Вопрос 10. Лямбда-исчисление. Отношения альфа-конверсии и бета-редукции на множестве лямбда-термов. Понятие бета-редекса: внешний и внутренний редексы, правый и левый редексы. Понятие бета-нормальной формы лямбда-терма. Редукционные цепочки: стратегии АПР и НПР для преобразования лямбда-термов к бета-нормальной форме. Примеры редуцирования. Теорема Черча-Россера о ромбическом свойстве бета-редукции и ее следствие. Теорема стандартизации

Билет: 5, 15, 25

$f(x)$

значение функции f в точке x ← → правило вычисления значения функции в точке x.

$\lambda x. M$

M – λ-абстракция выражение, содержащее переменную x, в котором зашифровано правило вычисления функции в точке x.

$(M\ x)$

М - аппликатор ← → $x -$ аппликант

$(M\ x)$ –аппликация, M прикладывается к аргументу x.

Основной синтаксический объект в λ -исчислении это λ -терм.

1. **Алфавит для построения λ-термов**: a. символ λ, называемый λ -абстрактором, b. счетный набор символов, называемый переменными c. символы «(», «)», «.» В качестве переменных используют малые латинские буквы, возможно с индексами	2. **Лямбда-термом** (**λ-термом**) называется: a. выражение, состоящее из одной переменной, b. выражение вида (MN), называемое аппликацией, где M и N — λ-термы, c. выражение вида $(\lambda x. M)$, называемое λ-абстрактором, где M — λ-терм, называемый называют схожестью действий, x — переменная, $\lambda -$ называют абстрактой переменной x

- Парные скобки в термах, соответствующие абстракции, опускаются, если они восстановимы группировкой вправо.
$$M_1 M_2 \dots M_k = (((\dots(M_1 M_2)M_3)\dots)M_{k-1})M_k) - \text{слева направо}$$
$$\lambda x_1 x_2 \dots x_k . M = \Big(\lambda x_1 . \big(\lambda x_2 . (\dots(\lambda x_k . M)\dots)\big)\Big) - \text{справа налево}$$
- **Подтерм** – любая последовательность подряд идущих символов в терме, являющаяся термом
- В терме $(\lambda x. M)$ терм M называется **областью действия** λ-абстрактора по переменной x.
- Переменная имеет **связанное** вхождение в терм, если она находится в области действия λ-абстрактора по этой переменной. Иначе – **свободным**.
- **Комбинатор** – терм без свободных вхождений переменных (аналог предложения).
- $\wedge -$ множество всех λ-термов. $\wedge_0$ – множество комбинаторов.
- $FV(M)$ — множество переменных, имеющих свободные вхождения в λ-терм M.
- $M_x[N] -$ результат подстановки терма N в терм M вместо всех свободных в M вхождений переменной
- $z = (MN)$, аппликатор M имеет в терме **активное вхождение**. Любой другой N терм, не являющийся аппликатором, имеет **пассивное вхождение.**
- Выражение M ≡ N означает синтаксическое (графическое) равенство λ-термов M и N.

Пример: $T = (\lambda x. (\lambda y. y))((\lambda z. z)(\lambda z. z))$;
y – область действия λ-абстрактора по переменной y; z - <…> по переменной z; $(\lambda y. y) -$ <…> по переменной x.
Подтермы: $y, z, (\lambda y. y), (\lambda z. z), \big(\lambda x. (\lambda y. y)\big), (\lambda z. z)(\lambda z. z), T.$ Все переменные $x, y, z\ -$ связаны. T – комбинатор.

α-конверсия = переименование

$$(\lambda x. M) =_\lambda (\lambda y. M_x[y]) \qquad \text{по Сорочану}$$
$$\alpha = \{\ (\ (\lambda x. M), (\lambda y. M_x[y])\ ),\ \ M \in \wedge,\ \ y \in FV(M)\ \} \qquad \text{по Малышеву}$$

β-редукция – суперпозиция

$$((\lambda x. M)N) \to_\beta (M_x[N]) \qquad \text{по Сорочану}$$
$$\beta = \{\ (\ ((\lambda x. M)N), (M_x[N])\ ),\ \ M, N \in \wedge,\ \ x \notin FV(N)\ \} \qquad \text{по Малышеву}$$

β-свертка - преобразование терма $(\lambda x. M)N$ в терм $M_x[N]$, где $x \in FV(M)$. Интуитивно - подстановка аргумента вместо соответствующей переменной.	**Редукционная цепочка -** это пустая, конечная/бесконечная последовательность термов, полученных с помощью α-конверсии и β-редукции**,** а именно ∀ 2 соседних члена последовательности, полученных друг из друга, либо α-конверсией, либо β-редукцией.
β-редексом - преобразуемый терм $(\lambda x. M)N$. (REDucible EXpression)	Терм P β-редуцируется к терму Q: $P \to_\beta Q$
β-нормальный терм – терм без β-редексов.	**β-нормальной форма** терма P – β-нормальный терм Q и $P \to_\beta Q$
Левый редекс - редекс, символ λ которого расположен левее символов λ других редексов. Аналогично **правый редекс**.	**Внешним редексом** называется редекс, который не содержится внутри никакого другого редекса. **Внутренний редекс** - редекс, не содержащий других редексов.

Пример построения редукционной цепочки:

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) = \big(\lambda x.(xx)\big)\big(\lambda x.(xx)\big) \to_\beta \big(\lambda x.(xx)\big)\big(\lambda x.(xx)\big) \to_\beta \ldots$$

Бесконечная редукционная цепочка. Терм сам является β-редексом. У него нет нормальной формы.

Пример (выбор редекса для сворачивания не однозначен)

$$T = (\lambda x.((\lambda y.xy)u))(\lambda v.v) \to_\beta \begin{array}{l} (\lambda x.xu)(\lambda v.v) \to_\beta (\lambda v.v).u \\ (\lambda y.((\lambda v.v)y))u) \to_\beta \begin{smallmatrix} (\lambda y.y)u \\ (\lambda v.v)u \end{smallmatrix} \end{array} \to_\beta \beta u$$

Выбор разных редексов для свертки дает разные редукционные цепочки.
Стратегия применения сверток: пока ∃ хотя бы один редекс, применить к одному из них редукцию.

Переменные: u – свободная, остальные связанные.
Активное вхождение имеют λ-термы: z, $(\lambda y.xy)$, $(\lambda x.((\lambda y.xy)u)$
Два β-редекс: 1) $(\lambda y.xy)u$ –самый правый, внутренний. 2) T – самый левый, внешний.

Аппликативный порядок редукций (АПР) – всегда выбираем самый левый из внутренних редексов.
Нормальный порядок редукций (НПР) - всегда выбираем самый левый из внешних редексов.
Ленивое вычисление: $(\lambda y.M)N \to_\beta M$

Теорема Черча-Россера (о ромбическом свойстве β-редукции). Без доказательства.
Если $P \to_\beta M$ и $P \to_\beta N$, то существует такой терм Q, что $M \to_\beta Q$ T и $N \to_\beta Q$.
Следствие. Если у терма существует β-нормальная форма, то она единственная.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & N \arrow[dr] & \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q \\ & M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Теорема стандартизации. Если β-нормальная форма терма ∃, то стратегия НПР гарантирует её достижение.