Pràctica 1

Considereu el problema

$$\begin{cases} \partial_t u(a,t)+\partial_a u(a,t)=-c(a)\,u(a,t) & \text{si} \qquad a\in(0,1) \\ u(0,t)=b(t) \\ u(a,0)=u_0(a) \end{cases} \tag{1}$$

El sistema anterior es pot interpretar com la dinàmica d'una població estructurada per l'edat a, de manera que $u(a,t)$ és la densitat d'individus d'edat a a temps t i $c(a)$ denota la mortalitat dels individus d'edat a. Les unitats de temps s'han agafat de manera que $a=1$ és l'edat màxima a la que pot arribar qualsevol individu (és a dir, no hi ha individus d'edat més gran que 1 i tots els individus que arriben a aquesta edat es moren en el moment que hi arriben). La funció $b(t)$ dóna els naixements per unitat de temps que es produexien a temps t. Suposem que tant $u_0(a)$ per $a\in[0,1)$ com $b(t)$ per $t>0$ són funcions donades. Al final del document s'explica som arribar a l'equació anterior a partir d'una llei de conservació.

En aquesta pràctica aprendrem a resoldre numèricament el sistema (1) utilitzant un esquema en diferències finites. També es mostrarà com contrastar el resultat obtingut amb algun resultat teòric sobre el sistema, de manera que si el resultat teòric i el numèric no són coherents voldrà dir que el mètode emprat no és adient.

Per aplicar un esquema en diferències primer cal discretitzar el domini espacial. Si es volen considerar M punts repartits homogèniament sobre el domini espacial i de manera que l'extrem esquerra de l'interval (el punt $a=0$) sigui un d'aquests punts, la malla espacial que s'ha de prendre és el conjunt

$$\left\{0,\frac{1}{M},\frac{2}{M},\ldots,\frac{M-2}{M},\frac{M-1}{M}\right\}.$$

L'extrem dret de l'interval, el punt $a=1$, no s'ha d'agafar perquè la funció $u(a,t)$ que aproximem val 0 si $a=1$ per hipòtesi. La malla espacial es pot escriure en termes del paràmetre $\triangle a:=1/M$ que dóna la distància entre punts adjacents, de manera que el punt m-èssim de la malla és $a_m=m\triangle a$, amb $m\in\{0,1,2\ldots,M-2,M-1\}$.

A partir del paràmetre $\triangle a$ es defineix el pas de temps de la malla temporal. En principi es pot definir $\triangle t:=f(\triangle a)$ amb f una funció positiva i contínua tal que $f(\triangle a)\to 0$ quan $\triangle a\to 0$. Per exemple podríem prendre $\triangle t=\mu\triangle a^s$ on $s,\mu>0$ (en l'expressió anterior $\triangle a^s$ indica la potència s-èssima de $\triangle a$, és a dir $\triangle a^s=(\triangle a)^s$ però s'ometen els parèntesis per no sobrecarregar la notació). Noteu que com més petit és s més ràpidament es pot calcular la solució ($\triangle t$ és gran en comparació a $\triangle a$), però si s és massa petit el mètode pot deixar de convergir a la solució real del problema. En aquesta pràctica fixarem $s=1$.

El parell $(\triangle a,\triangle t)$ determina la malla completa sobre la qual definir les diferències finites. Els punts de la forma $(m\triangle a,n\triangle t)$ per $m\in\{0,1,2\ldots,M-2,M-1\}$ i $n\in\mathbb{N}$ s'anomenen nodes de la malla.

Donem l'esquema en **diferencies avançades en temps i atraçades en espai**. Per fer-ho definim $u_m^n:=u(m\triangle a,n\triangle t)$ i $\mathrm{C}_m:=c(m\triangle a)$, de manera que aproximant les derivades per diferències finites sobre el nodes es té que

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\triangle t}\approx-\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{\triangle a}-C_m\,u_m^n \qquad \text{si} \qquad m\geqslant 1$$

$$u_0^{n+1}=b((n+1)\triangle t)$$

Definim U_m^n com la solució numèrica del problema sobre el node $(m\triangle a,n\triangle t)$. L'esquema en diferències finites pels valors de U s'obté imposant que l'aproximació anterior és una igualtat, és a dir s'imposa que

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{\triangle t}=-\frac{U_m^n-U_{m-1}^n}{\triangle a}-C_m\,U_m^n \qquad \text{si} \qquad m\geqslant 1$$

$$U_0^{n+1}=b((n+1)\triangle t)$$

Les equacions anteriors es poden reescriure de manera que els valors de U al pas de temps $n+1$ s'expressin en termes dels valors de U al pas de temps n:

$$\begin{array}{ll} U_m^{n+1}=\left(1-\dfrac{\triangle t}{\triangle a}-\triangle t\, C_m\right)U_m^n+\dfrac{\triangle t}{\triangle a}U_{m-1}^n \qquad \text{si} \qquad m\geqslant 1 & \\ & , \\ U_0^{n+1}=b((n+1)\triangle t) & \end{array} \tag{2}$$

que es pot interpretar com una equació matricial de la forma

$$U^{n+1}=(A-\triangle t\,\mathrm{Diag}(C))\,U^n+B^{n+1} \tag{3}$$

on

$$\begin{array}{l} U^n=(U_0^n,U_1^n,U_2^n,\cdots,U_{M-2}^n,U_{M-1}^n)^\top \\ C=(0,C_1,C_2,\cdots,C_{M-2},C_{M-1})^\top \\ B^{n+1}=(b((n+1)\triangle t)\,,0,0,\cdots,0,0)^\top \end{array}$$

són vectors de $\mathbb{R}^M$ (la $\top$ indica que prenem el vector transposat, i.e. vertical), Id és la matriud identitat de dimensió M i

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\triangle t}{\triangle a} & 1-\frac{\triangle t}{\triangle a} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\triangle t}{\triangle a} & 1-\frac{\triangle t}{\triangle a} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{\triangle t}{\triangle a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\triangle t}{\triangle a} & 1-\frac{\triangle t}{\triangle a} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{Diag}(C)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{M-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{M-1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

de manera que per calcular la solució numèrica al pas de temps $n+1$ (és a dir U^{n+1}) n'hi ha prou en fer el producte de $A-\triangle t\,\mathrm{Diag}(C)$ per U^n i sumar el vector B^{n+1} al resultat obtingut.

1. Considereu el problema (1) i treballeu analíticament (no numèricament) en els punts següents.

a) Doneu la solució $u(a,t)$ del problema (1) en termes de les funcions donades $b(t)$ i $u_0(a)$.

b) En particular observeu que si $t>1$, la solució només depèn de la funció $b(t)$ (ja no depèn de la condició inicial $u_0(a)$).

c) Observeu també que si $b(t)$ es constant, és a dir si $b(t)\equiv b>0$, aleshores la solució de (1) satisfà $u(a,t)=\bar{u}(a)$ per tot $t>1$, on $\bar{u}$ és una funció que només depèn de a, concretament

$$\bar{u}(a)=be^{-\int_0^a c(\alpha)d\alpha}.$$

Es diu que $\bar{u}$ és una solució estacionària del problema, ja que si $u_0(a)=\bar{u}(a)$, aleshores $u(a,t)=\bar{u}(a)$ per tot $t>0$. Comproveu que $\bar{u}$ és solució del problema estacionari (que s'obté quan s'imposa $\partial_t u(t,a)=0$ al problema (1))

$$\left\{\begin{array}{ll} u'(a)=-c(a)\,u(a) \qquad \text{si} \qquad a\in(0,1) \\ u(0)=b \end{array}\right. . \tag{5}$$

2. Desenvolupeu un codi que calculi la solució numèrica del problema (1) utilitzant l'esquema en diferències finites descrit anteriorment (anomenat **diferencies avançades en temps i atraçades en espai**).

Per fer-ho considereu com a dades d'entrada

$$\begin{array}{l} u_0(a)=a \\ c(a)=1/(1-a) \\ b(t)=1 \\ M=500 \\ \mu=1/2 \\ \triangle t=\mu\,\triangle a \\ t_{\text{final}}=1 \end{array} . \tag{6}$$

Recordeu que donat M el valor de $\triangle a$ queda determinat. El temps final t_{final} indica el temps fins on es calcularà la solució. Per introduir les dades anteriors en llenguatge R escriuríem al principi del codi les definicions següents:

```
u0 <- function(a) {a}
cf <- function(a) {1/(1-a)} #utilitzem cf perquè c és una funció primitiva de R
b <- function(t) {1}
M <- 500
da <- 1/M
mu <- 1/2
dt <- mu * da
tfinal <- 1
```

Un cop introduïdes les dades cal integrar pròpiament l'EDP. Això es pot fer de dues maneres: fent servir bucles o en directament en forma matricial. La primera alternativa no té massa secret, per trobar la solució numèrica al pas de temps $n+1$ en termes de la solució numèrica al pas de temps n n'hi ha prou en utilitzar la fòrmula (2) pels diferents índexs espacials, els índexs m (recordeu que a (2) el cas $m=0$ és especials). En pseudocodi això s'expressaria com

```
Unou[0]=b((n+1)dt)

per m de 1 a M-1
    Unou[m]=(1-dt/da*-dt*C[m])*U[m]+dt/da*U[m-1]
```

L'altra alternativa passa per utilitzar la forma matricial de (2), com es detalla a (3). Una manera d'introduir la matriu A en llenguatge R és (recordeu que en R a la primera entrada d'un vector s'hi accedeix amb l'índex 1. En el pseudocodi anterior s'hi accedia amb l'índex 0)

```
A <- matrix(rep(0,M*M), nrow=M)
for(i in 2:M) {
        A[i,i] <- 1 - dt/da
        A[i,i-1] <- dt/da
        }
```

El primer vector bàsic (de la base canònica d'$\mathbb{R}^M$) es pot introduir en R fent

```
e1 <- rep(0,M)
e1[1] <- 1
```

Per introduir la matriu $\text{Diag}(C)$ fem

```
av <- (0:(M-1))*da
cv <- cf(av)
diagC <- diag(cv)
```

Observem que la primera línia del tros de codi anterior defineix el vector `av` de punts espacials sobre els que es troben els nodes, de manera que `cv <- cf(av)` avalua la funció c sobre els punts del vector `av` i guarda el resultat (que és un altre vector) com `cv`. La comanda `diag(C)` construeix una matriu diagonal amb els elements de cv a la diagonal. El vector `av` es pot fer servir també per definir el vecor U_0 associat a la condició inicial, n'hi ha prou en fer

```
U0 <- u0(av)
```

Finalment, per calcular el resultat d'aplicar la matriu `A-dt*diag(cv)` al vector `U0` i sumar el vector B^{n+1} cal utilitzar la sintaxi

```
(A-dt*diagC) %*% U0 + b((n+1)*dt) * e1
```

El resultat d'aquesta operació és el vector que es correspon amb la solució numèrica sobre els nodes espacials al cap d'un pas de temps (o el que és el mateix, a temps $1{\cdot}\triangle t$).

3. Per les dades d'entrada definides a (6), grafiqueu la solució numèrica a temps t=1 i compareu el resultat amb la solució real (també a temps t=1) que heu obtingut al punt 1 (mostreu les dues gràfiques en un mateix gràfic, la numèrica en vermell i discontinua i la teòrica en negre i contínua, per exemple).

Els resultats que obteniu estan d'acord amb el que heu vist a la qüestió **1.** de la pràctica?

4. Considereu ara les mateixes dades que a (6) però preneu $\triangle t{=}2\triangle a$ enlloc de $\triangle t{=}\triangle a/2$. Doneu una taula amb el valor de la solució numèrica que obteniu als punts $(a{,}t)$ de la forma $a{=}0.5$ i $t{\in}\{0{,}0.1{,}0.2{,}...{,}0.9{,}1\}$. Per fer-ho podeu definir k com la part entera de $\frac{t_{\text{final}}}{10\triangle t}$ i aproximar $u(0.5{,}n\triangle t)$ com $U^n_{\lfloor (M-1)/2\rfloor}$ (on $\lfloor (M-1)/2\rfloor$ denota la part entera de $(M-1)/2$) pels valors de $n{\in}\{0{,}k{,}2k{,}....{,}9k{,}10k\}$, que es corresponen aproximadament als temps $t{\in}\{0{,}0.1{,}0.2{,}...{,}0.9{,}1\}$).

Els resultats que obteniu estan d'acord amb el que heu vist a la qüestió **1.** de la pràctica també en aquest cas?

5. Observeu que per cada pas de temps n es pot definir

$$\tilde{P}_n{=}\sum_{m=1}^{M} U^n_m \triangle a,$$

que és una aproximació de la integral respecte la variable espacial de la funció $u(n\triangle t{,}a)$, és a dir

$$\tilde{P}_n{\approx}\int_0^1 u(n\triangle t{,}a)da,$$

que representa la població total a temps $n\triangle t$. Noteu també que $U^n_M{=}0$, per tant el sumatori només va de $m{=}1$ a $m{=}M{-}1$ a efectes pràctics.

Utilitzeu aquesta idea per adaptar el codi de l'apartat 2 per estudiar el problema

$$\begin{cases} \partial_t u(a{,}t){+}\partial_a u(a{,}t){=}{-}c(a)\,u(a{,}t) & \text{si} \quad a{\in}(0{,}1) \\ u(0{,}t){=}\dfrac{r}{1{+}P(t)}P(t) \quad \text{on} & P(t){=}\displaystyle\int_0^1 u(t{,}a)da \\ u(a{,}0){=}u_0(a) \end{cases} \tag{7}$$

on $r{\geqslant}0$ és un paràmetre (representa la fertilitat dels individus en absència de competència, i.e. quan la població total tendeix a zero). Expliqueu com modificaríeu la fórmula (2) o la fórmula (3) per analitzar numèricament aquest problema, implementeu el codi i utilitzeu les dades de (6) amb $M{=}100$ i $t_{\text{final}}{=}50$ per calcular $P(50;r)$ per $r{=}\{0{,}0.1{,}0.2{,}...{,}4\}$. Feu una gràfica per representar els punts $(r{,}P(50;r))$ que heu obtingut, és a dir utilitzeu l'eix horitzontal per indicar el paràmetre r i l'eix vertical per indicar el valor $P(50;r)$.

Comentari: Es pot veure que la població modelitzada pel sistema (7) tendeix a zero si i només si

$$\int_0^1 re^{-\int_0^a c(\alpha)d\alpha}da\leq 1.$$

Deducció de l'equació de l'edat

Considerem les següents definicions

- $u(a,t)$ és la densitat d'individus d'edat a a temps t (té unitats [individus/temps]). Això vol dir que la quantitat d'individus amb edats compreses entre a_1 i a_2 a temps t és

$$\int_{a_1}^{a_2} u(a,t)da.$$

  En particular la població total és

$$P(t) := \int_0^{\infty} u(a,t)da.$$

- $c(a)$ és la taxa de mortalitat (per capita) dels individus d'edat a (té unitats [1/temps]). Això vol dir que la quantitat d'indvidus amb edats compreses entre a_1 i a_2 a temps t que moren per unitat de temps és

$$\int_{a_1}^{a_2} c(a)u(a,t)da.$$

- $\beta(a)$ és la fertilitat (per capita) dels individus d'edat a (té unitats [1/temps]). Això vol dir que la quantitat d'individus amb edats compreses entre a_1 i a_2 a temps t que es reprodueixen per unitat de temps és

$$\int_{a_1}^{a_2} \beta(a)u(a,t)da.$$

  En particular la taxa de naixements de la població a temps t és

$$b(t) := \int_0^{\infty} \beta(a)u(a,t)da.$$

En les definicions anterior s'assumeix implícitament que tant la mortalitat com la fertilitat només depenen de l'edat dels individus. Si hi ha relacions de competència entre els individus de la població, però, tant la mortalitat com la fertilitat es poden veure afectades pels individus que hi ha a la població. Per exemple, si s'assumeix que la fertilitat depen de la població total, alehores s'ha de considerar $\beta(a,P(t))$ enlloc de simplement $\beta(a)$, i en aquest cas la taxa de naixements també dependrà de $P(t)$, per la qual cosa s'escriurà $b(t,P(t))$.

Per deduïr l'equació de l'edat, ara escrivim la llei de conservació per la quantitat d'individus amb edats compreses entre a_1 i a_2, on $0<a_1<a_2$ són edats arbitràries:

$$\frac{d}{dt}\int_{a_1}^{a_2} u(a,t)da = \mathrm{Flux}(a_1,t) - \mathrm{Flux}(a_2,t) - \int_{a_1}^{a_2} c(a)u(a,t)da.$$

Aquesta equació simplement diu que que la variació d'individus d'edats compreses entre a_1 i a_2 és igual a la quantitat d'individus que cumpleixen l'edat a_1 per unitat de temps, menys la quantitat d'individus que cumpleixen l'edat a_2 per unitat de temps, menys la quantiat d'individus amb edats compreses entre a_1 i a_2 que moren per unitat de temps. Observeu que $\mathrm{Flux}(a,t) = v(a)u(a,t) = u(a,t)$ ja que $v(a)$ és la velocitat a la que envelleixen els individus (i per cada unitat de temps els individues envelleixen una unitat de temps, i per tant $v(a)=1$). Aleshores passant la derivada temporal dins la intergral de l'esquerra i aplicant el Teorema Fonamental del càlcul a la diferència $u(a_1,t) - u(a_2,t)$, es té

$$\int_{a_1}^{a_2} \partial_t u(a,t)da = \int_{a_1}^{a_2} -\partial_a u(a,t) - c(a)u(a,t)da,$$

i com que això és valid per tot interval (a_1,a_2), necessàriament

$$\partial_t u(a,t) = -\partial_a u(a,t) - c(a)u(a,t).$$

D'altra banda, si apliquem la llei de conservació sobre els individus d'edats compreses entre 0 i ε, es té

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\varepsilon} u(a,t)da = b(t,P(t)) - \mathrm{Flux}(\varepsilon,t) - \int_0^{\varepsilon} c(a)u(a,t)da,$$

que és com abans però ara, com que considerem l'interval $[0,\varepsilon)$ cal considerar els individus que neixen per unitat de temps (observeu també que no hi ha individus que cumpleixin edat 0 perquè no hi ha individus amb edats menors a l'edat 0, per això no es considera el terme $\mathrm{Flux}(0,t)$). Com que l'equació anterior és valida per tot ε, en el límit en que ε tendeix a zero les integral que apareixen a l'equació es fan zero i s'obté l'equació de frontera

$$0 = b(t,P(t)) - u(0,t) \qquad \Longrightarrow \qquad u(0,t) = b(t,P(t)).$$

Així es té que la funció $u(a,t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u(a,t) + \partial_a u(a,t) = -c(a)\,u(a,t) & \text{si} \quad a \in (0,\infty) \\ u(0,t) = b(t,P(t)) \\ u(a,0) = u_0(a) \end{cases}$$

on $u_0(a)$ és la densitat poblacional a temps 0 i on

$$b(t,P(t)) = \int_0^{\infty} \beta(a,P(t))u(a,t)da \qquad \text{amb} \qquad P(t) = \int_0^{\infty} u(a,t)da.$$

En particular si $\beta(a,P(t)) = r/(1+P(t))$, es té $b(t,P(t)) = \frac{r}{1+P(t)}P(t)$ com al problema (7). D'altra banda dir que els individus viuen com a molt fins a edat $a=1$ equival a demanar que $c(a)=\infty$ per $a>1$ (i en aquest cas es té que $u(t,a)=0$ per tot $a>1$).