

---

---

# APUNTS

LA SEGONA MEITAT DEL 1R CURS

---

AUTOR:

EDUARDO PÉREZ MOTATO

FEBRER - JUNY 2024

---

---

# Índex

---

<b>1</b>	<b>Programació Orientada als Objectes</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Càlcul en Diverses Variables</b>	<b>2</b>
2.1	Boles a $\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Algorítmia i Combinatòria en Grafs. Mètodes Heurístics</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Probabilitat</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Càlcul Numèric</b>	<b>8</b>

---

---

# Programació Orientada als Objectes

---

---

---

# Càlcul en Diverses Variables

---

**Definició:**  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

**Definició:** Siguin  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  i  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , definim  $\underbrace{\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle}_{\text{(producte escalar)}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$  com a producte escalar.

**Definició:**  $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$  on  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Això és la distància del punt  $x$  a  $(0, 0, \dots, 0)$ .

Propietats de la norma:

1.  $\|x\| \geq 0$  per tot  $x \in \mathbb{R}^n$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  per tot  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Desigualtat triangular:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  per tot  $x, y \in \mathbb{R}^n$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz:  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$  per tot  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Això ho acceptem.

**Obs** Observem que  $-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$  i definim l'angle entre els vectors  $x$  i  $y$  com l'angle  $\alpha$  tal que  $\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ , és a dir,  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \alpha$ .

■ **Exemple** Trobem els valors de  $\mathbb{R}^3 \perp (-1, -2, 1)$ . Busquem  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\langle (x_1, x_2, x_3), (-1, -2, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ . ■

## 2.1 Boles a $\mathbb{R}^n$

Si  $n=2$  la bola de centre  $(x_0, y_0)$  i radi  $R$  és  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < R\} = (\text{disc}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$ . Això és una bola oberta, denotada per

**Notació.** Fem servir  $\mathfrak{B}_R(x_0, y_0, \dots)$  la bola oberta ( $< R$ ) i  $\overline{\mathfrak{B}_R}(x_0, y_0, \dots)$  la tancada ( $\leq R$ ). Es farà servir més la bola oberta.

■ **Definició:** Sigui  $A \subset \mathbb{R}^n$ , definim  $\overset{\circ}{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : R > 0 | \mathfrak{B}_R(\vec{x}) \subset A\}$

■ **Exemple** 1.  $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$ , llavors  $\overset{\circ}{A} = \{(x, y) : x > 0\}$

2.  $A = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$ , llavors  
 $\overset{\circ}{A} = \{(x, y, z) : -a < x < a, -b < y < b, -c < z < c\}$

■

■ **Definició:** Un conjunt  $A \subset \mathbb{R}^n$  es diu obert si  $A = \overset{\circ}{A}$ , és a dir, si tot punt del conjunt  $A$  és també un punt d' $\overset{\circ}{A}$ .

---

# Algorítmia i Combinatòria en Grafs. Mètodes Heurístics

---

**Definició:** Un graf és un objecte combinatori que està format per un parell ordenat de vèrtex i arestes ( $G = (V, E)$ ). Una aresta ( $E$ ) està etiquetat per un origen i un destí (o extrems si no estan orientades) sent aquests vèrtexs ( $V$ ).

**Definició:** Un graf dirigit, o orientat, és un graf on les arestes tenen direcció, com si fos una fletxa.

**Definició:** Un graf no dirigit serà un graf on les arestes no tenen direccions. Podem suposar que l'aresta és bidireccional.

**Definició:** Un graf és planar si es pot unir tots els vèrtexs sense que es creuin les arestes. Si s'han de creuar obligatòriament, és un graf no planar.

**Teorema** Tot graf no planar té un subgraf  $K_{3,3}$  o  $P_5$ .

---

---

# Probabilitat

---

**Definició:** Un fenomen o experiment aleatori presenten les següents característiques:

- Abans de realitzar l'experiment no sabem el resultat però sí el conjunt de resultats possibles.
- En teoria es pot realitzar sota les mateixes condicions infinites vegades.
- Es pot assignar probabilitats als resultats.

**Definició:** L'espai mostral és el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori. Es denota per la lletra  $\Omega$  i els seus elements per  $\omega$ .

**Definició:** Un esdeveniment és una col·lecció de subconjunts de l'espai mostral. Es pot calcular la probabilitat d'un esdeveniment. Ha de tenir estructura de  $\sigma$ -àlgebra.

**Notació.** Si  $\omega \in \Omega$  és un resultat de l'experimental tal que  $\omega \in A$ , diem que  $A$  s'ha realitzat.

**Definició:** Sigui  $\mathcal{A}$  una col·lecció de subconjunts d' $\Omega$ .  $\mathcal{A}$  és una  $\sigma$ -àlgebra si es compleix el següent:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si  $A \in \mathcal{A}$ , aleshores  $A^c \in \mathcal{A}$ .
3. Si  $A_1, A_2, \dots$  són elements d' $\mathcal{A}$ , aleshores  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

**Corol·lari: ( propietats d'una  $\sigma$ -àlgebra )** Sent  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -àlgebra

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$

**Definició: (Fórmula de Laplace)** La probabilitat d'un esdeveniment  $\mathcal{A}$  sempre que el conjunt de resultats possibles sigui finit i equiprobable, la fórmula de Laplace es pot aplicar.

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{\text{Casos probables a } \mathcal{A}}{\text{Casos possibles}}$$

Una altra manera de calcular la probabilitat és fent servir una visió freqüentista:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathcal{A}) \text{ on } f_n(\mathcal{A}) := \frac{\text{nombre de cops que hem obtingut } \mathcal{A}}{n}$$

**Definició: (axiomes de Kolmogorov)** Sigui  $\Omega$  un conjunt i  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -àlgebra sobre  $\Omega$ . Una probabilitat és qualsevol aplicació  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que compleix el següent:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si  $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$  són disjunts dos a dos llavors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

**Definició:** Un espai de probabilitat és la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

**Notació.** Per a unions disjunts fem servir  $\uplus$ .

**Corol·lari:** Propietats dels axiomes de Kolmogorov.

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3.  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4.  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5.  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$





---

---

# Càlcul Numèric

---

Hi ha 3 tipus d'errors (4 si en comptes a mi):

1. Errors en les dades d'entrada
2. Errors a les operacions
3. Errors de truncament

Aquí es tractaran principalment els dos primers.

**Teorema (Representació en punt flotant en base  $b$ )** Per  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \geq 2$ . Tot  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  pot ser representat de la següent forma:

$$x = s \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b^{-i} \right) b^q$$

amb  $s \in \{-1, 1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  i  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ . A més, la representació anterior és única si  $\alpha_1 \neq 0$  i els  $\alpha_i$  no són tots  $b-1$  d'una posició en endavant.

**Definició: (Representació en punt flotant)** És la versió finita de la representació. En aquesta representació, tot nombre  $x$  consta de

- el signe,  $s$
- la mantissa, que només consta d'un nombre finit de dígit,  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t$  expressats en base  $b$ , i
- l'exponent,  $q$ , que està limitat a un rang prefixat,  $q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$