p_3j = p_0i - p_1 + p_2k + p_3j \\ &\iff 2p_2k + 2p_3j = 0 \\ &\iff p_2 = p_3 = 0 \iff p = p_0 + p_1i \end{aligned}$$

i la relació $pj = jp \iff p_1 = 0$. Al final $p = p_0 \in \mathbb{R}$. ■

Doncs $u \in \mathbb{R} \cap \mathbb{U}\{\pm 1\}$.

2. $\Phi_u(\Phi_v(p)) = uv p \bar{v} \bar{u} = uv p \bar{u} \bar{v} = \Phi_{uv}(p)$ Ara bè, $\forall u \in \mathbb{U}, \Phi_u \circ \Phi_{\bar{u}} = \Phi_{u\bar{u}} = \Phi_1 = Id_{\mathbb{H}} \Rightarrow \Phi_u^{-1} = \Phi_{\bar{u}}$
3. $\Phi_u = \Phi_v \Rightarrow \Phi_u \circ \Phi_{v^{-1}} = Id_{\mathbb{H}}$ ■

Ara denotarem $\Psi_u : \mathbb{H}^{pur} \rightarrow \mathbb{H}^{pur}$ la restricció de Φ_u als quaternions imaginaris purs.

Si identifiquem $\mathbb{H}^{pur} \simeq \mathbb{R}^3$, obtenim una aplicació induïda

$$p_1i + p_2j + p_3k \mapsto (p_1, p_2, p_3)$$

$R_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definit per $R_u(p_1, p_2, p_3) = \Psi_u(p_1i + p_2j + p_3k)$

Les dues proposicions anteriors impliquen el següent:

- R_u és lineal $\forall p, q \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- R_u és invertible
- De fet, R_u serà una rotació.

Teorema $u, v \in \mathbb{U}$, aleshores

1. $R_u \in SO(3)$ (és a dir, R_u és una rotació)
2. $R_u \circ R_v = R_{uv}$ i $R_u^{-1} = R_{\bar{u}}$
3. $R_u = R_v \iff u = \pm v$

Demostració 1. Observem que $\Psi_u(i^2) = \Psi_u(i)^2 \iff -1 = \Psi_u(i)^2$ i de la mateixa manera $\Psi_u(j)^2 = \Psi_u(k)^2 = -1$. Després $\Psi_u(ij) = \Psi_u(k) = \Psi_u(-ji) \iff \Psi_u(i)\Psi_u(j) = \Psi_u(k) = -\Psi_u(j)\Psi_u(i)$ i de la mateixa manera obtenim

$$\begin{cases} \Psi_u(j)\Psi_u(k) = \Psi_u(i) = -\Psi_u(k)\Psi_u(j) \\ \Psi_u(k)\Psi_u(i) = \Psi_u(j) = -\Psi_u(i)\Psi_u(k) \end{cases}$$

I doncs deduem que $(\Psi_u(i), \Psi_u(j), \Psi_u(k))$ és un BON \oplus de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow (R_u(1, 0, 0), R_u(0, 1, 0), R_u(0, 0, 1))$ és un BON $\oplus \Rightarrow \text{mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(R_u) \in SO(3)$.

2 i 3 es dedueixen de la proposició anterior. ■

Notació. Des d'ara no distingirem entre R_u i Ψ_u .

Observació: En particular, obtenim un morfisme de grups:

$$\begin{aligned} R : (\mathbb{U}, \times) &\rightarrow (SO(3), \times) \\ u &\mapsto R_u (= \Psi_u \text{ via la identificació } \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^{pur}) \end{aligned}$$

Amb $R_u(Q) = R_u(q) = uq\bar{u}$

tal que $R_{uv} = R_u \circ R_v$ i $R_u = R_v \iff u = \pm v$.

Així podem identificar $SO(3) \simeq \mathbb{U} \setminus \{ \pm Id \} \simeq \mathbb{S}^3 \setminus \{ \pm 1 \}$.

Ara veiem que R és exhaustiva i permet descriure qualsevol rotació.

Teorema Sigui $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ amb $\|Q\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Definim $u(Q, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q$. Aleshores $u(Q, \theta) \in \mathbb{U}$ i $R_{u(Q, \theta)}$ és la rotació a \mathbb{R}^3 d'un eix Q i un angle θ . En particular, l'aplicació R és exhaustiva.

Demostració

$$\begin{aligned} N(u(Q, \theta)) &= u(Q, \theta) \overline{u(Q, \theta)} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} Q^2 \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Primer, comprovem que $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$ és l'eix de la rotació $R_{u(Q,\theta)}$:

$$\begin{aligned} R_{u(Q,\theta)}(q) &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) Q (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Q) \\ &= \underbrace{(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q)(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Q)}_{=u(Q,\theta)\overline{u(Q,\theta)}} = Q \iff R_{u(Q,\theta)}(Q) = Q \end{aligned}$$

Ara comprovem que l'angle de la rotació $R_{u(Q,\theta)}$ és θ :

Per això triem $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow p_1, p_2 \in \mathbb{H}^{pur}$ tals que (P_1, P_2, Q) sigui BON \oplus .

Com P_1, P_2, Q és BON \oplus calculem

$$\begin{aligned} R_{u(Q,\theta)}(P_1) &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) P_1 (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Q) \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) (\cos \frac{\theta}{2} P_1 - \sin \frac{\theta}{2} \underbrace{P_1 Q}_{=-Q P_1}) \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} Q) (\cos \frac{\theta}{2} P_1 + \sin \frac{\theta}{2} Q) P_1 \\ &= (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} Q + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} Q + \sin^2 \frac{\theta}{2} Q) P_1 \\ &= (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) P_1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \underbrace{Q P_1}_{=P_2} \\ &= \cos \theta P_1 + \sin \theta P_2 \end{aligned}$$

Per tant, deduíem que l'angle de $R_{u(Q,\theta)}$ és θ . ■

Observació: Podem comprovar que $R_{u(Q,\theta)(P_2)} = -\sin \theta P_1 + \cos \theta P_2$. Deduíem que

$$Mat_{(Q, P_1, P_2)}(R_{u(Q,\theta)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$