

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ

**Методы исследования  
гравитационной задачи  $N$  тел**

*Манайнен Максим и Полетухин Роман*

28 ДЕКАБРЯ 2018 Г.

# Оглавление

1	Введение . . . . .	2
2	Постановка задачи . . . . .	3
2.1	Общая формулировка . . . . .	3
2.2	Расчёт траекторий планет Солнечной системы . . . . .	3
2.3	Оценка отклонения . . . . .	3
2.4	Принятые упрощения . . . . .	3
3	Аналитическое решение . . . . .	4
3.1	Задача двух тел с произвольными массами . . . . .	4
3.2	Задача одного притягивающего центра . . . . .	5
4	Математическое моделирование . . . . .	7
4.1	Метод Рунге – Кутты . . . . .	7
5	Полученные результаты и их анализ . . . . .	9
5.1	Анализ и интерпретация результатов . . . . .	16
6	Заключение . . . . .	17
7	Материалы . . . . .	17

# 1 Введение

*Единственное, чему научила меня долгая жизнь: что вся наша наука перед лицом реальности выглядит примитивно и по-детски наивно — и всё же это самое ценное, что у нас есть.*

— Альберт Эйнштейн

В основе каждого физического исследования лежит установление фактов путём наблюдения или эксперимента. Полученные данные подвергаются упрощению с помощью введения идеальных объектов. На этой основе создаются модели исследуемых явлений, которые, в свою очередь, позволяют выстраивать физические теории, объясняющие изучаемый процесс с помощью применения физических законов и соответствующего математического аппарата. Важность качественного построения модели явления сложно переоценить: от нее зависит справедливость всех последующих гипотез.

С развитием физической науки этот процесс требовал все большего развития различных областей математики. Следствием бурного развития вычислительных технологий стало появление способа математического моделирования для явлений, трудно описываемых традиционными аналитическими методами.

В данной работе мы поставили задачу рассмотреть два пути исследования физических процессов: аналитический и численный, взяв за основу гравитационную задачу  $N$  тел.

## 2 Постановка задачи

### 2.1 Общая формулировка

Вдали от прочих гравитирующих тел находится  $N$  материальных точек, массы  $\{m_i \mid i \in 1, \dots, N\}$  которых известны. Пусть попарное взаимодействие точек подчинено закону всемирного тяготения Ньютона, и пусть силы гравитации аддитивны. Пусть известны начальные на момент времени  $t = 0$  положения  $\vec{r}_{i0}$  и скорости  $\vec{v}_{i0}$  каждой точки. Требуется найти положения точек для всех последующих моментов времени.

### 2.2 Расчёт траекторий планет Солнечной системы

Классическим примером набора  $N$  гравитирующих тел для данной задачи является Солнце и 8 планет Солнечной системы. В данной вариации одно из тел (Солнце) имеет массу, во много раз превышающую массу других тел ( $M_{\text{системы}} = 1,0014M_{\odot}$ ). В связи с этим сформулируем цель работы: приняв звезду за центр масс, вычислить траектории планет Солнечной системы двумя способами: аналитически и численно, а затем сравнить полученные данные с общедоступными данными NASA.

### 2.3 Оценка отклонения

Для оценки качества предсказанных траекторий используем данные о расстоянии между Солнцем и данной планетой в течение всего оборота (данные получены из открытого интерфейса NASA Jet Propulsion Laboratory). Алгоритм:

- 1) Найдём перигелий эмпирической траектории и перигелий предсказанной.
- 2) Обходим траектории, сопоставляя ближайшие точки, и для каждой из  $n$  пар точек считаем следующую метрику  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{r_{\text{предсказанное}} - r_{\text{настоящее}}}{r_{\text{настоящее}}}$$

- 3) Финальная оценка:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n |\sigma_i|}{n}$$

### 2.4 Принятые упрощения

Факт того, что планеты Солнечной системы движутся в одной плоскости, был принят по умолчанию.

К сожалению, источник данных в NASA Jet Propulsion Laboratory не содержал временной промежуток для полного оборота Нептуна, поэтому мы приняли решение не учитывать данную планету.

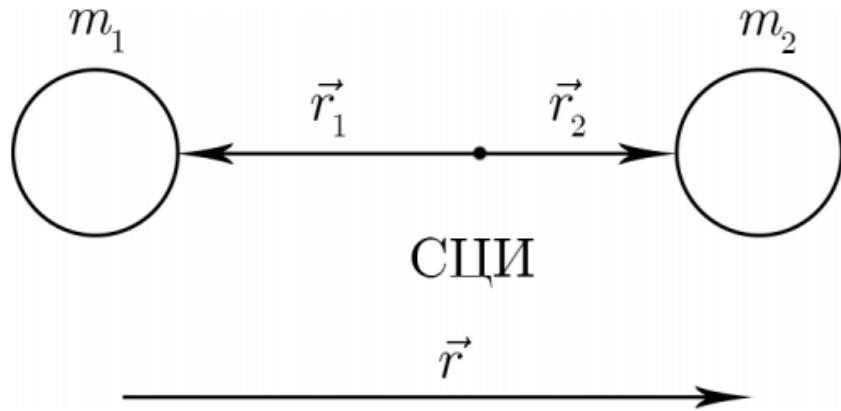
### 3 Аналитическое решение

Общеизвестно, что для  $N > 3$  не существует общего аналитического решения, причем для случая  $N = 3$  Карлом Зундманом было получено общее аналитическое решение в виде рядов, однако, из-за крайне медленной сходимости практическое использование рядов Зундмана невозможно. Поэтому аналитическое решение будет получено из упрощения, позволяющего исключить взаимодействие между планетами, учитывая только их взаимодействие с Солнцем. Фактически, это означает, что мы перешли к задаче двух тел.

Сначала рассмотрим общий ход решения:

#### 3.1 Задача двух тел с произвольными массами

##### Описание системы



В системе центра инерции двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &= \vec{0}, & \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \\ \vec{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, & \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.\end{aligned}$$

Рассмотрим их гравитационное взаимодействие:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная ( $\gamma = 6,674 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ ).

### Энергия системы

Запишем полную энергию этого взаимодействия:

$$E = K_1 + K_2 + \Pi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} + \Pi(r).$$

Подставим в эту формулу значения  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , найденные выше, и про-дифференцируем:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1}{2} \left( -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{r}^2 + \frac{m_2}{2} \left( -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{r}^2 + \Pi(r), \\ E &= \frac{m_1 m_2 \dot{r}^2}{2(m_1 + m_2)} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) + \Pi(r), \end{aligned}$$

Упрощая, получим:

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \Pi(r),$$

где  $\mu = m_1 m_2$ .

Найдем потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух тел:

$$\Pi(r) = -\gamma m_1 m_2 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

Далее, как и было анонсировано, будем рассматривать случай взаимодействия тела с очень большой массой  $M$  (например, звезды) и тела с массой  $m$  (например, планеты), для которых выполнено соотношение  $M \gg m$  (в таком случае  $\mu \approx m$ ).

## 3.2 Задача одного притягивающего центра

### Энергия системы

В данной вариации задачи двух тел практически вся масса системы сосредоточена в центре тела большей массы, а само тело, будучи центром масс, покоится (в силу отсутствия внешних сил, действующих на систему). Тогда выражение для полной энергии принимает вид:

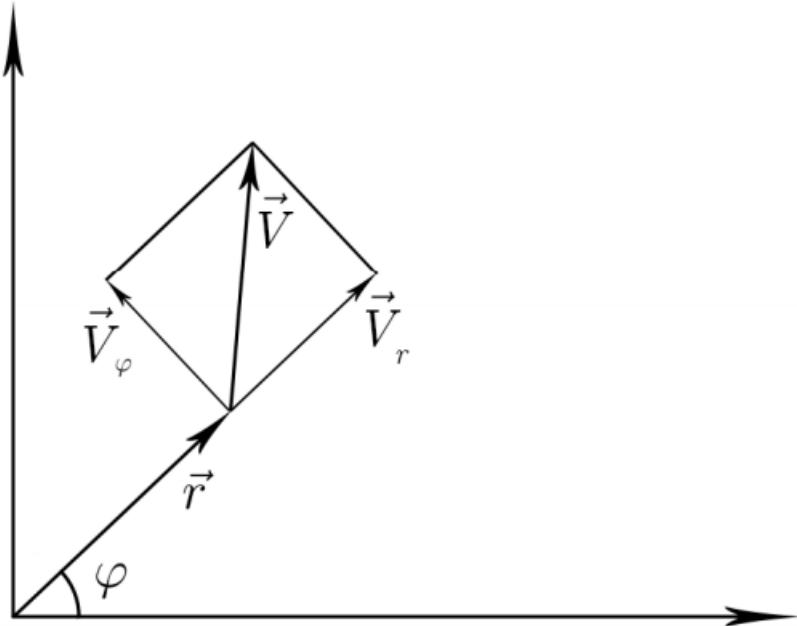
$$E = \frac{mV^2}{2} + \Pi(r) = \text{const.}$$

## Момент импульса тела малой массы

Поскольку гравитационное поле является центрально-симметричным, моменты сил взаимодействия в нём равны нулю:

$$\vec{M} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{0} \implies \vec{L} = \text{const.}$$

Поэтому момент импульса малой массы относительно центра инерции постоянен. Из этого следует, что траектория движения меньшей массы лежит в одной плоскости. Рассмотрим движение тела массой  $m$  со скоростью  $\vec{V}$  в произвольный момент времени в полях:



Разложим вектор скорости на две компоненты:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi, \quad (\vec{V}_r = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{V}_\varphi = r\dot{\varphi}).$$

Тогда в силу дистрибутивности и ассоциативности векторного произведения:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{V}] = m [\vec{r} \times \vec{V}_\varphi], \quad L = mrV_\varphi = mrr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Так как  $\vec{L} = \text{const}$  и  $V^2 = V_r^2 + V_\varphi^2$ , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \\ E = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \Pi(r) \end{cases}$$

Подставим первое уравнение во второе и выразим  $\dot{\varphi}$ :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - \Pi(r)) - \left(\frac{L}{mr^4}\right)^2} = A(r), \quad \frac{dr}{A(r)} = dt.$$

Подставим в первое уравнение системы:

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{A(r)} \implies \varphi = \int \frac{L}{mr^2 A(r)} dr + \text{const}, \quad t = \int \frac{dr}{A(r)} + \text{const}.$$

Полученные интегралы представляют собой решение задачи в параметрической формуле:

$$\begin{cases} \varphi = \arccos \frac{\frac{L^2}{m\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2} E}} + \text{const} \\ E = \frac{mr^2}{2} + \left( \frac{L^2}{2mr^2} + \Pi(r) \right) \end{cases}$$

Введем обозначения:  $P = \frac{L^2}{m\alpha}$  – параметр,  $e = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2} E}$  – эксцентриситет. Тогда:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{P}{r} - 1}{e} \implies r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}$$

Последняя формула является параметрической формой кривых второго порядка. Это траектория движения тела массой  $m$  вокруг тяжелого тела массой  $M$  в полярной системе координат.

## 4 Математическое моделирование

### 4.1 Метод Рунге – Кутты

С появлением компьютерной техники появилась реальная возможность изучать свойства систем гравитирующих тел путём численного решения системы уравнений движения.

Опишем путь решения на основе известного метода Эйлера, относящегося к классу методов Рунге – Кутты.

#### Описание

Пусть дана задача Коши (нахождение решения, удовлетворяющего начальным условиям) для уравнения первого порядка:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}, t),$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= g(\vec{r}, t), \\ \vec{r}|_{t=t_0} &= \vec{r}_0, \\ \dot{\vec{r}}|_{t=t_0} &= \vec{r}_0,\end{aligned}$$

где функции  $f$  и  $g$  определена на некоторых областях  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Решения ищем на интервале  $(t_0, t]$ . На этом интервале введем узлы:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t$$

Приближенные решение в узлах  $t_i$ , которые обозначим за  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}'_i$ , определяются по формулам:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + (t_i - t_{i-1})f(\vec{r}_{i-1}, t_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_{i-1} + (t_i - t_{i-1})g(\vec{r}'_{i-1}, t_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

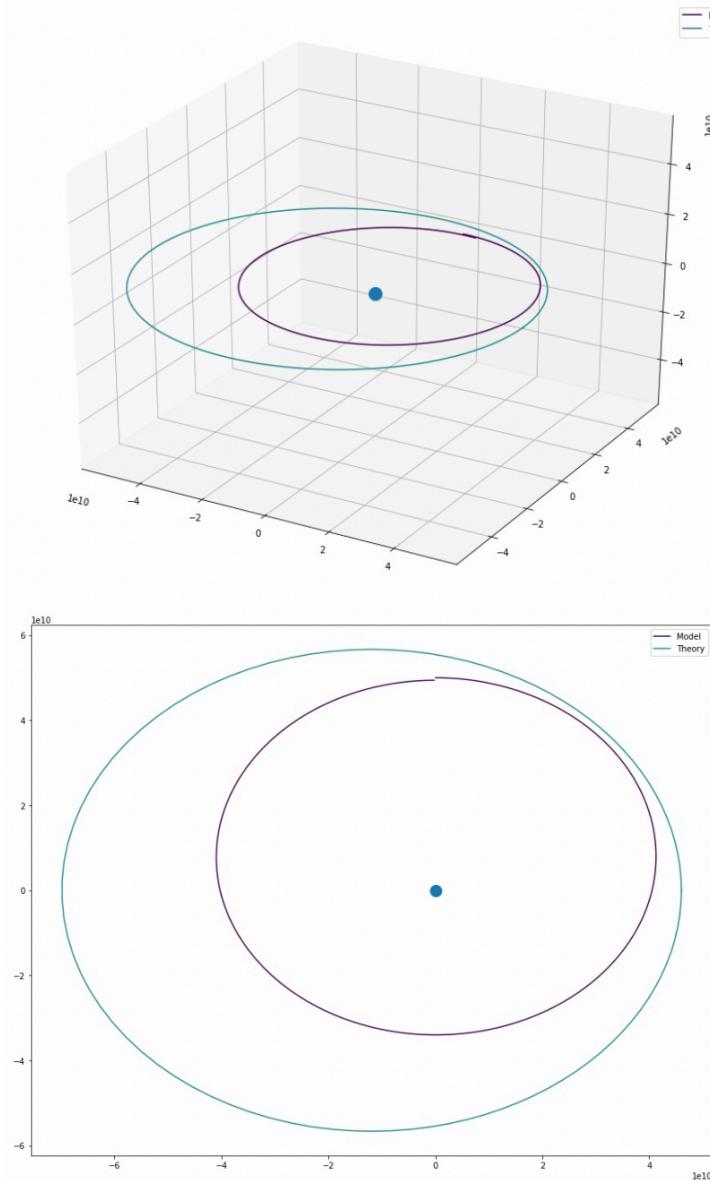
## Реализация

Алгоритм реализован на языке программирования C++. Код доступен в репозитории GitHub по ссылке ([github.com/TheRussianFella/NBody](https://github.com/TheRussianFella/NBody))

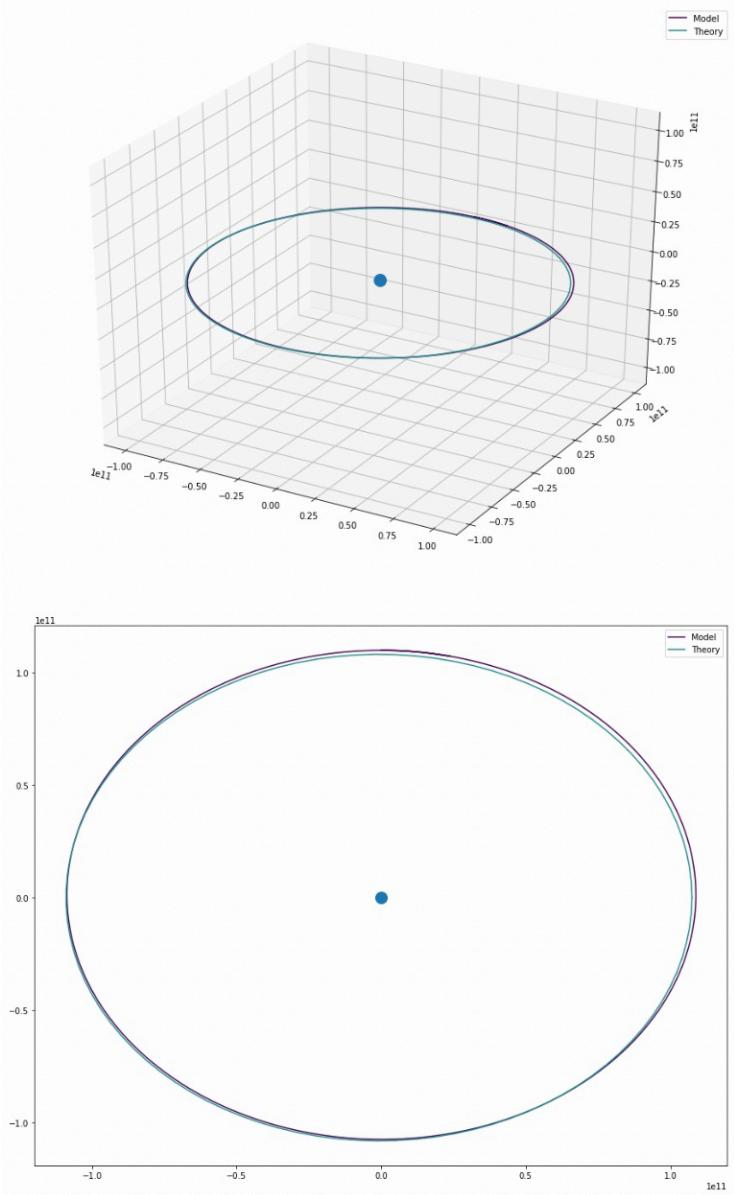
## 5 Полученные результаты и их анализ

В результате применения аналитического и численного методов были получены следующие результаты для траекторий планет Солнечной системы:

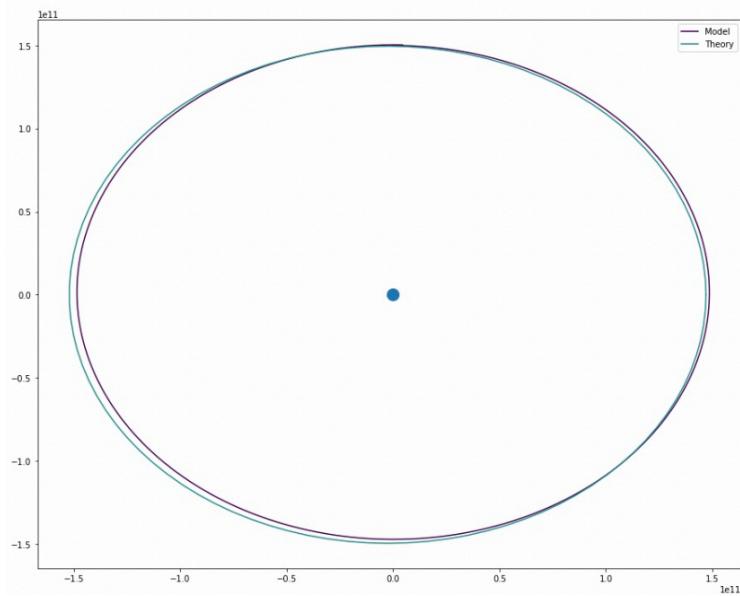
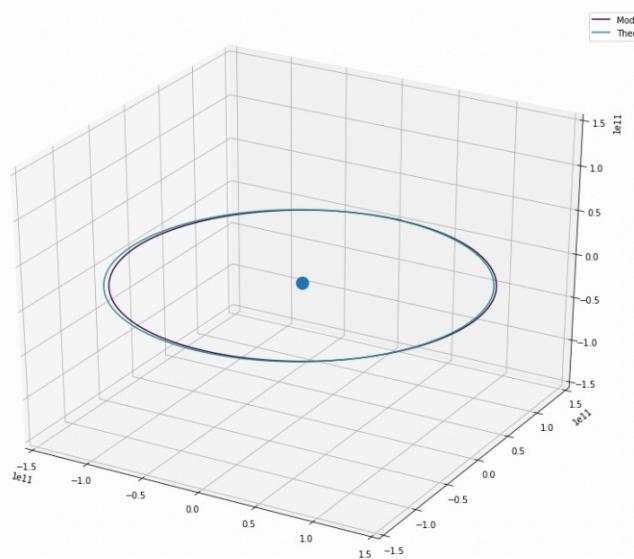
### Меркурий



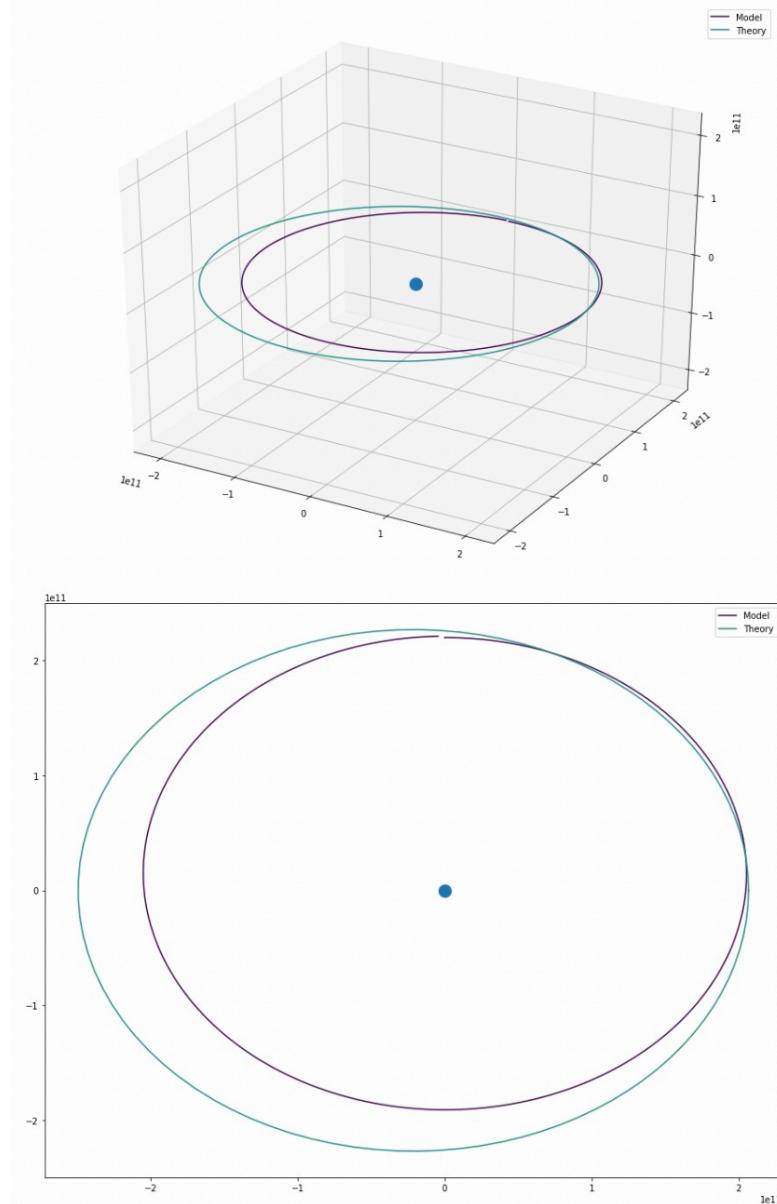
## Венера



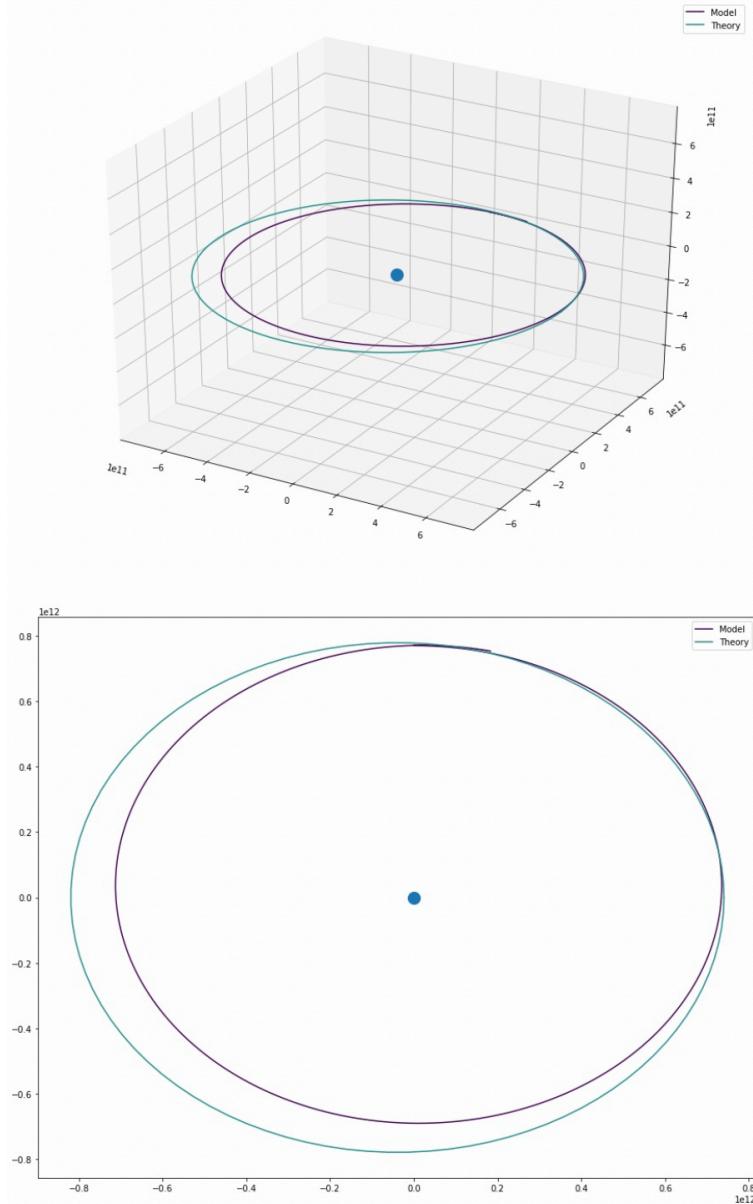
## Земля



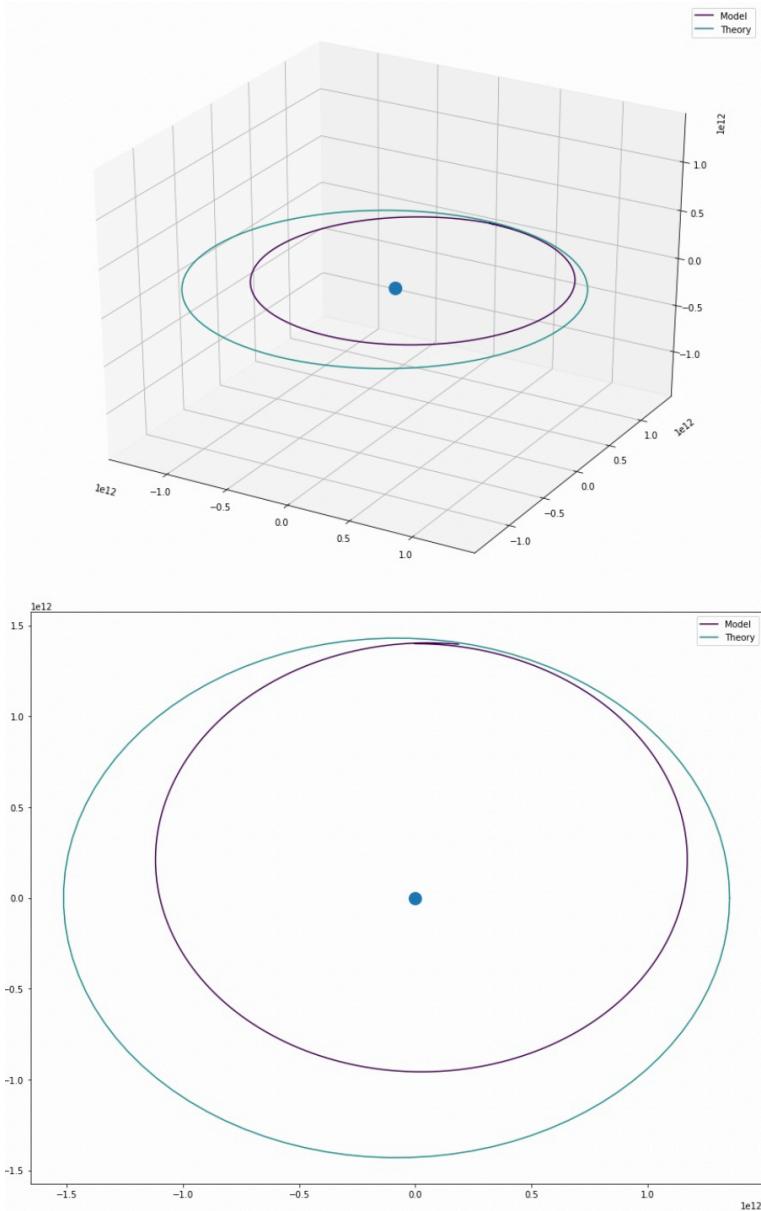
## Mapc



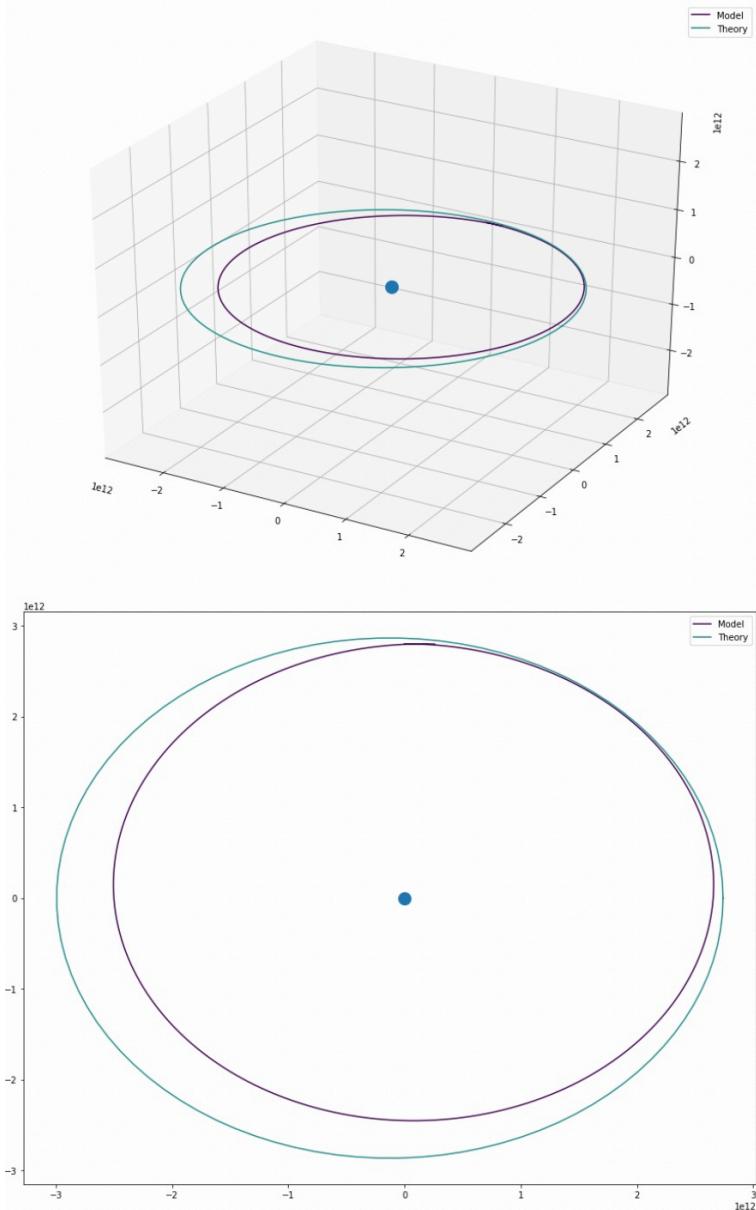
## Юпитер



## Сатурн



## Уран



## Моделирование

Код для построения траектории планет, обработки и визуализации данных доступен по ссылке на GitHub ([github.com/TheRussianFella/NBody](https://github.com/TheRussianFella/NBody))

### 5.1 Анализ и интерпретация результатов

Приведем результаты для отклонения траекторий:

Название планеты	Отклонение теоретических предсказаний	Отклонение мат. моделирования
Меркурий	0,092	0,12
Венера	1,30E-05	3,00E-03
Земля	1,63E-05	5,00E-03
Марс	0,039	0,046
Юпитер	0,023	0,037
Сатурн	4,00E-04	0,135
Уран	0,021	0,053

В общем случае - теоретические предсказания оказались точнее моделирования.

Интересное явление связано с Меркурием - интуитивно кажется, что в данном случае теория должна дать почти идеальный результат, однако здесь мы наблюдаем самую большую ошибку. Данное явления скорее всего связано со смещением перигелия Меркурия (рассмотрение данного явления выходит за рамки работы).

Большое отклонение для траектории Марса скорее всего объясняется гравитационным взаимодействием с поясом астероидов - который мы не учитываем ни в теоретических выкладках ни в моделировании.

Очень странные результаты были получены для траектории Сатурна - вопрос о том, почему здесь ошибки методов так сильно отличаются, пока остается открытым.

## 6 Заключение

Ожидания от этого опыта не совпали с действительностью – мы предполагали, что математическое моделирование даст лучший результат, поскольку в нём мы учитываем гравитационное взаимодействие со всеми крупными телами. Однако моделирование не обошло теорию ни на одной из траекторий.

Большой интерес вызывают траектории, на которых оба метода сильно ошиблись – такие большие отклонения скорее всего объясняются проявлениями ОТО и другими телами, взаимодействием с которыми мы пренебрегаем.

Данная работа позволила сделать нам несколько выводов:

1. Математическое моделирование может дать хорошие результаты, однако не стоит пренебрегать теоретическими выкладками.

2. Мы не знаем, чего мы не знаем – можно вечно решать задачу в терминах Ньютоновской механики, однако без выхода за её рамки мы не получим точного результата во всех случаях.

3. Нужно постоянно помнить, какие упрощения мы сделали, так как они могут быть источником ошибок – из-за пренебрежения гравитационным взаимодействием с поясом астероидов мы получили сильную погрешность для траектории Марса.

## 7 Материалы

Приведем список материалов, использованных в процессе работы:

1. Лаборатория реактивного движения НАСА и Калифорнийского технологического института ([ssd.jpl.nasa.gov](http://ssd.jpl.nasa.gov)) – данные о движении планет Солнечной системы.

2. Статья о гравитационной задаче  $N$  тел и методе Эйлера ([en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)) – общая информация.

3. Лекторий МФТИ ([lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru)) – теоретический метод решения.

4. Описание алгоритма для математического моделирования ([cyberomelette.com](http://cyberomelette.com)).