9. Логический вывод. Формальные понятия доказательства и правила вывода, пример. Разветвляющие и неразветвляющие правила. Существование конечного числа правил вывода и математического понятия доказательства, при помощи которых можно ответить на вопрос: "Верно ли, что Г ⇒ А?". Пример.

Логический вывод — это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению — новому суждению (формуле).
Доказательство — система утверждений, каждое из которых очевидно истинно или следует из уже доказанных утверждений.

Пример: Допустим мы доказали утверждение А, затем доказали, что из А следует утверждение В, тогда мы делаем вывод, что истинно утверждение В. Считая А и В предложениями логического языка, можно возвести такую ситуацию в ранг правила, по которому из истинности предложений (посылок) А и [А→В] можно в качестве заключения вывести истинность предложения В. Такое правило можно записать в виде
$\frac{(A,[A\to B])}{B}$ где над чертой выписаны формулы-**посылки**, а под чертой - формула-**заключение**.
Правила вывода:
$\frac{A\&B}{A,B}$, $\frac{AVB}{A,B}$ $\frac{A\to B}{\neg A|B}$ $\frac{\neg[A\&B]}{\neg A|\neg B}$ $\frac{\neg[AVB]}{\neg A,\neg B}$ $\frac{\neg[A\to B]}{A,\neg B}$
$\frac{(\forall x|\alpha)A}{(\forall x|\alpha\ ,b)A)}$ $\frac{(\exists x|\alpha)A}{A_{x=b}}$ $\frac{\neg(\forall x|\alpha)A}{(\exists x|\alpha)\neg A}$ $\frac{\neg(\exists x|\alpha)A}{(\forall x|\alpha)\neg A}$ $\frac{\neg\neg A}{A}$
$\mathrm{b} = \mathrm{const};\ \mathrm{b} \ni \mathrm{U}\backslash\alpha$
$A_{x=b}$ может еще обозначаться как $A_x[b]$- результат подстановки константы b в формулу А вместо свободных вхождений переменной x.
Неразветвляющее правило: утверждается истинность всех формул заключения.
Пример: $\frac{A\&B}{A,B}$ А и В - истина.
Разветвляющее правило: утверждается истинность **хотя бы одной** формулы заключения.
Пример: $\frac{AVB}{A,B}$ А, В - истина хотя бы одна из двух.
Для ответа на вопрос: **"Верно ли, что Г ⇒ А**?" используются поисковые деревья.
"Г ⇒ А?" заменяется на задачу $\Gamma\ \cup \{\neg A\}$ ⇒ _|_? (_|_-тождественно ложь) _|_ - знак перпендикуляра
Дерево вывода является **деревом доказательств**, если каждая из его ветвей блокирована.
Ветвь в дереве называется **блокированной**, если в ней одновременно получены формулы F и $\neg F$ для некоторого F.

Пример: $\{\forall x\, [P(x) \rightarrow \neg M(x)],\ \exists y\, [S(y)\ \&\ M(y)]\} \Rightarrow \exists z\, [S(z)\ \&\ \neg P(z)]$.

1 $\exists y[S(y)\ \&\ M(y)]$

↓

2 $\forall x[P(x) \rightarrow \neg M(x)]$

↓

3 $\neg \exists z[S(z)\ \&\ \neg P(z)]$ отрицание заключения

↓

4 $[S(a)\ \&\ M(a)]$ из (1)

↓

5 $[P(a) \rightarrow \neg M(a)]$ из (2)

↓

6 $(\forall x/a)[P(x) \rightarrow \neg M(x)]$ из (2)

↓

7 $\forall z\, \neg[S(z)\ \&\ \neg P(z)]$ из (3)

↓

8 $S(a)$ из (4)

↓

9 $M(a)$ из (4)

↓ ↓

10.1 $\neg P(a)$ | 10.2 $\neg M(a)$ из (5)

↓

11.1 $\neg [S(a)\&\ \neg P(a)]$ из (7)

↓

12.1 $(\forall z/a)\ \neg[S(z)\&\ \neg P(z)]$ из (7)

↓ ↓

12.1.1 $\neg S(a)$ | 12.1.2 $\neg\neg P(a)$ из (11.1)

↓

12.1.3 $P(a)$ из (12.1.2)