21. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость. Метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости некоторых теорий (общий алгоритм). Основной этап алгоритма для доказательства алгоритмической разрешимости теории плотного линейного порядка без концевых точек, пример

Теория T заданной сигнатуры σ называется *полной*, если для любого предложения $A \in Sent(\sigma)$ либо A, либо $\neg A$ принадлежит теории T ($Sent(\sigma)$ – множество предложений сигнатуры σ). Любая структурная теория полна (любому предложению структурной теории можно дать истинностную оценку, т.е. сказать, истинно оно или ложно). Полнота аксиоматических теорий не гарантируется. Например, теория групп не полна, так как предложение, выражающее коммутативность группы, и его отрицание не являются следствием групповых аксиом, поскольку в математике имеются как примеры коммутативных, так и некоммутативных групп.

Теория $T \subseteq Sent(\sigma)$ называется *алгоритмически разрешимой*, если существует алгоритм, который по любому предложению $A \in Sent(\sigma)$ отвечает на вопрос, принадлежит ли предложение A теории T.

Для ответа на этот вопрос используется *метод элиминации кванторов*. Пусть Th – теория сигнатуры σ, $A, B \subseteq Sent(\sigma)$. A и B равносильный в рамках теории Th (обозначение $A \overset{Th}{\equiv} B$), если $Th \cup \{A\} \vDash B$ и $Th \cup \{B\} \vDash A$. В случае, если $Th = Th_{ax} = Th(G, \Gamma)$ – аксиоматическая теория, то $A \overset{Th}{\equiv} B \Leftrightarrow \Gamma \cup \{A\} \vDash B,\ \Gamma \cup \{B\} \vDash A$. Метод применим к таким теориям, для которых возможен элементарный шал элиминации.

Пусть $A = \exists x[A_1(x) \& \dots \& A_n(x)]$, $A_1(x), \dots, A_n(x)$ – бескванторные формулы. Шаг элиминации состоит в том, чтобы найти такую бескванторную формулу B, что $A \overset{Th}{\equiv} B$. Формализуем алгоритм. Дано: $A \in Sent(\sigma)$, Th – теория сигнатуры Γ. Вопрос: $A \overset{?}{\in} Th$.

Алгоритм элиминации кванторов

1. Привести все самые внутренние кванторы к квантору $\exists$ с помощью двойных отрицаний и законов де Моргана.
2. Привести области действия кванторов к виду ДНФ
3. Распределить кванторы существования $\exists$ по слагаемым ДНФ
4. Для каждого слагаемого выполнить элементарный шаг элиминации кванторов
5. Повторить шаги (1)-(4), если это необходимо

Если в результате применения алгоритма A превратилось в истину ($A \to 1$), то она принадлежит теории Th, если $A \to 0$, то не принадлежит.

Рассмотрим метод элиминации кванторов на примере теории плотного линейного порядка без концевых точек. $\sigma = \langle =, \leq \rangle$, $=$ – однозначно интерпретируемый знак равенства, $\leq$ – абстрактное отношение порядка. $\tau = \langle 2,2 \rangle$. Аксиомы:

1. $\forall x(x \leq x)$ – рефлексивность
2. $\forall x \forall y(x \leq y \,\&\, y \leq x \to x = y)$ – антисимметричность
3. $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \,\&\, y \leq x \to x \leq z)$ – транзитивность
4. $\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$ – линейность
5. $\forall x \forall y\big[(x \leq y)\&(x \neq y) \to \exists z[(x \leq z)\&(z \leq y)\&\neg(z = x)\&(z = y)]\big]$ – аксиома плотности
6. $\exists x \exists y \neg(x = y)$
7. $\forall x \exists y[(x \leq y)\&\neg(x = y)]$ – отсутствие концевой точки справа
8. $\forall x \exists y[(y \leq x)\&\neg(x = y)]$ – отсутствие концевой точки слева

Рассмотрим формулы:

$$A = \exists x\left[\underbrace{\mathop{\&}_{i=1}^{k}(y_i \leq x)}_{\text{нижние неравенства}} \;\&\; \underbrace{\mathop{\&}_{j=1}^{s}(x \leq z_j)}_{\text{верхние неравенства}}\right], \qquad B = \mathop{\&}_{i=1}^{k}\mathop{\&}_{j+1}^{s}(y_i \leq z_j)$$

$\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ – верно по свойству транзитивности, $\Gamma \cup \{B\} \vDash A$ – верно по свойству плотности, т.е. $A \overset{Th}{\equiv} B$

Теперь рассмотрим формулы:

$$A = \neg(y \leq x), \qquad B = (x \leq y)\&\neg(x = y)$$

$\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ – следствие из рефлексивности и линейности, $\Gamma \cup \{B\} \vDash A$ – следствие из рефлексивности и антисимметричности, т.е. $A \overset{Th}{\equiv} B$, тогда $(y < x) \overset{Th}{\equiv} B$.

Пример. $A = \forall x \exists y \forall z\big[[(x \leq y)\&\neg(y \leq z)] \vee [(x \leq z)\&\neg(z \leq y)]\big] \overset{Th}{\equiv} \forall x \exists y \neg \exists z\big[[(y < x)\&(y \leq z)]\&[(z < x)\&(z < y)]\big] \overset{Th}{\equiv}$

$$\overset{Th}{\equiv} \forall x \exists y \neg \exists z\big[[(y \leq x)(z < x)] \vee (y \leq z)(z < x) \vee (y < x)(z < y) \vee (y \leq z)(z < y)\big] \overset{Th}{\equiv}$$

$$\overset{Th}{\equiv} \forall x \exists y \neg\left[\left[(y \leq x)\underbrace{\exists z(z < x)}_{\equiv 1}\right] \vee \underbrace{\exists z[(y \leq z)(z < x)]}_{\equiv y<x} \vee (y < x)\underbrace{\exists z(z < y)}_{\equiv 1} \vee \underbrace{\exists z[(y \leq z)(z < y)]}_{\equiv y<y \equiv 0}\right] \overset{Th}{\equiv}$$

$$\overset{Th}{\equiv} \forall x \exists y \neg[(y < x) \vee (y < x) \vee (y < x) \vee 0] \overset{Th}{\equiv} \forall x \exists y \neg[y < x] \overset{Th}{\equiv} \forall x \exists y[x \leq y] = 1$$

Следовательно, предложение A является теоремой плотного линейного порядка без концевых точек.