

5. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления.

1. Одноместные предикаты и одноместные функции удобно задавать с помощью столбца таблицы и ориентированного графа соответствия.

Пример: пусть $U = \{a_1, \dots, a_n\}$ – конечный универс.

$$\forall i P(a_i) \in \{0,1\}$$

x	a_1	...	a_n
P(x)	$P(a_1)$...	$P(a_n)$

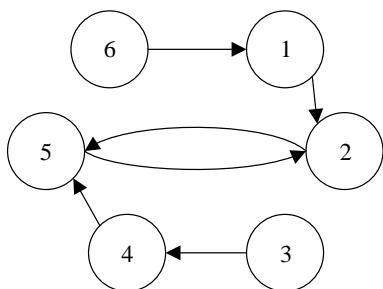
Рассмотрим одноместную функцию f . $U = \{a_1, \dots, a_n\}$. G_f – граф, задающий функцию f . $V(G_f) = U$ – множество вершин графа. Ребро $xu \in G_f \Leftrightarrow u = f(x)$

Пример: $U = \overline{1,6}$ $f(x) = (x^2 + 1) \bmod 6$

Табличное представление:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	5	4	5	2	1

Графовое представление:



2. Двуместные предикаты удобно рассматривать в виде таблицы

Пусть $U = \{a_1, \dots, a_n\}$. P – двуместный предикат. Представляется в виде матрицы размера $n \times n$, где элемент $r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ состоит в отношении с } a_j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

3. В случае предикатов большей арности стоит рассматривать гиперкубы

Рассмотрим сигнатуру $\sigma = \{P_1, \dots, P_k; f_1, \dots, f_s\}$ и определим её тип $\tau = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_k; \mu_1, \dots, \mu_s\}$

$S_n(\sigma)$ – число структур сигнатуры σ над n элементным универсом (число способов проинтерпретировать формулу с такой сигнатурой и таким типом)

$S_n(\sigma) = 2^{n^{\vartheta_1}} \times \dots \times 2^{n^{\vartheta_k}} \times n^{\mu_1} \times \dots \times n^{\mu_s}$, где $2^{n^{\vartheta_i}}$ – количество способов проинтерпретировать предикат P_i . n^{μ_s} – количество способов проинтерпретировать символ f_s [$S_n(\sigma)$ то же самое, что и $S_n(f)$]

$M_n(f)$ – количество моделей формулы f над n -элементным универсом.

$\gamma_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_n(f)}{S_n(f)}$ – объем выполнимости.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(f) = \gamma(f)$ – если предел существует, то он называется долей выполнимости формулы f

Пример 1:

$$F_1 = \forall x P(x)$$

$$S_n(F_1) = 2^n$$

$M_n(F_1) = 1$ – выполняется только одном случае, если все $x_i = 1$

$$\gamma_n(F_1) = \frac{1}{2^n} \rightarrow \gamma(F_1) = 0$$

При подсчете числа моделей бывает полезно использовать то свойство векторов, матриц, гиперкубов, которое отображает данную формулу.

Еще одна идея состоит в том, что если формула начинается с квантора \exists , то полезно перейти к её отрицанию и найти количество моделей для её отрицания.

Пример 2:

$F_2 = \exists x \forall y R(x, y)$ – существует строка из единиц

$\bar{F}_2 = \forall x \exists y \bar{R}(x, y)$ – в каждой строке есть хотя бы одна единица. (есть всего один неподходящий вариант – строка из нулей)

$$M_n(F_2) + M_n(\bar{F}_2) = S_n(F_2) = S_n(\bar{F}_2) = 2^{n^2}$$

$$M_n(\bar{F}_2) = (2^n - 1)^n$$

$$M_n(F_2) = 2^{n^2} - (2^n - 1)^n$$

$$\gamma_n(F_2) = \frac{2^{n^2} - (2^n - 1)^n}{2^{n^2}} = 1 - \frac{(2^n - 1)^n}{2^{n^2}} \rightarrow 0 = \gamma(F_2)$$