Apunts

La primera meitat del 2n curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Setembre 2024 - Gener 2025

Índex

Bases de Dades Relacionals

Horari

- Dimarts 11-13h.
- Dijous 11-13h.

Equacions Diferencials Ordinàries

2.0 Introducció

Les equacions diferencials són una eina molt important de modelització.

Definició: Les equacions diferencials són equacions que relacionen una funció (incògnita) amb les seves derivades.

Definició: Si la funció és d'una variable $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid\mid t \mapsto u(t)$ es diuen Equacions Diferencials Ordinàries.

Definició: Si la funció és de diverses variables $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Es diuen Equacions de Derivades Parcials.

2.1 Equacions diferencials de 1r ordre

Definició: Una equació diferencial ordinària de primer ordre per una funció $y(x)$ és una equació

$$F(x, y, y') = 0$$

Definició: La forma explícita d'una equació diferencial ordinària de 1r ordre és

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f\left(x, f\left(x\right)\right) \tag{1}$$

Definició: La equació (1) es diu autònoma si f no depèn explícitament de x o sigui, és de la forma

$$y'(y) = f(y)$$

Definició: Una solució de (1) és una funció $y(x)$ diferenciable definida en un interval $I : \forall x \in I$ es satisfà (1).

En general, les solucions d'una EDO de 1r ordre formen una família uniparamètrica de funcions d'un paràmetre constant. Aquesta expressió s'anomena solució general de l'EDO de 1r ordre.

Definició: Una equació diferencial de primer ordre amb una condició inicial s'anomena problema de valor inicial i es de la forma

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2}$$

La solució d'un problema de valor inicial s'anomena solució particular de l'equació.

Definició: Una solució d'equilibri de $y' = f(x,y)$ és una solució de la forma $y(x) = y^*$ on y^* és una constant. Ha de cumplir que $y' = f(x,y) \iff f(x,y^*) = 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f(x,y)$ estigui ben definit.

Si l'equació és autònoma ($y' = f(y)$) les solucions d'equilibri $y(x) = y$ estan donades pels zeros de f i estan definides $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Existència i unicitat i continuïtat de les solucions

Teorema (Picardo-Gindelof) Sigui $\mathcal{R}$ una regió rectangular del pla xy definida per $R = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ que conté el punt (x_0, y_0). Suposem que f i que $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues a $\mathcal{R}$.
Aleshores existeix una única solució $y(x)$ definida a un interval $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ contingut a $[a,b]$ del problema de valor inicial (2).

A més a més si denotem la solució de l'anterior sistema per $y(x; x_0, y_0)$ es compleix que $y(x; x_0, y_0)$ és una funció continua respecte x_0, y_0.

Per assegurar unicitat és suficient amb què f sigui de Lipschitz respecte a la variable y

Que sigui de Lipschitz significa que $\exists L > 0 : |f(x,y) - f(x,z)| < L\,|y - z|\ (c,d)\ \forall (y,z,c,d)$

Com a conseqüència del teorema anterior tenim

Teorema Si f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues a $\mathbb{R}$ aleshores dues corbes solució de $y' = f(x, y)$ diferents no es poden tallar a $\mathbb{R}$.

Un altre teorema útil és el seguent

Teorema (de Peano) Si f és contínua, existeix solució del sistema.

2.1.2 Alguns mètodes analítics de resolució d'EDO de 1r ordre

1. **EDO separable o de variable separada.**
Una edo de variables separades és de la forma

$$y' = g\left(x\right)h\left(y\right)$$

Si $h\left(y\right) \not\equiv 0$ llavors podem fer $\frac{1}{h(y)}y'\left(x\right) = g\left(x\right)$
Integrant respecte a x tenim

$$\int \frac{1}{h\left(y(x)\right)}y'(x)dx = \int g(x)dx$$

Denotem per H una primitiva de $\frac{1}{h(y)}$ i per G una primitiva de $g(x)$, llavors tenim

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

Llavors $y(x) = H^{-1}\left(G(x) + C\right)$.
Si $h\left(y\right) \equiv 0$, llavors $y(x) = y^*$, és a dir, té una solució d'equilibri.

2. **EDO lineal.**

Una EDO de 1r ordre lineal és de la forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{3}$$

on $a(x)$ i $b(x)$ són funcions arbitràries.

Si $b(x) \equiv 0$ llavors és una equació de variable separada. S'anomena l'equació homogènia associada a l'equació lineal.

$$y'(x) = a(x)y(x) \tag{4}$$

Proposició Sigui $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dues solucions de l'equació lineal (3). Aleshores $y_1(x) - y_2(x)$ és solució de l'equació homogènia associada (4).

Corol · lari: La solució general de (3) és igual que una solució particular de (4)

$$y(x) = y_{\text{homogénia}}(x) + y_{\text{particular}}(x)$$

Per trobar $y_p(x)$ farem servir el "mètode de variació de les constants". Buscarem una solució particular de la forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Volem que es compleixi $y_p' + a(x)y_p = b_x$, això passa si

$$b(x) = C'(x)e^{-\int a(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

3. **EDO homogènia.**
   Una equació homogènia (de primer grau) és de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \leftarrow \begin{array}{c}\text{Canvi de variable per}\\ \text{transformar-la en variables separades}\end{array} \tag{5}$$

   Es tracta d'un tipus d'equacions que fent un canvi de variable es transforma en una equació de variables separades. El canvi de variable serà $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xu(x)$
   $y'(x) = u(x) + xu'(x) = f(u(x)) \rightarrow u'(x) = \frac{f(u(x))-u(x)}{x}$

2.1.3 Mètodes qualitatius: Camps de direccions

Tenim $y' = f(x, y)$. Sigui $y(x)$ la solució d'aquesta equació que passa per (x_0, y_0). Sabem llavors que $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
A cada punt del pla (x, y) li podem associar un valor $f(x, y)$ que representarem dibuixant el punt (x, y) un petit segment que tingui pendent $f(x, y)$. Obtenim així el camp de direccions.
També podem fer $f(x, y) = m$, que defineix un conjunt de corbes al pla (x, y) al llarg de les quals tots els vectors pendents han de ser m, es diuen isoclines.

2.1.4 Equacions diferencials autònomes

Son de la forma

$$y' = f(y)$$

Aquestes no depèn de manera explícita de la variable independent. Aquestes equacions són de variables separades i els seus equilibris son zeros de la funció f.

Teorema (Comportament asintotic d'equacions diferencials autònomes) Donada una equació diferencial autònoma $y' = f(y)$, on f és contínua, aleshores

- Si $y(x)$ una solució de l'equació autònoma, aleshores per qualsevol constant $C \in \mathbb{R}$ també és solució $y_c(x) := y(x+c)$.

- Si $y(x)$ és una solució de l'equació autònoma que no és un equilibri, és dir no es constant, aleshores no canvia de monotonia.

- Una solució acotada de l'equació autònoma tendeix (quan $x \to \pm\infty$) a una solució d'equilibri.

- Si $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ i $f(y) > 0$ per a $y \in (a,b)$ i $y(x_0) \in (a,b)$ aleshores $\lim_{x\to-\infty} y(x) = a$ i $\lim_{x\to\infty} y(x) = b$.
  Si $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ i $f(y) < 0$ per a $y \in (a,b)$ i $y(x_0) \in (a,b)$ aleshores $\lim_{x\to-\infty} y(x) = b$ i $\lim_{x\to\infty} y(x) = a$.

2.2 Sistemes d'equacions diferencials ordinaries lineals i EDOs d'ordre superior

Una EDO d'ordre n és una equació de la forma $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.
La forma estandard és

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{6}$$

Una solució de l'equació es una funció real $y(x)$ definida a un interval I, n vegades diferenciable i que $\forall x \in I$ és compleix (6).
L'equació (6) és equivalent a un sistema d'equacions de primer ordre $\vec{z}' = f(x, \vec{z})$
Una equació diferencial lineal d'ordre n és una EDO de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Quan $f(x) \equiv 0$ l'equació s'anomena homogenia.

2.2.1 Equacions lineals de segon ordre

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{7}$$

La homogènia associada és

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{8}$$

Com en el cas de les líneals de primer ordre, la solució general de (7) és la suma de la solució de la homogènia (8) i una solució particular de la no homogènia (7).
Anem a veure com solucionar la homogènia

Proposició Siguin $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dues solucions de (8), aleshores $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ també és solució (7) per constants A i B qualssevol.

Teorema Donat el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + a(x)y' + b(x)y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \end{aligned}$$

Si les funcions a, b, f són contínues en un interval I que conté x_0, aleshores el problema té una única solució en I.

Definició: Si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són solucions de l'equació lineal homogènia de segon ordre (8) el determinant $W(y_1, y_2)(x) := \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ s'anomena Wronskià de y_1 i y_2.

Teorema Si y_1 i y_2 són dues solucions de l'equació lineal homogènia de segon ordre (8) i $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ per algun x_0 aleshores

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

és la solució general de l'equació.

Teorema (de Abel) Si y_1 i y_2 són dues solucions de l'equació lineal homogènia de segon ordre (8) aleshores el Wronskià $W(y_1, y_2)(x)$ és una funció exponencial i $\forall x$ serà sempre 0 o no ho serà.

2.2.2 Equacions lineals de segon ordre amb coeficients constants

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{9}$$

Tindrem un polinomi característic de l'equació homogènia (9) de la forma $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Llavors tenim tres casos:

1. Si $b^2 - 4c > 0$ llavors les arrels són reals i diferents λ_1 i λ_2 i la solució general serà
$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

2. Si $b^2 - 4c = 0$ llavors les arrels són reals i iguals $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ i la solució general serà
$$y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$$

3. Si $b^2 - 4c < 0$ llavors les arrels són complexes $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ i la solució general serà
$$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

També podem fer servir el metode de variació de parametres per trobar la solució general de l'equació no homogènia (7).
Sigui $\{y_1(x), y_2(x)\}$ un conjunt fonamental de solucions de l'equació homogènia (8) $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Buscarem $y_p(x)$ de la forma $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$. $y_p'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$. Imposem $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$. Aleshores $y_p''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)$. Substituïm a l'equació

no homogènia (7) i trobem $C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=q(x)$. Resolem aquest sistema d'equacions per trobar $C_1(x)$ i $C_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=q(x) \end{cases}$$

2.2.3 Aplicacions

Sistemes mecànics: tenim un sistema massa-molla. La massa es de m kg i la molla fa l cm de llargada i s de llargada quan es posa la massa. Aplicant la segona llei de Newton tenim $\sum F = mx''$. Tenim la força de la gravetat $F_1 = mg$ i la força de la molla per la llei de Hooke $F_2 = -k(x+s) = -kx-mg$. En equilibri tenim $F_1+F_2 = 0 \Rightarrow mg-k(x+s) = 0$. Aleshores tenim l'equació diferencial $mx'' = ks$.
També podem tindre la força d'amortiment o fricció, que es presuposa que no hi ha si no es diu el contrari, $F_3 = -bx'$. I també podem tindre forces externes $F_4 = f(t)$. Aleshores tenim l'equació diferencial $F_1+F_2+F_3+F_4 = 0 \Rightarrow mx'' = -bx' - kx + f(t)$.
Si $b = 0$ es diu no amortit. Si $f(t) = 0$ es diu lliure. Si ambdos són 0 es diu oscilador harmònic simple.
El polinomic característic de l'equació diferencial serà $P(\lambda) = m\lambda^2 + k = 0$. Llavors, $x(t) = C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) = A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$, amb $\phi = \frac{c_1}{c_2}$, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

Cas amortit i lliure $b > 0,\ k > 0,\ m > 0$. El polinomic característic serà $P(\lambda) = m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$. Llavors tenim tres casos:

- $b^2 - 4mk > 0$ llavors les arrels són reals i diferents λ_1 i λ_2 i la solució general serà
  $$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
  Notem que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Hi ha un maxim (o minim) a $t = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \ln\left(\frac{-C_1\lambda_1}{C_2\lambda_2}\right)$. Es diu que aquest moviment és sobreamortit.

- $b^2 - 4mk = 0$ llavors les arrels són reals i iguals $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ i la solució general serà
  $$x(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$$
  Notem que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Hi ha un maxim (o minim) a $t = -\frac{c_1}{c_2} + \frac{2m}{b}$. Es diu que aquest moviment és críticament amortit.

- $b^2 - 4mk < 0$ llavors les arrels són complexes $\lambda_1 = -\frac{b}{2m} + i\sqrt{\frac{4mk-b^2}{2m}} = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ i la solució general serà

  $$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \; A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \; \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}$$

  Notem que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Aquesta sí que oscila, llavors te molts punts critics. Es diu que aquest moviment és subamortit.

Cas amortit i forçat $b > 0, \; k > 0, \; m > 0, \; f(t) \neq 0$. L'equació diferencial serà $mx'' + bx' + kx = f(t)$. La solució general serà $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, on $x_h(t)$ és la solució general de l'homogènia i $x_p(t)$ és una solució particular de l'equació diferencial.
Notem que ja hem estudiat la homogenia anteriorment, ja que en el cas lliure es homogenia. $x_h(t)$ s'anomena terme transitori i $x_p(t)$ terme estacionari. Això ja que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} x_p(t)$, es dir, al limit el x_h no importa.

Cas no amortit i forçat ressonància $b = 0, \; k > 0, \; m > 0, \; f(t) = F_0 \sin\omega_0 t$. L'equació diferencial serà $mx'' + kx = F_0 \sin\omega_0 t$. La solució general serà $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. $x_h(t) = C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$. Busquem $x_p(t)$. Anotem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- $\omega \neq \omega_0$ busquem $x_p(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$, substituim $x_p(t) = \frac{F_0 \sin\omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2} \Rightarrow x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0 \sin\omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2}$.

- $\omega = \omega_0$ busquem $x_p(t) = t(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\frac{F_0}{2\omega} t\cos\omega t \Rightarrow x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{F_0}{2\omega} t\cos\omega t$.

2.3 Sistemes d'equacions diferencials lineals

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Simplificant-ho en forma matricial tenim

$$X' = AX + F$$

i ho anomenem sistema homogeni si $F = 0$.

Teorema Si els elements de les matrius $A(t)$ i $F(t)$ són funcions contínues a un interval que conté t_0, aleshores existeix una única solució al problema de valor inicial $X(t_0) = X_0$.

Proposició (Principi de superposició) Siguin $X_1, \ldots, X_n$ un conjnunt de vectors solució del sistema homogeni $X' = AX$. Aleshores la combinació lineal $c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$ també és solució del sistema homogeni.

Definició: Sigui $X_1, \ldots, X_n$ un conjunt de solucions del sistema homogeni $X' = AX$ en un cert interval I, es diu que el conjunt es linealment independents si les úniques constants $C_1, \ldots, C_n$ tals que

$$C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) = 0$$

per a tot $t \in I$ són $C_1 = \cdots = C_n = 0$.

Definició: Un conjunt linealment independent de solucions del sistema homogeni $X' = AX$ es diu que es un sistema fonamental de solucions.

Proposició Donat un número real $t_0 \in I$ i un vector X_0 i n solucions linealments independents $X_1, \ldots, X_n$ del sistema homogeni $X' = AX$, aleshores existeixen n únics números $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$ tals que la solució

$$C_{10}X_1(t) + C_{20}X_2(t) + \cdots + C_{n0}X_n(t)$$

satisfà la igualtat $X(t_0) = X_0$.

Definició: Sigui $X_1 = \begin{pmatrix} X_11 \\ X_21 \\ \vdots \\ X_n1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} X_12 \\ X_22 \\ \vdots \\ X_n2 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} X_1n \\ X_2n \\ \vdots \\ X_nn \end{pmatrix}$ un conjunt de solucions del sistema homogeni a un interval I. S'anomena wronksià de les solucions $X_1, \ldots, X_n$ al determinant

$$W(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} X_11 & X_12 & \cdots & X_1n \\ X_21 & X_22 & \cdots & X_2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n1 & X_n2 & \cdots & X_nn \end{vmatrix}$$

Proposició Un conjunt $X_1, \ldots, X_n$ de solucions del sistema homogeni a un interval I és linealment independent si i només si el wronksià d'aquestes solucions es diferent de 0 en tot punt de l'interval.

2.3.1 Sistemes d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants

Cas més senzill $\to 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si tenim una base de vectoris propis de A, $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ amb valors propis λ_1 i λ_2, aleshores la solució general del sistema serà

$$C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{u_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{u_2}$$

Ara, imaginem que tenim un valor propi repetit tal que només té un vector propi associat. En aquest cas tindrem $(A - I\lambda)\vec{v} = \vec{u}$ on $\vec{v}$ és un vector propi generalitzat i $\vec{u}$ és un vector propi associat. Aleshores $e^{\lambda t}(\vec{v} + \vec{u}t)$.
I ara imaginem que tenim un valor propi complex. En aquest cas tindrem necesariametn també el seu conjugat. Tindrem $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ i $\overline{\vec{v}} = \vec{u} - i\vec{v}$ Tenim dos solucions $e^{\alpha t}(\cos\beta t\vec{u} - \sin\beta t\vec{v}) + ie^{\alpha t}(\sin\beta t\vec{u} + \cos\beta t\vec{v})$ i $e^{\alpha t}(\cos\beta t\vec{u} - \sin\beta t\vec{v}) - ie^{\alpha t}(\sin\beta t\vec{u} + \cos\beta t\vec{v})$ on $\lambda = \alpha + i\beta$
Llavors la solució serà $C_1 1/2(z_1 + z_2) + C_2 1/2i(z_1 - z_2)$ on z_1 i z_2 són les dues solucions complexes.

2.3.2 Retrats de fase

Considerem un sistema autònom

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

PVI

$$\begin{cases} Z' = F(t, z) \\ Z(t_0)' = Z_0 \end{cases}$$

F_i i $\frac{\partial F_i}{\partial Z_i}$ son continues a un obert $U \Rightarrow \exists!$ solució del PVI.
Una soluciò del sistema és un parell de funcions $(x(t), y(t))$ variant t son corbes en el pla (x, y). Aquestes corbes s'anomenen òrbites o trajectòries del sistema.
Definim $y(t) = Y(x(t))$, llavors $y'(t) = Y'(x(t))x'(t) \Rightarrow Y(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ Cada trajectoria representa infinites solucions del sistema: si $(x(t), y(t))$ és una solució $\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$, $(x(t + c), y(t + c))$ també ho és.
Dues trajectories no tenen punt en comú. Les trajectories tancades corresponen a orbites periòdiques $(x(t), y(t))$és una solcuió del sistema que a t_0 i a

$t_0 + T$ pren el mateix valor.
Retrat de fase: conjunt de totes les órbites.
Les corbes del pla definides per $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$ s'anomenen isoclines.
Els equilibris son punts (x^*, y^*) tal que $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$.

2.3.3 Retrats de fase dels sistemes canonics

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \{x(t), y(t), t \in I\}$$

Sabem que sempre podrem fer $A = PJP^{-1}$ on J es la matriu de Jordan. Suposem que $\det A \neq 0 \Rightarrow (0, 0)$ és l'únic equilibri

1. Si J és diagonal amb VAPs repetits pero VEPs diferents $\Rightarrow y(x) = C|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$. Llavors tindrem els seguents casos:
   (a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ horitzontal i $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ vertical. Ambdos tenen repulsió a $(0, 0)$.
   (b) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ vertical i $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$ horitzontal. Ambdos tenen atracció a $(0, 0)$.
   (c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ vertical i $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$ horitzontal. Punt de sella a $(0, 0)$.
2. Si J és diagonal amb VAP repetits $\Rightarrow y(x) = C|x|$. Llavors tindrem els seguents casos:
   (a) $\lambda > 0$ Node degenerat repulsiu.
   (b) $\lambda < 0$ Node degenerat atractor.
3. Si J és de Jordan i VEPs repetits $\Rightarrow y(x) = \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \ln\left(\frac{x}{C_2}\right) \frac{x}{C_2}\right)$ i tenim:
   (a) $\lambda > 0 \Rightarrow (0, 0)$ serà un node impropi repulsor.
   (b) $\lambda < 0 \Rightarrow (0, 0)$ serà un node impropi atractor.
4. Si J és de Jordan amb VAPs complexos, es millor fer canvi a coordenades polars. Llavors tindrem: $r' = \alpha r$ $\theta' = \beta$ o $r(t) = C_1 e^{\alpha t}$ $\theta(t) = \beta t + C_2$
   (a) Si $\alpha = 0$ tindrem una òrbita circular amb $(0, 0)$ sent centre.

(b) Si $\alpha > 0$ el radi creix exponencialment. $(0,0)$ serà un focus repulsor.
(c) Si $\alpha < 0$ el radi decreix exponencialment. $(0,0)$ serà un focus atractor.

Quan no son canònics la matriu P envia rectes a rectes, i cercles centrats al origen a elipses centrats a l'origen.

2.4 Sistemes d'equacions no lineals

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ g' = g(x,y) \end{cases} \qquad f, g \in C^2 \leftarrow \text{Sistema no lineal autonom}$$

$z = (x,y)$ i els equilibris (x^*, y^*) tal que $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$.
Es diu que un punt d'equilibri z^* del sistema no lineal és estable si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $\forall z_0 \|z_0 - z^*\| < \delta \Rightarrow \|z(t, z_0) - z^*\| < \varepsilon\ \forall t > 0$.
Es diu que un punt d'equilibri z^* del sistema no lineal és asimptòticament estable si és estable i $\lim_{t\to\infty} \|z(t, z_0) - z^*\| = 0$
Es diu que un punt d'equilibri z^* del sistema no lineal és inestable si no és estable.
Un conjunt invariant $D \subset \mathbb{R}^2$ és un conjunt tal que si $z_i \in D \Rightarrow z(t, z_i) \in D\ \forall t \in \mathbb{R}$.
D és només positivament (o negativament) invariant si $z_i \in D \Rightarrow z(t, z_i) \in D\ \forall t > 0$ (o $t < 0$).

Definició: Donat un sistema no lineal autònom, es diu que la funció $H(x,y)$ és una integral primera de el sistema no lineal autonom si compleix que $H(x(t), y(t)) = C$ (es constant sobre les trajectories del sistema).

Tenim dos casos:

- Integrables
- No (necessàriament) integrables

Definim $z = (x,y)$ i $h(z) = (f(x,y), g(x,y))$ i llavors tindrem $z' = h(z)$. Suposem que tenim un equilibri a z_0 tal que $h(z_0) = 0$. Considerem que $z(t) = z_0 + \omega(t)$ i substituïm a la equació:
Llavors tindrem $z'(t) = \omega'(t) = h(z) = h(z_0 + \omega(t)) = h(z_0) + Dh(z_0)\omega(t)H(z_0, \omega(t))$ on $Dh = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$.
Llavors $\omega'(t) \approx Dh(z_0)\omega(t)$ pero nosaltres li pondrem una igualtat (doing maths as real physicists) això es una aproximació que podrem fer segons els seguents teoremes:

Teorema (Principi de la linearització)

1. Suposem que TOTS els valors propis de $Dh(z_0)$ tenen part real negativa. Llavors z_0 és un equilibri asimptòticament estable.

2. Suposem que te algun valor propi amb part real positiva aleshores z_0 és inestable.

Definició: Es diu un punt critic hiperbólic si tots els valors propis de la matriu jacobianaen aquest equilibiri tenen part real diferent de zero.

Teorema (De Hartman-Grobman) Suposem que z_0 és un punt crític hiperbólic. Llavors el retrat de fase del sistema $z' = h(z(t))$ en un entorn de z_0 és topològicament equivalent al retrat de fase de el sistema $y'(t) = Dh(z_0)y(t)$ en un entorn de l'origen.

2.4.1 Funcions de Lyapunov

Definició: Sigui z_0 un equilibri d'un sistema no lineal autònom. Considerem un entorn D de z_0. Sigui $V : D \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable tal que la derivada de V al llarg de la trajectoria del sistema és $V'(z) = V_x(x(t), y(t))x'(t) + V_y(x(t), y(t))y'(t)$
Es diu que V és una funció de Lyapunov si:

1. $V(z_0) = 0$ i $V(z) > 0\ \forall z \in D \setminus \{z_0\}$

2. $\frac{d}{dt}V(z) \leq 0\ \forall z \in D$

Es diu que és estricte si a més es compleix que $V'(z) < 0\ \forall z \in D \setminus \{z_0\}$

Teorema Sigui z_0 un equilibri del sistema no lineal autònom. Si existeix una funció de Lyapunov V en un entorn de z_0 llavors z_0 és estable. Si a més V és estricta llavors z_0 és asimptòticament estable.

2.4.2 Retrats de fase al pla

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Definició: Isoclines de l'eix horizontal: $g(x, y) = 0$
Isoclines de l'eix vertical: $f(x, y) = 0$

Les interseccions d'aquestes isoclines ens donen els punts crítics.

Definició: Un cícle límit és una òrbita periòdica aïllada.

Definició: Un poligon d'orbites és un conjunt de trajectories que conecten equilibris.

Teorema (de Bendinson-Poincarè) Una trajectoria acotada d'un sistema autònom de dues EDOs tendeix a un equilibri, a una òrbita periòdica o a un poligon d'orbites.

Modelització i Inferència

Horari

- Dilluns 11-13h.
- Dimecres 11-13h.

Tècniques de Disseny d'Algoritmes

Horari

- Dilluns 9-11h.
- Dijous 9-11h.

Visualització 3D

5.1 Rotacions

5.1.1 L'espai euclidià estàndard 3-dimensional

Treballem a l'espai 3-dimensional en el qual vivim i que identifiquem amb $\mathbb{R}^3$.

Notació. *En l'espai euclidià tenim l'origen a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *i un punt arbitrari* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Ambdues notacions (vertical i horitzontal) són vàlides malgrat representar diferents conceptes tècnicament.*

Definició: La norma euclidiana d'un vector $V \in \mathbb{R}$ es defineix com

$$\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+$$

que compleix $\forall V, W \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$
- $\|\lambda V\| = |\lambda| \, \|V\|$
- $\|V\| = 0 \iff V = 0$

Aquesta norma mesura la distància euclidiana entre dos punts P_1 i P_2 per la fórmula

$$\mathcal{D}\left(P_1, P_2\right) := \|P_1 - P_2\| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2}$$

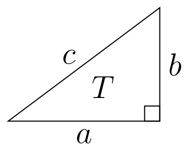
que compleix les seguents propietats

- $\mathcal{D}\left(P_1, P_3\right) \leq \mathcal{D}\left(P_1, P_2\right) + \mathcal{D}\left(P_2, P_3\right)$

- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \mathcal{D}(P_2, P_1)$
- $\mathcal{D}(P_1, P_2) = 0 \iff P_2 = P_1$

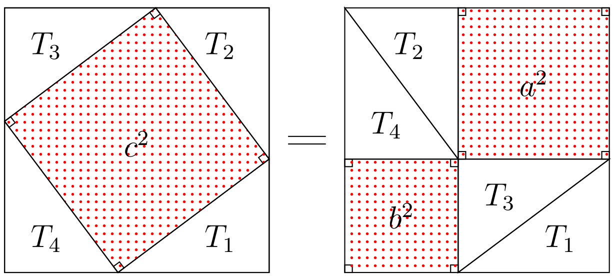
La norma euclidiana d'un vector V correspon exactament a la seva longitud.

Demostracio Recordem el teorema de Pitàgores.

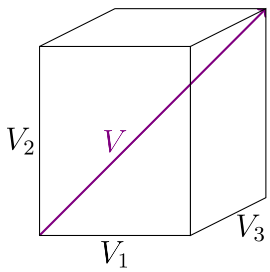


$$a^2 + b^2 = c^2$$

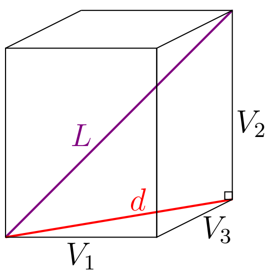
Com



Aleshores, veiem que $\|V\|$ és exactament aplicar el teorema de Pitàgores dos cops, tal que

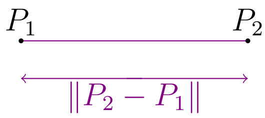


$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} d^2 = V_1^2 + V_2^2 \\ L^2 = d^2 + V_3^2 \end{cases} \Rightarrow L^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \|V\|^2$$

Com la norma d'un vector $V \in \mathbb{R}^3$ correspon a la seva longitud, de forma equivalent la distància entre dos punts a $\mathbb{R}^3$ correspon a la longitud del segment que uneix aquests punts:



Si tenim P_1 i P_2 punts que defineixen un segment, la longitud $\mathcal{D}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$
Per tant, la distància euclidiana entre dos punts és la que coneixem! ■

Aquesta norma (i distància) euclidiana prové d'una estructura que a més de les longituds conté la noció d'ortogonalitat:

Definició: Anomenem producte escalar a $\mathbb{R}^3$ la funció
$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$ que és

- Bilineal: $\langle V + \lambda\bar{V}, W \rangle = \langle V, W \rangle + \lambda \langle \bar{V}, W \rangle$ ídem si $V \leftrightsquigarrow W$
- Simètrica: $\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$
- Definit positiu: $\langle V, V \rangle > 0$ si $V \neq 0$

Observem que $\forall V \in \mathbb{R}^3$, $\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$: la norma es pot definir en funció del producte escalar.
Recíprocament, veiem fàcilment la <u>Identitat de Polarització</u>

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{2}\left(\|V + W\|^2 - \|V\|^2 - \|W\|^2\right) \forall V, W \in \mathbb{R}^3$$

Exercici Arribar a la Identitat de Polarització a partir d'allò. ■

El producte escalar permet definir la noció d'ortogonalitat. Per veure això, necessitem primer el resultat següent:

Teorema (Desigualtat de Cauchy-Schwartz)

$$\forall V, W \in \mathbb{R}^3, |\langle V, W \rangle| \leq \|V\| \, \|W\|$$

A més, la igualtat s'assoleix només si $\exists \lambda \in \mathbb{R} : V = \lambda W$

Demostracio Fixem $V, W \in \mathbb{R}^3$ qualsevol. Aleshores definim $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{P}(\lambda) := \|V + \lambda W\|^2 \geq 0$

Observem que $\mathcal{P}(\lambda) = \langle V + \lambda W, V + \lambda W\rangle = \|V\|^2 + 2\lambda \langle V, W\rangle + \lambda^2 \|W\|^2 \Rightarrow$ $\mathcal{P}$ és un polinomi en λ de grau 2. Llavors $\Delta = 4\left(\langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2\right)$ ha de ser ≤ 0, ja que $\mathcal{P} \geq 0$.
Deduïm que $\Delta \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \leq 0 \iff \langle V, W\rangle^2 \leq \|V\|^2 \|W\|^2$
Si $\Delta = 0$ això implica que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\lambda_0) = 0$, aleshores $\mathcal{P}(\lambda_0) = 0 \iff \|V + \lambda_0 W\| = 0 \iff V = -\lambda_0 W$ ∎

Com a conseqüència, obtenim que el número

$$\frac{\langle V, W\rangle}{\|V\| \|W\|} \in [-1, 1] \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(\iff |\langle V, W\rangle| \leq \|V\| \|W\|)$$

Definició: L'únic $\theta \in [0, \pi] : \cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|}$ s'anomena angle euclidià entre V i W.

L'angle és efectivament l'angle que coneixem.
Si $V = (1, 0, 0)$ i $W = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ obtenim que $\cos\theta = \frac{\langle V, W\rangle}{\|V\|\|W\|} = \frac{\cos\alpha}{1\times 1} = \cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$

Definició: Diem que V i W són ortogonals si $\langle V, W\rangle = 0$ o, de forma equivalent, si l'angle entre V i W és $\frac{\pi}{2}$.

Notació:. *Denotem dos vectors ortogonals entre si com $V \perp W$*

Un conjunt de 3 vectors és base ortogonal si $\langle U, V\rangle = \langle V, W\rangle = \langle U, W\rangle = 0$, És base ortonormal, si és base ortogonal i a més $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

$\mathbb{R}^3$ admet una estructura addicional que permet multiplicar dos vectors:

Definició: $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, definim el seu producte vectorial

$$V \wedge W = \begin{pmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

que compleix

- Bilinealitat: $(U + \lambda V) \wedge W = U \wedge W + \lambda V \wedge W$ ídem a la dreta.
- Antisimètria: $V \wedge W = -W \wedge V$

Veiem fàcilment que $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$ $\langle V \wedge W, V\rangle = 0 = \langle V \wedge W, W\rangle$ Més enllà

Proposició $\forall U, V, W \in \mathbb{R}^3, \langle U, V \wedge W \rangle = \det(U, V, W)$

5.1.2 Moviments rígids i grup ortogonal

Observar un objecte que es desplaça és equivalent que desplaçar-se observant aquest objecte fix. La visió 3D utilitza l'observació d'un mateix objecte des de 2 punts de vista $\neq$ (un per cada ull). Però això equival estrictament a l'observació d'un mateix objecte desplaçant-se a l'espai.
Per això primer estudiarem aquestes transformacions de l'espai que preserven un objecte (s'anomenen moviments rígids). Són transformacions que preserven les distàncies entre qualsevol parell de punts de l'objecte.
Comencem estudiant un conjunt particular de transformació a l'espai.

Definició: El grup ortogonal és el conjunt d'aplicacions lineals que preserven el producte escalar:

$$O(3) := \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|\, \langle MV, MW \rangle = \langle V, W \rangle \, \forall V, W \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Si $M \in O(3)$ i $V \in \mathbb{R}^3$, $\|MV\| = \|V\|$
Si $M \in O(3)$ i $V \perp W \Rightarrow MV \perp MW$

Com $\forall V, W \in \mathbb{R}^3$, $\langle MV, MW \rangle = V^t M^t M W$ per tant,

$$M \in O(3) \Leftrightarrow M^t M = \mathbb{I}_3$$

Al final obtenim

$$O(3) = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,| M^t M = \mathbb{I}_3 \right\}$$

Proposició Si $M \in O(3)$, llavors $\det(M) = \pm 1$

Definició: Es defineix el grup especial ortogonal

$$SO(3) := \{ M \in O(3) | \det M = 1 \}$$

Per construcció els elements de $SO(3)$ són aquestes transformacions lineals que preserven les bases ortogonals positives. És a dir, són aquestes que preserven l'orientació i més concretament, (Me_1, Me_2, Me_3) compleix

1. (Me_1, Me_2, Me_3) és una base ortogonal
2. $\det(Me_1, Me_2, Me_3) = \det M = 1$ i doncs $\langle Me_1 \wedge Me_2, Me_3 \rangle = 1 \Rightarrow Me_3 = Me_1 \wedge Me_2$

Un exemple de $M \in O(3) \setminus SO(3)$ és la matriu $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Aquestes transformacions de $O(3) \setminus SO(3)$ canvien l'orientació no corresponen al context de la visió 3D com no podem canviar l'orientació d'un objecte desplaçant-ho a l'espai. Per això tindrem especial èmfasi en el subgrup $SO(3)$!

$O(3)$ i $SO(3)$ són grups (noció d'àlgebra) el que diu el següent:

- Si $M, N \in O(3)$ (o $SO(3)$), $MN \in O(3)$.
- $\mathbb{I}_3 \in O(3)$.
- Si $M \in O(3)$, aleshores M és invertible i $M^{-1} \in O(3)$.

Més generalment,

Definició: Un conjunt G és un grup Si

- $\exists$ operació interna $\cdot : G \cdot G \to G$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (element neutre)
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e$ (inversa)

Teorema Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació que preserva les distàncies $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \mathcal{D}(f(P), f(Q)) = \mathcal{D}(P, Q) \Leftrightarrow \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ Aleshores $\exists P_o \in \mathbb{R}^3,\ M \in O(3)$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^3, f(P) = P_o + MP$

Definició: Si a més f preserva l'orientació, obtenim que $M \in SO(3)$. Un tal f s'anomena moviment rígid i correspon al fet de desplaçar un objecte a $\mathbb{R}^3$ (o de forma equivalent, canviar de punt de vista).

5.1.3 Grup de rotacions

Ara l'objectiu és entendre millor l'estructura dels grups $O(3)$ i $SO(3)$, i observar que el subgrup $SO(3)$ està compost de les rotacions. Primer observem que si treballem a l'espai euclidià de dimensió n (on $n \in \mathbb{N}$), és a dir, treballem a $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar $\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^{n} V_i W_i$ $\forall V, W \in \mathbb{R}^n$ podem definir $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M^t M = \mathbb{I}_n\}$ i $SO(n) = \{M \in O(n) | \det M = 1\}$
Per entendre la dimensió 3, necessitem entendre primer les dimensions inferiors.

- $n = 1$:
$M = (a) \in O(1) \iff M^t M = \mathbb{I}_1 = 1 \iff (a^2) = 1$
$\iff a = \pm 1 \iff M = \pm \mathbb{I}_1$
Deduïm que $O(1) = \{\pm \mathbb{I}_1\}$ i $SO(1) = \{\mathbb{I}_1\}$

- $n = 2$

Proposició Sigui $M \in O(2)$. $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Això genera una rotació d'angle θ en el primer cas i en el segon una simetria d'un eix horitzontal compost amb una rotació d'angle θ.

En particular, si $M \in SO(2)$, $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- $n = 3$

Proposició Sigui $M \in O(3)$. Aleshores $\exists B \in SO(3), \exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Geomètricament, això significa que si $M = \mathcal{M}_{Can}(L)$, $\exists \mathcal{B} = (U, V, W)$ i $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $B = P_{Can \to \mathcal{B}}$ i $BMB^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Com $B \in SO(3)$, vol dir que la base $\mathcal{B}$ és base ortonormal positiva (és a dir, té la mateixa orientació que la base canònica $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 1$)

  - Cas on $\pm 1 = 1$:

$$\begin{aligned} U &= L(U) \\ L(V) &= \cos\theta V + \sin\theta W \\ L(W) &= -\sin\theta V + \cos\theta W \end{aligned}$$

  Llavors L és una rotació d'eix U i d'angle θ.

– Cas on $\pm 1 = -1$:

$$\begin{aligned} U &= -L(U) \\ L(V) &= \cos\theta V - \sin\theta W \\ L(W) &= \sin\theta V + \cos\theta W \end{aligned}$$

L és la composició d'una simetria $\perp$ al pla $U^\perp = Vect(V, W)$ i de la rotació d'angle θ i eix U

Teorema (de les rotacions d'Euler) Sigui $M \in SO(3)$. Llavors $\exists B \in SO(3)$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Per això, $SO(3)$ rep el nom de grup de les rotacions.
En particular, i no és gens evident, si componem dues rotacions a l'espai, obtenim una tercera.

Cas particular: Si $U = U'$, $R_{\theta_1, U'} \circ R_{\theta_2, U} = R_{\theta, U}$. Això és evident, però $R_{\theta_1, U} \circ R_{\theta_2, V} = R_{\theta, W}$ i és molt difícil obtenir θ i W.

5.1.4 Representació de $SO(3)$ via l'espai projectiu

Associem a cada punt $p \neq 0$ de la bola B de radi π la rotació d'eix $\frac{p}{\|p\|}$ d'angle $\|p\|$ i a $p = 0$ associem la rotació Identitat $\mathbb{I}_3$.
Com $\forall p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|p\| = \pi$ ($\Leftrightarrow p \in \partial B$), tenim que $R_{\frac{p}{\pi}, \pi} = R_{\frac{-p}{\pi}, \pi}$, en tenim prou amb B per representar $SO(3)$.
Acabem de definir una aplicació

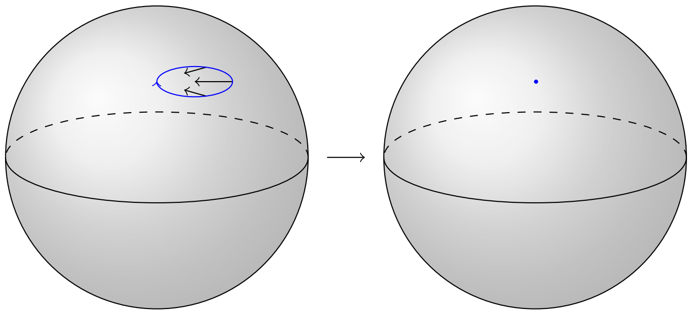
$$\begin{aligned} \Omega : B\left(= B^3(0, \pi)\right) &\longrightarrow SO(3) \\ p &\longmapsto R_{\frac{p}{\|p\|}, \|p\|} \end{aligned}$$

Injectiva? No, perquè $\Omega((0, 0, \pi)) = \Omega(0, 0, -\pi)$.
Però ho és quasi: $\forall p, q$ tal que $\|p\| < \pi$ i $\|q\| < \pi$, tenim que $\Omega(p) \neq \Omega(q)$.
A més si $\|p\| = \|q\| = \pi$, $\Omega(p) = -\Omega(q)$.
Exaustiva? Sí.
Al final, si enganxem els parells de punts antipodals (parells de la forma $(p, -p)$ amb $\|p\| = \pi \iff p \in \partial B$) obtenim un espai quocient que representa rotacions:

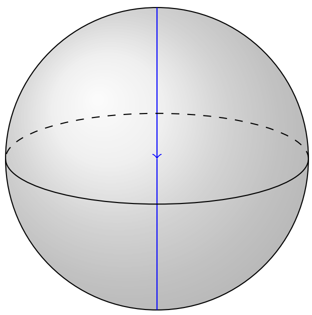
$$SO(3) = B \Big/ \{p = -p \text{ si } p \in \partial B\}$$

Aquest espai s'anomena espai projectiu de dim 3 i es denota $\mathbb{R}P^3$.

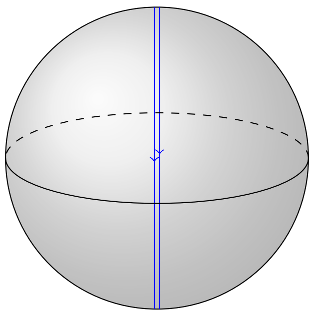
Existeixen corbes tancades a B^3 que es poden contractar en un punt.



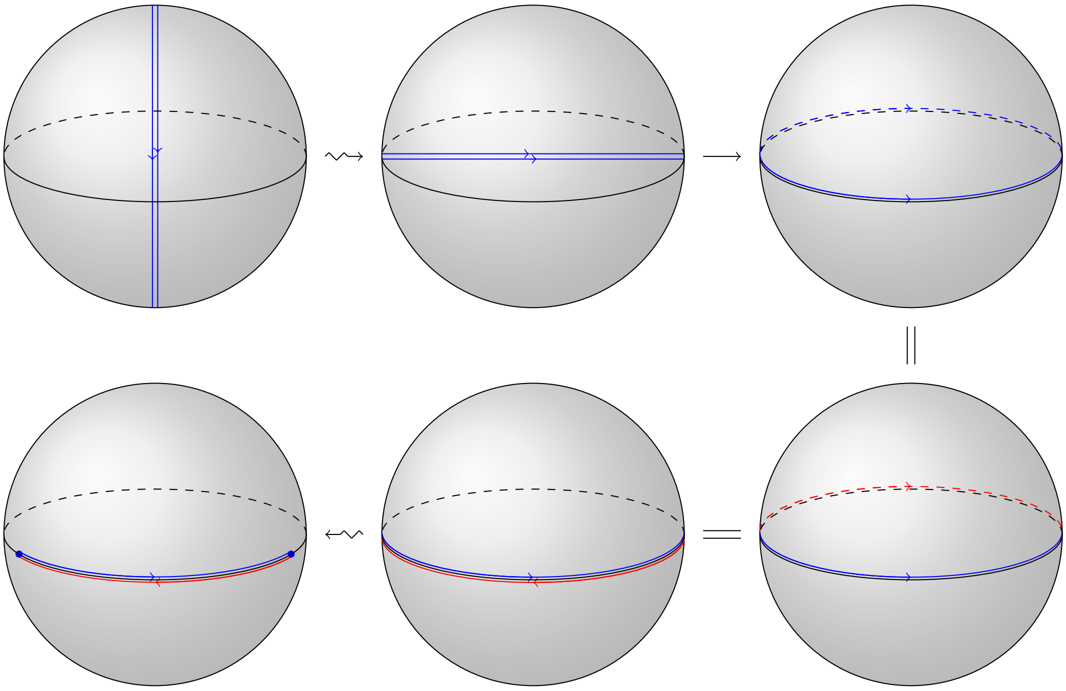
Existeixen corbes que no es poden contractar en un punt.



Existeixen dobles corbes que si es poden contractar en un punt.



Expliquem aquesta última observació:



5.2 Els quaternions

En aquest nou capítol, denotarem la base ortonormal estandard (e_1, e_2, e_3) a $\mathbb{R}^3$ com (i, j, k).
Es a dir, que $i = e_1$, $j = e_2$ i $k = e_3$.

5.2.1 Definició i primeres propietats:

Definició: Un quaternió q és la suma (formal) d'un escalar $q_0 \in \mathbb{R}$ i d'un vector $Q := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. És a dir, que $q = q_0 + Q$. Farem servir $\mathbb{H}$ (de Hamilton) per el conjunt dels quaternions que es pot identificar a $\mathbb{R}^4$ via l'identificació:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k &\longmapsto (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

Denotarem també que $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$.

Donats dos quaternions $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ i $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim:

- La suma de quaternions com $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \in \mathbb{H}$
- El producte per un escalar com $\lambda p = \lambda p_0 + \lambda p_1 i + \lambda p_2 j + \lambda p_3 k \in \mathbb{H}$
- El producte de quaternions com $pq = \underbrace{p_0 q_0 - \langle P, Q \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p_0 Q + q_0 P + P \wedge Q}_{\in \mathbb{R}^3}$

$$pq \in \mathbb{H}$$

$\forall p, q \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} pq - qp &= (p_0 q_0 - \langle P, Q \rangle) + (p_0 Q + q_0 P + P \wedge Q) \\ &\quad - (q_0 p_0 - \langle Q, P \rangle) - (q_0 P + p_0 Q + Q \wedge P) \\ &= 2 \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^2 &= ii \\ &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 1i + 0j + 0k) \\ &= pq \text{ amb } p_0 = q_0 = 0, p_1 = q_1 = 1, p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = 0 \\ &= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\ &= 0 - 1 + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $j^2 = k^2 = -1$.

$$\begin{aligned} ij &= (0 + 1i + 0j + 0k)(0 + 0i + 1j + 0k) \\ &= 0 - \langle P, Q \rangle + P \wedge Q \\ &= 0 - 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= k \end{aligned}$$

De la mateixa manera, es pot veure que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ i $ki = j = -ik$.

Al final, hem obtingut les regles de Hamilton, fonamentals per calcular amb quaternions:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{cases}$$

En particular, veiem que $\mathbb{H}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 4, amb base $(1, i, j, k)$ amb producte que no és conmutatiu: $ij \neq ji$!
En canvi:

Proposició El producte sobre $\mathbb{H}$ és associatiu i distributiu respecte l'addicció.

$1q = q$ i $0q = 0$

5.2.2 Conjugació, norma i invers

Definició: Siguin $q = q_0 + \underbrace{q_1 i + q_2 j + q_3 k}_{Q} \in \mathbb{H}$. Definim el conjugat de q com

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k = q_0 - Q$$

Direm que q és:

- (quaternió) real si $q = \overline{q} \iff Q = 0 \iff q = q_0$
- (quaternió) imaginari pur si $q = -\overline{q} \iff q_0 = 0 \iff q = Q$

Denotem $\mathbb{R} = \{q \in \mathbb{H} \,\|\, \overline{q} = q\} \subset \mathbb{H}$ el subconjunt de reals.

Exercici Demostrar que $q \in \mathbb{R} \iff pq = qp,\ \forall p \in \mathbb{H}$ ■

Denotarem $\mathbb{H}^{\text{pur}} = \{q \in \mathbb{H} \mid \overline{q} = -q\} \subset \mathbb{H}$ el subconjunt de quaternions imaginaris purs.

Proposició $\forall p, q \in \mathbb{H}$, $\overline{p + q} = \overline{p} + \overline{q}$ i $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$

Demostracio El primer punt és evident. Pel segon, ja n'hi ha prou donada la distribuitivitat de verificar-ho per i, j, k i per exemple:

$$\begin{cases} \overline{ij} = \overline{k} = -k \\ \overline{j}\,\overline{i} = -j(-i) = ji = -k \end{cases}$$

■

Definició: Sigui $q \in \mathbb{H}$. Definim la seva norma $N(q) \in \mathbb{R}_+$ per la fòrmula:

$$N(q) = \sqrt{q\overline{q}} \in \mathbb{R}$$

$\overline{q\overline{q}} = \overline{\overline{q}}\,\overline{q} = q\overline{q} \Rightarrow q\overline{q} \in \mathbb{R}$ i a més

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= q_0^2 - \langle Q, -Q\rangle + \underbrace{q_0\,(-Q) + q_0\,(Q)}_{=0} + \underbrace{Q \wedge (-Q)}_{=0} \\ &= q_0^2 + \langle Q, Q\rangle \end{aligned}$$

es a dir $q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \in \mathbb{R}_+$

En particular, $N(q) \geq 0$ i $N(q) = 0 \iff q = 0$.

$N(q)$ coincideix amb la norma euclidiana a $\mathbb{R}^4$ per la identificació

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\simeq \mathbb{R}^4 \\ 1 &\leftrightarrow e_1 \\ i &\leftrightarrow e_2 \\ j &\leftrightarrow e_3 \\ k &\leftrightarrow e_4 \end{aligned}$$

Proposició La norma $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_+$ es multiplicativa, és a dir, $N(pq) = N(p)N(q)$ $\forall p, q \in \mathbb{H}$.

Demostracio

$$N^2(pq) = pq\overline{pq} = \overline{q}\underbrace{\overline{p}p}_{N^2(p)}q = \underbrace{q}\,N^2(p)q = N^2(p)N^2(q)$$

■

Denotem

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{q \in \mathbb{H} \text{ tal que } q_2 = q_3 = 0\} \\ &= \{q_0 + q_1 i | q_0, q_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Obeeix que $\mathbb{C}$ és estable per la multiplicació. Tenim llavors que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset (\mathbb{H}, +, \times)$

Definició: Sigui $q \in \mathbb{H}$ i $q \neq 0$, aleshores, la inversa de q, $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)^2}$ que compleix $q^{-1}q = 1$ i $qq^{-1} = 1$.

Teorema $\mathbb{H}$ és un cos (com $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$).

Demostracio

- La suma i la multiplicació són associatives.
- La suma és commutativa.
- Existeix element neutre per la suma i per la multiplicació (0 i 1, respectivament).
- Distribució de multiplicació relativa a suma.
- Tot element admet un invers per la suma ($q + (-q) = 0$).
- Tot element no nul admet un invers per la multiplicació ($qq^{-1} = 1$).

∎

Notació. *Si* $q \in \mathbb{H}$, $Re\ q := \frac{1}{2}(q + \overline{q}) \in \mathbb{R}$ *i* $Im\ q := \frac{1}{2}(q - \overline{q}) \in \mathbb{H}^{pur}$.

5.2.3 Quaternions unitaris

Definició: Un quaternió $u \in \mathbb{H}$ és unitari si satisfà $N(u) = 1$. Denotarem $\mathbb{H}^* = \{q \in \mathbb{H} | N(q) = 1\}$ el conjunt dels quaternions unitaris. Denotarem $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{H} \parallel N(u) = 1\}$ el subconjunt dels quaternions unitaris.

Aquest subconjunt té les següents propietats:

Proposició

1. $\forall u, v \in \mathbb{U},\ u^{-1} = \overline{u}$ i $uv \in \mathbb{U}$ i en particular, $(\mathbb{U}, \times)$ satisfà les propietats d'un grup.
2. $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$

Demostracio

1. $\forall u \in \mathbb{U}\ u^-1 = \overline{u}$ ja que $N(u) = 1$, aleshores $N(\overline{u}) = N(\overline{u})N(u) = N(u\overline{u}) = 1 \Rightarrow u^{-1} \in \mathbb{U}$
2. Si $u \in \mathbb{R}\ u = u_0$ amb $u_0 \in \mathbb{R}$ i $N^2(u) = u_0^2 = 1 \Rightarrow u = u_0 = \pm 1$

∎

Podem escriure $\mathbb{U} = \left\{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k | (q_0, q_1, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ i } q_0^2 + q_1^2 + q_3^2 + q_4^2\right\}$, i observem que

$$\mathbb{H} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} R^4$$

$$\breve{\mathbb{U}} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \breve{S}^3$$

$\mathbb{U}$ s'identifica amb l'esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$

Recordem que $\mathbb{H}^{pur} = \{q \in \mathbb{H} | \overline{q} = -q\}$ i per això podem identificar $\mathbb{H}^{pur}$

$$= \{q \in \mathbb{H} | Re\ q = 0\}$$
$$= \left\{Q | Q \in \mathbb{R}^3\right\}$$

amb $\mathbb{R}^3$ via l'aplicació

$$\mathbb{H}^{pur} \to \mathbb{R}^3$$
$$q = Q = q_1 i + q_2 j + q_3 k \mapsto Q = (q_1, q_2, q_3)$$

Proposició Si $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$, $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$

Demostracio Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, $pq = -\langle P, Q\rangle + P \wedge Q$ com $p_0 = q_0 = 1$ i en particular

$$q^2 = -\langle Q, Q\rangle = -\|Q\|^2 = -N^2(q)$$

■

Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, $pq - qp = 2P \wedge Q$

Teorema Siguin $p, q, r \in \mathbb{H}^{pur}$ i denotem els vectors corresponents per $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$. Aleshores

$$(P, Q, R) \text{ BON } \oplus \text{ a } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = q^2 = r^2 = -1 \\ pq = r = -qp \\ qr = p = -rq \\ rp = q = -pr \end{cases}$$

(i, j, k) compleixen aquestes formules! No es sorpresa ja que (i, j, k) és un BON $\oplus$ a $\mathbb{R}^3$.

Demostracio $(\Leftarrow)$ Recordem que si $q \in \mathbb{H}^{pur}$, $q^2 = -N^2(q) = -\|Q\|^2$ i per tant P, Q, R són de norma euclidiana $= 1$

Lema: Si $p, q \in \mathbb{H}^{pur}$, i $P, Q \in \mathbb{R}^3$ són els vectors associats aleshores

$$\begin{cases} Re\,(pq) & = -\langle P, Q\rangle \\ Im\,(pq) & = P \wedge Q \end{cases}$$

Demostracio $pq = p_0q_0 - \langle P, Q\rangle + p_0Q + q_0P + P\wedge Q = -\langle P, Q\rangle + P \wedge Q$ ja que $p_0 = q_0 = 0$ ∎

Ara bé, $P \wedge Q = pq = r = R$ i $\langle P, Q\rangle = -Re(pq) = -Re(r) = 0$ doncs (P, Q, R) BON directe. ($\Rightarrow$) Si (P, Q, R) és BON $\oplus$, $\|P\| = 1 = -p^2$ i idem per Q i R. Aleshores $pq = -\underbrace{\langle P, Q\rangle}_{=0} + P \wedge Q = R = r$ i idem per qr i rp. ∎

5.2.4 Quaternions i Rotacions

Sigui $u \in \mathbb{U}$, considerem l'aplicació $\Phi_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$
$q \mapsto uq\overline{u}$

Proposició $\forall p, q \in \mathbb{H}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. Φ_u és lineal: $\Phi_u(p + \lambda q) = \Phi_u(p) + \lambda\Phi_u(q)$
2. Φ_u és multiplicativa: $\Phi_u(pq) = \Phi_u(p)\Phi_u(q)$
3. $\overline{\Phi_u(p)} = \Phi_u(\overline{p})$
4. $Re(\Phi_u(p)) = Re(p)$, en general $Im(\Phi_u(p)) \neq Im(p)$
5. Φ_u preserva la norma: $N(\Phi_u(p)) = N(p)$

Demostracio 1 i 2 son clares.

3. $\overline{uq\overline{u}} = \overline{\overline{u}}\,\overline{q}\,\overline{u} = u\overline{q}\overline{u}$
4. $Re(q) := \frac{1}{2}(q + \overline{q}) \rightsquigarrow Re(\Phi_u(p)) = \dfrac{1}{2}(\Phi_u(p) + \overline{\Phi_u(p)}) = \dfrac{1}{2}(\Phi_u(p) + \Phi_u\overline{p})$
$$= \Phi_u(Rep) = Re(p\Phi_u(1))$$
$$= Re(p)$$
5. $N(\Phi_u(p)) = \sqrt{up\overline{u}\overline{up\overline{u}}} = \sqrt{up\overline{p}\overline{u}} = N(p)$

∎

A més:

Proposició $\forall u, v \in \mathbb{U}$

- $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}} \iff u = \pm 1$
- $\forall u, v \in \mathbb{U}, \Phi_{uv} = \Phi_u \circ \Phi_v$ i Φ_u és invertible, amb $\Phi_u^{-1} = \Phi_{\overline{u}}$
- $\Phi_u = \Phi_v \iff u = \pm v$

Demostracio

1. Si $u = \pm 1$ aleshores $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$ Reciprocament, si $\Phi_u = Id_{\mathbb{H}}$ aleshores $\forall q \in \mathbb{H},\ uq\overline{u} = q \iff u\overline{q} = qu$

   Lema: Si $p \in \mathbb{H}$, tal que $\forall q \in \mathbb{H}, pq = qp$ aleshores $p \in \mathbb{R}$.

   Demostracio Escribim $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$. En particular,

$$\begin{aligned} pi = ip &\iff p_0 i - p_1 - p_2 k - p_3 j = p_0 i - p_1 + p_2 k + p_3 j \\ &\iff 2p_2 k + 2p_3 j = 0 \\ &\iff p_2 = p_3 = 0 \iff p = p_0 + p_1 i \end{aligned}$$

   i la relació $pj = jp \iff p_1 = 0$. Al final $p = p_0 \in \mathbb{R}$. ∎

   Doncs $u \in \mathbb{R} \cap \mathbb{U}\{\pm 1\}$.

2. $\Phi_u(\Phi_v(p)) = uvp\overline{v}\overline{u} = uvp\overline{uv} = \Phi_{uv}(p)$ Ara bè, $\forall u \in \mathbb{U},\ \Phi_u \circ \Phi_{\overline{u}} = \Phi_{u\overline{u}} = \Phi_1 = Id_{\mathbb{H}} \Rightarrow \Phi_u^{-1} = \Phi_{\overline{u}}$

3. $\Phi_u = \Phi_v \Rightarrow \Phi_u \circ \Phi_{v^{-1}} = Id_{\mathbb{H}}$

∎

Ara denotarem $\begin{aligned}\Psi_u : \mathbb{H}^{pur} &\to \mathbb{H}^{pur} \\ q &\mapsto uq\overline{u}\end{aligned}$ la restricció de Φ_u als quaternions imaginaris purs.

Si identifiquem $\begin{aligned}\mathbb{H}^{pur} &\simeq \mathbb{R}^3 \\ p_1 i + p_2 j + p_3 k &\tilde{\mapsto} (p_1, p_2, p_3)\end{aligned}$, obtenim una aplicació induïda $R_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit per $R_u(p_1, p_2, p_3) = \Psi_u(p_1 i + p_2 j + p_3 k)$

Les dues proposicions anteriors impliquen el següent:

- R_u és lineal $\forall p, q \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- R_u és invertible
- De fet, R_u serà una rotació.

Teorema $u, v \in \mathbb{U}$, aleshores

1. $R_u \in SO(3)$ (és a dir, R_u és una rotació)
2. $R_u \circ R_v = R_{uv}$ i $R_u^{-1} = R_{\overline{u}}$

3. $R_u = R_v \iff u = \pm v$

Demostracio 1. Observem que $\Psi_u(i^2) = \Psi_u(i)^2 \iff -1 = \Psi_u(i)^2$ i de la mateixa manera $\Psi_u(j)^2 = \Psi_u(k)^2 = -1$. Després $\Psi_u(ij) = \Psi_u(k) = \Psi_u(-ji) \iff \Psi_u(i)\Psi_u(j) = \Psi_u(k) = -\Psi_u(j)\Psi_u(i)$ i de la mateixa manera obtenim

$$\begin{cases} \Psi_u(j)\Psi_u(k) = \Psi_u(i) = -\Psi_u(k)\Psi_u(j) \\ \Psi_u(k)\Psi_u(i) = \Psi_u(j) = -\Psi_u(i)\Psi_u(k) \end{cases}$$

I doncs deduim que $(\Psi_u(i), \Psi_u(j), \Psi_u(k))$ és un BON $\oplus$ de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow (R_u(1,0,0), R_u(0,1,0), R_u(0,0,1))$ és un BON $\oplus \Rightarrow mat_{(e_1,e_2,e_3)}(R_u) \in SO(3)$.

2 i 3 es dedueixen de la proposició anterior. ∎

Notació. *Des d'ara no distingirem entre R_u i Ψ_u.*

En particular, obtenim un morfisme de grups:

$$R : (\mathbb{U}, \times) \to (SO(3), \times)$$
$$u \mapsto R_u (= \Psi_u \text{ via la identificació} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^{pur})$$

Amb $R_u(Q) = R_u(q) = uq\overline{u}$
tal que $R_{uv} = R_u \circ R_v$ i $R_u = R_v \iff u = \pm v$.
Aixi podem identificar $SO(3) \simeq \mathbb{U}\{/\pm Id\} \simeq \mathbb{S}^3\{/\pm 1\}$.

Ara veiem que R és exhaustiva i permet descriure qualsevol rotació.

Teorema Sigui $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ amb $\|Q\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Definim $u(Q,\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q$. Aleshores $u(Q,\theta) \in \mathbb{U}$ i $R_{u(Q,\theta)}$ és la rotació a $\mathbb{R}^3$ d'un eix Q i un angle θ. En particular, l'aplicació R és exhaustiva.

Demostracio

$$\begin{aligned} N(u(Q,\theta)) &= u(Q,\theta)\overline{u(Q,\theta)} \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}Q^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Primer, comprovem que $q = Q \in \mathbb{H}^{pur}$ és l'eix de la rotació $R_{u(Q,\theta)}$:

$$\begin{aligned}
R_{u(Q,\theta)}(q) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)Q(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}Q) \\
&= \underbrace{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}Q)}_{=u(Q,\theta)\overline{u(Q,\theta)}} \qquad = Q \iff R_{u(Q,\theta)}(Q) = Q
\end{aligned}$$

Ara comprovem que l'angle de la rotació $R_{u(Q,\theta)}$ és θ:
Per això triem $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow p_1, p_2 \in \mathbb{H}^{pur}$ tals que (P_1, P_2, Q) sigui BON $\oplus$.
Com P_1, P_2, Q és BON $\oplus$ calculem

$$\begin{aligned}
R_{u(Q,\theta)}(P_1) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)P_1(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}Q) \\
&= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)(\cos\frac{\theta}{2}P_1 - \sin\frac{\theta}{2}\underbrace{P_1Q}_{=-QP_1}) \\
&= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}Q)(\cos\frac{\theta}{2}P_1 + \sin\frac{\theta}{2}Q)P_1 \\
&= (\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Q + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Q + \sin^2\frac{\theta}{2}Q)P_1 \\
&= (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})P_1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{QP_1}_{=P_2} \\
&= \cos\theta P_1 + \sin\theta P_2
\end{aligned}$$

Per tant, deduim que l'angle de $R_{u(Q,\theta)}$ és θ. ■

Podem comprovar que $R_{u(Q,\theta)(P_2)=-\sin\theta}P_1 + \cos\theta P_2$. Deduïm que

$$Mat_(Q, P_1, P_2)(R_{u(Q,\theta)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5.3 Interpolació de rotacions

Pregunta: Si tenim dos punts de vista sobre una situació: aquí tenim dos matrius A_0 i $A_1 \in SO(3)$. Com podem pasar d'un punt de vista (camera 0) a l'altre punt de vista (camera 1)?
De forma equivalent, busquem una familia de matrius

$$\{A_t\}_{t\in[0,1]}\ tq \begin{cases} A_0 = \overline{A_0} \\ A_1 = \overline{A_1} \\ (t \mapsto A_t \text{ es contiuna}) \end{cases} \qquad \text{i } A_t \in SO(3)\ \forall t \in [0,1]$$

Trobar la familia $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ se'n diu fer la interpolació entre $\overline{A_0}$ i $\overline{A_1}$.
Sabem inicialment que aquesta interpolació sempre existeix, i a més no és única.
Aquest problema es díficil, com busquem els 9 coeficients de A_t que han de satisfer les equacions següents:

$$\begin{cases} A_t^t A_t = I & \text{(6 quadratiques per simetria)} \\ \det A_t = 1 & \text{(1 cúbica)} \end{cases}$$

Pero ho podem fer "fàcilment" fent servir els quaterinons.
Com ho fem?
Primer representem $\overline{A_0}$ i $\overline{A_1} \in SO(3)$ amb quaternions unitaris:

$$\exists u, v \in \mathbb{U}\ tq\ \overline{A_0} = R_u \text{ i } \overline{A_1} = R_v$$

Sigui $w \in Vect(u, v) \cap \mathbb{U}$ tal que

$$\begin{cases} \langle u, w\rangle = 0 \\ \langle v, w\rangle = 0 \end{cases}$$

$\exists\theta \in [0, \pi)$ tq $v = \cos\theta u + \sin\theta w$
Aleshores obtenim que

$$\begin{aligned} & q := v\overline{u} = (\cos\theta + \sin\theta w)\overline{u} \in \mathbb{U} \\ \iff & q = \cos\theta + \sin\theta w\overline{u} \\ \iff & w = \frac{v - \cos\theta u}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Finalment, posem $\forall t \in [0, 1],\ U_t := \cos t\theta u + \sin t\theta w \in \mathbb{U}$ i com $u_0 = u$ i $u_1 = v$, deduïm que $A_t := R_{U_t}(\forall t \in [0, 1])$ ens defineix una interpolació entre $\overline{A_0}$ i $\overline{A_1}$.
Com trobar w i θ en la pràctica?
Busquem $\theta \in [0, \pi)$ i $q \in \mathbb{U}$ tq $vu^{-1} = \cos\theta + \sin\theta q$.
Aleshores tenim el θ buscat i obtenim

$$w = qu\ (= \frac{v - \cos\theta u}{\sin\theta})$$

Ara expliquem que son els angles d'Euler.

Teorema Posem $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} R_i(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ R_j(\beta) := \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \\ R_k(\gamma) := \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aquestes matrius generen totes les rotacions a l'espai:
$\forall A \in SO(3),\ \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ anomenats angles d'Euler, tal que
$A = R_i(\alpha)R_j(\beta)R_k(\gamma)$

5.4 Geometria epipolar

5.4.1 Formació de l'imatge i ull ideal

Per això modelitzem l'ull (o una càmera) de la manera seguent: El pla infinit $\{z = -f\}$ on f és un número anomenat distància focal.
Llavors tenim $\overline{P} = (x, y, -f)$ i $P = (X, Y, Z)$ on P envia un raig de llum que arribarà a $\overline{P}$.
Suposem que el forat en l'origen és un punt: els raig de llum només poden passar de $\{z > 0\}$ a $\{z < 0\}$ per l'origen.
Ara determinem les coordenades x i y del punt projectat $\overline{P}$ en termes de les coordenades X, Y, Z del punt $P \in \{z > 0\}$.
La condició geométrica és que els punts P, O i $\overline{P}$ siguin alineats. De forma equivalent,

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R}: \qquad & \overrightarrow{O\overline{P}} = \lambda \overrightarrow{OP} \\ \iff & \overline{P} - 0 = \lambda(P - 0) \\ \iff & (x, y, -f) = \lambda(X, Y, Z) \\ \iff & \begin{cases} x = \lambda X \\ y = \lambda Y \\ -f = \lambda Z \end{cases} \end{aligned}$$

i per tant trobem que $\lambda = -\frac{f}{Z}$ i $x = -\frac{f}{Z}X$ i $y = -\frac{f}{Z}Y$.
Al final hem obtingut l'aplicació

$$\begin{aligned} \pi_f : \{z > 0\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto \left(-\frac{f}{Z}X, -\frac{f}{Z}Y\right) \end{aligned}$$

El signe $-$ dins de les formules de les coordenades de $\overline{P}$ reflecten el fet que l'imatge sobre el pla de projecció $\{z = -f\}$ està inversada. Com el cervell corregeix aquesta inversió, podem oblidarnos del signe negatiu.

Llavors l'aplicació es simplifica a

$$\begin{aligned} \pi_f : \{z > 0\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto \left(\frac{f}{Z}X, \frac{f}{Z}Y\right) \end{aligned}$$

Veiem que podem expressar la relació

$$\begin{aligned} & (x, y) = \pi_f(X, Y, Z) \\ \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{Z}X \\ \frac{f}{Z}Y \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff & Z \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff & Z \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{homog.}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=K_f} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{:=\pi_0} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{homog.}}} \end{aligned}$$

K_f és diu la matriu de calibració de la càmera i π_0 és la matriu de projecció estandard.
Per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff Z \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general, la càmara no esta centrada en l'origen i el seu eix no coincideix amb l'eix (OZ).

Sabem que les coordenades (x, y) de la projecció de P sobre el pla focal de la camara esta donat com

$$Z_C = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passem de $(\mathcal{R}_0)$ a $(\mathcal{R}_C)$ per un moviment rígid (de càmera) $\Rightarrow \exists M \in SO(3)$ i $P_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + P_0$$

Si posem $X_C = Y_C = Z_C = 0$, obtenim $-MC = P_0$. Doncs trobem que $\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - MC$

Deduïm que $Z_C \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} \iff Z_C \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 R_{M,C} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$

Definició:

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} M & -MC \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}_{:=R_{M,C}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general, no coneixem Z_C (la profunidtat del punt observat respecte a l'eix de la càmera) i per tant posarem $Z_C = \lambda > 0$.

Definició: Una càmera ideal (o ull ideal) de pàrametres (f, M, C) on $f > 0$, $M \in SO(3)$ i $C \in \mathbb{R}^3$ és una projecció.

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 tq (x, y) = \pi_{f,M,C}(X, Y, Z) \iff \exists > 0 \ tq \ \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = K_f \pi_0 R_{M,C} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $f = 1$, diem que la càmera està normalitzada.

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + C \iff \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Relació epipolar i la matriu essencial

Considerem dues càmeres ideals normalitzades $\mathcal{C}_1 = (f_1 = 1, M_1, C_1)$ i $\mathcal{C}_2 = (f_2 = 1, M_2, C_2)$. Fent un possible canvi de referència, podem suposar que

$$\begin{cases} M_1 = I_3 \\ C_1 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \end{cases}$$

o de forma equivalent que la càmera $\mathcal{C}_1$ està centrada en l'origen a $\mathbb{R}^3$ i el seu eix amb l'eix $0Z$.

Triem un punt $P \in \mathbb{R}^3$ tal que P sigui davant de les dues cameres, es a dir

$$P \in \{(x,y,z)_{\mathcal{C}_1} : z > 1\} \cap \{(x_2,y_2,z_2)_{\mathcal{C}_2} : z_2 > 1\}$$

i volem entendre la relació anomenada epipolar que existeix entre les dues coordenades homogènies $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ de les imatges corresponents al punt P per la càmera $\mathcal{C}_1$ i la càmera $\mathcal{C}_2$ respectivament.
El punt P es pot descriure fent servir les seves coordenades respecte a $\mathcal{C}_1$: $P = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{C}_1} = (X, Y, Z)$ i respecte a $\mathcal{C}_2$: $P = (x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{C}_2}$
Recordem que aleshores existeix la relació següent

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - M_2 C_2$$

com la posiciò de $\mathcal{C}_2$ respecte a $\mathcal{C}_1$ diferent d'un moviment rìgid. De manera equivalent podem escriure

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^t M_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + C_2$$

Per simplificar les notacions, posem que $R = M_2 \in SO(3)$ i $T = -M_2 C_2 \subset \mathbb{R}^3$ i direm que les dues càmeres tenen la posició relativa (R, T) on R és la rotació relativa i T la poscició relativa. Per tant tenim la relaciò

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + T$$

$$\iff Z_2 \left(\begin{smallmatrix} X_2/Z_2 \\ Y_2/Z_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = ZR \left(\begin{smallmatrix} X/Z \\ Y/Z \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + T$$

$$\iff z_2 \left(\begin{smallmatrix} x_2/z_2 \\ y_2/z_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = ZR \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + T$$

Definició: Donat $T \in \mathbb{R}^3$ definim

$$\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & -T_3 & T_2 \\ T_3 & 0 & -T_1 \\ -T_2 & T_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores

Proposició 1. ${}^t\hat{T} = -\hat{T}$

2. $\forall Q \in \mathbb{R}^3$, $\hat{T}Q = T \wedge Q$

Demostracio 1. evident.

2. Si $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$, aleshores que $\hat{T}Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -T_3 & T_2 \\ T_3 & 0 & -T_1 \\ -T_2 & T_1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -T_3Q_2+T_2Q_3 \\ T_3Q_1-T_1Q_3 \\ -T_2Q_1+T_1Q_2 \end{smallmatrix}\right) = T \wedge Q$

■

Multipliquem la relació anterior per $\hat{T}$ i obtenim

$$\hat{T}Z_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{T}ZR \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\hat{T}T}_{=0}$$

i com $\hat{T}$ és lineal

$$Z_2\hat{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = Z\hat{T}R \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si fem el producte escalar de la equació anterior amb el vector $\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ obtenim

$$\left\langle Z_2\hat{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle Z\hat{T}R \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = Z_2 \left\langle T \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff 0 = Z \left\langle \hat{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff 0 = \left\langle \hat{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff 0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definició: Donades dues clameres en posició relativa $(R, T) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ definim la matriu essencial com $E = \hat{T}R$ (matriu 3×3 amb coeficients reals)

Resumint, hem obtingut el resultat següent

Teorema (Relació epipolar) Considerem dues càmeres $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ de posiciò relativa (R, T) on $R \in SO(3)$ i $T \in \mathbb{R}^3$
Considerem $P \in \mathbb{R}^3$ que sigui devant de les dues cameres.
$\begin{cases} I_1(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ I_2(P) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ són les coordenades de P en les imatges de les càmeres $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ respectivament.
Aleshores $I_2(P)^t E I_1(P) = 0$ es la relació epipolar, on $E = \hat{T}R$.

Definició: Definim els objectes geometrics epipolars següents:

- El pla epipolar associat a un punt P és el pla afí determinat pels 3 punts C_1, C_2 i P. Suposarem sempre que aquestos punts no estaran alineats.

- L'epipol e_1 és la projecció del punt $\mathcal{C}_2$ sobre el pla imatge de $\mathcal{C}_1$ (respectivament amb e_2). Suposarem sempre que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ intersecta els plans imatges de les càmeres en un únic punt.

- La linea epipolar l_1 associada a un punt P serà l'intersecció entre el pla imatge de $\mathcal{C}_1$ i el pla epipolar.

- El pla epipolar π_p associat a P és $\pi_p = (C_1, C_2, P)$
- Obtenim els epipols fent interseccions $e_1 = \{(C_1, C_2) \cap \{Z_1 = 1\}\}$ i $e_1 = \{(C_1, C_2) \cap \{Z_2 = 1\}\}$
- Obtenim les línies epipolars amb $l_1(P) = \pi_p \cap \{Z_1 = 1\}$ i $l_2(P) = \pi_p \cap \{Z_2 = 1\}$

Proposició Donat un matriu essencial $E = \hat{T}R$ (de forma equivalent, donades dues càmeres en posició relativa (R, T)), aleshores $\forall P$ davant de les dues càmeres

$$l_1(P) = \left\{\left\langle \cdot\, , E^t I_2(P)\right\rangle = 0\right\} \; l_2(P) = \left\{\left\langle \cdot\, , E^t I_1(P)\right\rangle = 0\right\}$$

Demostracio $I_2(P) = I_2(P') \; \forall P' \in (C_2, P)$, llavors

$$\begin{aligned} l_1(P) &= \{I_1(P') : P' \in (C_2, P)\} \\ &= \{I_1(P') : I_2(P) = I_2(P')\} \\ &= \left\{I_1(P') : I_2(P)^t E I_1(P) = 0\right\} \\ &= \left\{I_1(P') : I_1(P)^t E^t I_2(P) = 0\right\} \\ &= \left\{I_1(P') : \left\langle I_1(P), E^t I_2(P)\right\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{I_1(P') : \left\langle \cdot \, , E^t I_2(P)\right\rangle = 0\right\} \end{aligned}$$

De la mateixa manera amb $l_2(P)$. ■

5.4.3 Reconstrucció 3D

Imaginem que disposem de dues fotografies del mateix objecte fet amb la mateixa càmera desde dos punts de vista $\neq$.
Aqui suposem la (o les) càmara ideal i normalitzada. Primer determinem sobre les 2 imatges una serie de punts corresponents dels quals determinem les coordenades: siguin $P_1, \ldots, P_n$ una sèrie de $n > 1$ punts de l'objecte amb coordenades a $\mathbb{R}^3$ on cada punt $P_i = (x^i, y^i, z^i)$ per $i = 1, \ldots, n$.
tals que coneixerem les seves coordenades homogènies respecte la càmera 1 i 2:

$$I_1(P_i) = \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 1 \end{pmatrix} \quad I_2(P_i) = \begin{pmatrix} x_2^i \\ y_2^i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

La pregunta ès la següent: Podem determinar les coordenades $(x^i, y^i, z^i) \forall i = 1, \ldots, n$ si coneixem les coordenades (homògenies) (x_1^i, y_1^i) i (x_2^i, y_2^i) $\forall i = 1, \ldots, n$?

1. El primer pas és determinar la matriu essencial E que compleix el següent sistema:

   $$\forall i = 1, \ldots, n \quad I_2(P_i)^t E I_1(P_i) = 0$$

   $$\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad (x_2^i, y_2^i, 1) E \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

   No oblidem que $E = \hat{T} R \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$
   Si denotem $E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ els coeficients buscats, tenim un sistema lineal de n equacions amb 3 incognites:

   $$\forall i = 1, \ldots, n \quad (x_1^i, y_1^i, 1) \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^i \\ y_2^i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n \quad (x_2^i e_{11}+y_2^i e_{21}+e_{31}, x_2^i e_{12}+y_2^i e_{22}+e_{32}, x_2^i e_{13}+y_2^i e_{23}+e_{33}) \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n \quad x_1^i x_2^i e_1 1+x_1^i y_2^i e_{21}+x_1^i e_{31}+y_1^i x_2^i e_{12}+y_1^i y_2^i e_{22}+y_1^i e_{32}+x_2^i e_{13}+y_2^i e_{23}+e_{33}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^i x_2^i & x_1^i y_2^i & x_1^i & y_1^i x_2^i & y_1^i y_2^i & y_1^i & x_2^i & y_2^i & 1 \end{pmatrix}}_{=:a_i\in\mathbb{R}^9} \underbrace{\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix}}_{=:E^s\in\mathbb{R}^9} = 0$$

$$\forall i=1,\dots,n \quad a_i E^s = 0$$

Si finalment, posem

$$A := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in Mat_{n\times 9}(\mathbb{R})$$

Obtenim l'equació seguent $AE^s = 0$.
Veiem que $E^s \in Ker(A)$ i nomes podrem determinar E^s (i E) llevat de multiple per un escalar: Si E^s es solució ($\Leftrightarrow AE^s = 0$) aleshores $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, λE^s és soluciò també. No sabrem (de moment!) quina λ és la matriu essencial.
Veiem també que l'aplicació lineal $\begin{array}{l} L_A : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^n \\ \qquad X \mapsto AX \end{array}$ té nucli de dimensió
1 $\iff$ (teorema del rang)

$$9 = \underbrace{\dim(Im(L_A))}_{=rang(A)} + \dim(Ker(L_A)) \iff rang(A) = 8$$

Per tant, des d'ara suposarem que hem triat $n = 8$ punts tal que la matriu A associada compleixi $rang(A) = 8$. (Al nivell pràctic, si triem 8 punts a l'atzar això sempre es complirà i es pot justificar al nivell teoric). Aleshores podem determinar E^s (i E) llevat de multiple per un escalar. Per triar el multiple, suposem que $||T|| = 1$, es a dir, suposem que la distancia entre les dues posicions de la càmera està normalitzada igual a 1 (metre).

El fet de no saber la solució llevat de multiple és perfectament normal. (pel terorema de Tales, si d es distancia entre les cameres i h l'altura de l'objecte, si canviem la distancia per λd i l'altura per λh, la imatge no canvia).

En canvi, si coneixem una de les distàncies entre dos dels 8 punts $P_1, \ldots, P_8$, podem determinar aquest λ i llavors determinar E sense suposar $||T|| = 1$.

Proposició Sigui $E = \hat{T}R$ una matriu essencial. ($T \subset \mathbb{R}^3,\ R \in SO(3)$), aleshores

(a) $\mathrm{Ker}(E^t) = \mathrm{Vect}(T)$

(b) $\mathrm{Tr}(EE^t) = 2||T||^2$

Demostracio (a) $X \in \mathrm{Ker}(E^t) \Leftrightarrow E^tX = 0 \Leftrightarrow (\hat{T}R)^tX = 0 \Leftrightarrow \hat{T}X = 0 \iff T \wedge X = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(T)$

(b) $\mathrm{Tr}(EE^t) = -\mathrm{Tr}(\hat{T}RR^t\hat{T}) = -\mathrm{Tr}(\hat{T}^2)$ i deduim el resultat com $\hat{T}^2 = \begin{pmatrix} -T_3^2-T_2^2 & T_1T_2 & T_1T_3 \\ T_1T_2 & -T_3^2-T_1^2 & T_2T_3 \\ T_1T_3 & T_2T_3 & -T_2^2-T_1^2 \end{pmatrix}$ i la traça només agafa la diagonal.

■

Aleshores, com hem suposat que $n = 8$, $\mathrm{rang}(A) = 8$ i $||T|| = 1$ podem determinar E llevat de múltiple per un escalar, pero amb $\mathrm{tr}(EE^t) = 2$ podem determinar E llevat d'un signe $\pm$. Triem un dels dos signes.

Si E descriu la rotació entre les dues càmeres: $X^tEY = 0$ aleshores la matriu $-E$ també: $X^t(-E)Y = 0$.

2. En el segon pas, determinem la posició relativa (R, T) entre les dues cameres. Acabem de determinar E i per tant podem triar $T \in \mathrm{Ker}(E^t)$ de norma 1 que està determinat llevat d'un signe, triem un dels signes.

Si canviem un signe per l'altre això equival a invertir les posicions de $\mathcal{C}_1$ i de $\mathcal{C}_2$.

Proposició Si E és matriu essencial i $T \in \mathrm{Ker}(E^t)$ aleshores $\exists! R \in SO(3)$ tal que $E = \hat{T}R$.

Demostracio Si $R, R' \in SO(3)$ tal que $E = \hat{T}R = \hat{T}R'$, aleshores $R'R^t\hat{T}^t = \hat{T}^t$ això implica que $R'R^t_{|\mathrm{Im}(\hat{T})} = I_{3|\mathrm{Im}(\hat{T})}$ pero $\dim(\mathrm{Im}(\hat{T})) = 2$ i $R'R^t \in SO(3)$. Llavors tenim que $R'R^t = I_3$ i per tant $R = R'$. ■

Per tant dins del nostre algoritme un cop determinat E i T la matriu R està unicament determinada. Com el determinem? Així:

Proposició Sigui $U \in \mathbb{R}^3$ tal que $||U|| = 1$ i $\langle U, T\rangle = 0$ i posem $V = U \wedge T$. Aleshores

$$R = \begin{pmatrix} V & -U & -T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^tU & E^tV & E^tU \wedge E^tV \end{pmatrix}^t$$

Demostracio Hem obtingut:

$$\begin{aligned} S\begin{pmatrix} U & V & -T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E^tU & E^tV & E^tU \wedge E^tV \end{pmatrix} \\ \iff R^tMB &= \begin{pmatrix} E^tU & E^tV & E^tU \wedge E^tV \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i com $MB = \left(\begin{smallmatrix} MU & MV & M(-T) \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right) \iff R^t\left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right) \iff \left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right)R = \left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right)^t$ Si posem $A := \left(\begin{smallmatrix} V & -U & -T \end{smallmatrix} \right)$ com (U, T, V) és BON $\oplus$ veiem que A és BON $\oplus$ i doncs $A \in SO(3) \Rightarrow A^{-1} = A^t$
Al final tenim $A^{-1}R = \left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right)^t \Rightarrow R = A\left(\begin{smallmatrix} E^tU & E^tV & E^tU\wedge E^tV \end{smallmatrix} \right)^t$
■

PARENTESI: Si tenim (U, V, W) BON $\oplus$ a $\mathbb{R}^3$, i $A = \left(\begin{smallmatrix} U & V & W \end{smallmatrix} \right) \in SO(3)$. Per què?
$A^tA = \left(\begin{smallmatrix} U^t \\ V^t \\ W^t \end{smallmatrix} \right)\left(\begin{smallmatrix} U & V & W \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} U^tU & U^tV & U^tW \\ V^tU & V^tV & V^tW \\ W^tU & W^tV & W^tW \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \langle U,U\rangle & \langle U,V\rangle & \langle U,W\rangle \\ \langle V,U\rangle & \langle V,V\rangle & \langle V,W\rangle \\ \langle W,U\rangle & \langle W,V\rangle & \langle W,W\rangle \end{smallmatrix} \right) = I_3$

3. L'ultim pas consisteix en determinar les coordenades a $\mathbb{R}^3$ d'un punt P (qualsevol) donat les seves imatges.
Tenim un punt $P = (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $I_1(P) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ i $I_2(P) = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ Aleshores $\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0$ tal que

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = K_{f_i}\pi_0 R_{M_i,C_i} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{per } i = 1, 2$$

Donat que $f_1 = f_2 = 1$ i $M_1 = I_3$ i $C_1 = 0$ tenim

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

D'altra banda, R_{M_2,C_2} té la posició relativa entre les dues càmeres, per tant

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_0 R_{M_2,C_2} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \iff \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_0 \begin{pmatrix} R\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ Z \end{smallmatrix}\right) + T \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + T$$

Llavors tindrem $\lambda_2 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 R \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} + T$. Un cop λ_i determinat, obtenim les coordenades del punt P a $\mathbb{R}^3$.
Aquest algorisme s'anomena l'Algorisme dels 8 punts de reconstrucció 3D.