

Matroides

Ivo and Charles

Viernes 23 de Julio, Año 2 Después del Covid

Repaso Lineal

Un vector es una tira de números¹: Pueden ser

- números reales,
- números en \mathbb{Z}_p
- bits (se piensan como números en \mathbb{Z}_2)

¹Trabajamos siempre con espacios de dimensión finita

Ejemplos de Vector

Ejemplos de Vector

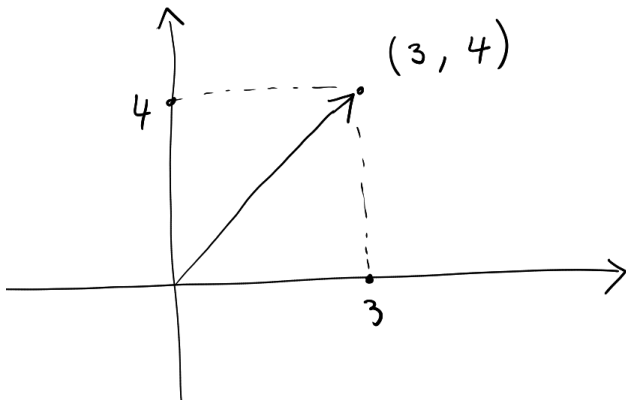


Ejemplos de Vector

No, no

Repaso Lineal

Por ejemplo los puntos en el plano \mathbb{R}^2 son vectores: tiras de dos números.



Repaso Lineal

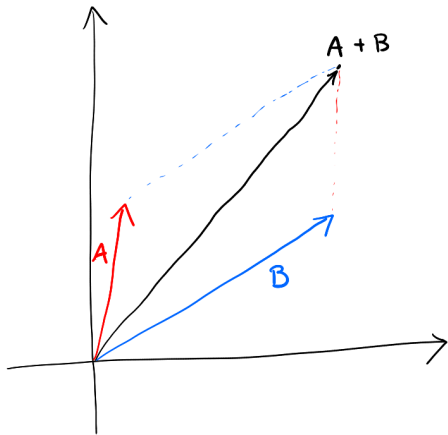
Las tiras se pueden

- Sumar, coordenada a coordenada. Xor en caso de \mathbb{Z}_2 .
- Multiplicar por un *escalar*.

Repaso Lineal

Las tiras se pueden

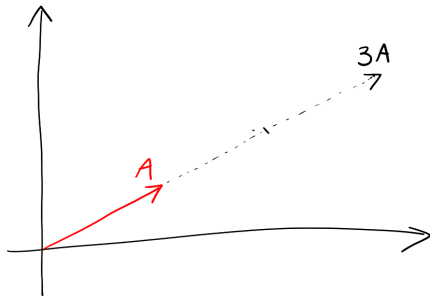
- Sumar, coordenada a coordenada. Xor en caso de \mathbb{Z}_2 .
- Multiplicar por un *escalar*.



Repaso Lineal

Las tiras se pueden

- Sumar, coordenada a coordenada. Xor en caso de \mathbb{Z}_2 .
- Multiplicar por un *escalar*.



Independencia Lineal

Un multiset de vectores es *independiente* si ningún vector se puede escribir como *combinación lineal* de los otros.

Independencia Lineal

Un multiset de vectores es *independiente* si ningún vector se puede escribir como *combinación lineal* de los otros.

$$v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$$

Independencia Lineal

En un multiset de vectores nos podemos preguntar:

“Qué subconjuntos de ese conjunto son independientes?”

Esa es la pregunta motivadora de matroides.

Matroide

Un matroide es entonces un conjunto E tal que cada subconjunto $S \subseteq E$ se clasifica en

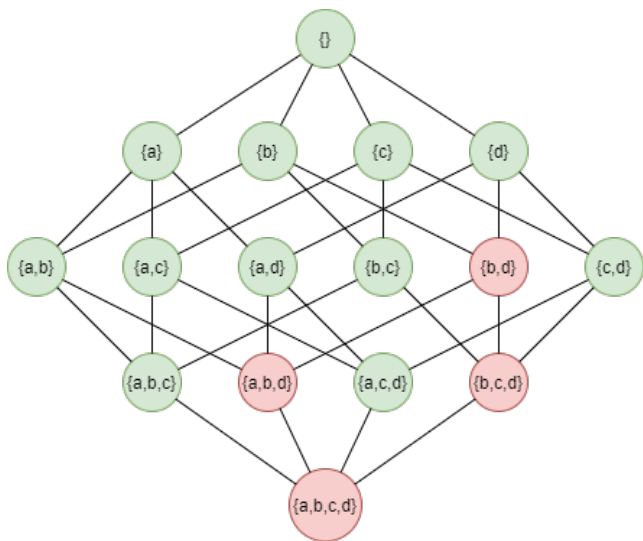
- independiente
- dependiente

Matroide

Para poder trabajar, le pedimos unas propiedades heredadas de los matroides lineales.

- \emptyset es independiente.
- Si un conjunto es independiente, todo subconjunto de él lo es.
- Si tengo dos conjuntos independientes de distinto tamaño, puedo “mover” un elemento del más grande al más chico, preservando independencia.

Ejemplo Matroide



Bases

Podemos intentar definir el concepto de bases de espacios vectoriales en matroides.

Las bases en espacios vectoriales son conjuntos linealmente independientes maximales.

Entonces le podemos dar esa misma definición a los matroides.

Propiedades de las Bases

Una propiedad importante de las bases es que todas poseen la misma cantidad de elementos.

Circuitos

Los *circuitos* son lo opuesto a la base.

Son los conjuntos *dependientes minimales*.

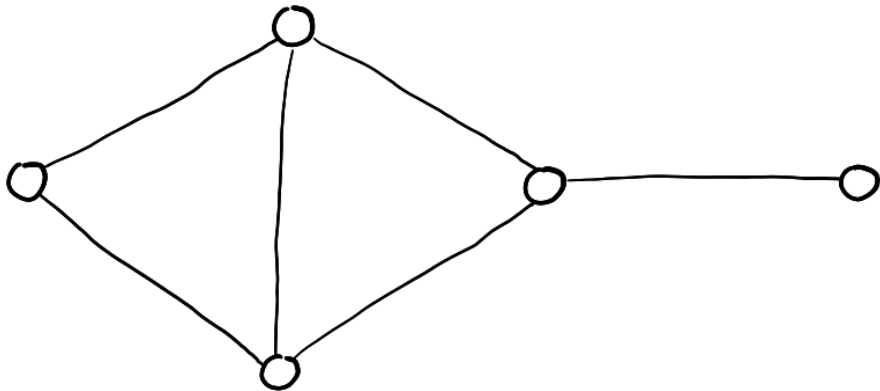
Circuitos

Los *circuitos* son lo opuesto a la base.

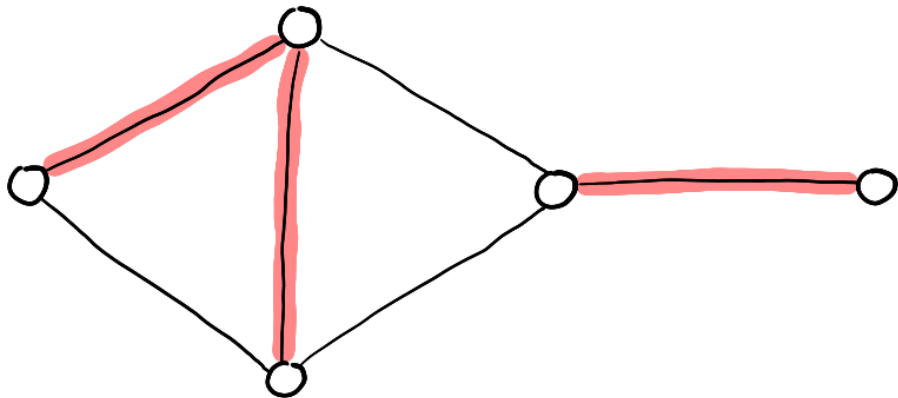
Son los conjuntos *dependientes minimales*.

Por qué circuito?

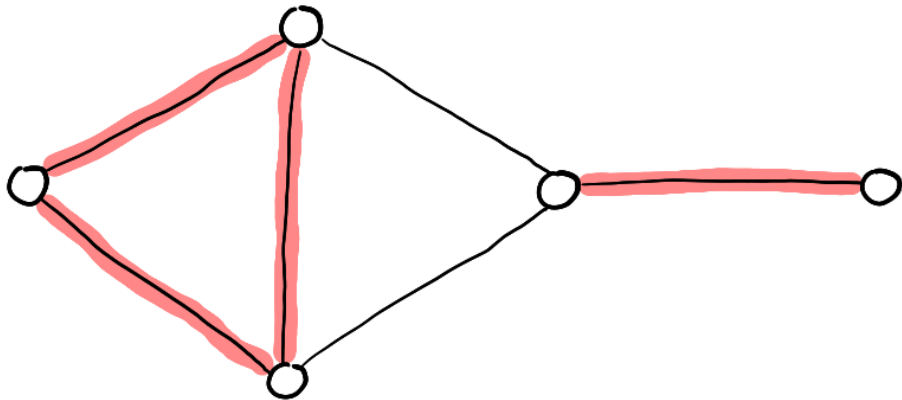
Matroide Gráfico



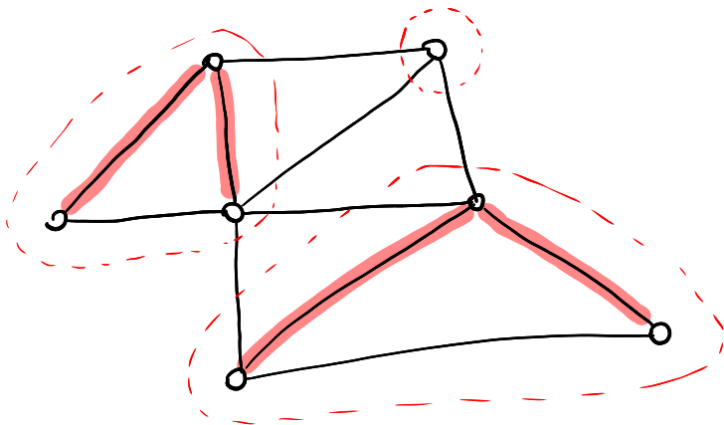
Matroide Gráfico: Independencia



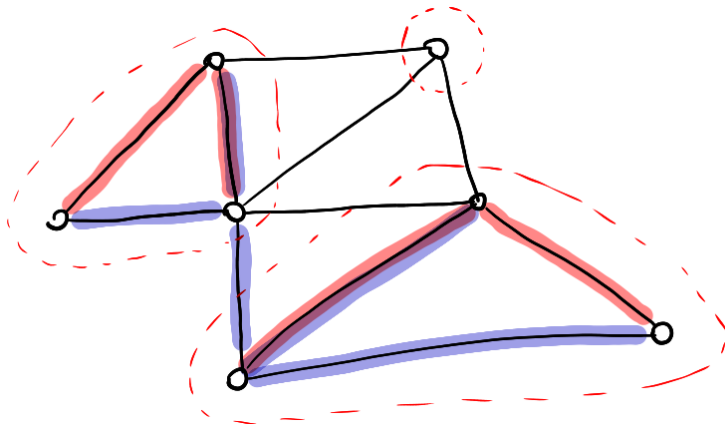
Matroide Gráfico: Dependencia



Es un Matroide



Es un Matroide

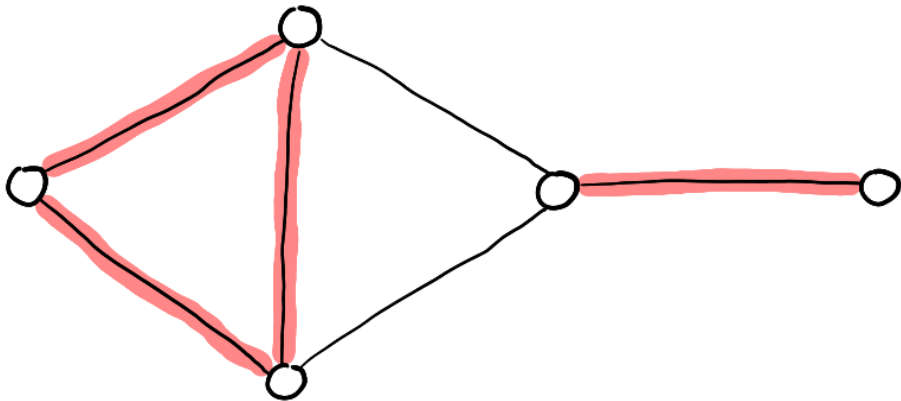


Matroide Gráfico

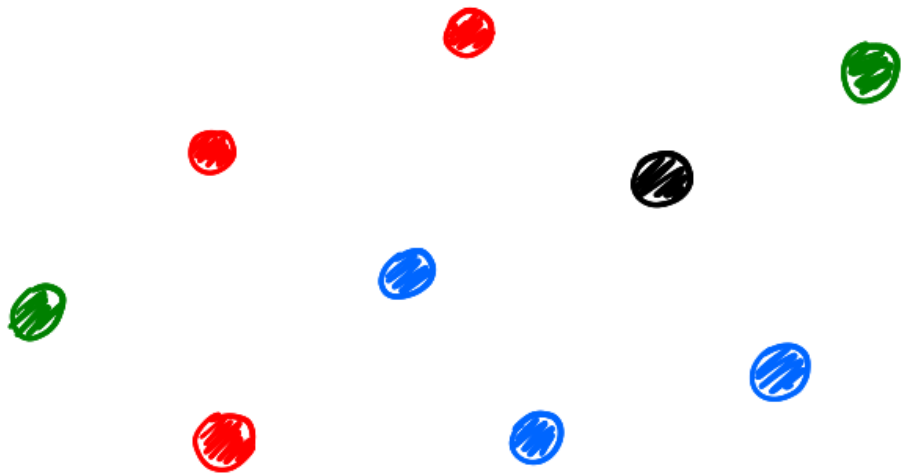
Independencia en este matroide se puede chequear con dfs/bfs.

Circuitos en Matroides Gráficos

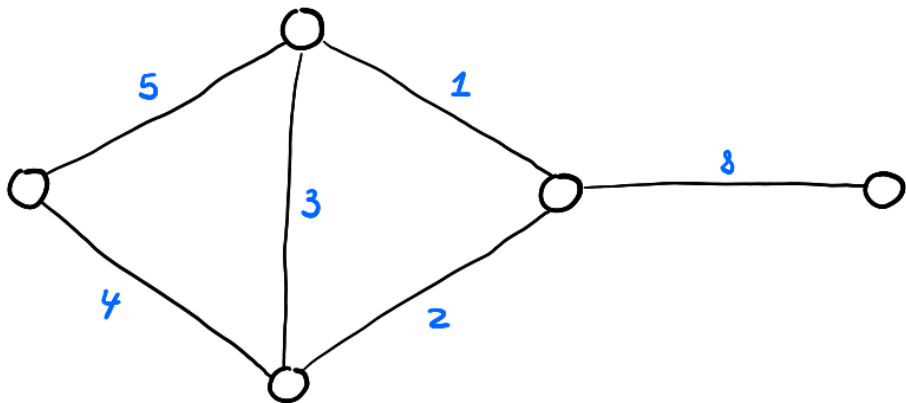
Los circuitos son ciclos simples!



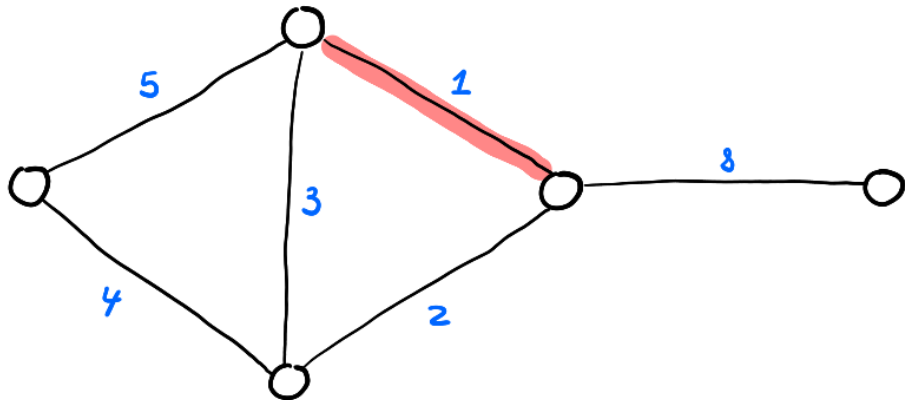
Matroides Coloridos



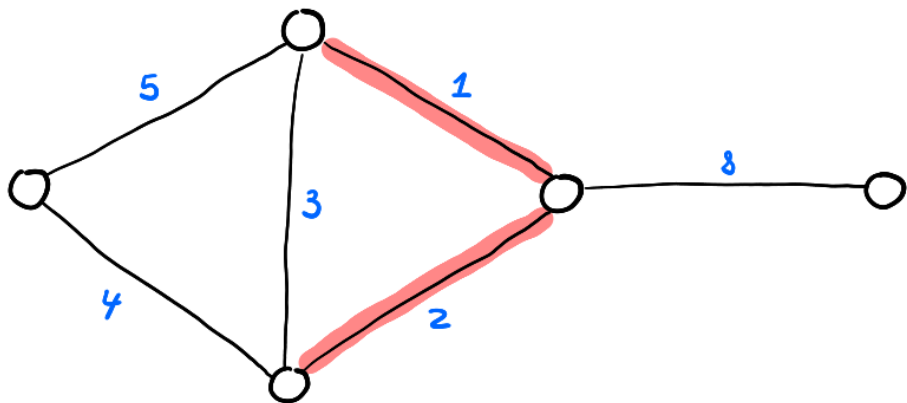
Kruskal en Matroides



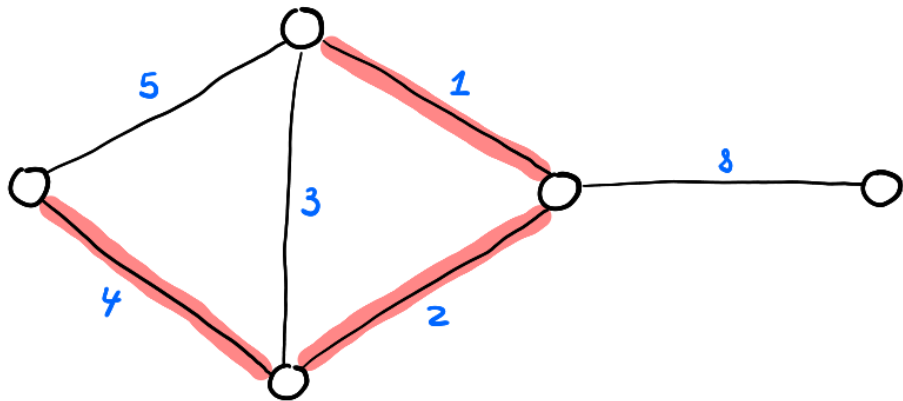
Kruskal en Matroides



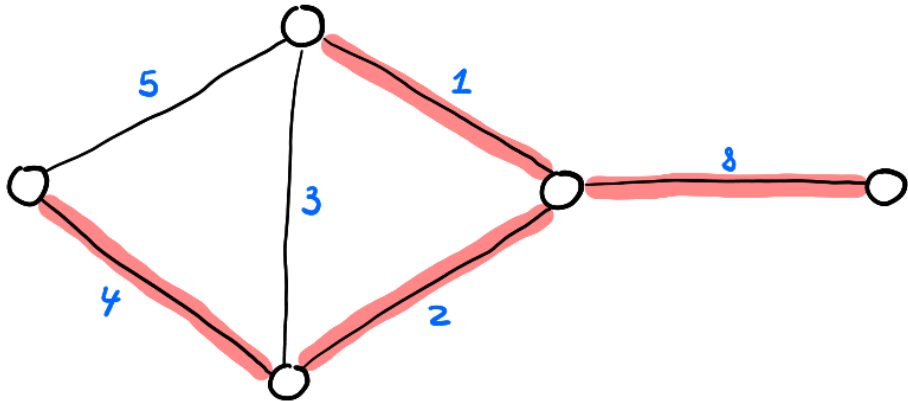
Kruskal en Matroides



Kruskal en Matroides



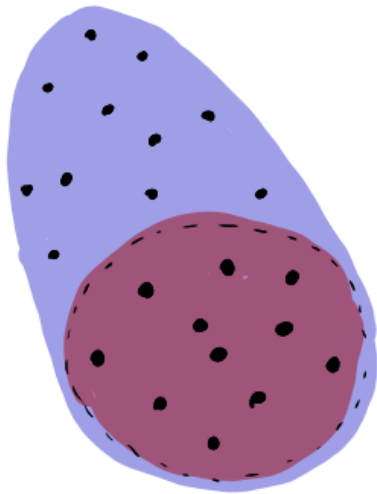
Kruskal en Matroides



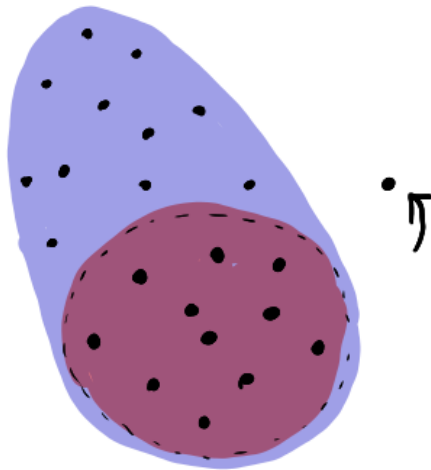
Oráculos



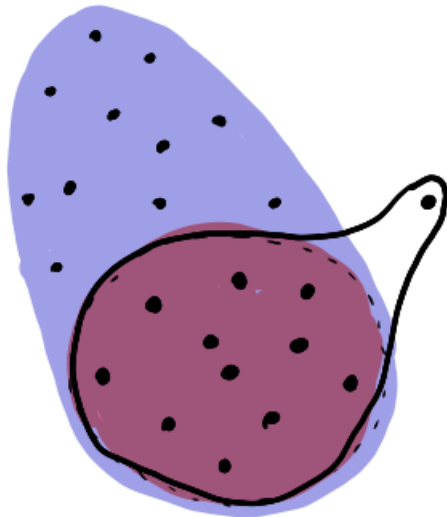
Correctitud



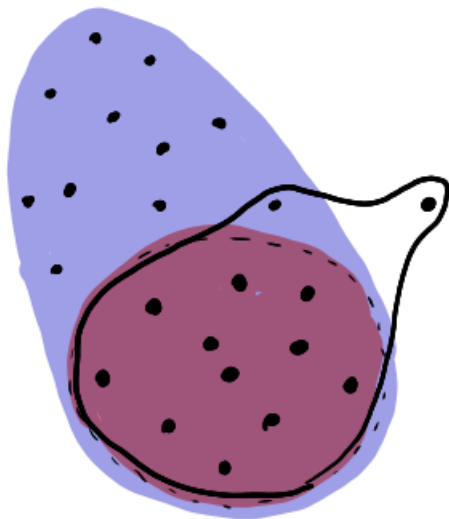
Correctitud



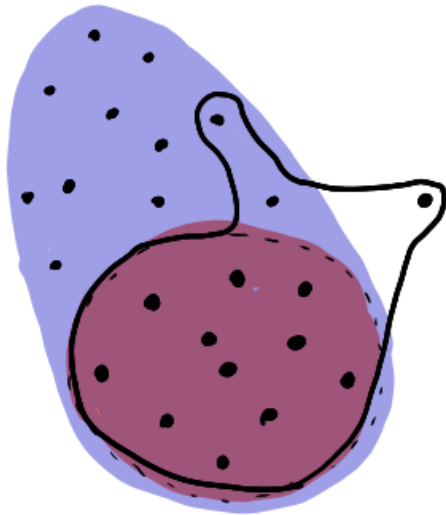
Correctitud



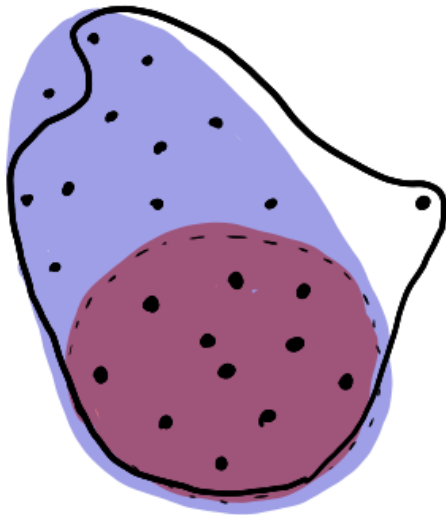
Correctitud



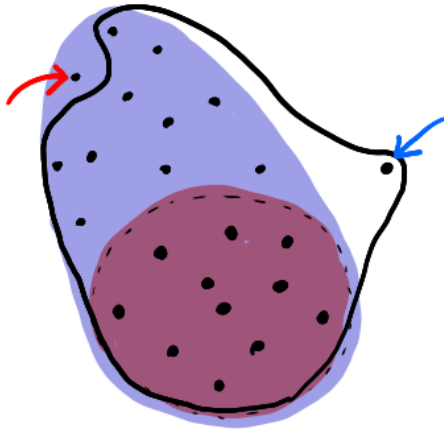
Correctitud



Correctitud



Correctitud



Meh...

Entonces matroides es un Kruskal con esteroides y nada más?

Meh...

Entonces matroides es un Kruskal con esteroides y nada más?

Nope

Intersección de Matroides

Este problema consiste en:

Encontrar el subconjunto independiente en común mas grande de dos matroides.

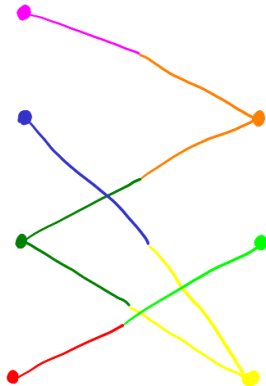
Ejemplos de Intersección de Matroides

Árbol generador colorido

Máximo matching en grafo bipartito

Camino Hamiltoniano!

Matching Bipartito



Wait...



Rango

Podemos robar un último concepto del álgebra lineal: el rango.

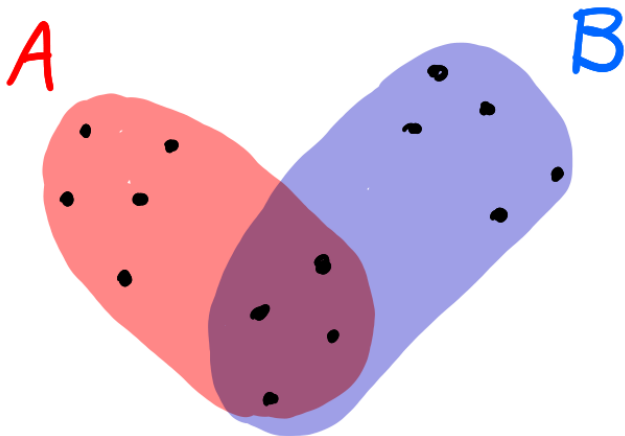
Para cada subconjunto de E , su *rango* es el tamaño máximo de un (sub)subconjunto independiente.

Propiedades del Rango

- El rango de un subconjunto es menor o igual al tamaño del mismo.
- Sean $A \subseteq B \subseteq E$, entonces $\text{rango}(A) \leq \text{rango}(B)$.
- $\text{rango}(A) + \text{rango}(B) \geq \text{rango}(A \cup B) + \text{rango}(A \cap B)$.

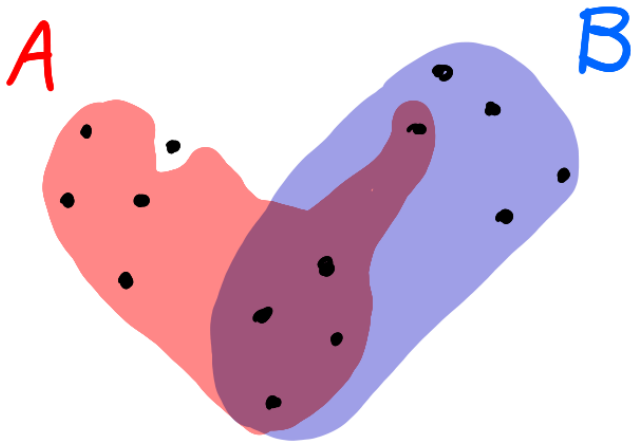
Exchange Lemma

Sean $|A| = |B|$ conjuntos independientes distintos, entonces existe $x \in A - B$ y $y \in B - A$ tal que $A - x \cup y$ es independiente.

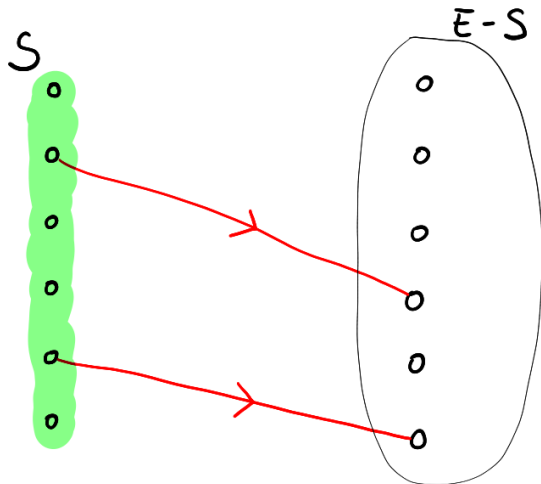


Exchange Lemma

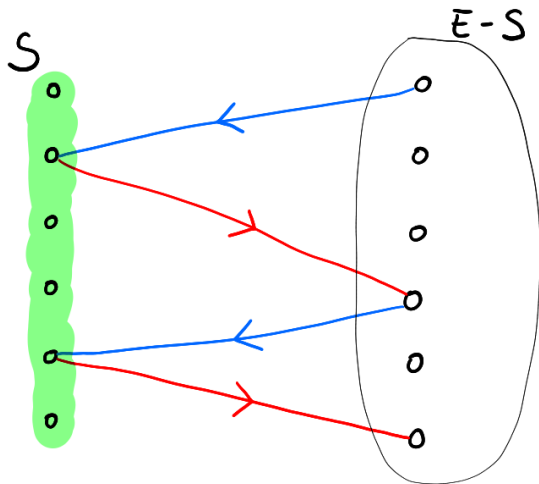
Sean $|A| = |B|$ conjuntos independientes distintos, entonces existe $x \in A - B$ y $y \in B - A$ tal que $A - x \cup y$ es independiente.



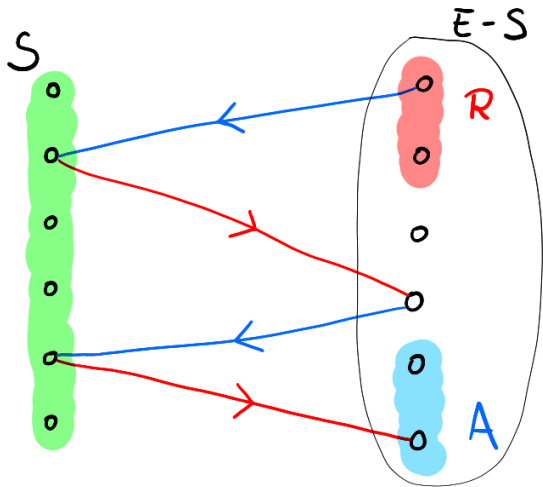
Exchange Graph



Exchange Graph



Camino de Aumento



Complejidad

- Cantidad de etapas: r .
- Oráculos por etapa: $r \cdot n$.

$O(r^2 \cdot n)$ oráculos.

Problemitas

- Pick Your Own Nim
<https://codeforces.com/gym/102156/problem/D>
- Seollal
<https://codeforces.com/contest/1284/problem/G>