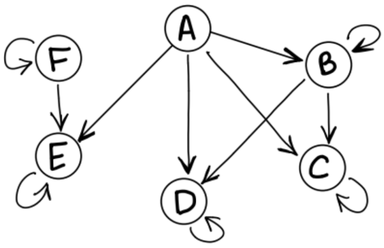
6. Семантика Крипке языка высказываний интуиционистской логики. Пример

Билет: 3, 12, 17, 23, 26

Интуиционистской шкалой Крипке называется пара $F = (W, R)$, где R – частичный порядок на W. W – точка фрейма (шкалы) F.
xRy = «x видит y» = «y доступен из x»
L – язык высказываний интуиционистской логики.
$Var\ L = \{p_1, p_2, \dots\}$ – переменные этого языка.
Означивание языка L – отображение $O: Var(L) \to 2^W$, такое что $\forall\, p \in Var(L), \forall\, x \in D(p)$ имеем $xRy \Longrightarrow y \in D(p)$
$D(p)$ – те стадии, в которых высказывание p – истинно.
Подмножества с таким свойством называются замкнутым сверху.
Опр. Моделью $M = (F, D)$ называется пара F, D. F – фрейм. D – означивание L.
Пусть φ, ψ – формулы языка L.
$\perp$ - тождественно истинная формула, $D(\perp) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$

1) $D(\varphi \& \psi) \stackrel{\text{def}}{=} D(\varphi) \cap D(\psi)$
2) $D(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} D(\varphi) \cup D(\psi)$
3) $D(\varphi \longrightarrow \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \forall\, y \big[xRy \longrightarrow \big(x \in D(\varphi) \longrightarrow y \in D(\psi)\big)\big]\}$
4) $\overline{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \longrightarrow \perp$

Формула называется выполнимой в модели, если она истинна хотя бы в одной точке фрейма на которой эта модель основана.
Формула – общезначимая в модели, если она истинна в любой точке фрейма, которая основана на данной модели.
Формула выполнима на фрейме, если она выполнима в некоторый модели основанной на данном фрейме.
Формула называется общезначимой на фрейме, если она общезначима на любой модели данного фрейма.
Пример. $W = \{A, B, C, D, E, F\}$,
$R = \{(A, A), (A, B), (A, D), (A, E), (B, B), (B, C), (B, D), (C, C), (D, D), (E, E), (F, E), (F, F)\}$



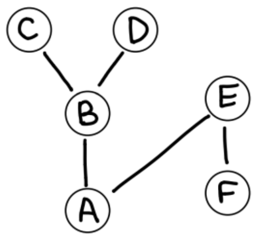


Диаграмма Хассе

$Var(L) = \{p_1, p_2, p_3\}$
$D(p_1) = \{C, D\}$
$D(p_2) = \{E, F\}$
$D(p_3) = \{B, C, D, E\}$
$\varphi = p_1 \longrightarrow p_2 \& p_3$
$D(p_2 \& p_3) = D(p_2) \& D(p_3) = \{\ E\ \}$
$D(\varphi) = \big\{x \big| \ \forall\, y \ \big[xRy \longrightarrow \big(y \in D(p_1) \longrightarrow y \in D(p_2 \& p_3)\big)\big]\big\} =$
$= \{x \mid \forall\, y\ [xRy \longrightarrow (y \in \{C, D\} \longrightarrow y \in \{\ E\ \})]\} = \{E, F\}$