19. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятие сингулярной и примарной формул. Алгоритм приведения любой сингулярной формулы к булевой комбинации примарных, пример

Билеты 11, 25

Вступление. Рассмотрим отношение равносильности $A \equiv B \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \vDash B) \,\&\, (B \vDash A)$
Очевидно это отношение эквивалентности, оно разбивает множество формул на классы эквивалентности. Возникает желание найти канонические формы формул разных классов. Так каноническими являются префиксные и антипрефиксные формулы.

Антипрефиксные формулы характеризуются тем, что в них кванторы продвинуты максимально в глубину. Рассмотрим случай ***сингулярных*** формул – формул, сигнатуры которых состоят только из одноместных предикатов (не содержат функциональных символов).
Определим несколько формул и установим их эквивалентность (равносильны/неравносильны):

$$A_1 = \forall x[\mathrm{P}(x) \,\&\, \mathrm{Q}(x)] \;\equiv\; B_1 = [\forall x\mathrm{P}(x)] \,\&\, [\forall x\mathrm{Q}(x)]$$
$$A_2 = \forall x[\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)] \;\not\equiv\; B_2 = [\forall x\mathrm{P}(x)] \vee [\forall x\mathrm{Q}(x)]$$
$$A_3 = \exists x[\mathrm{P}(x) \,\&\, \mathrm{Q}(x)] \;\not\equiv\; B_3 = [\exists x\mathrm{P}(x)] \,\&\, [\exists x\mathrm{Q}(x)]$$
$$A_4 = \exists x[\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)] \;\equiv\; B_4 = [\exists x\mathrm{P}(x)] \vee [\exists x\mathrm{Q}(x)]$$

Можно заключить следующее: распределение кванторов по подформулам возможно в двух случаях:

а) для квантора общности – если подформулы связаны конъюнкцией ($A_1 \equiv B_1$);

б) для квантора существования – если подформулы связаны дизъюнкцией ($A_4 \equiv B_4$).

Эквивалентность первого и четвертого случая является предпосылкой возможности продвижения кванторов вглубь формул.
Рассмотрим формулы, в которых невозможно продвижение кванторов.

Примарная формула – формула, имеющая один из следующих видов:

1. $\forall x[\mathrm{P}_1{}^{a_1}(x) \vee \mathrm{P}_2{}^{a_2}(x) \vee \ldots \vee \mathrm{P}_k{}^{a_k}(x)]$
2. $\exists x[\mathrm{P}_1{}^{a_1}(x) \,\&\, \mathrm{P}_2{}^{a_2}(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{P}_k{}^{a_k}(x)]$ где $\mathrm{P}^a(x) = \begin{cases} P(x), a = 1 \\ \bar{P}(x), a = 0 \end{cases}$

Примарные формулы – это простейшие антипрефиксные формулы.
Утв.: любую сингулярную формулу можно привести к логически равносильной ей булевой комбинации примарных формул. Для обоснования этого утверждения приведем некий алгоритм приведения.

Число шагов алгоритма совпадает с количеством кванторов в формуле. На каждом шаге необходимо найти самую внутреннюю формулу, начинающуюся с квантора, в области действия которого содержится булевая комбинация уже построенных примарных формул. Возможны два случая, относительно вида данной подформулы:

1. *Начинается с квантора общности* ($\forall xA$).
   1. привести формулу A к виду КНФ относительно уже построенных примарных формул и предикатов, зависящих от x: КНФ$(A) = A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_s$. $A_i = B_{i_1} \vee B_{i_2} \vee \ldots \vee B_{i_s} \vee P_{j_1}{}^{a_1} \vee P_{j_2}{}^{a_2} \vee \ldots \vee P_{j_k}{}^{a_k}$,

где $B_{i_1},\ldots, B_{i_s}$ – либо независимые x от формулы, либо булевые комбинации уже построенных примарных формул.

   2. выполнить процесс распределения:
      $\forall xA \equiv [\forall xA_1] \,\&\, [\forall xA_2] \&\ldots\&\, [\forall xA_s]$ $\forall xA_i = B_{i_1} \vee B_{i_2} \vee \ldots \vee B_{i_s} \vee \forall x[P_{j_1}{}^{a_1} \vee P_{j_2}{}^{a_2} \vee \ldots \vee P_{j_k}{}^{a_k}]$

2. *Начинается с квантора существования* ($\exists xA$).
   1. привести формулу A к виду ДНФ относительно предикатов и входящих в нее примарных формул
      ДНФ$(A) = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_s$ $A_i = B_{i_1} \,\&\, B_{i_2} \,\&\, \ldots \,\&\, B_{i_s} \,\&\, P_{j_1}{}^{a_1} \,\&\, P_{j_2}{}^{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, P_{j_k}{}^{a_k}$
   2. выполнить процесс распределения
      $\exists xA \equiv [\exists xA_1] \vee [\exists xA_2] \vee \ldots \vee [\exists xA_s]$ $\exists xA_i = B_{i_1} \,\&\, B_{i_2} \,\&\, \ldots \,\&\, B_{i_s} \,\&\, \exists x[P_{j_1}{}^{a_1} \,\&\, P_{j_2}{}^{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, P_{j_k}{}^{a_k}]$

Пример. Привести к антипрефиксному виду

$$\forall x\exists y\forall z\left[[P(x) \,\&\, Q(z)] \vee [\bar{Q}(y) \,\&\, \bar{Q}(z)]\right] = \forall x\exists y\forall z\left[[P(x) \vee \bar{Q}(y)]\&[P(x) \vee \bar{Q}(z)]\&[Q(z) \vee \bar{Q}(y)]\&\underbrace{[Q(z) \vee \bar{Q}(z)]}_{\equiv 1}\right] =$$
$$= \forall x\exists y\left[[P(x) \vee \bar{Q}(y)]\&[P(x) \vee \forall z\bar{Q}(z)]\&[\forall zQ(z) \vee \bar{Q}(y)]\right] = \forall x\left[[P(x) \vee \forall z\bar{Q}(z)]\&\exists y[P(x)\&\forall zQ(z) \vee \bar{Q}(y)]\right] =$$
$$= \forall x\left[[P(x) \vee \forall z\bar{Q}(z)]\&[P(x)\&\forall zQ(z) \vee \exists y\bar{Q}(y)]\right] = [\forall xP(x) \vee \forall z\bar{Q}(z)]\&[\forall xP(x)\&\forall zQ(z) \vee \exists y\bar{Q}(y)]$$