Exercici 1: Considerar la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Volem avaluar $f(x_0)$ per al valor $x_0 = 1.2 \times 10^{-5}$.

a) Escriure dos **programes en C**, un en **precisió simple** i un altre en **precisió doble** que avaluïn la funció $f(x)$.
Calcular per cadascun dels programes el valor $f(x_0)$.
Comparar i comentar els resultats.
Solució. A `Pr1a.c` creem dues funcions, `fsimp` amb precisió float i `fdoble` amb precisió doble. En avaluar x_0, en el cas del simple retorna 0, i en el cas del doble retorna ≈ 0.4999997, el que s'assembla més al valor real (ja que $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$). □

b) Reescriure la funció $f(x)$ fent servir fórmules trigonomètriques de forma que es redueixi l'error que es produeix fent servir la expressiò (1).
Solució. A `Pr1b.c` reemplacem $1 - \cos x$ per $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ en ambdues funcions, llavors, podem veure com les dues funcions abans creades tenen millor precisió. □

c) Discutir l'observat en aquest exercici.
Solució. Podem veure com, en aquest cas, $1 - \cos x$ perd precisió quan x tendeix a 0. Per allò hem de fer servir una substitució trigonomètrica que tindrà millor precisió. □

Exercici 2: Equació quadràtica.
La solució d'una equació quadràtica amb coeficients reals,

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

s'obté a partir de la expressiò

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Suposant que $a > 0$ i $b^2 > 4ac$.

a) Escriure dos **programes en C**, un en **precisió simple** i un altre en **precisió doble** que calculin la solució d'una equació quadràtica mitjançant (2).
Solució. A `Pr2a.c` estan escrites dues funcions, `fquad` en precisió float i `quad` en precisió doble. Al `main`, hi ha un exemple amb $a = 1, b = 2$ i $c = 1$, donant el resultat correcte de -1 com a solució doble. □

b) Comprovar que si $b^2 >> 4ac$ una de les dues fórmules per al càlcul de les arrels amb (2) produeix resultats contaminats amb error de cancel·lació.
Solució. Com podem veure a `Pr2b.c`, on calculem les arrels de $a = 1, b = 40000$ i $c = 1$. En aquest cas, tenim $b^2 = 40000^2$ que és, òbviament, molt més gran que $4ac = 4$. En calcular, veiem que la funció amb precisió float dona 0 i -40000 com a solució, mentre en doble dona $\approx -2.5 \times 10^{-5}$ i -39999.999975, un resultat més creïble.
□

c) Proposa un procediment alternatiu per al càlcul de les arrels que eviti l'error de cancel·lació.
Solució. Sabem que

$$(2) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \underbrace{\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}}_{=1} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

i si continuem simplificant, tenim

$$\frac{2c}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{3}$$

Ara, amb (3), canviem el programa anterior i fem els canvis a `Pr2c.c`. Amb els canvis fets, veiem quins són els resultats. □

d) Construir exemples numèrics on el càlcul de les arrels en simple i doble precisió proporcionin diferències significatives en exactitud fent servir (2) i el procediment que has proposat.
Solució. aidonnou □

Exercici 3: Càlcul de la variància mostral.
En estadística la variància mostral de n nombres es defineix com

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \text{ on } \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Una fórmula alternativa equivalent que fa servir un nombre d'operacions similars és

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) \tag{5}$$

Aquesta última fórmula pot sofrir error de cancel·lació!

a) Escriure **programes en C en simple i doble precisió** que calculin la variància mostral amb les mateixes fórmules on l'input sigui un vector de nombres reals i l'output sigui la variància mostral.
Solució. lala □

b) Considerar el vector $x = \{10000, 10001, 10002\}^T$ i calcular la variància amb els programes generats. Analitzar les discrepàncies.
Solució. lala $\square$

c) Construir dos exemples de vectors de dimensió gran (almenys 100 components) on aquestes discrepàncies siguin més evidents.
Solució. lala $\square$

d) Discutir les diferències en els resultats.
Solució. lala $\square$

Exercici 4: Suma d'una sèrie.
És conegut que la sèrie dels recíprocs dels quadrats dels nombres naturals convergeix i la seva suma és $\frac{\pi^2}{6}$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934066848226\ldots \tag{6}$$

Volem calcular aproximadament la suma S sumant termes