4. Понятия полуразрешимого и разрешимого отношения по Тьюрингу. Пример алгоритмически неразрешимого отношения (с доказательством).

Билеты 2, 9, 13, 27

Упорядоченный набор из n слов в алфавите A называется n-местным набором над A. Множество всех n-местных наборов над A обозначим через $(A^*)^n$.

Любое подмножество R множества $(A^*)^n$ называется n местным словарным отношением.

Любое, возможно, частичное отображение $f(A^*)^n \to A^*$ называется n-местной словарной функцией. Область определения функции f обозначается через $Def(f)$.

Результатом работы программы T на входном псевдослове X называется псевдослово $T(x)$, которое появляется на ленте в момент остановки программы; если программа работает бесконечно, то результат не определен.

Программу, которая в процессе работы над любым псевдословом X не сдвигает головку левее пробела, расположенного слева от n-го слова псевдослова X, будем назвать тьюринговой n-программой.

Словарное n-местное отношение R называется *<u>полуразрешимым</u>*, если существует n-программа T, которая останавливается в точности на всех псевдословах, имеющих вид $X\#u_n\#u_{n-1}\#\ldots\#u_1\overset{\downarrow}{\#}$, где $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R$.

Словарное n-местное отношение R называется разрешимым, если R и $\neg R$ полуразрешимы (под $\neg R$ здесь понимается множество $(A^*)^n \backslash R$).

Словарная n-местная функция f: $f(A^*)^n \to A^*$ называется вычислимой по Тьюрингу, если существует n-программа T такая, что

$$T(u_n\#u_{n-1}\#\ldots\#u_1\overset{\downarrow}{\#}) = \begin{cases} u_n\#u_{n-1}\#\ldots\#u_1\#f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\overset{\downarrow}{\#} \\ \text{если } (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in Def(f) \\ \text{неопределен в противном случае} \end{cases}$$

Не любое словарное отношение является алгебраически разрешимым. T – тьюрингова программа, A – алфавит тьюринговых программ, $T \to code(T) \in A^*$, T – самоприменима, если она останавливается на своем коде $code(T)$.

$$M = \{code(T) | T - \text{самопринимима}\}$$

M – полуразрешимо, $\overline{M}$ – не полуразрешимо. Док-во от противного. $\overline{M}$ – полуразрешимо, тогда существует тьюрингова программа T^*, останавливающаяся в точности на словах $\overline{M}$. Возможны 2 случая: T^* - самопременима и наоборот.

1. Предположим, что T^* - самоприменима, тогда T^* останавливается на $code(T^*) \in M$, но T^* останавличается в точности на словах $\overline{M}$, значит на своем коде должен работать бесконечно долго
2. Предположим, что T^* - несамоприменима, тогда T^* должна работать бесконечно долго на $code(T^*)$. Поэтому $code(T^*) \notin M$, поскольку $\overline{M}$ – множество тех слов, на которых T^* должен остановиться.
   Значит, $code(T^*) \in M$ и T^* - самоприменима по определению M.
   Множество $\overline{M}$ – не полуразрешимо, $\overline{M}$ – алгоритмически не разрешимо.