8. Понятие комбинатора, примеры комбинаторов. Реализация арифметики и логических функций в рамках комбинаторной логики

Билет: 4,11,21

Комбинатор-терм без свободного вхождения переменных.
Переменная в терме называется связанной, если она находится в области действия λ-абстрактора по этой переменной. В противном случае-свободной.
Примеры полезных комбинаторов:

Определение	Название	Характеристика
I ≡ λx.x	тождественный	**I**x $\to_\beta$ x
B ≡ λxyz.x(yz)	композитор	**B**xyz $\to_\beta$ x(yz)
C ≡ λ xyz.xzy	пермутатор	**C**xyz $\to_\beta$ xzy
K ≡ λ xy.x	канцелятор	**K**xy $\to_\beta$ x
S ≡ λ xyz.xz(yz)	коннектор	**S**xyz $\to_\beta$ xz(yz)
W ≡ λ xy.xyy	дупликатор	**W**xy $\to_\beta$ xyy

Реализация арифметики:

Нумералы Чёрча:

0= $\lambda fx.x$(=$\lambda f.\lambda x.x$)
1= $\lambda fx.fx$
2= λfx.f^2x
…
n= $\lambda fx.f^n x$= $\lambda f.f(f^{n-1}x) = \lambda fx.f^{n-1}(fx)$

1) Добавление единицы:
   Succ= $\lambda nfx.f(nfx)$
   Док-во: Succ **n** = $(\lambda nfx.f(nfx))$**n**$\to_\beta \lambda fx.f(\boldsymbol{n}fx) \to_\beta \lambda fx.f(f^n x) \equiv \lambda fx.f^{n+1}x \equiv$**n+1**
2) Сложение:
   Plus= $\lambda mnfx.nf(mfx)$
3) Умножение:
   Mult= $\lambda mn.m(Plus\ n)$**0**
4) Предыдущий:
   Pred= $\lambda nfx.n(\lambda gh.h(gf))(\lambda u.x)(\lambda u.u)$

Логические функции:

1) True= $\lambda xy.x$
2) False= $\lambda xy.y$
3) And= $\lambda pq.pqFalse$
4) Or= $\lambda pq.pTrueq$
5) Not= $\lambda p.pFalseTrue$
   Примеры:
   NotTrue= $(\lambda p.pFalseTrue)True = TrueFalseTrue = False$
   NotFalse=($\lambda p.pFalseTrue)False = FalseFalseTrue = True$