閱

數學常用公式 2

求 n 取 m 的排列

- $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

本末倒置(數值反轉後的差必為 9 的倍數)

- 證明數值反轉後的差必為 9 的倍數 :
  - 反轉
    - 4321 ⇒ 1234
    - 96321 ⇒ 12369
  - 二位數的本末倒置

$\lvert 10-1\rvert=9$	$\lvert 20-2\rvert=18$	$\lvert 30-3\rvert=27$	$\lvert 40-4\rvert=36$	$\lvert 50-5\rvert=45$	$\lvert 60-6\rvert=54$	$\lvert 70-7\rvert=63$	$\lvert 80-8\rvert=72$	$\lvert 90-9\rvert=81$
	$\lvert 21-12\rvert=9$	$\lvert 31-13\rvert=18$	$\lvert 41-14\rvert=27$	$\lvert 51-15\rvert=36$	$\lvert 61-16\rvert=45$	$\lvert 71-17\rvert=54$	$\lvert 81-18\rvert=63$	$\lvert 91-19\rvert=72$
$\lvert 12-21\rvert=9$		$\lvert 32-23\rvert=9$	$\lvert 42-24\rvert=18$	$\lvert 52-25\rvert=27$	$\lvert 62-26\rvert=36$	$\lvert 72-27\rvert=45$	$\lvert 82-28\rvert=54$	$\lvert 92-29\rvert=63$
$\lvert 13-31\rvert=18$	$\lvert 23-32\rvert=9$		$\lvert 43-34\rvert=9$	$\lvert 53-35\rvert=18$	$\lvert 63-36\rvert=27$	$\lvert 73-37\rvert=36$	$\lvert 83-38\rvert=45$	$\lvert 93-39\rvert=54$
$\lvert 14-41\rvert=27$	$\lvert 24-42\rvert=18$	$\lvert 34-43\rvert=9$		$\lvert 54-45\rvert=9$	$\lvert 64-46\rvert=18$	$\lvert 74-47\rvert=27$	$\lvert 84-48\rvert=36$	$\lvert 94-49\rvert=45$
$\lvert 15-51\rvert=36$	$\lvert 25-52\rvert=27$	$\lvert 35-53\rvert=18$	$\lvert 45-54\rvert=9$		$\lvert 65-56\rvert=9$	$\lvert 75-57\rvert=18$	$\lvert 85-58\rvert=27$	$\lvert 95-59\rvert=36$
$\lvert 16-61\rvert=45$	$\lvert 26-62\rvert=36$	$\lvert 36-63\rvert=27$	$\lvert 46-64\rvert=18$	$\lvert 56-65\rvert=9$		$\lvert 76-67\rvert=9$	$\lvert 86-68\rvert=18$	$\lvert 96-69\rvert=27$
$\lvert 17-71\rvert=54$	$\lvert 27-72\rvert=45$	$\lvert 37-73\rvert=36$	$\lvert 47-74\rvert=27$	$\lvert 57-75\rvert=18$	$\lvert 67-76\rvert=9$		$\lvert 87-78\rvert=9$	$\lvert 97-79\rvert=18$
$\lvert 18-81\rvert=63$	$\lvert 28-82\rvert=54$	$\lvert 38-83\rvert=45$	$\lvert 48-84\rvert=36$	$\lvert 58-85\rvert=27$	$\lvert 68-86\rvert=18$	$\lvert 78-87\rvert=9$		$\lvert 98-89\rvert=9$
$\lvert 19-91\rvert=72$	$\lvert 29-92\rvert=63$	$\lvert 39-93\rvert=54$	$\lvert 49-94\rvert=45$	$\lvert 59-95\rvert=36$	$\lvert 69-96\rvert=27$	$\lvert 79-97\rvert=18$	$\lvert 89-98\rvert=9$	

    - 公式推導
      - 令 a = 10x + y
        - 0 < x ≤ 9
        - 0 ≤ y ≤ 9
        - x ≠ y
      - ⇒ |(10x + y) - (10y + x)| = |9x - 9y| = 9|x - y|
      - ⇒ 反轉後的差必為 9 的倍數
  - 三位數的本末倒置

$\lvert 100-1\rvert=99$	$\lvert 200-2\rvert=198$	$\lvert 300-3\rvert=297$	$\cdots$	$\lvert 700-7\rvert=693$	$\lvert 800-8\rvert=792$	$\lvert 900-9\rvert=891$
	$\lvert 201-102\rvert=99$	$\lvert 301-103\rvert=198$	$\cdots$	$\lvert 701-107\rvert=594$	$\lvert 801-108\rvert=693$	$\lvert 901-109\rvert=792$
$\lvert 102-201\rvert=99$		$\lvert 302-203\rvert=99$	$\cdots$	$\lvert 702-207\rvert=495$	$\lvert 802-208\rvert=594$	$\lvert 902-209\rvert=693$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\lvert 197-791\rvert=594$	$\lvert 297-792\rvert=495$	$\lvert 397-793\rvert=396$	$\cdots$		$\lvert 897-798\rvert=99$	$\lvert 997-799\rvert=198$
$\lvert 198-891\rvert=693$	$\lvert 298-892\rvert=594$	$\lvert 398-893\rvert=495$	$\cdots$	$\lvert 798-897\rvert=99$		$\lvert 998-899\rvert=99$
$\lvert 199-991\rvert=792$	$\lvert 299-992\rvert=693$	$\lvert 399-993\rvert=594$	$\cdots$	$\lvert 799-997\rvert=198$	$\lvert 899-998\rvert=99$	

- 公式推導
  - 令 a = 100x + 10y + z
    - 0 < x ≤ 9
    - 0 ≤ y ≤ 9
    - 0 ≤ z ≤ 9
    - x ≠ z
  - ⇒ |(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x)| = |99x - 99z| = 99|x - z| = 9 * 11|x - z|
  - ⇒ 反轉後的差必為 99 的倍數，也就是 9 的倍數

多項式

- $(a+b)^k = x_1a^k + x_2a^{k-1}b + x_3a^{k-2}b^2 + \ldots + x_{k+1}b^k$

平方和公式 + 等差級數公式

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left(a + a_n\right) \\ &= \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \\ &= an + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$