17. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Предваренные нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к префиксному виду, примеры.

Билеты 10, 24

Вступление.

Рассмотрим отношение равносильности $A \equiv B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A \vDash B)\ \&\ (B \vDash A)$
Очевидно это отношение эквивалентности, оно разбивает множество формул на классы эквивалентности. Возникает желание найти канонические формы формул разных классов. Так каноническими являются префиксные и антипрефиксные формулы.

Префиксные формулы (предваренная нормальная форма).

Формула A называется префиксной, если она имеет вид:

$$A = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n B,$$

где Q_i – кванторы $\forall$ или $\exists$; x_i – индивидные переменные; B – бескванторная формула; $(\forall i)$.
На содержательном уровне – это формулы, у которых кванторы вынесены максимально вперед.
Утв.: любую формулу языка логики первого порядка можно привести к префиксному виду.

Алгоритм основан на применении следующих правил:

1. $\neg\forall x A = \exists x \neg A$
2. $\neg\exists x A = \forall x \neg A$
3. $\forall x A = \forall y A_x[y]$
4. $\exists x A = \exists y A_x[y]$
5. $[\forall x A] \& B = \forall x[A \,\&\, B]$
6. $[\exists x A] \& B = \exists x[A \,\&\, B]$
7. $[\forall x A] \vee B = \forall x[A \vee B]$
8. $[\exists x A] \vee B = \exists x[A \vee B]$

* 3-4: A не имеет свободных вхождений переменной y
* 5-8: B не имеет свободных вхождений переменной x
* A, B – формулы, $A_x[y]$ – результат подстановки y вместо всех вхождений x в A

Примеры.

$[\forall x P(x)] \vee [\forall x Q(x)] \overset{(3)}{=} [\forall x P(x)] \vee [\forall y Q(y)] \overset{(5)}{=} \forall x\big[P(x) \vee [\forall y Q(y)]\big] \overset{(6)}{=} \forall x \forall y[P(x) \vee Q(y)]$

$[\forall x P(x)] \to [\forall x Q(x)] \neq \forall x \forall y[P(x) \to Q(y)]$

$[\forall x P(x)] \to [\forall x Q(x)] = [\exists x \bar{P}(x)] \vee [\forall x Q(x)] = [\exists x \bar{P}(x)] \vee [\forall y Q(y)] = \exists x \forall y[\bar{P}(x) \vee Q(y)] = \exists x \forall y[P(x) \to Q(y)]$

Продвижение вперед возможно только для булевых связок.