Apunts

La primera meitat del 2n curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Setembre 2024 - Gener 2025

Índex

Bases de Dades Relacionals

Horari

- Dimarts 11-13h.
- Dijous 11-13h.

Equacions Diferencials Ordinàries

Horari

- Dimarts 9-11h.
- Divendres 11-13h.

2.0 Introducció

Les equacions diferencials són una eina molt important de modelització.

Definició: Les equacions diferencials són equacions que relacionen una funció (incògnita) amb les seves derivades.

Definició: Si la funció és d'una variable $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid\mid t \mapsto u(t)$ es diuen Equacions Diferencials Ordinàries.

Definició: Si la funció és de diverses variables $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Es diuen Equacions de Derivades Parcials.

2.1 Equacions diferencials de 1r ordre

Definició: Una equació diferencial ordinària de primer ordre per una funció $y(x)$ és una equació

$$F(x, y, y') = 0$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre és

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(x, f\left(x\right)\right)$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre es diu autònoma si f no depèn explícitament de x o sigui, és de la forma $y' = f(y)$

Definició: Una solució de la forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre és una funció $y(x)$ diferenciable definida en un interval I tal que per a tot $x \in I$ se satisfà l'equació diferencial ordinària de 1r ordre.

En general, les solucions d'una EDO de 1r ordre formen una família uniparamètrica de funcions d'un paràmetre constant. Aquesta expressió s'anomena solució general de l'EDO de 1r ordre.

Definició: Una equació diferencial de primer ordre amb una condició inicial s'anomena problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La solució d'un problema de valor inicial s'anomena solució particular de l'equació.

Definició: Un cas particular de solucions són els equilibris que són les solucions que no depenen de la variable independent.

Una solució d'equilibri de $y' = f(x, y)$ és una solució de la forma $y(x) = y^*$ (numero). Es compleix que $y(x) = y^*$ és solució d'equilibri de $y' = f(x, y)$ si i només si $f(x, y^*) = 0$ per a tot x per al que $f(x, y)$ estigui ben definit.
Si l'equació és autònoma ($y' = f(y)$) les solucions d'equilibri $y(x) = y$ estan donades pels zeros de f i estan definides $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema (Picardo-Gindelof) Sigui $\mathcal{R}$ una regió rectangular del pla xy definida per $R = \{(x, y)| a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ que conté el punt (x_0, y_0). Suposem que f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sigui contínues a $\mathcal{R}$.
Aleshores existeix una única solució $y(x)$ definida a un interval $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ contingut a $[a, b]$ del PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A més a més si denotem la solució de l'anterior sistema per $y(x; x_0, y_0)$ es compleix que $y(x; x_0, y_0)$ és una funció continua respecte x_0, y_0.

Per assegurar unicitat és suficient amb què f sigui de Lipschitz respecte a la variable y

Que sigui de Lipschitz significa que $\exists L > 0 : |f(x, y) - f(x, z)| < L\,|y - z|\,(c, d)\ \forall (y, z, c, d)$

Teorema (de Peano) Si f és contínua, existeix solució del sistema.

Teorema Si f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues a $\mathcal{R}$ aleshores dues corbes solució de $y' = f(x, y)$ diferents no es poden tallar a $\mathbb{R}$.

2.1.1 Alguns mètodes analítics de resolució d'EDO de 1r ordre

1. **EDO separable o de variable separada.**
   Una edo de variables separades és de la forma
$$y' = g\,(x)\,h\,(y)$$
   Si $h\,(y) \not\equiv 0$ llavors podem fer $\frac{1}{h(y)} y'\,(x) = g\,(x)$
   Integrant respecte a x tenim
$$\int \frac{1}{h\,(y(x))} y'(x) dx = \int g(x) dx$$
   Denotem per H una primitiva de $\frac{1}{h(y)}$ i per G una primitiva de $g(x)$, llavors tenim
$$H(y(x)) = G(x) + C$$
   Llavors $y(x) = H^{-1}\,(G(x) + C)$.
   Si $h\,(y) \equiv 0$, llavors $y(x) = y^*$, és a dir, té una solució d'equilibri.

2. **EDO lineal.**
   Una EDO de 1r ordre lineal és de la forma
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$
   on $a(x)$ i $b(x)$ són funcions arbitràries.

   Si $b(x) \equiv 0$ llavors és una equació de variable separada. S'anomena l'equació homogènia associada a l'equació lineal.

Proposició Sigui $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dues solucions de l'equació lineal no homogènia. Aleshores $y_1(x) - y_2(x)$ és solució de l'equació homogènia associada.

> **Corol·lari:** La solució general de l'equació homogènia és igual que una solució particular de l'homogènia més la solució general de l'equació homogènia.
> $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Per trobar $y_p(x)$ farem servir el "mètode de variació de les constants". Buscarem una solució particular de la forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Volem que es compleixi $y_p' + a(x)y_p = b_x$, això passa si

$$b(x) = C'(x)e^{-\int a(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

3. **EDO homogènia.**
   Una equació homogènia (de primer grau) és de la forma

   $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \leftarrow \text{Canvi de variable per transformar-la en variables separades}$$

   El canvi de variable serà $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xu(x)$
   $y'(x) = u(x) + xu'(x) = f(u(x)) \rightarrow u'(x) = \frac{f(u(x))-u(x)}{x}$

2.1.2 Mètodes qualitatius

1. **Camps de direccions**
   Tenim $y' = f(x, y)$. Sigui $y(x)$ la solució d'aquesta equació que passa per (x_0, y_0). Sabem llavors que $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
   A cada punt del pla (x, y) li podem associar un valor $f(x, y)$ que representarem dibuixant el punt (x, y) un petit segment que tingui pendent $f(x, y)$. Obtenim així el camp de direccions.
   També podem fer $f(x, y) = m$, que defineix un conjunt de corbes al pla (x, y) al llarg de les quals tots els vectors pendents han de ser m, es diuen isoclines.

2.

Modelització i Inferència

Horari

- Dilluns 11-13h.
- Dimecres 11-13h.

Tècniques de Disseny d'Algoritmes

Horari

- Dilluns 9-11h.
- Dijous 9-11h.

Visualització 3D

Horari

- Dimecres 9-11h.
- Divendres 9-11h.

5.1 Geometria euclidiana 3D

5.1.1 L'espai euclidià estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb $\mathbb{R}^3$.

Notació. *En l'espai euclidià tenim l'origen a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i un punt arbitrari* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tècnicament.*

Definició: La norma euclidiana d'un vector $V \in \mathbb{R}$ es defineix com $\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$ que compleix $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \, \|V\|$
- $\|V\| \iff V = 0$

Aquesta norma mesura la distància euclidiana entre dos punts $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ per la fórmula $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|$ que compleix

- $\mathcal{D}(P_1, P_3) \leq \mathcal{D}(P_1, P_2) + \mathcal{D}(P_2, P_3)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

La norma euclidiana d'un vector V correspon exactament a la seva longitud.

Demostracio Recordem el teorema de Pitàgores. Aleshores, veiem que $\|V\|$ és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que

- $\|V\| = d^2 + V_3^2$
- $d^2 = V_1^2 + V_2^2$

■

Com la norma d'un vector $V \in \mathbb{R}^3$ correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a $\mathbb{R}^3$ correspon a la longitud del segment que els uneix.
Si tenim P_1 i P_2 punts que defineixen un segment, la longitud $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$
Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longituds conté la noció d'ortogonalitat:

Definició: Anomenem producte escalar a $\mathbb{R}^3$ la funció
$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$ que és

- Bilineal: $\left\langle V + \lambda \bar{V}, W \right\rangle = \langle V, W \rangle + \lambda \left\langle \bar{V}, W \right\rangle$
  ídem si $V \leftrightsquigarrow W$
- Simètrica: $\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$
- Definit positiu: $\langle V, V \rangle > 0$ si $V \neq 0$

Observem que $\forall V \in \mathbb{R}^3$, $\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$: la norma es pot definir en funció del producte escalar.
Recíprocament, veiem fàcilment la Identitat de Polarització

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{2}\left(\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2\right) \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

Exercici Arribar a la Identitat de Polarització a partir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

Demostracio Fixem $V, W \in \mathbb{R}^3$ qualsevol. Aleshores definim $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$
Observem que $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W\rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W\rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow$ $\mathcal{P}$ és un polinomi en λ de grau 2. Llavors $\Delta = 4\left(\langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2\right)$ ha de ser ≤ 0, ja que $\mathcal{P} \geq 0$.
Deduïm que $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$
Si $\Delta = 0$ això implica que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$, aleshores $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$ ■

Com a conseqüència, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W\rangle}{\|V\| \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \|W\|)$$

Definició: L'únic $\theta \in [0, \pi] : \cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|}$ s'anomena angle euclidià entre V i W.

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.
Si $V = (1, 0, 0)$ i $W = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ obtenim que $\cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|} = \frac{\cos\alpha}{1\times 1} = \cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

Definició: Diem que V i W són ortogonals si $\langle V, W\rangle = 0$ o, de forma equivalent, si l'angle entre V i W és $\frac{\pi}{2}$.

Notació:. *Denotem dos vectors ortogonals entre si com* $V \perp W$

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si $\langle U, V\rangle = \langle V, W\rangle = \langle U, W\rangle = 0$, És base ortonormal, si és base ortogonal i a més $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

$\mathbb{R}^3$ admet una estructura addicional que permet multiplicar dos vectors:

Definició: $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \begin{pmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat: $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$ ídem a la dreta.
- Antisimètria: $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem fàcilment que $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ $\langle V \wedge W, V \rangle = 0 = \langle V \wedge W, W \rangle$ Més enllà

Proposició $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3, \langle U, V \wedge W \rangle = \det(U, V, W)$

5.1.2 Moviments rígids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista $\neq$ (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d'un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.
Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preserven un objecte (s'anomenen moviments rígids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.
Comencem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

Definició: El grup ortogonal és el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \langle MV, MW \rangle = \langle V, W \rangle \, \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Si $M \in O(3)$ i $V \in \mathbb{R}^3$, $\|MV\| = \|V\|$
Si $M \in O(3)$ i $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle MV, MW \rangle = V^t M^t M W$ per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|\, M^t M = \mathbb{I}_3 \right\}$$

Proposició Si $M \in O(3)$, llavors $\det(M) = \pm 1$

Definició: Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{M \in O(3) | \det M = 1\}$$

Per construcció els elements de $SO(3)$ són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament, (Me_1, Me_2, Me_3) compleix

1. (Me_1, Me_2, Me_3) és una base ortogonal
2. $\det(Me_1, Me_2, Me_3) = \det M = 1$ i doncs $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un exemple de $M \in O(3) \setminus SO(3)$ és la matriu $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Aquestes transformacions de $O(3) \setminus SO(3)$ canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial èmfasi en el subgrup $SO(3)$!

$O(3)$ i $SO(3)$ són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si $M, N \in O(3)$ (o $SO(3)$), $MN \in O(3)$.
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$.
- Si $M \in O(3)$, aleshores M és invertible i $M^{-1} \in O(3)$.

Més generalment,

Definició: Un conjunt G és un grup Si

- $\exists$ operació interna $\cdot : G \cdot G \to G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (element neutre)
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e$ (inversa)

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació que preserva les distàncies $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ Aleshores $\exists P_o \in \mathbb{R}^3,\ M \in O(3)$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

Definició: Si a més f preserva l'orientació, obtenim que $M \in SO(3)$. Un tal f s'anomena moviment rígid i correspon al fet de desplaçar un objecte a $\mathbb{R}^3$ (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

5.1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups $O(3)$ i $SO(3)$, i observar que el subgrup $SO(3)$ està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidià de dimensió n (on $n \in \mathbb{N}$), és a dir, treballem a $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar $\langle V, W\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} V_i W_i \ \forall V, W \in \mathbb{R}^n$ podem definir $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$ i $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$
Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$:
  $M = (a) \in O(1) \iff M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \iff (a^2) = 1$
  $\iff a = \pm 1 \iff M = \pm\mathbb{I}_1$
  Deduïm que $O(1) = \{\pm\mathbb{I}_1\}$ i $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$

- $n = 2$

  Proposició Sigui $M \in O(2)$. $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

  Això genera una rotació d'angle θ en el primer cas i en el segon una simetria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle θ.

  En particular, si $M \in SO(2)$, $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$

  Proposició Sigui $M \in O(3)$. Aleshores $\exists B \in SO(3), \exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

  $$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  Geomètricament, això significa que si $M = \mathcal{M}_{Can}(L)$, $\exists \mathcal{B} = (U, V, W)$ i $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $B = P_{Can \to \mathcal{B}}$ i $BMB^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  Com $B \in SO(3)$, vol dir que la base $\mathcal{B}$ és base ortonormal positiva (és a dir, té la mateixa orientació que la base canònica $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 1$)

- Cas on $\pm 1 = 1$:
  $U = L(U)$
  $L(V) = \cos\theta V + \sin\theta W$
  $L(W) = -\sin\theta V + \cos\theta W$
  Llavors L és una rotació d'eix U i d'angle θ.
- Cas on $\pm 1 = -1$:
  $-U = L(U)$
  L és la composició d'una simetria $\perp$ al pla $U^{\perp} = Vect(V, W)$ i de la rotació d'angle θ i eix U

Teorema (de les rotacions d'Euler) Sigui $M \in SO(3)$. Llavors $\exists B \in SO(3)$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Per això, $SO(3)$ rep el nom de grup de les rotacions.
En particular, i no és gens evident, si componem dues rotacions a l'espai, obtenim una tercera.
Cas particular: Si $U = U'$, $R_{\theta_1,U'} \circ R_{\theta_2,U} = R_{\theta,U}$. Això és evident, però $R_{\theta_1,U} \circ R_{\theta_2,V} = R_{\theta,W}$ i és molt difícil obtenir θ i W.