15. Понятие комбинатора. Неподвижная точка лямбда-терма. Теоремы о существовании неподвижной точки любого лямбда-терма и комбинатора неподвижной точки, примеры

Билеты 8, 16, 20

Комбинатор – терм без свободного вхождения переменных. Переменная в терме называется связанной, если она находится в области действия λ-абстрактора по этой переменной. В противном случае – свободной.

Теорема о существовании неподвижной точки любого λ-терма. Для любого λ-терма F существует такой λ-терм X, что $FX = X$. Такой терм X называется неподвижной точкой F.

Теорема о существовании комбинатора неподвижной точки. Существует такой комбинатор M, что для любого λ-терма F терм (MF) является неподвижной точкой F, т.е. $F(MF) = MF$. Такой комбинатор M называется комбинатором неподвижной точки.

1. Парадоксальный комбинатор Карри $Y \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$
   Пусть F – терм, тогда
   $$YF = \big(\lambda x.\big(\lambda x.f(xx)\big)\big(\lambda x.f(xx)\big)\big)F = \lambda f.\big(\lambda x.F(xx)\big)\big(\lambda x.F(xx)\big) = F\big(\lambda x.F(xx)\big)\big(\lambda x.F(xx)\big) =$$
   $$= F\left(\Big(\lambda f.\big(\lambda x.f(xx)\big)\big(\lambda x.f(xx)\big)\Big)F\right) = F(YF)$$
2. Комбинатор Тьюринга $T = \big(\lambda xy.y(xxy)\big)\big(\lambda xy.y(xxy)\big)$
   Пусть $A = \lambda xy.y(xxy)$, тогда
   $$TF = AAF = \big(\lambda y.y(AAy)\big)F = F(AAF) = F(TF)$$