6. Семантика Крипке языка высказываний интуиционистской логики. Пример

Билет: 3, 12, 17, 23, 26

Интуиционистской фреймом Крипке называется пара $F = (W, R)$, где R – частичный порядок на W, W – точка фрейма F, xRy = «x видит y» = «y доступен из x».
L – язык высказываний интуиционистской логики. $Var\ L = \{p_1, p_2, \dots\}$ – переменные этого языка.
Означивание языка L – отображение $D: Var(L) \to 2^W$, такое что $\forall p \in Var(L),\ \forall x \in D(p)$ имеем $xRy \Longrightarrow y \in D(p)$
$D(p)$ – те стадии, в которых высказывание p – истинно. Подмножества с таким свойством называются замкнутым сверху.

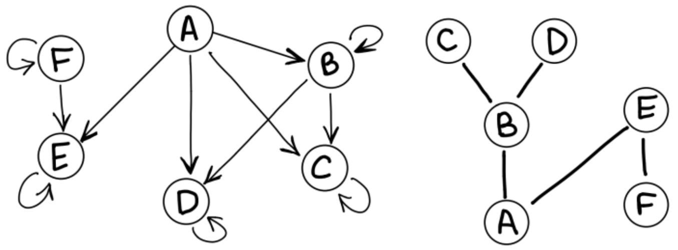
Опр. Моделью $M = (F, D)$ называется пара F, D. F – фрейм. D – означивание L.
Пусть φ, ψ – формулы языка L. $\perp$ – тождественно истинная формула, $D(\perp) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$

$$D(\varphi \,\&\, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} D(\varphi) \cap D(\psi)$$
$$D(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} D(\varphi) \cup D(\psi)$$
$$D(\varphi \longrightarrow \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | \forall y [xRy \longrightarrow (y \in D(\varphi) \longrightarrow y \in D(\psi))]\}$$
$$\overline{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \longrightarrow \perp$$

Формула называется выполнимой в модели, если она истинна хотя бы в одной точке фрейма на которой эта модель основана.
Формула – общезначимая в модели, если она истинна в любой точке фрейма, которая основана на данной модели.
Формула выполнима на фрейме, если она выполнима в некоторый модели, основанной на данном фрейме.
Формула называется общезначимой на фрейме, если она общезначима на любой модели данного фрейма.

Пример. $W = \{A, B, C, D, E, F\}$, $R = \{(A, A), (A, B), (A, D), (A, E), (B, B), (B, C), (B, D), (C, C), (D, D), (E, E), (F, E), (F, F)\}$

Диаграмма Хассе



$Var(L) = \{p_1, p_2, p_3\}$
$D(p_1) = \{C, D\}$
$D(p_2) = \{E, F\}$
$D(p_3) = \{B, C, D, E\}$
$\varphi = p_1 \longrightarrow p_2 \,\&\, p_3$
$D(p_2 \,\&\, p_3) = D(p_2) \,\&\, D(p_3) = \{E\}$
$D(\varphi) = \{x | \forall y\ [xRy \longrightarrow (y \in D(p_1) \longrightarrow y \in D(p_2 \,\&\, p_3))]\} =$
$= \{x | \forall y\ [xRy \longrightarrow (y \in \{C, D\} \longrightarrow y \in \{\ E\ \})]\} = \{E, F\}$