

**Вопрос 1. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех  $k$ -местных предикатов и функций на  $n$ -элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения. Примеры**

Билеты 1, 15

$U$  – универс (конечный или счетный), являющийся множеством математических объектов.

$U^k$  –  $k$ -ая декартова степень множества  $U$ , т.е. множество  $\{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in U, x_2 \in U, \dots, x_k \in U\}$ . Если  $|U| = n \Rightarrow |U^k| = n^k$ .

$k$ -местная функция  $f$  (местность = арность = кол-во аргументов) – произвольное отображение вида  $U^k \rightarrow U$ , т.е. отображение, ставящее каждому  $k$ -местному набору элементов множества  $U$  некоторый элемент из  $U$ . Общее количество  $k$ -местных функций над  $n$  элементным универсом равно  $n^k$ . Любые константы из универса  $U$  – 0-местные функции.

$k$ -местный предикат  $P$  (отношение) – произвольное отношение вида  $U^k \rightarrow \{0, 1\}$  где 0 и 1 – логические константы. Общее количество  $k$ -местных предикат над  $n$  элементным множеством равно  $2^{n^k}$ . Логические константы 0 и 1 – 0-местные предикаты.

Пример.  $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $P(x, y, z) = "x + x + y \text{ делить на } 3"$ .  $(0, 2, 4) \in P$  или  $P(0, 2, 4) = 1$ ,  $(1, 3, 4) \notin P$  или  $P(1, 3, 4) = 0$ .

#### Синтаксис логического языка 1 порядка

##### 1. Алфавит языка состоит из трех групп символов:

a. Логические символы –  $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists$   
логические связи      кванторы

b. Вспомогательные символы –  $(, ), [, ]$   
скобки

$x, y, \dots, z_0$  ;  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ;  $0, 1$   
символы переменных      символы констант из универса      символы логических констант  
(возможно с индексом)

##### c. Нелогические сигнатуры

$\sigma = \langle P_1, \dots, P_k; f_1, \dots, f_s \rangle$  – заранее незафиксированный набор предикатов и функциональных символов. По умолчанию предполагается, что среди предикатов всегда содержится предикат равенства.

Тип сигнатуры  $\tau_\sigma = \langle \nu_1, \dots, \nu_k; \mu_1, \dots, \mu_s \rangle$ , где  $\nu_i$  – арность  $P_i$  и  $\mu_j$  – арность  $f_j$ .

##### 2. Правило построения термов (имен)

- Любая константа или переменная из универса  $U$  является термой (простейшей термой или именем)
- Если  $f$  – имя  $k$ -местного функционального символа, а  $t_1, \dots, t_k$  – уже построенные термы, то  $f(t_1, \dots, t_k)$  – тоже терм

##### 3. Правило построения функций

- Если  $P$  – имя  $k$ -местного предикатного символа, а  $t_1, \dots, t_k$  – уже построенные термы, то  $P(t_1, \dots, t_k)$  – атомарная формула
- Если  $A$  и  $B$  – уже построенные формулы, то  $[A \& B]$ ,  $[A \vee B]$ ,  $[A \rightarrow B]$ ,  $[A \leftrightarrow B]$ ,  $\neg A$ ,  $\neg B$  – тоже формулы  
 Приоритет операций в порядке уменьшения: скобки, отрицание, конъюнкция, все остальное с равным приоритетом.
- Если  $A$  – уже построенная формула, то  $(\forall x)A$ ,  $(\exists x)A$  – тоже формулы

Подформула – это любая подряд идущая последовательность символов, которая сама по себе является формулой, т.е. корректно построена по правилам (сама формула также является подформулой).

Пример.  $(\exists x)[[x + 2 < 5] \& [3 < x + 2]]$ , где  $x, 2, 3, 5, x + 2$  – термы;  $x + 2 < 5$  и  $3 < x + 2$  – атомарные формулы;  $x + 2 < 5, 3 < x + 2, [x + 2 < 5] \& [3 < x + 2], (\exists x)[x + 2 < 5] \& [3 < x + 2]$  – подформулы; а вот  $(\exists x)[x + 2 < 5]$  и  $(\exists x)[3 < x + 2]$  – подформулами не являются.

Область действия квантора по переменной  $x$  называется подформула непосредственно следующая за символами  $(\forall x)$  или  $(\exists x)$ . Вхождение переменной в формулу называется связанным, если она находится в области действия квантора по данной переменной. В противном случае называется свободным.

Предложением (замкнутой формулой) называется формула, не содержащая свободных вхождений переменных.

Пример.  $(\exists x)[P(x)] \vee Q(x)$ , где в  $P(x)$   $x$  – связанная переменная, а в  $Q(x)$  – свободная, т.е. данная формула не является предложением.

$(\forall x)[R(x, y)]$  – незамкнутая формула (не предложение), т.к.  $x$  – связанная переменная, а  $y$  – свободная.

$(\forall x)[P(x) \vee (\exists y)Q(y)]$  – предложение, обе переменные  $x$  и  $y$  – связанные.