Apunts

La segona meitat del 1r curs

Autor:
EDUARDO PÉREZ MOTATO

Febrer - Juny 2024

Índex

Programació Orientada als Objectes

Càlcul en Diverses Variables

Definició: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Definició: Siguin $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definim $\underbrace{<(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)>}_{\text{(producte escalar)}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ com a producte escalar.

Definició: $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = +\sqrt{<x, x>}$ on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Això és la distància del punt x a $(0, 0, \ldots, 0)$.

Propietats de la norma:

1. $||x|| \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Desigualtat triangular: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$

Desigualtat de Cauchy-Schwartz: $<x, y> \leq ||x|| ||y||$ per tot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Això ho acceptem.

Obs Observem que $-1 \leq \frac{<x,y>}{||x|| ||y||} \leq 1$ i definim l'angle entre els vectors x i y com l'angle α tal que $\cos\alpha = \frac{<x,y>}{||x|| ||y||}$, és a dir, $<x, y> = ||x|| ||y|| \cos\alpha$.

■ **Exemple** Trobem els valors de $\mathbb{R}^3 \perp (-1, -2, 1)$. Busquem $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ tal que $<(x_1, x_2, x_3), (-1, -2, 1)> = 0 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. ■

2.1 Boles a $\mathbb{R}^n$

Si $n = 2$ la bola de centre (x_0, y_0) i radi R és $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < R\} = \text{(disc)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$. Això és una bola oberta, denotada per

Notació. *Fem servir $\mathfrak{B}_R(x_0, y_0, \ldots)$ la bola oberta ($< R$) i $\overline{\mathfrak{B}_R}(x_0, y_0, \ldots)$ la tancada ($\leq R$). Es farà servir més la bola oberta.*

Definició: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$, definim $\mathring{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : R > 0 | \mathfrak{B}_R(\vec{x}) \subset A\}$

- **Exemple**

1. $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y) : x > 0\}$
2. $A = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$, llavors $\mathring{A} = \{(x, y, z) : -a < x < a, -b < y < b, -c < z < c\}$

■

Definició: Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ es diu obert si $A = \mathring{A}$, és a dir, si tot punt del conjunt A és també un punt d'$\mathring{A}$.

Algorítmia i Combinatòria en Grafs. Mètodes Heurístics

Definició: Un graf és un objecte combinatori que està format per un parell ordenat de vèrtex i arestes ($G = (V, E)$). Una aresta (E) està etiquetat per un origen i un destí (o extrems si no estan orientades) sent aquests vèrtexs (V).

Definició: Un graf dirigit, o orientat, és un graf on les arestes tenen direcció, com si fos una fletxa.

Definició: Un graf no dirigit serà un graf on les arestes no tenen direccions. Podem suposar que l'aresta és bidireccional.

Definició: Un graf és planar si es pot unir tots els vèrtexs sense que es creuin les arestes. Si s'han de creuar obligatòriament, és un graf no planar.

Teorema Tot graf no planar té un subgraf $K_{3,3}$ o P_5.

Definició: (Propietats dels grafs)

1. L'**ordre** d'un graf és el nombre de vèrtex
2. La **grandària** d'un graf és el nombre d'arestes
3. La **valència** d'un vèrtex és el nombre d'arestes entrant o sortint del vèrtex. Si surt i es connecta en si mateix compta com dos.
4. La **valència d'entrada** és el nombre d'arestes entrant.
5. La **valència de sortida** és el nombre d'arestes sortint.
6. Els vèrtexs amb valència 1 s'anomenen **fulles**.

7. Els vèrtexs amb valència més gran que dos es diuen **branching** (o **encreuament**).

8. Un **camí** és la seqüència de vèrtexs connectats linealment. La llargària d'un camí és el nombre de vèrtexs.

9. Un **circuit** és un camí tancat, és a dir, un camí que comença i termina al mateix lloc.

Definició: Un graf no dirigit és **connex** si hi ha un camí des de tot vèrtex qualsevol fins a tot altre.

Definició: Un component connex és un subgraf connex i maximal.

Definició: Un graf dirigit és **connex** si hi ha un camí des de tot vèrtex qualsevol fins a tot altre.

Proposició Per a un graf (V, E) no orientat les afirmacions següents són equivalents:

1. (V, E) és un graf connex.
2. $\forall v_o \in V$, existeix un camí d'arestes de v_o a v, $\forall v \in V$.
3. $\exists v_o \in V$ tal que existeix un camí d'arestes de v_o a v.

Notació. *Fem servir* $\circ$ *per multiplicar camins.*

Definició: Un graf dirigit és **feblement connex** si hi ha un camí des de tot vèrtex qualsevol fins a tot altre sense fer servir l'orientació, és a dir, seria connex en cas que fos no orientat.

Definició: Un graf dirigit és **semi connex** si al escullir qualssevol dos vèrtexs del graf hi existeix un camí connectant-los, sigui d'un sentit o d'altre.

Probabilitat

Definició: Un fenomen o experiment aleatori presenten les següents característiques:

- Abans de realitzar l'experiment no sabem el resultat però sí el conjunt de resultats possibles.
- En teoria es pot realitzar sota les mateixes condicions infinites vegades.
- Es pot assignar probabilitats als resultats.

Definició: L'espai mostral és el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori. Es denota per la lletra Ω i els seus elements per ω.

Definició: Un esdeveniment és una col·lecció de subconjunts de l'espai mostral. Es pot calcular la probabilitat d'un esdeveniment. Ha de tenir estructura de σ-àlgebra.

Notació. *Si $\omega \in \Omega$ és un resultat de l'experimental tal que $\omega \in A$, diem que A s'ha realitzat.*

Definició: Sigui $\mathcal{A}$ una col·lecció de subconjunts d'Ω. $\mathcal{A}$ és una σ-àlgebra si es compleix el següent:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$, aleshores $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ són elements d'$\mathcal{A}$, aleshores $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Corolari: (propietats d'una σ-àlgebra) Sent $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$

Definició: (Fórmula de Laplace) La probabilitat d'un esdeveniment $\mathcal{A}$ sempre que el conjunt de resultats possibles sigui finit i equiprobable, la fórmula de Laplace es pot aplicar.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Casos probables a } A}{\text{Casos possibles}}$$

Una altra manera de calcular la probabilitat és fent servir una visió freqüentista:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) \text{ on } f_n(A) := \frac{\text{nombre de cops que hem obtingut } A}{n}$$

Definició: (axiomes de Kolmogorov) Siguin Ω un conjunt i $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra sobre Ω. Una probabilitat és qualsevol aplicació $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ que compleix el següent:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ són disjunts dos a dos llavors

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Definició: Un espai de probabilitat és la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Notació. *Per a unions disjuntes fem servir* $\uplus$.

Corolari: Propietats dels axiomes de Kolmogorov.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Definició: Quan parlem de *odds* de A, definim:

- Odds a favor de A: $\text{Odds}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)}$
- Odds en contra de A: $\text{Odds}(A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(A)}$

■ **Exemple** $\text{Odds}(A) = \frac{3}{2} \iff \mathbb{P}(A) = \frac{3}{2}\mathbb{P}(A^c)$ i sabem que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, llavors en resoldre tenim $\mathbb{P}(A) = 0.6$ i $\mathbb{P}(A^c) = 0.4$. ■

Càlcul Numèric

Hi ha 3 tipus d'errors (4 si em comptes a mi):

1. Errors en les dades d'entrada
2. Errors a les operacions
3. Errors de truncament

Aquí es tractaran principalment els dos primers.

Teorema (Representació en punt flotant en base b) Per $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Tot $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ pot ser representat de la següent forma:

$$x = s(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b^{-i})b^q$$

amb $s \in \{-1, 1\}, q \in \mathbb{Z}$ i $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. A més, la representació anterior és única si $\alpha_1 \neq 0$ i els α_i no són tots $b-1$ d'una posició en endavant.

Definició: (Representació en punt flotant) És la versió finita de la representació. En aquesta representació, tot nombre x consta de

- el signe, s
- la mantissa, que només consta d'un nombre finit de dígits, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ expressats en base b, i
- l'exponent, q, que està limitat a un rang prefixat, $q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$