Exercici 1:

a) Trobeu els punts de la gràfica de la funció $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - y$ tals que el pla tangent és paral·lel al pla $x + y - z = 1$.
Solució. Un pla tangent paral·lel al pla $x + y - z = 1$ ha de tenir el vector normal paral·lel, és a dir, $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} = \frac{-1}{C}$ on (A, B, C) és el vector normal de la gràfica en un determinat punt. Per calcular aquest determinat punt fem servir que el gradient d'un punt a la gràfica és el vector normal del pla en aquest punt. Llavors, si tenim en compte que $z = f(x,y)$, podem trobar que $x^3 + 3y^2 - y - z = 0$ i si fem les derivades parcials d'aquesta equació tenim

$$V_n = \left(3x^2, -6y - 1, -1\right)$$

I ara, sabem que $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{-6y-1} = 1$. Amb això arribem al seguent:

$$\begin{cases} 1 = 3x^2 \\ 1 = -6y - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Per trobar la z d'aquest punt hem de evaluar la funció en els corresponents valors

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

I amb això, tenim dos punts que compleixen l'enunciat i són els següents:

$$\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{9}\right) \text{ i } \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

□

b) Trobeu el vector normal i el pla tangent a la superfície $x^2 - 3y^3 - z = 4$ al punt $(1, 1, -6)$
Solució. Definim $f(x,y,z) := x^2 - 3y^3 - z$ primer de tot comprovem que $f(1,1,-6) = 4$

$$\begin{aligned} 4 &\stackrel{?}{=} f(1,1,-6) \\ &\stackrel{?}{=} 1 - 3 + 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

efectivament, ho compleix. Ara, calculem el vector normal del pla tangent calculant ∇f i avaluant-ho al punt demanat. $\nabla f = (2x, -9y^2, -1)$ i si ara ho avaluem en $(1, 1, -6)$ resulta en $\nabla f(1, 1, -6) = (2, -9, -1)$. Aquest és el nostre vector normal.
Ara, sabem que el pla serà $2x - 9y - z = D$, per trobar la D avaluem en el punt $(1, 1, -6)$, aquesta $D = -1$. El pla tangent de $x^2 - 3y^3 - z = 4$ és $2x - 9y - z = -1$. □

Exercici 2:

a) Estudieu la diferenciabilitat de la funció $f(x,y)$ definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solució. Primer de tot calculem ∇f quan $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\nabla f = \left(\frac{3x^2 y \left(x^4+y^2\right) - x^3 y \left(4x^3\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}, \frac{x^3\left(x^4+y^2\right) - x^3 y \left(2y\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2} \right)$$

això ho podem simplificar bastant, així que ho fem

$$\nabla f = \left(\frac{3x^2y^3 - x^6 y}{\left(x^4+y^2\right)^2}, \frac{x^7 - x^3y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2} \right)$$

Llavors,

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{3x^2y^3 - x^6 y}{\left(x^4+y^2\right)^2}, \frac{x^7 - x^3y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2} \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les derivades existeixen per ambdues variables, llavors la primera condició es compleix. Ara, comprovem si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x \rangle}{\|x - x_0\|} = 0$, veiem que només hem de comprovar $x_0 = (0,0)$, ja que per la resta està clar que ho compleix per la definició de diferenciació. Llavors, comprovem aquest cas:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\|(x,y) - (0,0)\|} \\
&\overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \\
&\overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{\left(x^4+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\
\text{si fem } y = mx\text{:} \quad &\overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^3\,(mx)}{\left(x^4+(mx)^2\right)\sqrt{x^2+(mx)^2}} \\
&\overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{\left(x^4+m^2x^2\right)\sqrt{x^2+m^2x^2}} \\
&\overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^3\left(x^2+m^2\right)\sqrt{1+m^2}} \\
&\overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\left(x^2+m^2\right)\sqrt{1+m^2}} \\
\text{aquí apliquem l'Hôpital:} \quad &\overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{m}{2x\sqrt{1+m^2}} = \infty \\
&\neq \infty
\end{aligned}$$

Clarament, $0 \neq \infty$, i per això sabem que f no és diferenciable. Amb això ens basta, pot ser que el límit no existeixi, però sabem que si no existeix tampoc es diferenciable. $\square$

b) Estudieu el límit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^a}{3x^2+5y^2}$$

segons els valors de $a>0$.
Solució.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^a}{3x^2+5y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^a|\,|y^a|}{3x^2+5y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2a}+y^{2a}}{6x^2+10y^2}$$

Amb això podem separar-ho

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2a}}{6x^2+10y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{2a}}{6x^2+10y^2}$$

Llavors, si busquem cancel·lar una mica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 x^{2(a-1)}}{x^2\left(6+10\frac{y^2}{x^2}\right)} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 y^{2(a-1)}}{y^2\left(6\frac{x^2}{y^2}+10\right)}$$

I això simplificat és el següent

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2(a-1)}}{6+10\frac{y^2}{x^2}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{2(a-1)}}{6\frac{x^2}{y^2}+10}$$

Si $a-1>0 \Rightarrow a>1$ llavors aquest límit serà 0, ja que $x^{2(a-1)}$ decreix més de pressa que $\frac{y^2}{x^2}$, també el mateix amb $y^{2(a-1)}$ i $\frac{x^2}{y^2}$.
En canvi, si $a<1$ $\frac{x^2}{y^2}$ decreix més de pressa que x^2, també passa el mateix amb $y^{2(a-1)}$ i $\frac{x^2}{y^2}$. Això provoca que depengui de la direcció i provoqui que el límit no existeixi. Finalment, si $a=1$ provoca que només depengui de $\frac{x^2}{y^2}$ i $\frac{y^2}{x^2}$, fent així que depengui de la direcció i no existeixi el límit. $\square$

Exercici 3:

a) Definiu derivada direccional i justifiqueu la seva relació amb el gradient. Perqué la direcció de màxim creixement d'una funció diferenciable és la direcció del gradient? *Solució.* Sigui f definida a $\mathbb{R}^n$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $\vec{e} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{e}\| = 1$. Definim $D_{\vec{e}} f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0-\vec{e}t)-f(x_0)}{t}$.
La derivada direccional de f en $\vec{e}$ equival a $\langle \nabla f, \vec{e} \rangle$. Aquesta derivada serà màxima si $\langle \nabla f, \vec{e} \rangle$ és màxim i això només sera si tenen la mateixa direcció. $\square$

b) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Escriviu les derivades parcials de la funcio $g(x, y) = f\left(xy, e^x y^2, x^3\right)$ en termes de les derivades parcials de f.

Solució.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial e^x y^2}\frac{\partial e^x y^2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial xy} y + \frac{\partial f}{\partial e^x y^2} e^x y^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} 3x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial e^x y^2}\frac{\partial e^x y^2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial xy} x + \frac{\partial f}{\partial e^x y^2} 2ye^x
\end{aligned}$$

$\square$

c) Definiu un conjunt tancat. És cert que la frontera de qualsevol conjunt és sempre un conjunt tancat?

Solució. Un conjunt A és tancat si $A = \overline{A}$, sent $\overline{A} \equiv$ l'adherencia del conjunt A. Totes les fronteres són tancades perquè $\mathrm{fr}(A)^c$ és obert, això ja que $\mathrm{fr}(A)^c = \mathrm{fr}(\mathring{A})^c$. $\square$