11. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Лемма о поисковых последовательностях

Билет 6, 20

Логический вывод — это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению — новому суждению (формуле). Поисковое дерево — дерево доказывающее логическое следование $\Gamma \Rightarrow A$ или приводящее контрмодель.

Правила расширения дерева:

1. Дерево, состоящее из одного узла, помеченного формулой $\neg A$, является поисковым деревом с корнем $\neg A$. Единственный узел этого дерева считаем неиспользованным.
2. Если в дереве есть неиспользованный узел v, которому приписана формула, являющаяся посылкой одного из правил вывода, то с помощью этого правила каждая неблокированная ветвь W, проходящая через узел y, расширяется следующим образом:
   a. если правило разветвляющее, то из концевого узла ветви W проводятся две дуги, оканчивающиеся новыми вершинами, которым приписываются формулы-заключения данного правила
   b. если правило, соответствующее узлу v, – не разветвляющее, то к концевому узлу ветви W присоединяются последовательно один к другому новые узлы, помеченные формулами-заключениями.
   c. Уточнения требуют случаи применения правил $\forall$ и $\exists$ поскольку они связаны с выбором параметра a. Используя правило $\forall$, в качестве a выбирается параметр с наименьшим номером, не входящий в список исключений в посылке данного правила. При использовании правила $\exists$ выбирается параметр с наименьшим номером, не встречающийся в расширяемой ветви, в том числе и в списке α. После расширения дерева считаем узел v использованным, а вновь построенные узлы – неиспользованными.
3. Дерево также можно расширить, добавляя к концевым узлам неблокированных ветвей новый узел, помеченный очередной формулой из множества Γ или формулой вида $[A \vee \neg A]$, и считать его неиспользованным.

Лемма. О поисковых последовательностях

Пусть $T_1, T_2, \ldots$ является последовательностью поисковых деревьев для утверждения $\Gamma \Rightarrow A$ и D_i – множество параметров, используемых в дереве $T_i, i = 1,2, \ldots$. Если существует интерпретация I сигнатуры σ на универсуме U, в которой истинны все формулы из множества Γ и формула $\neg A$, то для каждого $i = 1,2, \ldots$ существует интерпретация I_i сигнатуры $\sigma \cup D_i$, являющаяся расширением I, такая, что в T_i есть ветвь, все формулы которой истинны в интерпретации I_i.

Доказательство.

Для $i = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть существует интерпретация I_{i-1} сигнатуры $\sigma \cup D_{i-1}$, являющаяся расширением интерпретации I, такая, что в T_{i-1} есть ветвь W, все формулы которой истинны в I_{i-1}, и пусть дерево T_i получено из T_{i-1} применением некоторого правила вывода к узлу v.

Если $v \notin W$, то ветвь W будет искомой ветвью и в дереве T_i. При этом интерпретация символов из множества D_i D_{i-1}, если такие есть, может быть произвольной.

Пусть теперь $v \in W$. Если v имеет вид $\forall(x|\alpha)C$, и $D_i = D_{i-1}$, то формулы, присоединяемые к концевой вершине ветви в соответствии с правилом вывода, будут истинны в интерпретации $I_i = I_{i-1}$. Если же D_i получено из D_{i-1} добавлением нового параметра a_v, то берем в качестве $a_v^{(I)}$ произвольный элемент из U, тогда присоединяемые к W формулы $C_x[a_v]$ и $(\forall x|\alpha, a_v)C$ будут истинными в полученной интерпретации I_i.

Пусть теперь v имеет вид $(\exists x|\alpha)C$ и при этом D_i получено из D_{i-1} добавлением параметра a_v. Поскольку формула $(\exists x|\alpha)C$ истинна в интерпретации I_{i-1}, то существует интерпретация I', совпадающая с I_{i-1} всюду, кроме возможно переменной x, такая, что $C^{(I')} = 1$. Положим $a_v^{(I)} = x^{(I')}$, и тогда присоединяемая к W формула $C_x[a_v]$ будет истинной в I_i.