

## 5. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления

Одноместные предикаты и одноместные функции удобно задавать с помощью столбца таблицы и ориентированного графа соответствия. Пусть  $U = \{a_1, \dots, a_n\}$  – конечный универс,  $\forall i P(a_i) \in \{0,1\}$

$x$	$a_1$	$\dots$	$a_n$
$P(x)$	$P(a_1)$	$\dots$	$P(a_n)$

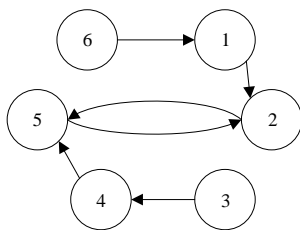
Рассмотрим одноместную функцию  $f$ .  $U = \{a_1, \dots, a_n\}$ .  $G_f$  – граф, задающий функцию  $f$ .  $V(G_f) = U$  – множество вершин графа. Ребро  $xy \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$

Пример:  $U = \overline{1,6}$ ,  $f(x) = (x^2 + 1) \bmod 6$

Табличное представление:

$x$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	5	4	5	2	1

Графовое представление:



Двуместные предикаты удобно рассматривать в виде таблицы. Пусть  $U = \{a_1, \dots, a_n\}$ .  $P$  – двуместный предикат.

Представляется в виде матрицы размера  $n \times n$ , где элемент  $r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ состоит в отношении с } a_j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

В случае предикатов большей арности стоит рассматривать гиперкубы

Рассмотрим сигнатуру  $\sigma = \{P_1, \dots, P_k; f_1, \dots, f_s\}$  и определим её тип  $\tau = \{v_1, \dots, v_k; \mu_1, \dots, \mu_s\}$

$S_n(\sigma)$  – число структур сигнатуры  $\sigma$  над  $n$  элементным универсом (число способов проинтерпретировать формулу с такой сигнатурой и таким типом)

$S_n(\sigma) = 2^{n^{v_1}} \times \dots \times 2^{n^{v_k}} \times n^{\mu_1} \times \dots \times n^{\mu_s}$ , где  $2^{n^{v_i}}$  – количество способов проинтерпретировать предикат  $P_i$ .  $n^{\mu_s}$  – количество способов проинтерпретировать символ  $f_s$  ( $S_n(\sigma)$  то же самое, что и  $S_n(f)$ )

$M_n(f)$  – количество моделей формулы  $f$  над  $n$ -элементным универсом.

$\gamma_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_n(f)}{S_n(f)}$  – объем выполнимости.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(f) = \gamma(f)$  – если предел существует, то он называется долей выполнимости формулы  $f$

Пример 1:  $F_1 = \forall x P(x)$

$S_n(F_1) = 2^n$

$M_n(F_1) = 1$  – выполняется только одном случае, если все  $x_i = 1$

$\gamma_n(F_1) = \frac{1}{2^n} \rightarrow \gamma(F_1) = 0$

При подсчете числа моделей бывает полезно использовать то свойство векторов, матриц, гиперкубов, которое отображает данную формулу.

Еще одна идея состоит в том, что если формула начинается с квантора  $\exists$ , то полезно перейти к её отрицанию и найти количество моделей для её отрицания.

Пример 2:  $F_2 = \exists x \forall y R(x, y)$  – существует строка из единиц

$\bar{F}_2 = \forall x \exists y \bar{R}(x, y)$  – в каждой строке есть хотя бы одна единица. (есть всего один неподходящий вариант – строка из нулей)

$M_n(F_2) + M_n(\bar{F}_2) = S_n(F_2) = S_n(\bar{F}_2) = 2^{n^2}$

$M_n(\bar{F}_2) = (2^n - 1)^n$

$M_n(F_2) = 2^{n^2} - (2^n - 1)^n$

$\gamma_n(F_2) = \frac{2^{n^2} - (2^n - 1)^n}{2^{n^2}} = 1 - \frac{(2^n - 1)^n}{2^{n^2}} \rightarrow 0 = \gamma(F_2)$