20. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий

Билеты 12, 26

В математике можно выделить два способа формирования теорий: аксиоматический подход и структурный подход.

Аксиоматический подход:

Из некоторых соображений выбирается сигнатура $\sigma = < P_1, \dots, P_k;\ f_1, \dots, f_s >$, выбираются предложения сигнатуры σ, которые объявляются истинными, то есть аксиомами. Развитие аксиоматической теории состоит в исследовании тех интерпретаций сигнатуры σ, в которых истинны все аксиомы теории, а также в получении следствий из аксиом.

Определение 1: Аксиоматическая теория $Th_{ax} = (\sigma,\ \Gamma)$, где σ - некоторая сигнатура, $\Gamma \subseteq sent(\sigma)$, где $sent(\sigma)$ - множество предложений сигнатуры σ.

Определение 2: Предложения из Г называются аксиомами теории Th_{ax}

Определение 3: Теорема теории Th_{ax} - любое логическое следствие из Г, то есть А - теорема Th_{ax}, если $A \subseteq sent(\sigma)$ и $\Gamma \mid = A$.

Определение 4: Множество теорем теории Th_{ax} называется её замыканием $[Th_{ax}]$, то есть $[Th_{ax}] = \{A \mid A \subseteq sent(\sigma)$ и $\Gamma \mid = A\}$. Часто под теорией понимают её замыкание.

Определение 5: В общем случае под элементарной теорией будем понимать любое логически замкнутое множество предложений рассматриваемой сигнатуры.

Примеры:

1. Теория групп: $\sigma = < =;\ \circ,\ e >$, где = - предикат равенства, ° - символ групповой операции, e - символ единичного элемента.

Аксиомы теории групп:

$\forall a \forall b \forall c\ [(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$ - ассоциативность операции °;

$\forall a\ [a \circ e = a]$ - существование единичного элемента;

$\forall a \exists b\ [a \circ b = e]$ - существование обратного элемента;

Теорема 1: $\forall a \forall b \exists x\ [\ (a \circ x = b)\ \&\ \forall \acute{x}\ [\ (a \circ \acute{x} = b)\ \rightarrow (\acute{x} = x)\ ]]$ - уравнение $a \circ x = b$ в группе всегда имеет решение, причем единственное.

2. Теория отношений эквивалентности: $\sigma = < =,\ R >$

Аксиомы теории отношений эквивалентности:

$\forall x [R(x, x)]$ - рефлексивность;

$\forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow R(y, x)]$ - симметричность;

$\forall x \forall y \forall z [R(x, y)\ \&\ R(y, z) \rightarrow R(x, z)]$ - транзитивность;

Теорема 2 (теорема о факторизации): $\forall x \forall y [R(x, y)\ \&\ R(y, x)\ \text{v}\ \bar{R}(x, y)\ \&\ \bar{R}(y, x)]$ - эту теорему также называют теоремой теории отношений эквивалентности.

Структурный подход:

Данный способ формирования теории начинается с изучения какой-либо конкретной математической структуры или класса структур и тогда, естественно, возникает вопрос о полной аксиоматизации этого класса, т.е. о выборе множества аксиом так, чтобы множество следствий из этих аксиом совпадало с множеством истинных в рассматриваемом классе структур утверждений.

Заранее задан некоторый конкретный универсум и задана некоторая конкретная структура: $U^{(I)}$, $S^{(I)} = < P_1^{(I)}, \dots, P_k^{(I)};\ f_1^{(I)}, \dots,\ f_s^{(I)} >$ - тем самым, у нас есть множество теорем теории (пусть и неявно).

Пример. Наиболее ярким примером структурной теории является планарная Евклидова геометрия. U - множество точек плоскости, $S = < = , B, D >, \tau = < 2, 3, 4 >$.

$B(a, b, c)$ = "точки плоскости a, b, c лежат на одной прямой", $D(a, b, c, d$ = "$\rho(a, b) = \rho(c, d)$".

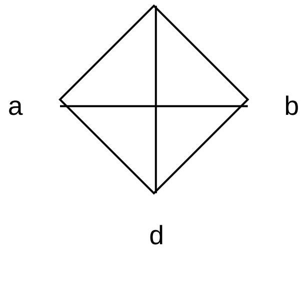
А.Тарским была предложена система из 16 аксиом, из которых следует любая теорема планарной Евклидовой геометрии:

$\forall a \forall b [D(a, b, b, a)]$ - симметричность;

$\forall a \forall b \forall c [D(a, b, c, c) \rightarrow (a = b)]$;

$\forall a \forall b \forall c \forall d [D(a, b, c, d)\ \&\ D(a, b, e, f) \rightarrow D(c, d, e, f)]$ - транзитивность расстояния;

$\forall a \forall b \forall c \forall d \exists \rho$ [D (a, c, b, c) & D (b, c, b, d) & D (b, d, a, d) → D (a, ρ, b, ρ) & D (c, ρ, d, ρ)



$acbd$ - ромб, ρ - точка пересечения диагоналей.