



# Heuristieken

Wouter Vrielink

# Leerdoelen

1. Definieren en onderscheiden van verschillende soorten problemen
2. Berekenen en beoordelen van een probleem zijn statespace
3. Herkennen van de rol van heuristieken in doorzoeken statespace
4. Eigenschappen statespace begrijpen

# Optimalisatie

Een bedrijf produceert twee typen chocolade; A en B

- A bevat 1 eenheid melk en 3 eenheden cacao
  - A verkoopt voor 6 euro
- B bevat 1 eenheid melk en 2 eenheden cacao
  - B verkoopt voor 5 euro

Het bedrijf heeft 5 eenheden melk en 12 eenheden cacao

Hoe veel moet het bedrijf van A en B maken om omzet te maximaliseren?

# Optimalisatie

Linear  
Programming

$$S = 6A + 5B$$

$$A + B \leq 5$$

[Limiet melk]

$$3A + 2B \leq 12$$

[Limiet cacao]

$$A \geq 0 \text{ \& } B \geq 0$$

[Geen negatieve productie]

# Optimalisatie

Optimalisatievariabelen A & B

- Ook bekend als decision variable
- Aan te passen/optimaliseren

Objective function  $S = 6A + 5B$

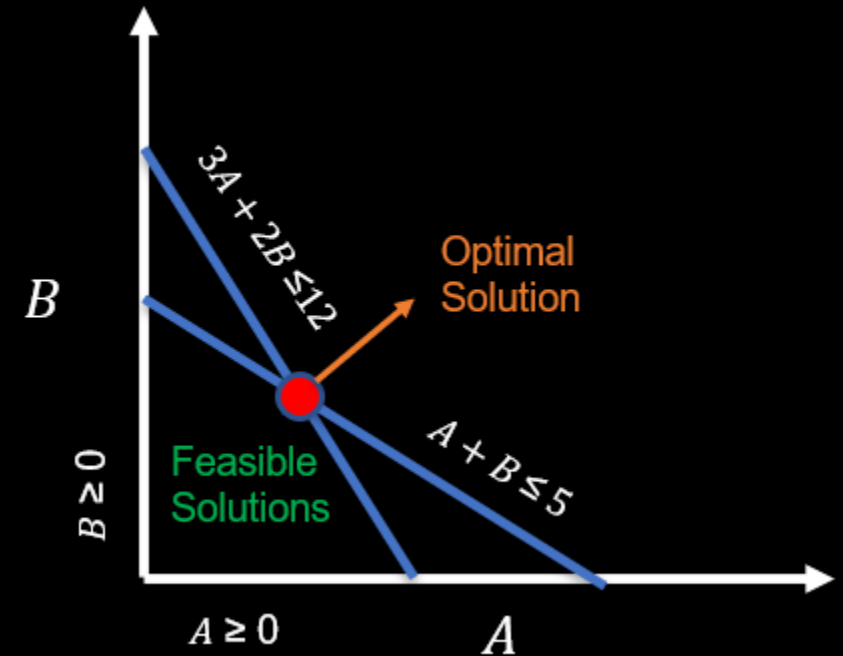
- Wiskundige formule die de oplossingskwaliteit quantificeert
- Voldaan, maximaliseren, of minimaliseren

# Optimalisatie

## Constraints

- Definiëren het domein van het problem
- Moet aan worden voldaan

$A + B \leq 5$	[Limiet melk]
$3A + 2B \leq 12$	[Limiet cacao]
$A \geq 0 \text{ \& } B \geq 0$	[Geen negatieve productie]

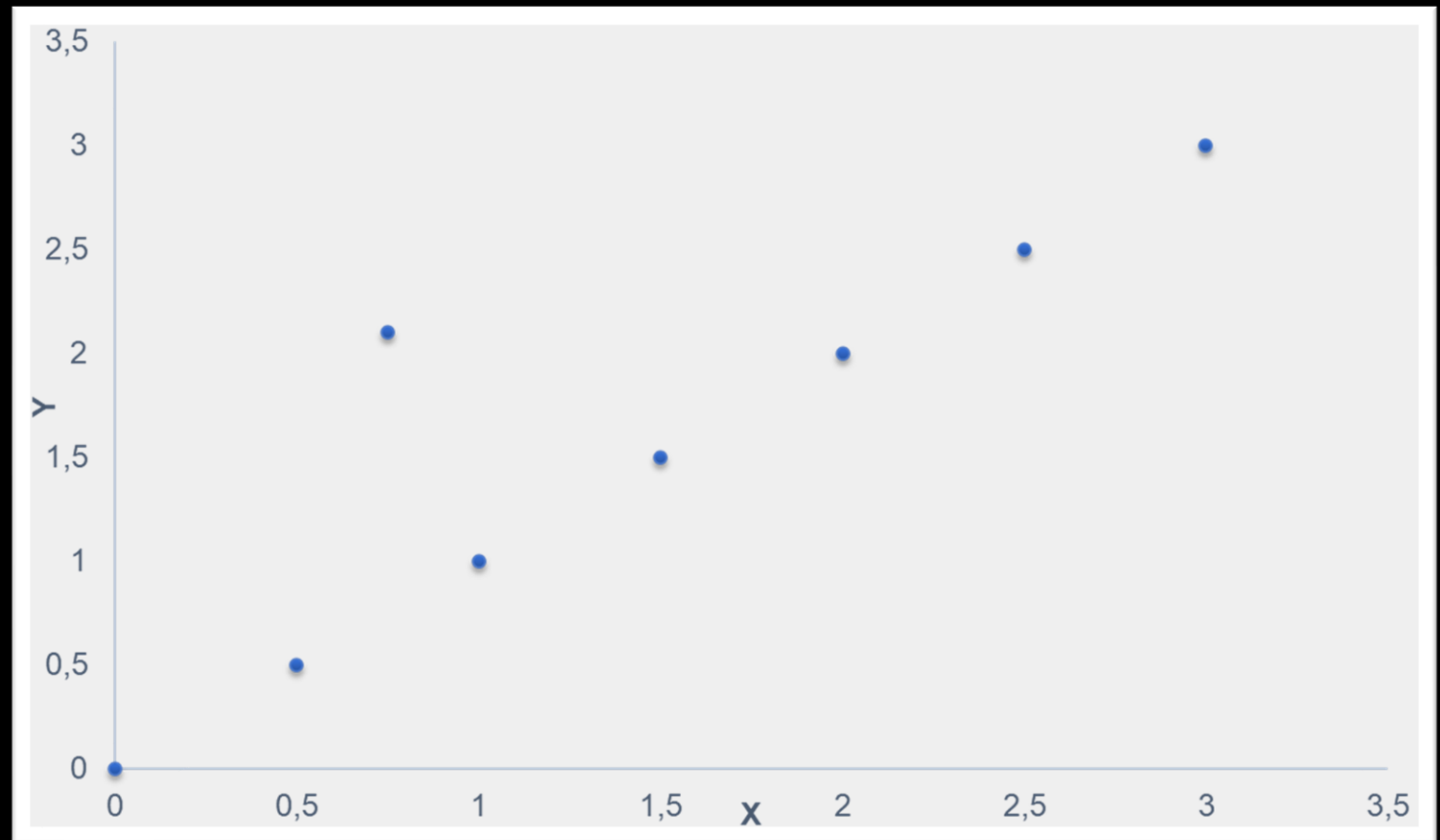


# Type problemen

1. Free Optimization Problem (FOP)
2. Constraint Optimization Problem (COP)
3. Constraint Satisfaction Problem (CSP)

# Free Optimization Problem (FOP)

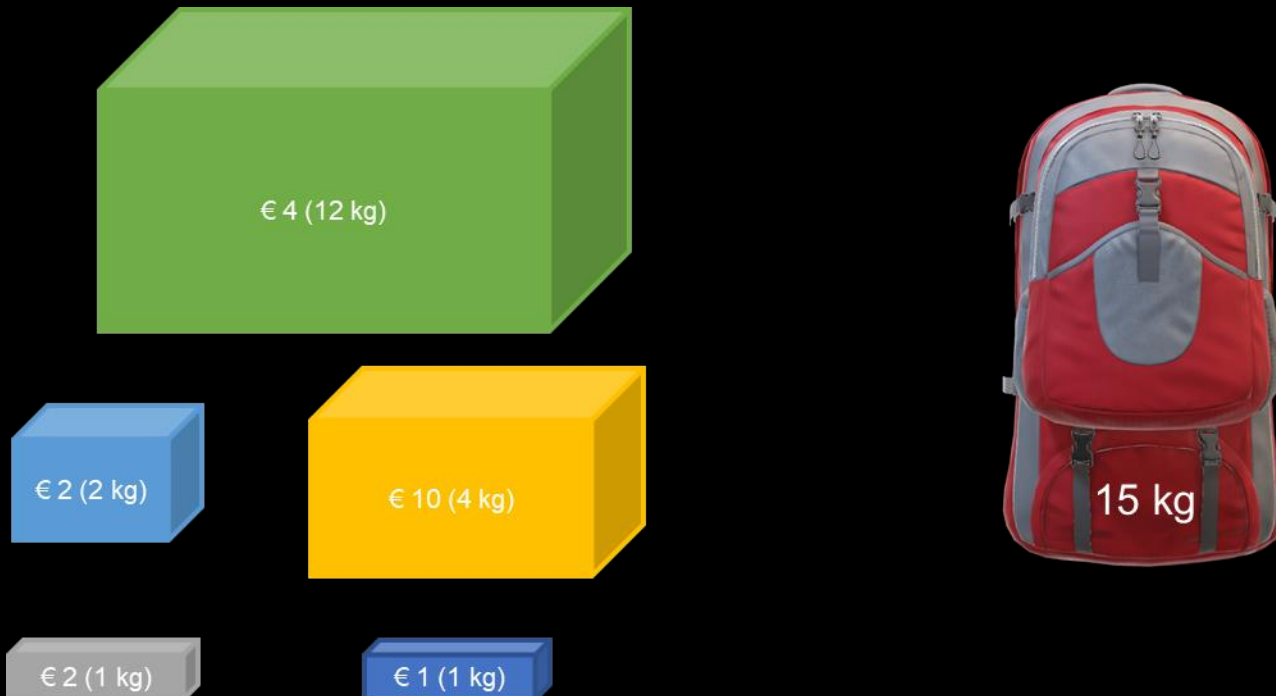
Gegeven een set inputs  
Geef de lineaire vergelijking  
die de relatie tussen X en  
Y het best beschrijft.





# Constraint Optimization Problem (COP)

Kies dozen uit de gegeven set die de waarde maximaliseren. Het gewicht moet onder de 15kg blijven.



*Objective:* Maximize €  
*Constraint:* Weight < 15 kg.

# Constraint Satisfaction Problem (CSP)

Vul getallen 0-9 in de sudoku in zodat ieder getal maar één keer voorkomt in rij, kolom, en vak.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9



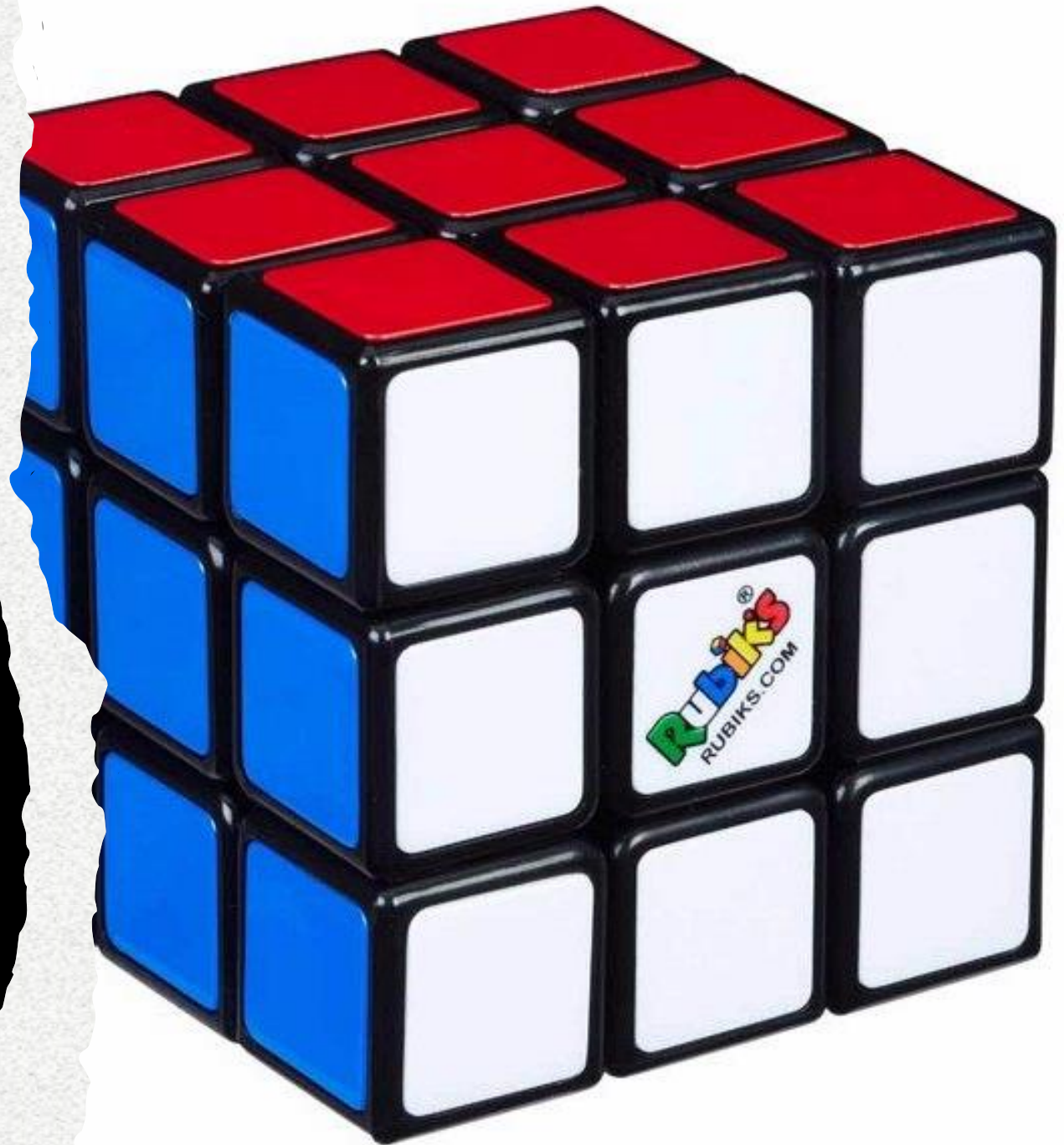
5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

# Type problemen

1. Free Optimization Problem (FOP)
2. Constraint Optimization Problem (COP)
3. Constraint Satisfaction Problem (CSP)

# POP quiz!

1. Free Optimization Problem (FOP)
2. Constraint Optimization Problem (COP)
3. Constraint Satisfaction Problem (CSP)



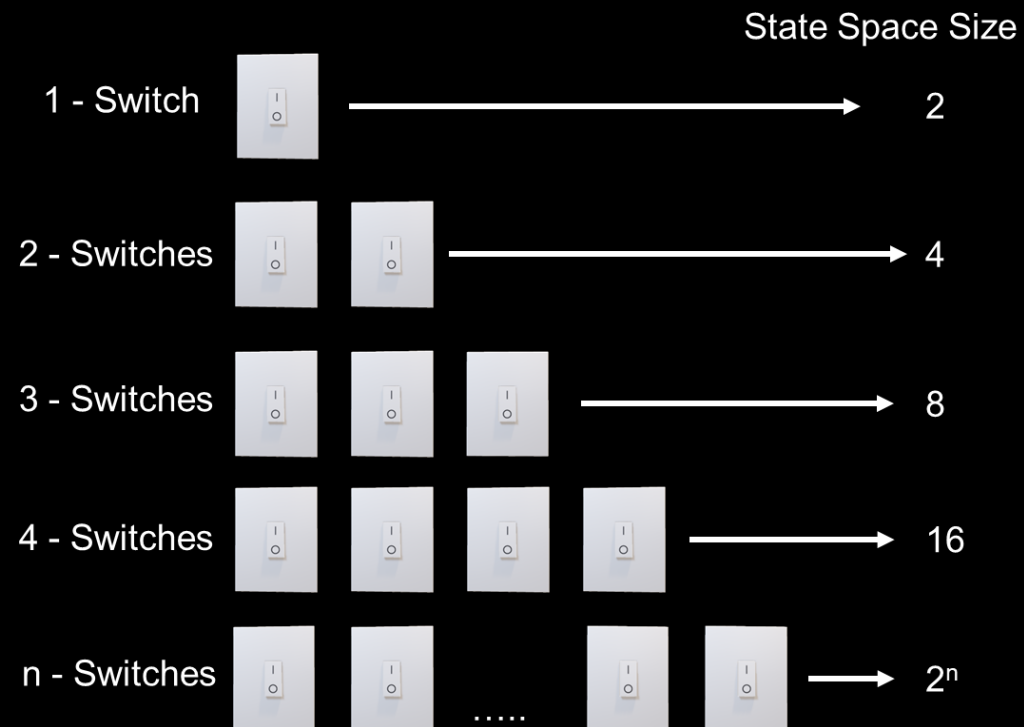
**Vragen?**

# Statespace

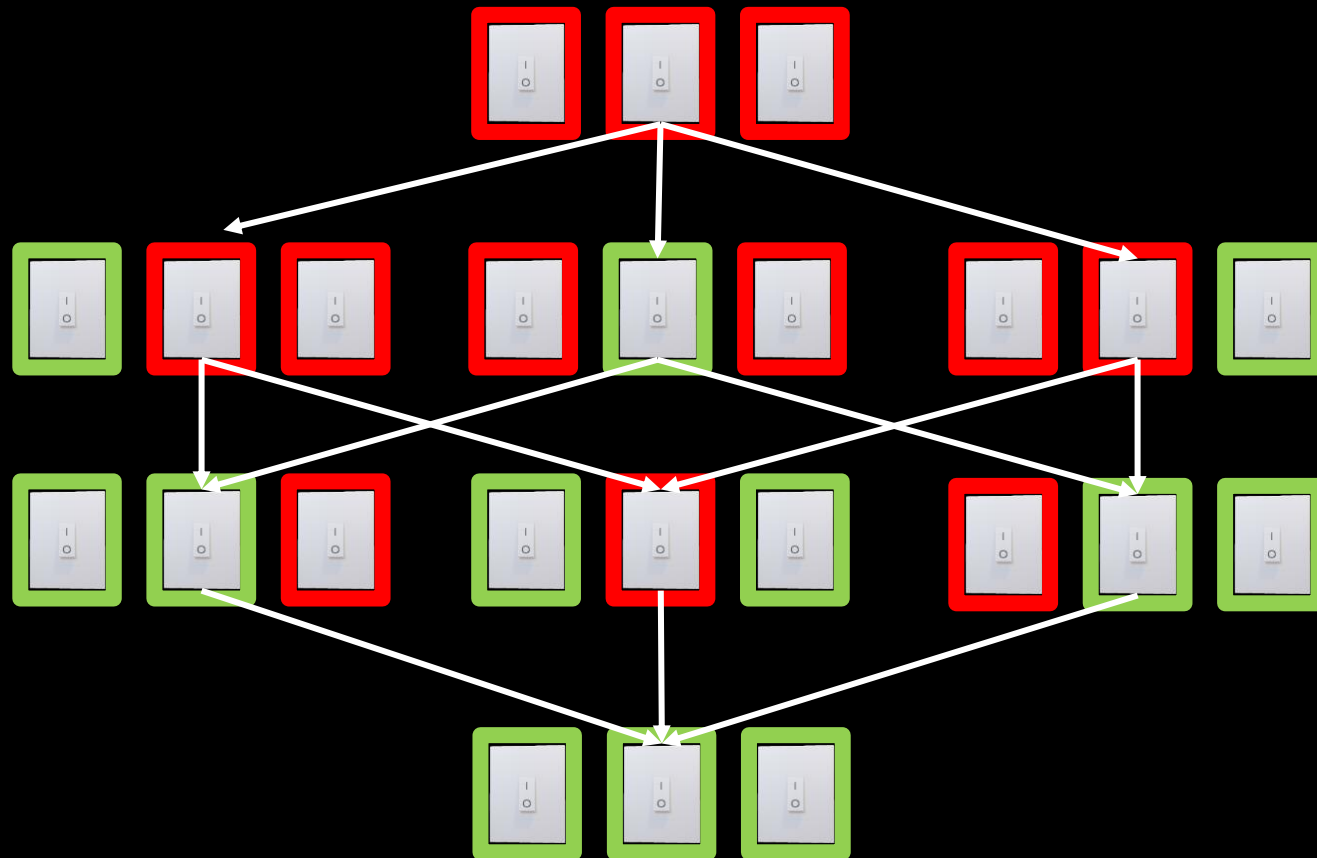
De verzameling van alle mogelijke configuraties van een probleem



On or Off

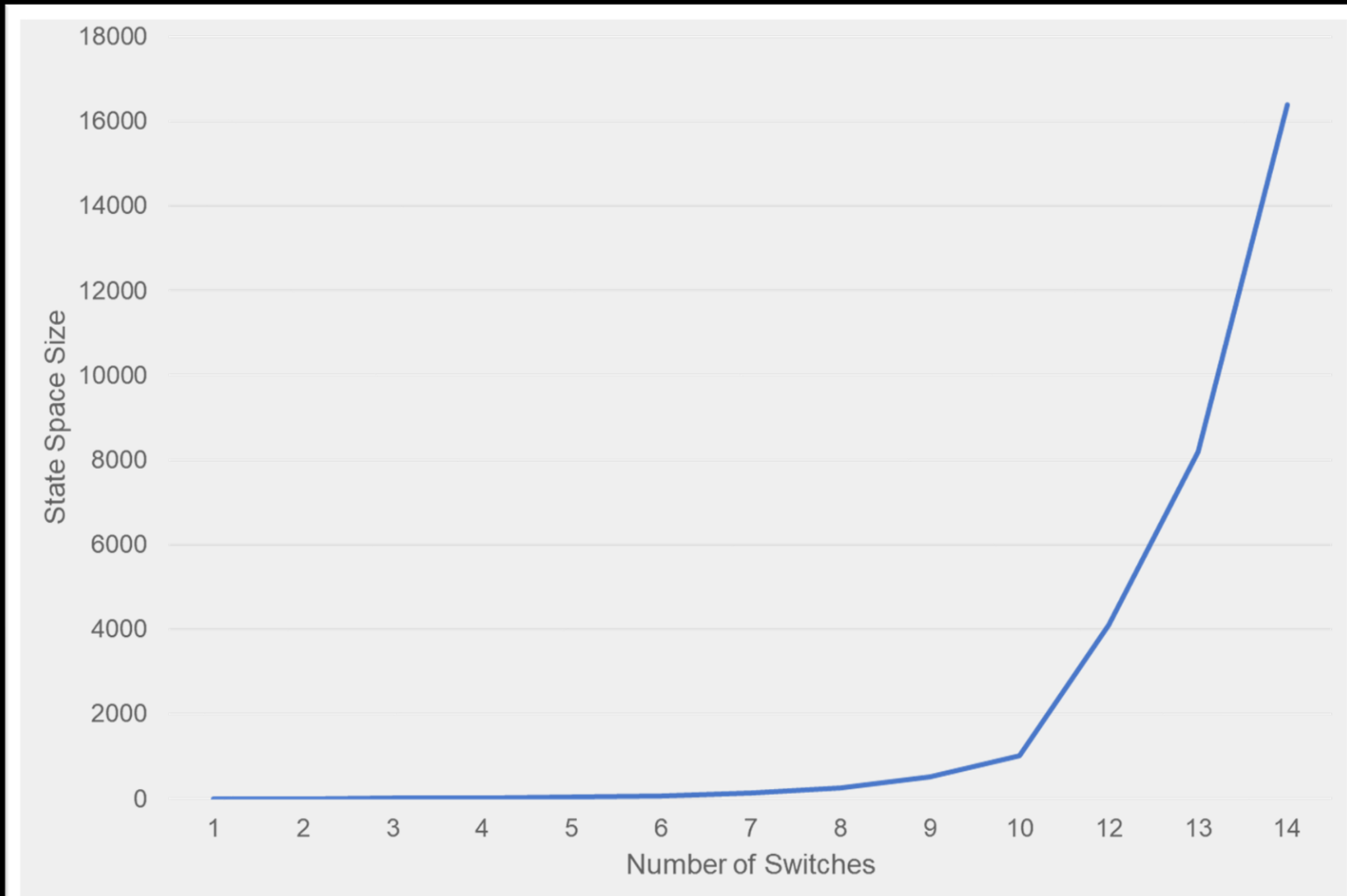


# Turn **On** All Switches



3 Switches  $\rightarrow 2^3 = 8$  States

# Exponential Statespace





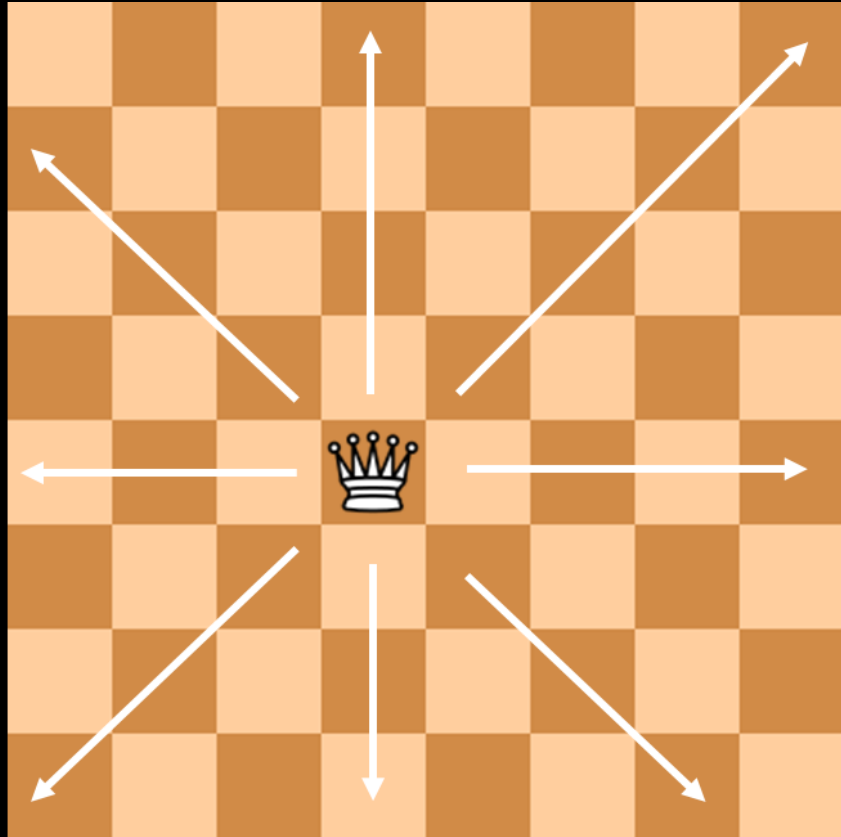
# Statespace

Order: Is de volgorde belangrijk?

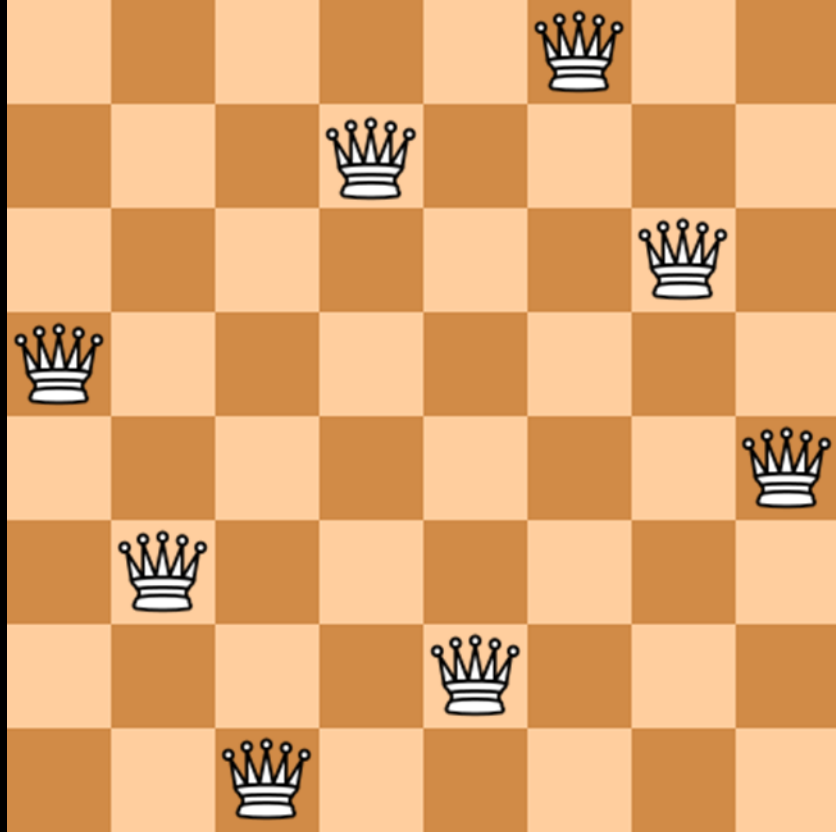
Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
		yes	no
Order	yes	$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# Statespace – N-Queen puzzle



# Statespace – N-Queen puzzle



8-Queen Puzzle.

1<sup>st</sup> Queen: 64 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 63 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 62 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 61 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 60 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 59 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 58 Squares

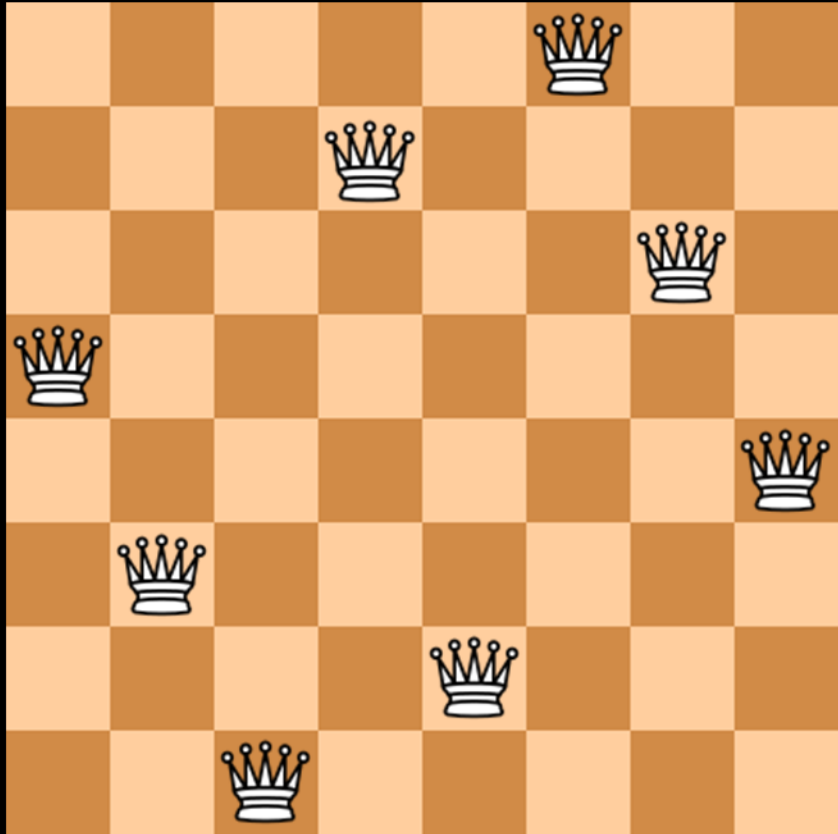
8<sup>th</sup> Queen: 57 Squares

Total Ways =  $64 * 63 * 62 * 61 * 60 * 59 * 58 * 57 = 4426165368 = \binom{64}{8}$

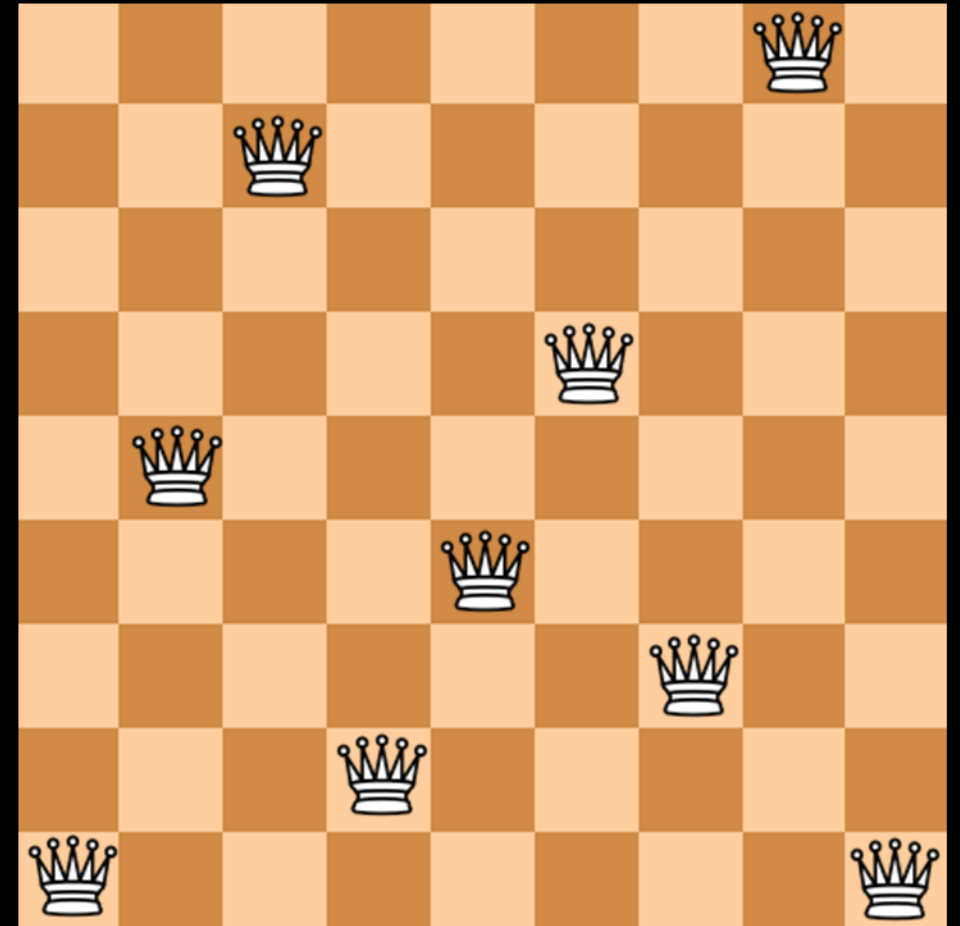
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{Where,}$$

$n$  is number of squares  
 $k$  is number of queens

# Statespace – N-Queen puzzle



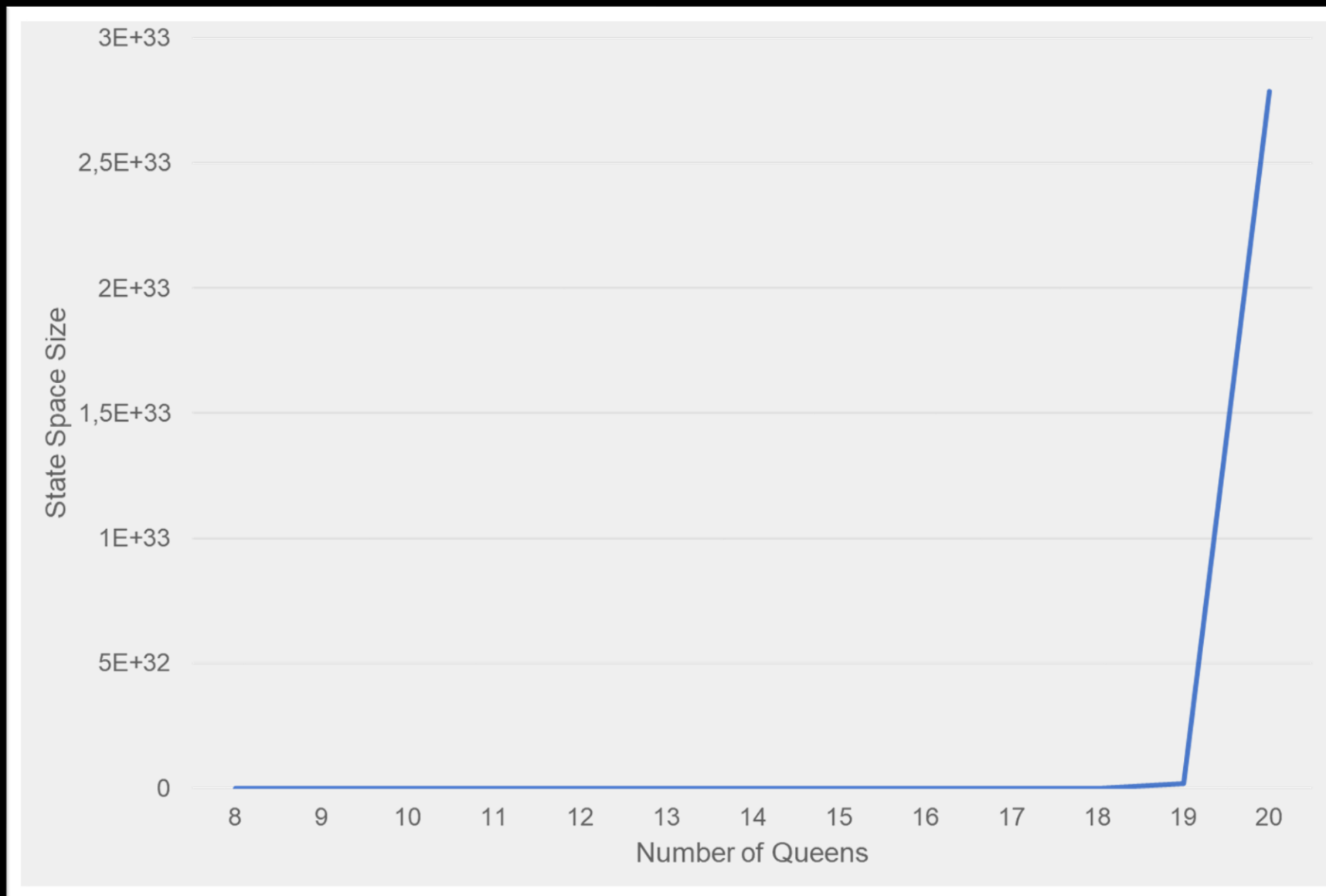
8-Queen Problem:  $\binom{64}{8} = 4426165368$

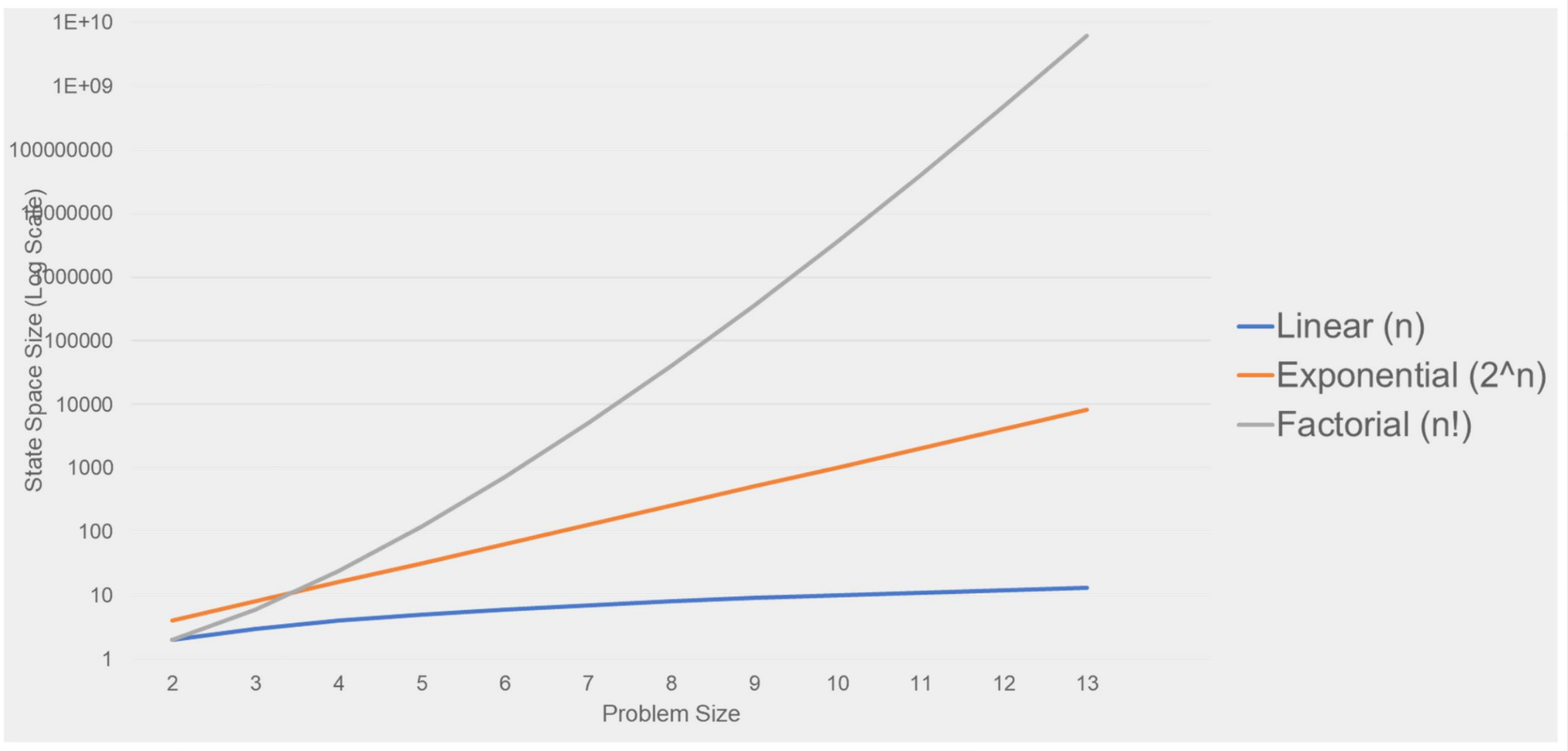


9-Queen Problem:  $\binom{81}{9} = 260887834350$

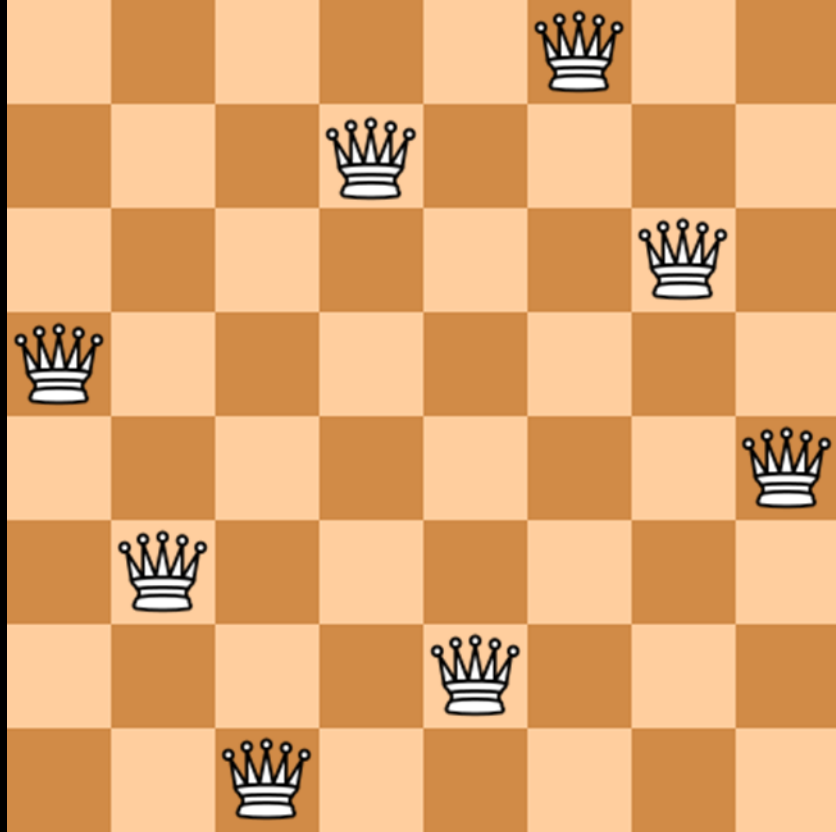
# Statespace – N-Queen puzzle

Queens	Squares	State Space	Approximate Time to Solve
8	64	4426165368	4.42 Seconds
9	81	260887834350	4.34 Minutes
10	100	17310309456440	4.8 Hours
11	121	1276749965026540	14.77 Days
12	144	103619293824707000	39.40 Months
13	169	9176358300744340000	290.78 Years
14	196	8805305163833490000000	27 902.92 Years
15	225	910055678111775000000000	2 883 854.02 Years
16	256	1007875160202230000000000000	319 383 187 Years
17	289	119073904434449000000000000000	$3.77330493 \times 10^{10}$ Years
18	324	14948249233419500000000000000000	$4.73691552 \times 10^{12}$ Years
19	361	1987086705354380000000000000000000	$6.29683229 \times 10^{14}$ Years
20	400	27883609836709000000000000000000000000	$8.83597149 \times 10^{16}$ Years





# Heuristiek – N-Queen puzzle



8-Queen Puzzle.

1<sup>st</sup> Queen: 64 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 63 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 62 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 61 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 60 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 59 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 58 Squares

8<sup>th</sup> Queen: 57 Squares

Total Ways =  $64 * 63 * 62 * 61 * 60 * 59 * 58 * 57 = 4426165368 = \binom{64}{8}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{Where,}$$

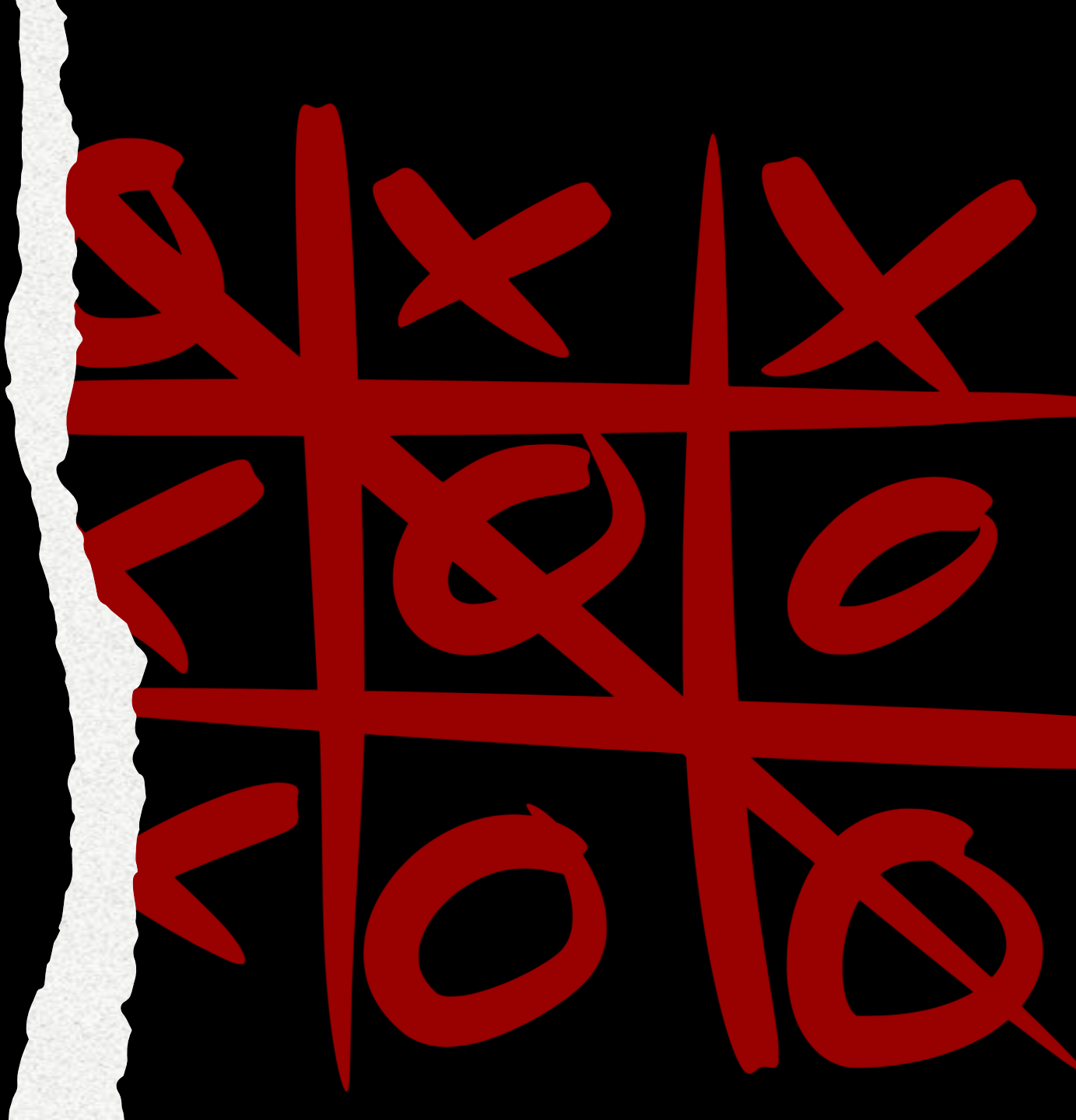
$n$  is number of squares  
 $k$  is number of queens



# POP quiz!

Wat is de kleinste upper bound voor de state-space van Boter-kaas-en-eieren?

1.  $3^9$
2.  $9^3$
3.  $9!$



**Vragen?**

# Computeralgoritme

Een algoritme is een reeks stappen die gevolgd kunnen worden om een specifiek problem op te lossen.



6 5 3 1 8 7 2 4

Bubble sort

# Computational complexity

2,1,3,4,5,6,7,8,9,10

Best-Case

Bubble Sort (1 Step)

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

10,9,8,7,6,5,4,3,2,1

Worst-Case

Bubble Sort ( $\leq 100$  Steps)

# Problem Complexiteit

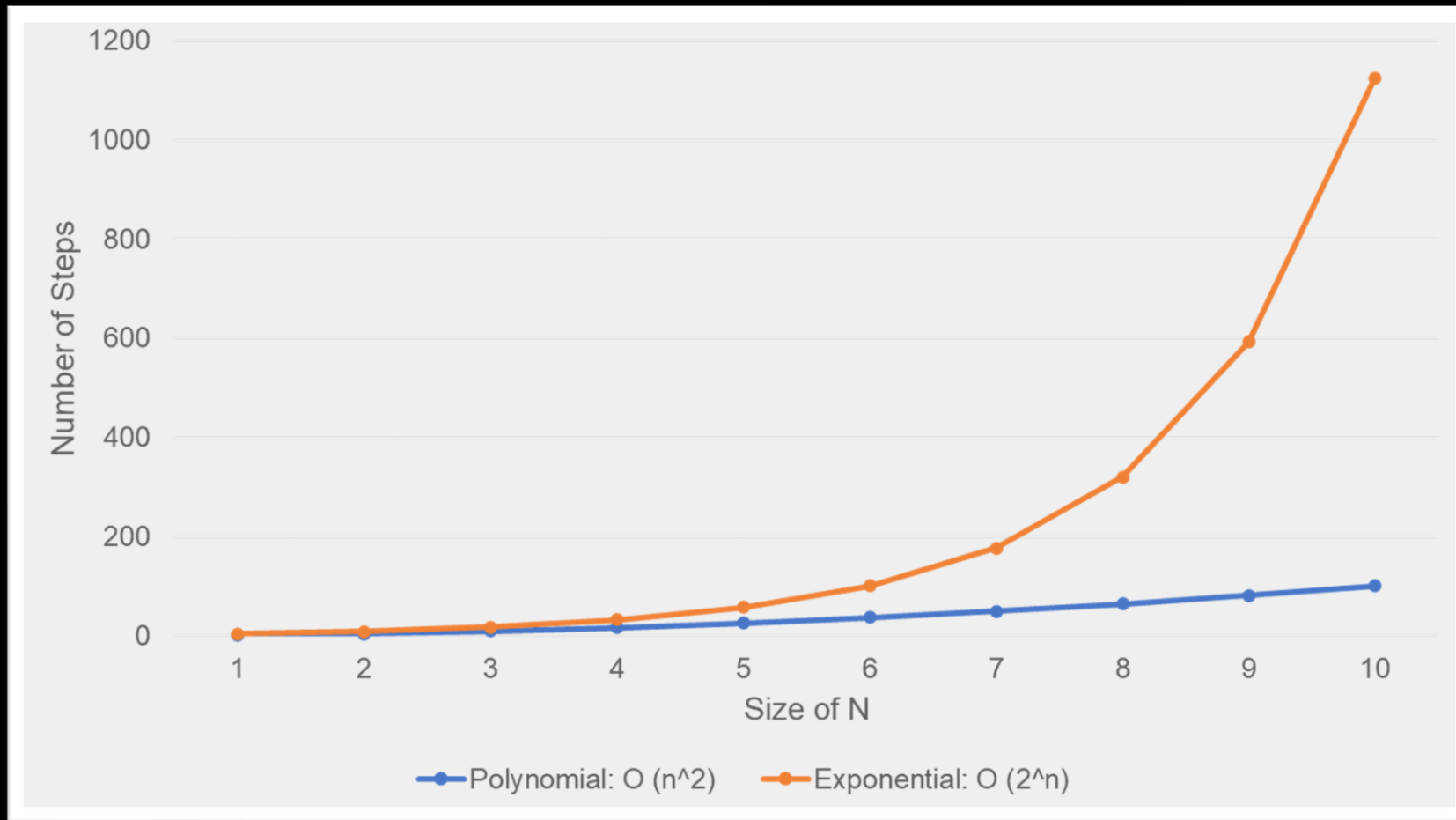


$O(n^{\dots})$   
Polynomial

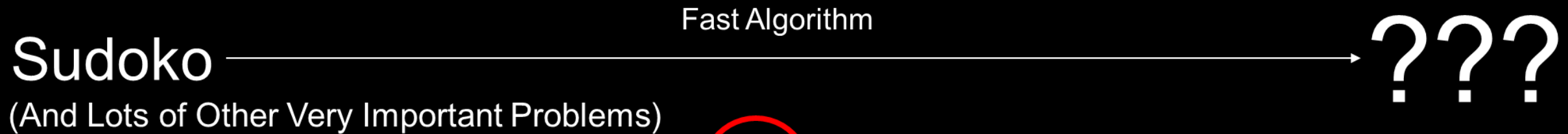
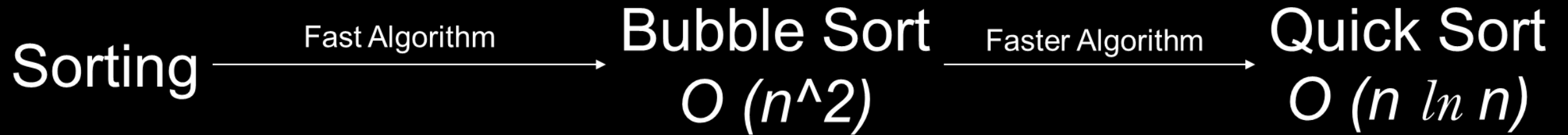


$O(\dots^n)$   
Exponential

# Polynomial versus Exponential



# Snelle algoritmen



# **Wat is de oplossing?**

## Heuristieken!

Slimme en snelle algoritmes die een zeer goede oplossing geven in een redelijke tijd, ook voor COPs



# Moeilijkheid

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Moeilijk op te  
lossen

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Makkelijk te  
Controleren

# Moeilijkheid



Moeilijk op te lossen



Moeilijk te controleren

Is E4 de beste opening voor wit?

# Moeilijkheid

Good Opening (+0.16)



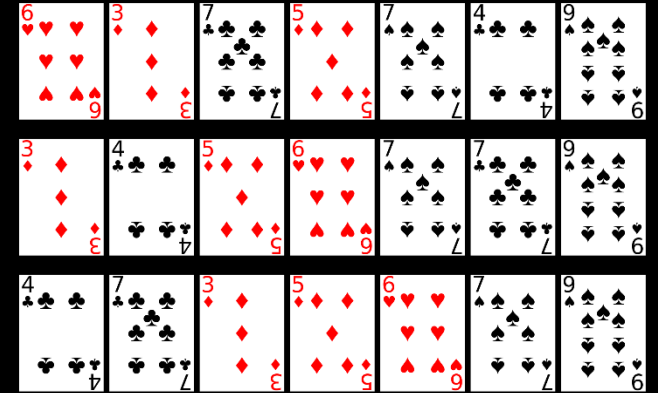
Bad Opening (-0.75)



# Moeilijkheid



5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9



Moeilijk

???

Makkelijk

# POP quiz!

Hoe moeilijk is sudoku?

1. Zo makkelijk als sorteren
2. Zo moeilijk als schaken
3. We zullen het nooit weten



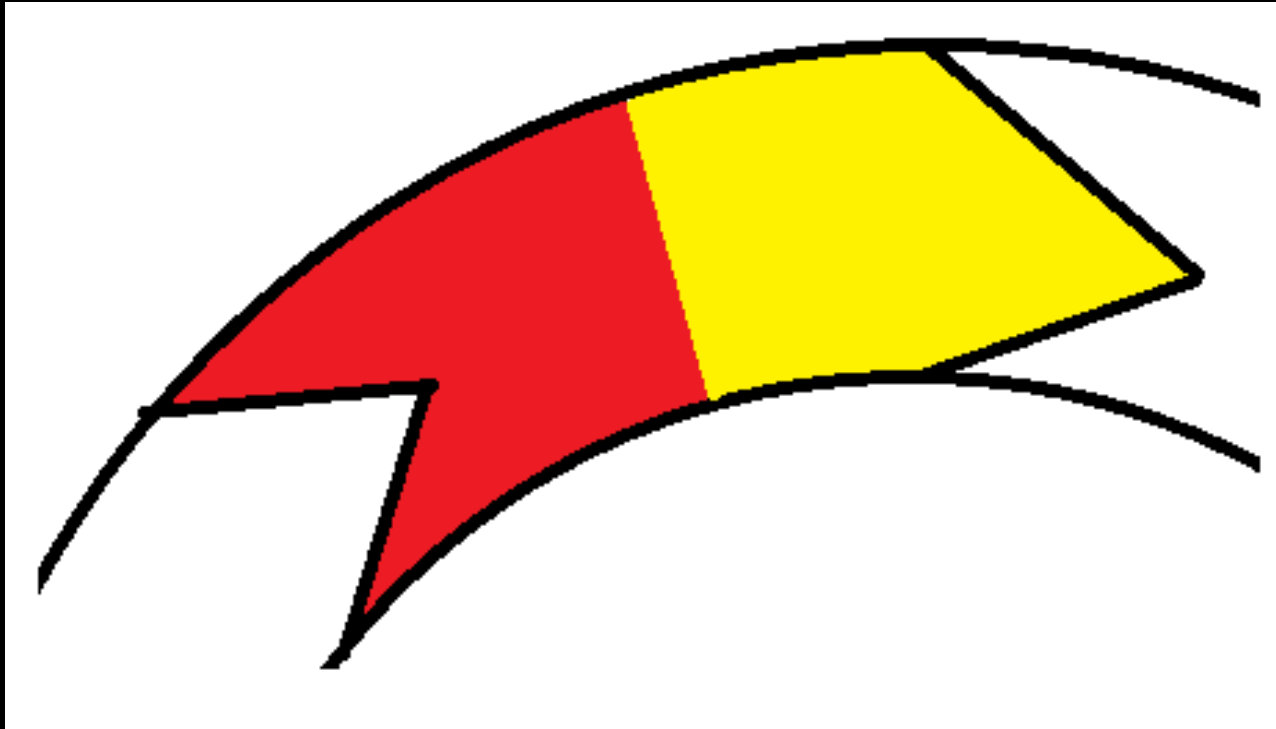
**Vragen?**

# POP quiz!

Wat maakt een probleem moeilijk om op te lossen?

1. Een grote statespace
2. Weinig geldige oplossingen
3. De constraints
4. Iets anders?



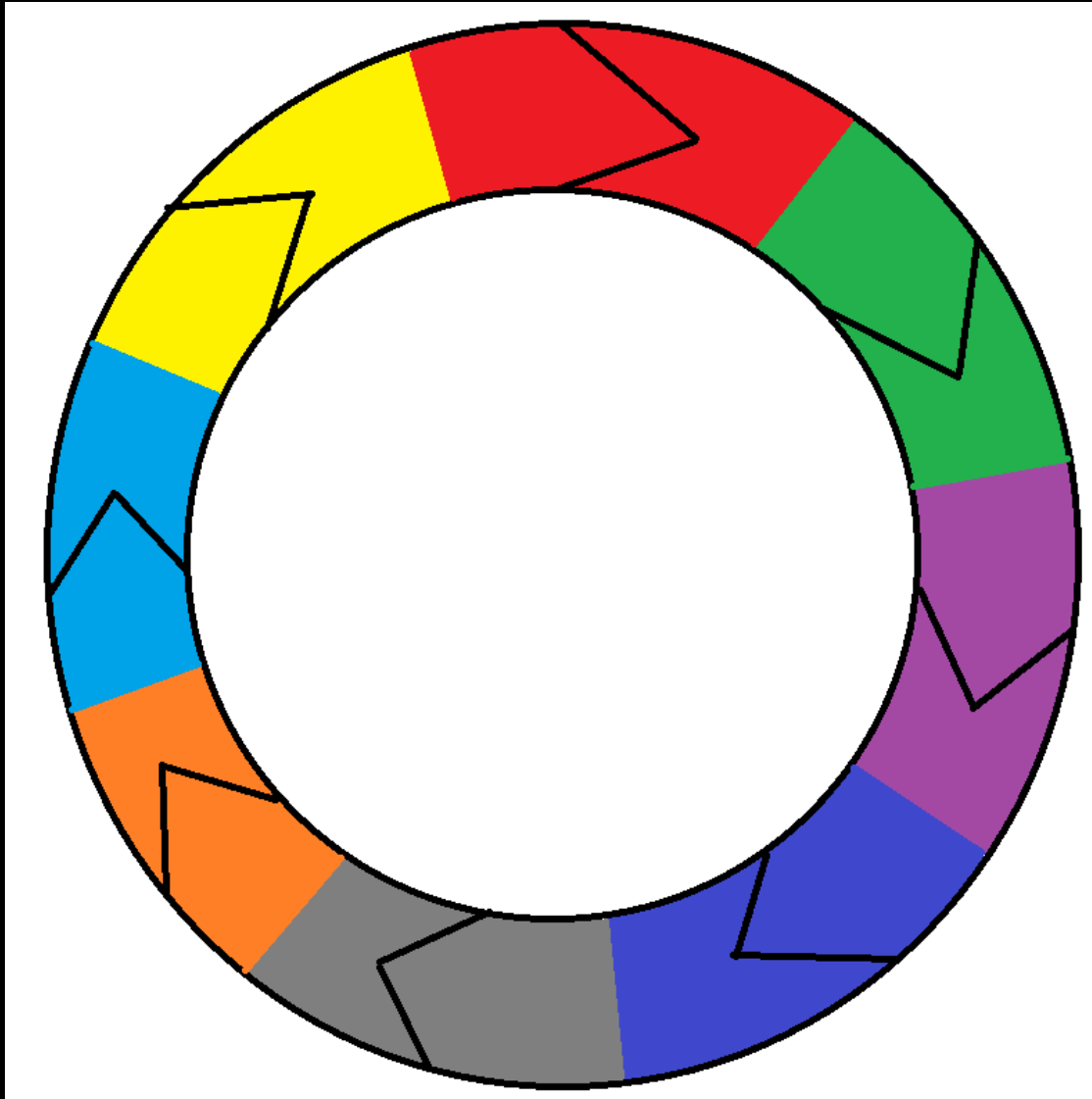


# Moeilijkheid + Statespace

- 8 puzzelstukken van gelijke vorm
- Ieder puzzelstuk heeft 2 kleuren
- Kleuren die elkaar raken moeten overeen komen

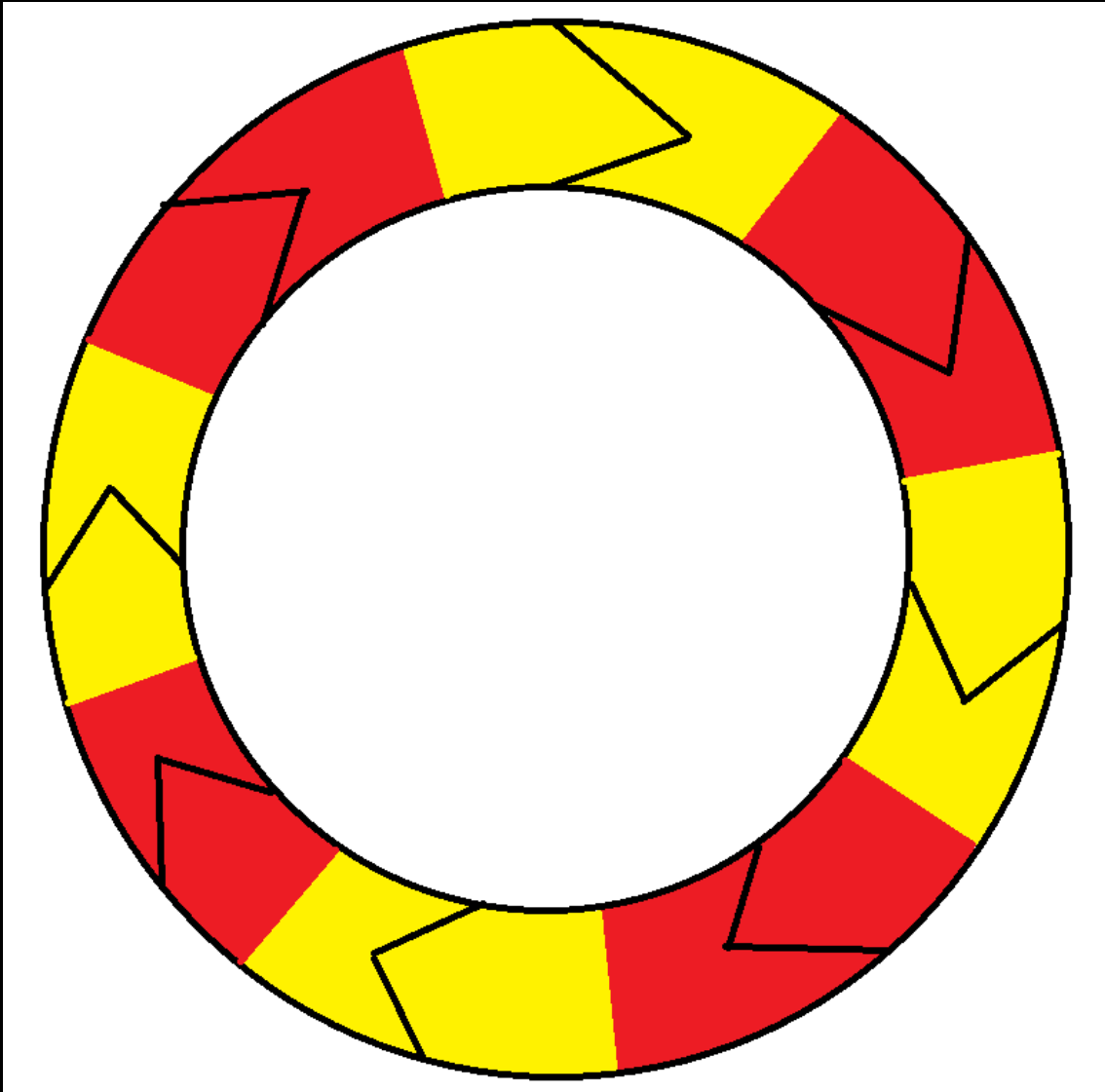
$$8! = 40320$$





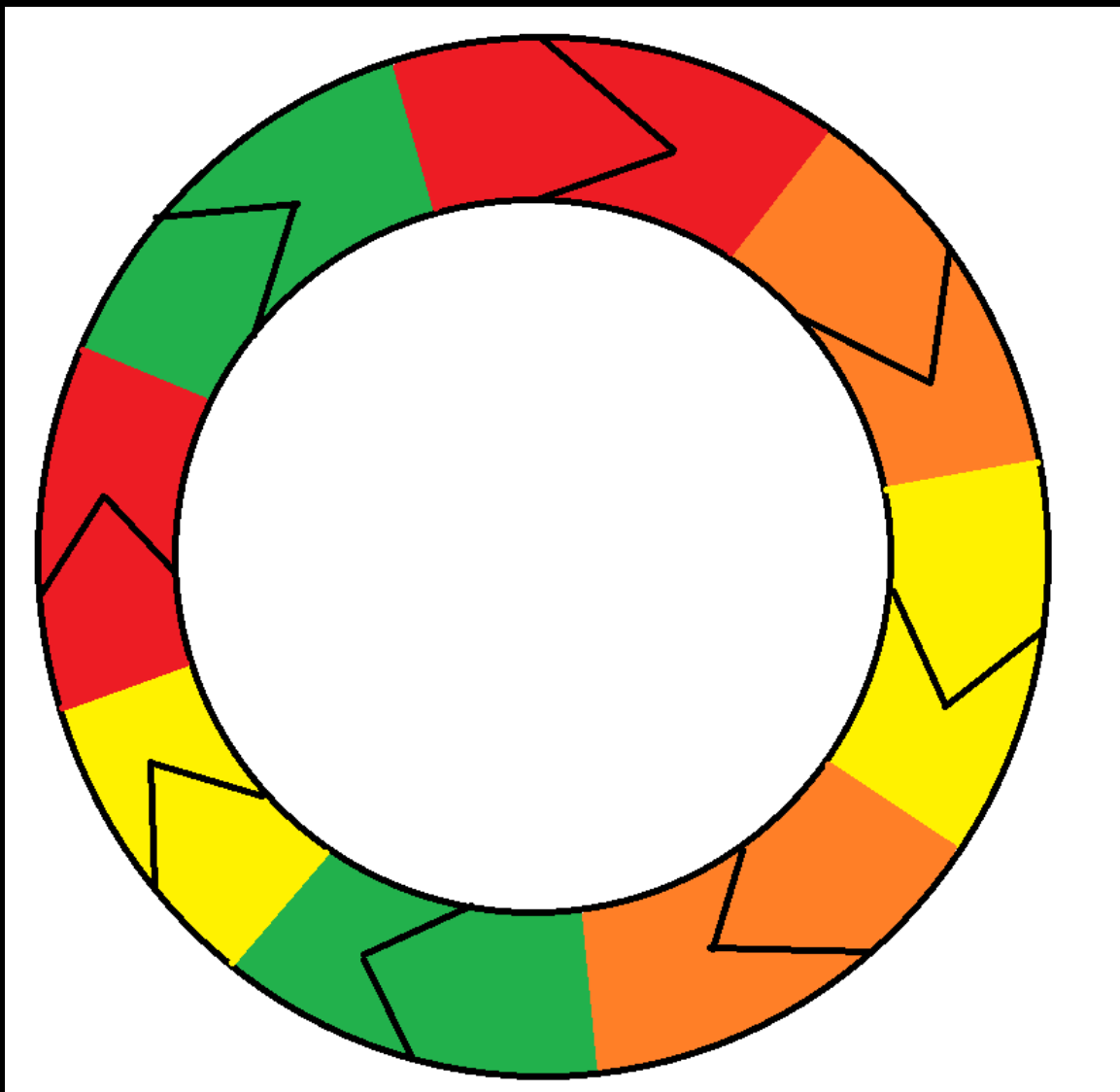
# Moeilijkheid + Statespace

Weinig opties



# Moeilijkheid + Statespace

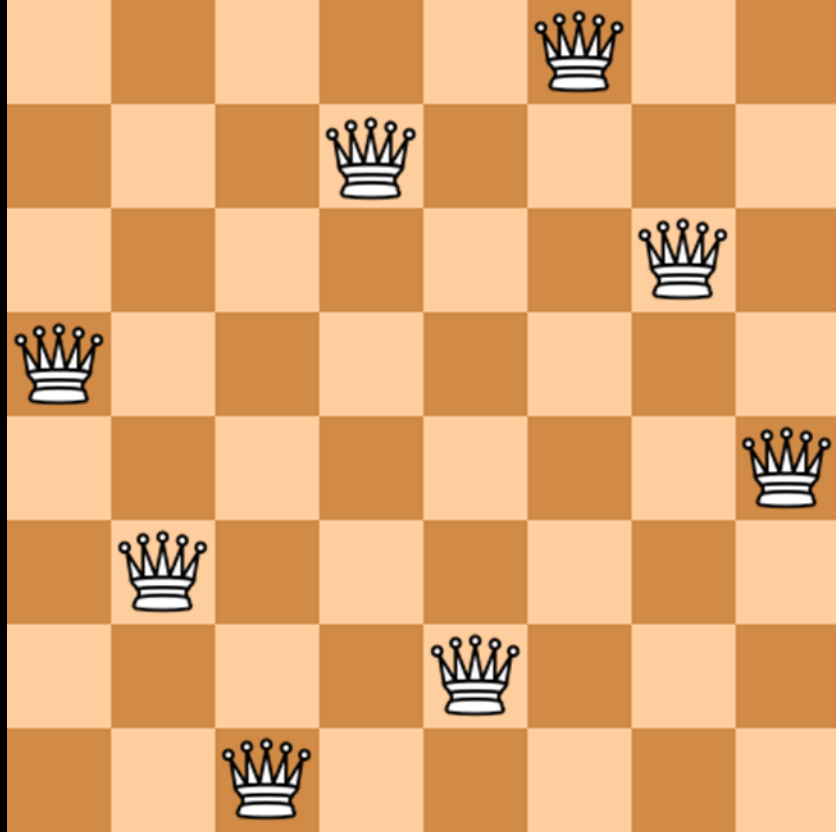
Veel soortgelijke opties



# Moeilijkheid + Statespace

lets daar tussenin

# Heuristiek – N-Queen puzzle



8-Queen Puzzle.

1<sup>st</sup> Queen: 64 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 63 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 62 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 61 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 60 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 59 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 58 Squares

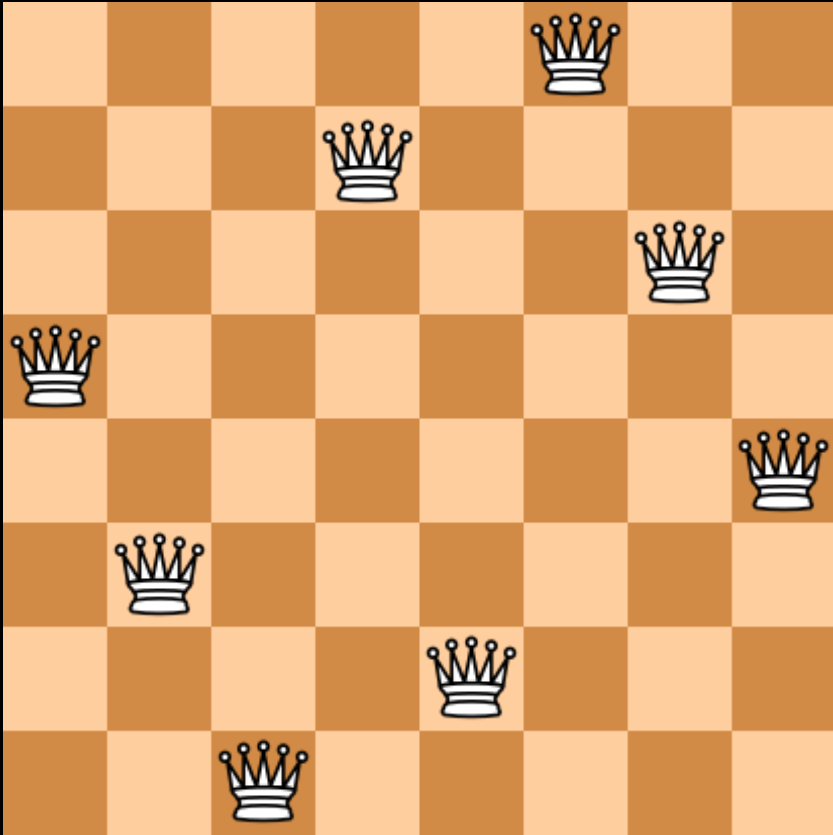
8<sup>th</sup> Queen: 57 Squares

Total Ways =  $64 * 63 * 62 * 61 * 60 * 59 * 58 * 57 = 4426165368 = \binom{64}{8}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{Where,}$$

$n$  is number of squares  
 $k$  is number of queens

# Moeilijkheid – N-Queen puzzle



1<sup>st</sup> Queen: 8 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 7 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 6 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 5 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 4 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 3 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 2 Squares

8<sup>th</sup> Queen: 1 Square

Total Ways =  $8! = 40320$

8-Queen Puzzle.

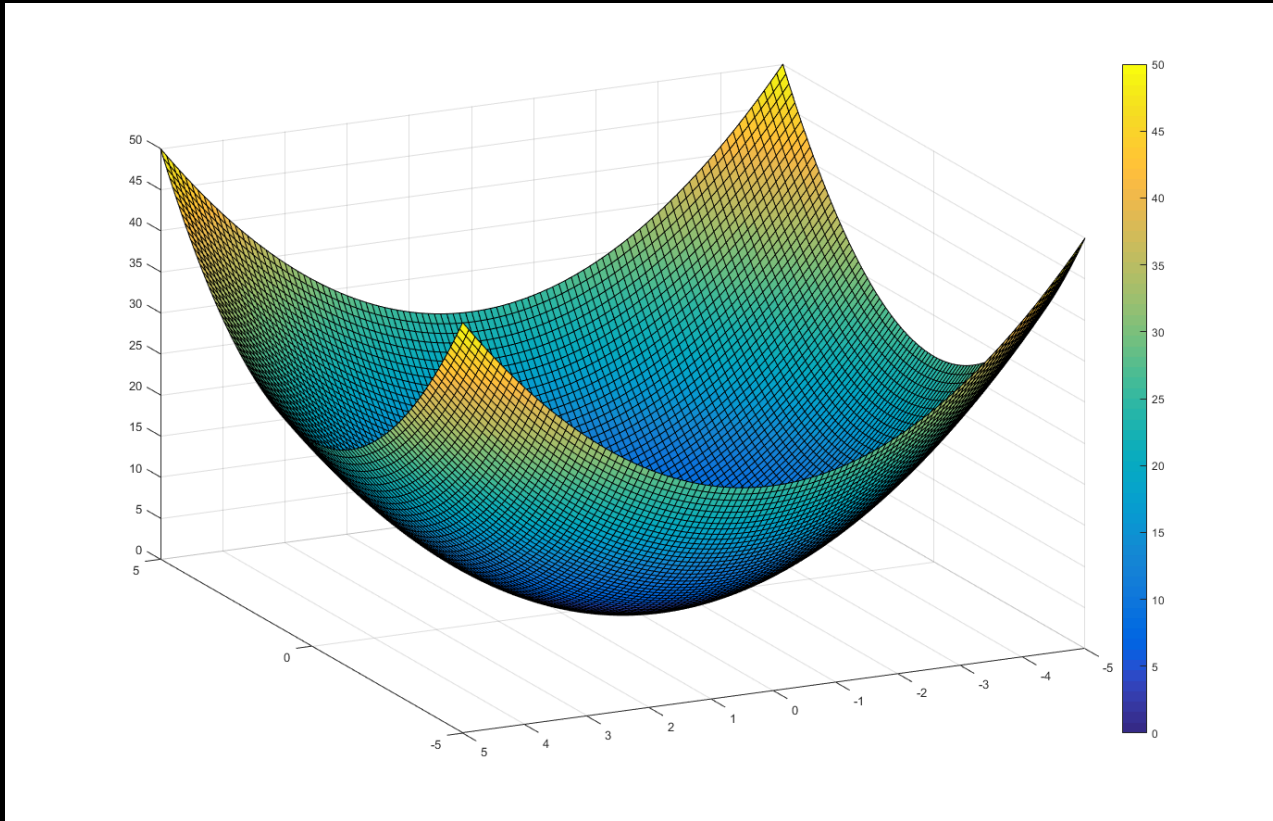
# POP quiz!

Wat maakt een probleem moeilijk om op te lossen?

1. Een grote statespace
2. Weinig geldige oplossingen
3. De constraints
4. Iets anders?



**Vragen?**

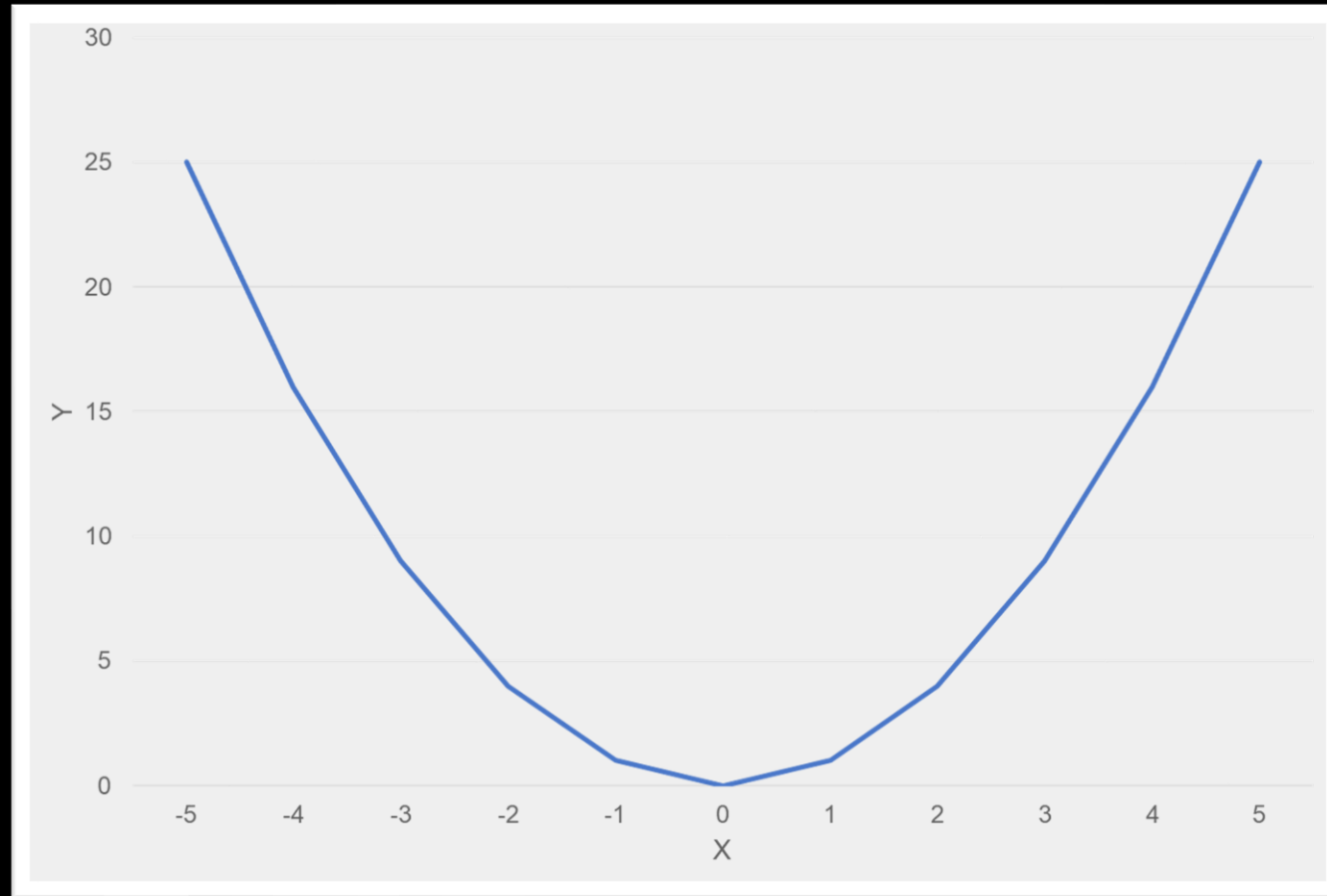


# Vorm van de statespace

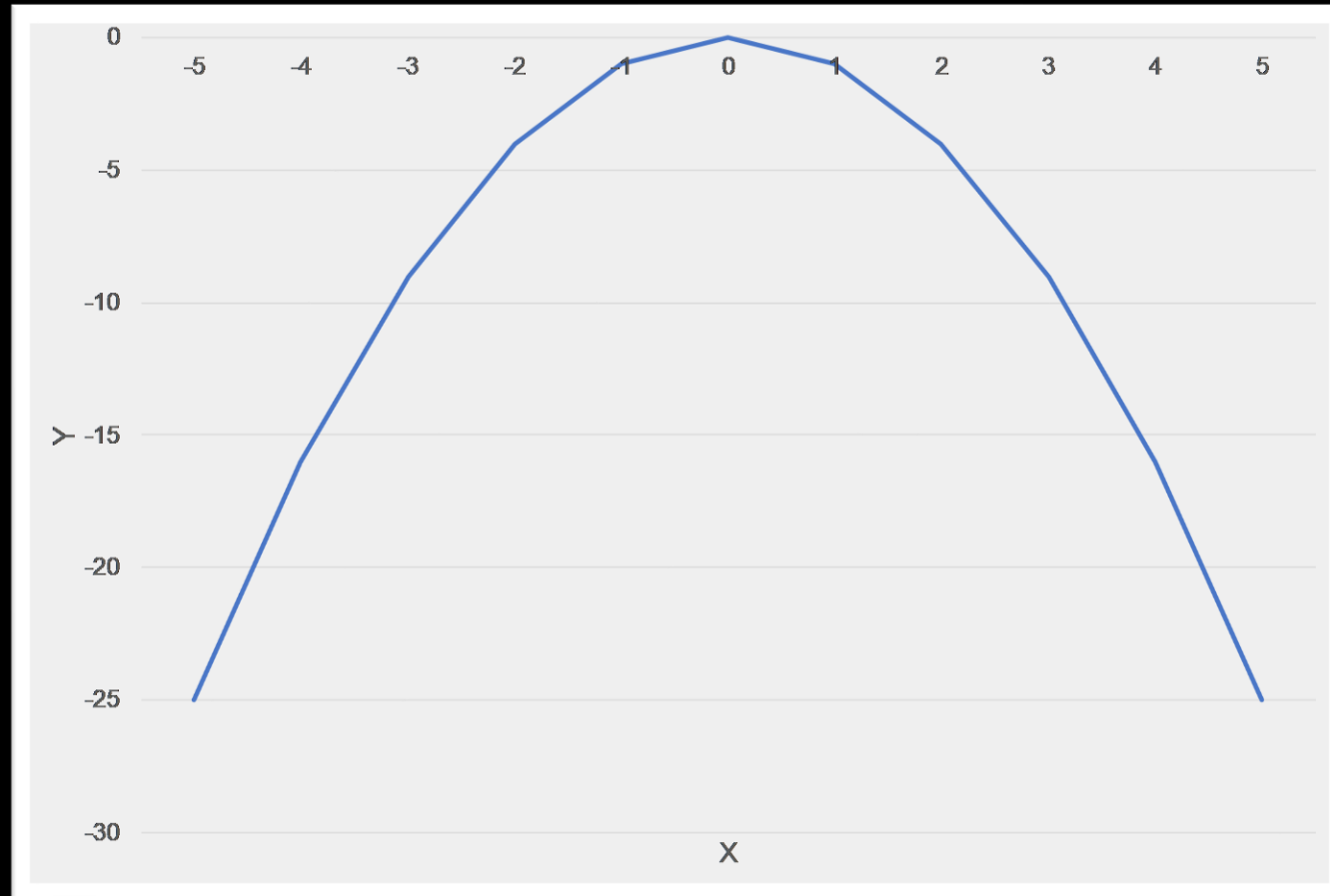
- Convex
- Globaal minimum



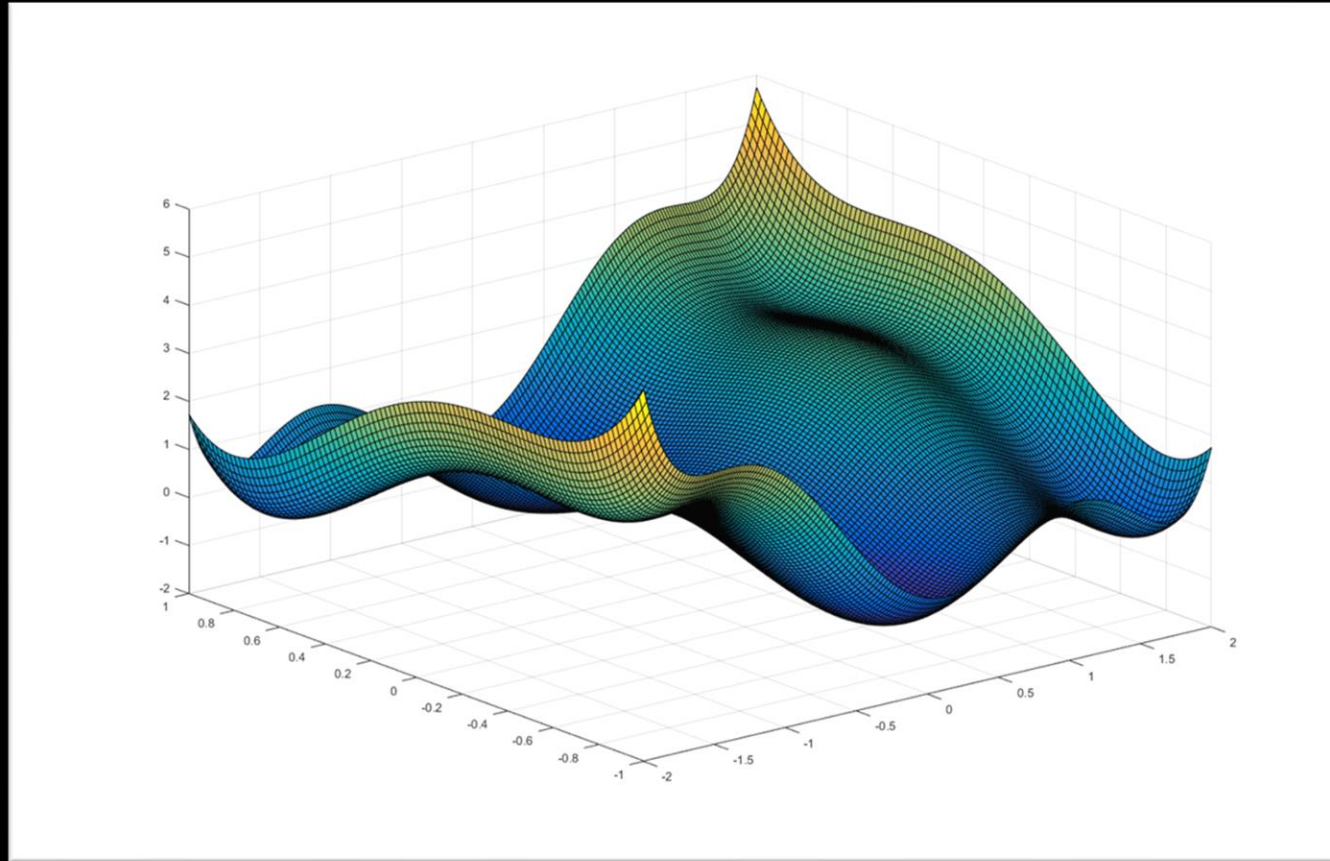
# Gradient Descent



# Gradient Ascent



# Non-convex statespace



# Vorm van de statespace

	Exploratie Moeilijkheid	Minima	Oplossingskwaliteit
<b>Convex Statespace</b>	Makkelijk	Globaal Minima	Optimaal
<b>Non-Convex Statespace</b>	Moeilijk	Lokaal Minima	Sub-Optimaal

# POP quiz!

Wat maakt een probleem moeilijk om op te lossen?

1. Een grote statespace
2. Weinig geldige oplossingen
3. De constraints
4. Iets anders?



**Vragen?**