Вопрос 1. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех k-местных предикатов и функций на n-элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения. Примеры

U – универс (конечный или счетный), являющийся множеством математических объектов.

U^k – k-ая декартова степень множества U, т.е. множество $\{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in U, x_2 \in U, \dots, x_k \in U\}$. Если $|U| = n \Rightarrow |U^k| = n^k$.

k-местная функция f (местность = арность = кол-во аргументов) – произвольное отображение вида $U^k \to U$, т.е. отображение, ставящее каждому k-местному набору элементов множества U некоторый элемент из U. Общее количество k-местных функций над n элементным универсом равно n^{n^k}. Любые константы из универса U – 0-местные функции.

k-местный предикат P (отношение) – произвольное отношение вида $U^k \to \{0, 1\}$ где 0 и 1 – логические константы. Общее количество k-местных предикат над n элементным множеством равно 2^{n^k}. Логические константы 0 и 1 – 0-местные предикаты.

Пример. $U = \{0,1,2,3,4\}$, $P(x, y, z) =$ "$x + x + y$ делить на 3". $(0,2,4) \in P$ или $P(0,2,4) = 1$, $(1,3,4) \notin P$ или $P(1,3,4) = 0$.

Синтаксис логического языка 1 порядка

1. Алфавит языка состоит из трех групп символов:
    a. Логические символы – $\underbrace{\&, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg}_{\text{логические связки}}$, $\underbrace{\forall, \exists}_{\text{кванторы}}$
    b. Вспомогательные символы – $\underbrace{(,), [,]}_{\text{скобки}}$

    $\underbrace{x, y, \dots, z_0}_{\substack{\text{символы переменных} \\ \text{(возможно с индексом)}}}$; $\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots}_{\text{символы констант из универса}}$; $\underbrace{0,1}_{\text{символы логических констант}}$
    c. Нелогические сигнатуры
    $\sigma = \langle P_1, \dots, P_k; f_1, \dots, f_s \rangle$ – заранее незафиксированный набор предикатов и функциональных символов. По умолчанию предполагается, что среди предикатов всегда содержится предикат равенства.
    Тип сигнатуры $\tau_\sigma = \langle \nu_1, \dots, \nu_k; \mu_1, \dots, \mu_s \rangle$, где ν_i – арность P_i и μ_j – арность f_j.
2. Правило построения термов (имен)
    a. Любая константа или переменная из универса U является термой (простейшой термой или именем)
    b. Если f – имя k-местного функционального символа, а $t_1, \dots, t_k$ – уже построенные термы, то $f(t_1, \dots, t_k)$ – тоже терм
3. Правило построения функций
    a. Если P – имя k-местного предикатного символа, а $t_1, \dots, t_k$ – уже построенные термы, то $P(t_1, \dots, t_k)$ – атомарная формула
    b. Если A и B – уже построенные формулы, то $[A \& B]$, $[A \vee B]$, $[A \to B]$, $[A \leftrightarrow B]$, $\neg A$, $\neg B$ – тоже формулы
    Приоритет операций в порядке уменьшения: скобки, отрицание, конъюнкция, все остальное с равным приоритетом.
    c. Если A – уже построенная формула, то $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ – тоже формулы

Подформула – это любая подряд идущая последовательность символов, которая сама по себе является формулой, т.е. корректно построена по правилам (сама формула также является подформулой).

Пример. $(\exists x)\big[[x + 2 < 5] \& [3 < x + 2]\big]$, где x, 2, 3, 5, $x + 2$ – термы; $x + 2 < 5$ и $3 < x + 2$ – атомарные формулы; $x + 2 < 5$, $3 < x + 2$, $[x + 2 < 5] \& [3 < x + 2]$, $(\exists x)\big[[x + 2 < 5] \& [3 < x + 2]\big]$ – подформулы; а вот $(\exists x)[x + 2 < 5]$ и $(\exists x)[3 < x + 2]$ – подформулами не являются.

Область действия квантора по переменной x называется подформула непосредственно следующая за символами $(\forall x)$ или $(\exists x)$. Вхождение переменной в формулу называется связанным, если она находится в области действия квантора по данной переменной. В противном случае называется свободным.

Предложением (замкнутой формулой) называется формула, не содержащая свободных вхождений переменных.

Пример. $(\exists x)[P(x)] \vee Q(x)$, где в $P(x)$ x – связанная переменная, а в $Q(x)$ – свободная, т.е. данная формула не является предложением. $(\forall x)[R(x, y)]$ – незамкнутая формула (не предложение), т.к. x – связанная переменная, а y – свободная. $(\forall x)[P(x) \vee (\exists y)Q(y)]$ – предложение, обе переменные x и y – связанные.