En el meu cas, $B := 5$, ja que la unitat del meu NIU és 2.

1. Buscar bases de subespais vectorials reals finits generats.

(a) Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Sigui $F =< (B, B, B-1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0) >$ i $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$.

Exercici i. Trobeu una base de F i la dimensió de F. Comproveu que el vector $v = (2022, 2022, 0, 0)$ és de F i doneu les coordenades del vector v en la base triada de F.

Solució. Per trobar una base de F, posem el seu sistema generador en forma matricial i reduim aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, $((1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0))$ és una base de F, sent $\dim F = 3$. Comprovem que v és de F:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2022 & 2022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2022 & -6066 & 0 & -2022 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2022 & 0 & -2022 & 2022 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2022 & 2022 & -2022 & 1 \end{array}\right)$$

Com podem observar, en fer la matriu reduïda el vector v és linealment dependent, per això pertany a F. A la part ampliada, tenim les coordenades (negatives) de v respecte a la base abans calculada. És a dir, $v = 2022(1, 2, 3, 0) - 2022(0, 1, 2, 0) + 2022(0, 0, -1, 0)$. v en coordenades de la base és $(2022, -2022, 2022, 0)$. □

Exercici ii. És el vector de F : $(B, B, B - 1, 0)$, combinació lineal dels vectors $(3, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (4, 3, 2, 0)$? En cas afirmatiu trobeu-ne una combinació lineal (és única aquesta combinació lineal?).

Solució. Com ja hem calculat a l'anterior exercici, $(5,5,4,0)$ no és combinació lineal dels anteriors. Això ja que la tercera filera (on termina el vector $(5,5,4,0)$) no termina reduïda. $\square$

Exercici iii. Amplieu la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$.

Solució. Per ampliar la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$ és trivial, ja que només cal posar el vector $(0,0,0,1)$ per fer-la base de $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exercici iv. Comproveu que el vector $w = (3,3,3,0)$ és de G. Trobeu una base de G. Doneu les coordenades del vector w respecte a la base de G triada.

Solució. Primer, calculem una base de G:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"Matriu" } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és equivalent a trobar el nucli de A.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad\ 0 \quad\ 1}_{\text{Nucli de } A}} \end{array}\right)$$

Llavors, una base de G és $((-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-4,0,0,1))$. Ara, comprovem que w és de G:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llavors, com w és combinació lineal de les bases de G, $w \in G$. Per la base de G triada abans $w = 3(-2,1,0,0) + 3(3,0,1,0)$. Les coordenades de w a la base triada de G és $(3,3,0)$. $\square$

Exercici v. Trobeu una base de $F + G$ i la dimensió de $F + G$. És $F \subseteq G$? Per què? És $F + G = \mathbb{R}^4$? Per què?

Solució. Posem les dues bases en una mateixa matriu, sent les 3 primeres de G i la resta de F.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exercici vi. Trobeu una base de $F \cap G$ i la dimensió de $F \cap G$.

Solució. Dummy0 □

(b) Considera un subespai vectorial $H :=< 1, \sin(x), \cos(x), e^{2x} >$ de les funcions contínues de domini $\mathbb{R}$ de funcions reals en una variable.

Exercici i. Proveu que $(1, \sin(x), \cos(x), e^{2x})$ és una base de H.

Solució. Dummy0 □

Exercici ii. Considerem els subespais de les funcions reals en una variable

$$F' :=< B+B\sin(x)+(B-1)\cos(x), 3+2\sin(x)+\cos(x), 1+2\sin(x)+3\cos(x), 4+3\sin(x)+2\cos(x) >$$

$$G' := \{a1 + b\sin(x) + c\cos(x) + de^{2x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c + d = 0\}$$

- Proveu que F', G' són subespais vectorials de H.
- Trobeu una base i dimensió de F', G', $F' + G'$ i $F' \cap G'$

Solució. Dummy0 □

2. Matriu d'aplicacions lineals en espais vectorials reals finits generats.

(a) Considera l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (Bx + y + z, x - y + z, x + y + z)$$

Exercici i. Calcula la matriu A associada a $f = T_A$ en les bases canòniques. I calculeu $f(1, 2, 3)$ i l'antiimatge de $(1, 0, 0)$, és a dir $f^{-1}(1, 0, 0)$.

Solució. Dummy0 □

Exercici ii. Calculeu una base i dimensió del nucli de f i la imatge de f.

Solució. Dummy0 □

Exercici iii. Decidiu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Dummy1 □

Exercici iv. Calculeu l'aplicació lineal $f \circ f$.

Solució. Dummy0 $\square$

Exercici v. Considera la base de $\mathbb{R}^3$: $Bgotica = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Calcula la matriu associada a f amb bases d'inici i sortida $Bgotica$, és a dir calculeu $M(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)$.

Solució. Dummy0 $\square$

Exercici vi. Trobeu una matriu invertible P, on $A = PM(Bgotica \xleftarrow{f} Bgotica)P^{-1}$. La matriu P és una matriu de canvi de base, de coordenades de quina base a quina alta base és?

Solució. Dummy0 $\square$

(b) Sigui $\mathbb{R}[x]_2$ l'espai vectorial dels polinomis de grau ≥ 2. Considera l'aplicació $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ definida per

$$g(a + bx + cx^2) = (Ba + b + c)1 + (a - b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Exercici i. Justifiqueu perquè g és una aplicació lineal.

Solució. Dummy0 $\square$

Exercici ii. Fixeu la base $Can := (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}[x]_2$. Calculeu la matriu $A = M(Can \xleftarrow{g} Can)$. Calculeu $g(3 + 2x + x^2)$ i $g^{-1}(x)$, directament i usant la matriu A.

Solució. Dummy0 $\square$

Exercici iii. Decidiu si g és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

Solució. Dummy0 $\square$

Exercici iv. Proveu que $Bgoticab = (1 + x + x^2, x + x^2, x)$ és una base de $\mathbb{R}[x]_2$. I calculeu la matriu $M(Bgoticab \xleftarrow{g} Bgoticab)$.

Solució. Dummy0 $\square$