7. Понятие исключающих кванторов, модификация правил построения формул, связанная с введением исключающих кванторов. Выражение истинностных значений формул, содержащих исключающие кванторы, через истинностные значения формул без исключающих кванторов. Понятие Г-формулы. Логическая равносильность любой формулы языка первого порядка некоторой Г-формуле, примеры

Расширим синтаксис языка 1-го порядка выражениями такого типа:
$(\forall x|y_1, \dots, y_k)$ – для любого х, кроме $y_1, \dots, y_k$; $(\exists x|y_1, \dots, y_k)$ – существует x, отличный от $y_1, \dots, y_k$.
$y_1, \dots, y_k$ – значения-исключения для переменной x (могут быть как константами из универсума, так и переменными). Список исключений может быть пустым, тогда исключающий квантор = классическому квантору.

Выражения вида $(\forall x|y_1, \dots, y_k)$ и $(\exists x|y_1, \dots, y_k)$ будем называть *исключающими кванторами общности* и *существования*, соответственно.

Дополним правила построения формул: если A – формула, то $(\forall x|y_1, \dots, y_k)A$ и $(\exists x|y_1, \dots, y_k)A$ также являются формулами. Мы расширили синтаксис языка, однако это расширение не является существенным, так как выразительные способности языка не увеличились.

Формулы с исключающими кванторами равносильны следующим формулам без использования исключающих кванторов:

$$(\forall x|y_1, \dots, y_k)A = \forall x[(x \neq y_1) \mathbin{\&} (x \neq y_2) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} (x \neq y_k) \to A]$$
$$(\exists x|y_1, \dots, y_k)A = \exists x[(x \neq y_1) \mathbin{\&} (x \neq y_2) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} (x \neq y_k) \mathbin{\&} A]$$

Если в формуле вида: $(Qx|y_1, \dots, y_k)A$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, список исключений состоит в точности из всех переменных, имеющих свободные вхождения в формулу А, то формула обозначается следующим образом: $\dot{Q}xA$ (уточним, что все свободные вхождения переменной х в А не принимаются в расчет).

Г-формула (гамма формула) – формула, в которой каждый из кванторов имеет вид $\dot{\forall}xA$ или $\dot{\exists}xA$ (то есть, в списке исключений каждого квантора находятся все свободные переменные, расположенные в его области действия).

Любую формулу языка 1-го порядка можно привести логически к Г-формуле. Для получения эквивалентной Г-формулы используют соотношения:

$$\dot{\forall}xF = (\forall x|y_1, \dots, y_k)F \mathbin{\&} \&_{i=1}^{k} F_x[y_i] \quad (1)$$
$$\dot{\exists}xF = (\exists x|y_1, \dots, y_k)F \vee \bigvee_{i=1}^{k} F_x[y_i] \quad (2)$$

$x, y_1, \dots, y_k$ – все свободные переменные формулы F, $F_x[y_i]$ – результат подстановки y_i в F вместо свободных вхождений переменной х.

Для получения Г-формулы рассматриваются все кванторы исходной формулы справа налево и к ним применяются соотношения (1) и (2).

Пример 1. Формула $\forall x \exists y R(x, y)$, где R - двухместный предикатный символ, логически равносильна Г-формуле: $(\forall x)[\,(\exists y|x)R(x, y) \vee R(x, x)]$.

Пример 2. Формула $A = \forall x\underline{(\exists y|x)\underline{\underline{\left[R(x, y) \vee (\forall z|x)\underline{[R(x, z) \to R(y, z)]}\right]}}}$ не является Г-формулой.

$$\begin{cases} \forall x = \dot{\forall}x \\ (\exists y|x) = \dot{\exists}y \\ (\forall z|x) \neq \dot{\forall}z \end{cases}$$

Если добавить к квантору $(\forall z|x)$ в список исключения еще y, то формула A будет Г-формулой.