3. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие структуры заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры. Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры, примеры и контрпримеры

Билеты 2, 16

Пусть изначально заданы $\sigma = \langle P_{1,} \ldots P_k; f_{1,} \ldots f_s \rangle$ - нелогическая сигнатура, $\tau = \langle \nu_1, \ldots, \nu_k; \mu_1, \ldots, \mu_s \rangle$ - тип сигнатуры σ. F – формула сигнатуры σ, V – множество переменных формулы F, имеющих в F свободное вхождение. Интерпретация формулы F называется отображение, определенное на множестве $\sigma \cup V$ в котором:

1. Каждому предикатному символу $P \in \sigma$ ставит в соответствие конкретное отношение соответствующей арности. Если P k-местный предикатный символ, то $P^{(I)} \subseteq U^k$
2. Каждому k-местному функциональному символу f ставит в соответствие конкретное отображение $f^{(I)}: U \to U^k$
3. Каждой свободной переменной $x \in V$ ставит в соответствие конкретный объект $x^{(I)} \in U$

Интерпретация термов и формул

1. Интерпретация термов
   Если t – простейший терм (т.е. константа из U или символ свободной переменной), то его интерпретация совпадает с интерпретацией этой константы или переменной (т.е. непосредственно задается отображением I).
   Если t – сложный терм, т.е. $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, где $t_1, \ldots, t_k$ – термы, а f – функциональный символ, то $t^{(I)} = f^{(I)}\left(t_1^{(I)}, \ldots, t_k^{(I)}\right)$
2. Интерпретация формул
   a. Пусть A – атомарная формула, т.е. $A = P(t_1, \ldots, t_k)$, где $t_1, \ldots, t_k$ – термы, а P – предикат
   $$A^{(I)} = \begin{cases} true = 1, \text{ если } \left(t_1^{(I)}, \ldots, t_k^{(I)}\right) \in P \\ false = 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$
   b. Пусть A и B – формулы
   $$[A \,\&\, B]^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} A^{(I)} \,\&\, B^{(I)}, \qquad [A \vee B]^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} A^{(I)} \vee B^{(I)}, \qquad [A \to B]^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} A^{(I)} \to B^{(I)}, \qquad \neg[A]^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} \neg A^{(I)}$$
   c. Формулы с кванторами
   $$[\forall x A]^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{I' \in \psi(I)}{\&} A^{(I')}, \qquad [\exists x A]^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{I' \in \psi(I)}{\vee} A^{(I')}$$

$\psi(I)$ – множество всех возможных интерпретаций, которые совпадают со всеми интерпретациями I, за исключением, может, самой переменной x. Возможно, что в правых частях формул & и $\vee$ берутся по бесконечному множеству интерпретаций, которые соответствуют всевозможным переборам переменной x. Если формулы является предложением, то важно, как интерпретируются предикаты и функции и нет необходимости интерпретировать свободные переменные.

Алгебраической системой или структурой сигнатуры σ называется сужение интерпретации I на сигнатуру σ: $S = I_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \langle P_1^{(I)}, \ldots, P_k^{(I)}; f_1^{(I)}, \ldots, f_s^{(I)} \rangle$. Она называется содержательной, если в ней дополнительно проинтерпретировать объекты универса U и несодержательной в противном случае.

Формула называется общезначимой или тождественно истинной, если она истинна в любой интерпретации.
Формула называется невыполнимой или тождественно ложной, если она ложна в любой интерпретации.
Формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой она истинна.
Интерпретация, в которой формула истинна называется моделью формулы, а в которой ложна – контрмоделью формулы.
$A \vDash B$ – из формулы A логически следует формула B, т.е. любая модель формула A – это модель и формулы B.
$A \equiv B$ – формулы A и B логически равносильны, если из $A \vDash B$ и $B \vDash A$.

Изоморфизм между структурами

$\sigma = \langle P_{1,} \ldots P_k; f_{1,} \ldots f_s \rangle$ - нелогическая сигнатура, I_1 и I_2 – содержательные интерпретации σ, $S_1 = \sigma^{(I_1)} = \langle P_1^{(I_1)}, \ldots, P_k^{(I_1)}; f_1^{(I_1)}, \ldots, f_s^{(I_1)} \rangle$, $S_2 = \sigma^{(I_2)} = \langle P_1^{(I_2)}, \ldots, P_k^{(I_2)}; f_1^{(I_2)}, \ldots, f_s^{(I_2)} \rangle$. Изоморфизм φ между S_1 и S_2 – такое взаимно-однозначное отображение между универсами $U^{(I_1)} \leftrightarrow U^{(I_1)}$, что

1. Для любого k-местного предикатного символа $P \in \sigma$ и любого набора $a_{1,} \ldots a_k \in U^{(I_1)}$ имеем
   $$\left(a_{1,} \ldots a_k\right) \in P^{(I_1)} \Leftrightarrow \left(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)\right) \in P^{(I_2)}$$
2. Для любого k-местного функционального символа f и любого набора $a_{1,} \ldots a_k \in U^{(I_1)}$ имеем
   $$\varphi\left(f^{(I_1)}\left(a_{1,} \ldots a_k\right)\right) \in P^{(I_1)} = f^{(I_2)}\left(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)\right)$$

Если структуры S_1 и S_2 изоморфны, то $S_1 \cong S_2$. По теореме о факторизации множество структур разделяются на классы эквивалентности. Структуры из одного класса изоморфны, из разных классов – нет. На изоморфных структурах будут истинны одни и те же предложения. Обратное не верно. К примеру: $S_1 = \langle \mathbb{Q}; =; +, 0, 1 \rangle$ и $S_2 = \langle \mathbb{R}; =; +, 0, 1 \rangle$ – теория равенства линейных форм. $S_1 \ncong S_2$, т.к. по теореме Кантора $\mathbb{Q}$ – счетно, а $\mathbb{R}$ – несчетно, соответственно между ними нет биекции. Иногда изоморфные структуры называют эквивалентными. Пример приводит к понятию слабой эквивалентности $S_1 \simeq S_2$, когда множество их истинных предложений совпадает. Из эквивалентности следует слабая эквивалентность, но не наоборот.

Пример. Изоморфизм отношения эквивалентности.

1. $S \cong S$ – свойство рефлексивности
2. $S_1 \cong S_2 \Rightarrow S_2 \cong S_1$ – свойство симметричности, т.к. φ – взаимно-однозначное и φ – изоморфизм между S_1 и S_2, то $\exists \varphi^{-1}$ – взаимно-однозначное и φ^{-1} – изоморфизм между S_1 и S_2
3. $S_1 \cong S_2, S_2 \cong S_3 \Rightarrow S_1 \cong S_3$ – свойство транзитивности, т.к. φ – изоморфизм между S_1 и S_2, ψ – изоморфизм между S_2 и S_3, то $\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi \left(\zeta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\left(\psi(x)\right)\right)$ – изоморфизм между S_1 и S_3.
