9. Логический вывод. Формальные понятия доказательства и правила вывода, пример. Разветвляющие и неразветвляющие правила. Существование конечного числа правил вывода и математического понятия доказательства, при помощи которых можно ответить на вопрос: “Верно ли, что Г⇒А?”. Пример

Билеты 5, 19

Логический вывод — это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению — новому суждению (формуле). Доказательство – система утверждений, каждое из которых очевидно истинно или следует из уже доказанных утверждений.

Пример. Допустим мы доказали утверждение A, затем доказали, что из A следует утверждение B, тогда мы делаем вывод, что истинно утверждение B. Считая A и B предложениями логического языка, можно возвести такую ситуацию в ранг правила, по которому из истинности предложений (посылок) A и $A \to B$ можно в качестве заключения вывести истинность предложения B.

Правила вывода (сверху – посылка, снизу – заключение):

$$\frac{A\&B}{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}},\quad \frac{A \vee B}{A|B},\quad \frac{A \to B}{\neg A|B},\quad \frac{\neg[A\&B]}{\neg A|\neg B},\quad \frac{\neg[A \vee B]}{\begin{matrix}\neg A\\ \neg B\end{matrix}},\quad \frac{\neg[A \to B]}{\begin{matrix}A\\ \neg B\end{matrix}},$$

$$\frac{(\forall x|\alpha)A}{\begin{matrix}(\forall x|\alpha, b)A\\ A_x[b]\end{matrix}},\quad \frac{(\exists x|\alpha)A}{A_x[b]},\quad \frac{\neg(\forall x|\alpha)A}{(\exists x|\alpha)\neg A},\quad \frac{\neg(\exists x|\alpha)A}{(\forall x|\alpha)\neg A},\quad \frac{\neg\neg A}{A}$$

Неразветвляющее правило: к каждому узлу приписывается одна вершина, т.е. утверждается истинность всех формул заключения.

Разветвляющее правило: к каждому узлу приписываем узлы, соответствующие разветвлению, т.е. утверждается истинность хотя бы одной формулы заключения.

Для ответа на вопрос «Верно ли, что Г⇒А?» используются поисковые деревья. Решение методом от противного, пусть $\Gamma \not\models A$, тогда существует такая модель Г, что она не являются моделью A, т.е. $\exists I$, что $\Gamma_1^{(I)}, \dots, \Gamma_n^{(I)} = 1$, а $A^{(I)} = 0 \Rightarrow \neg[A]^{(I)} = 1$. Дерево вывода – является деревом доказательств, если каждая из его ветвей блокирована. Ветвь в дереве называется блокированной, если в ней одновременно получены формулы F и $\neg F$.

Пример: **{∀ *x* [*P* (*x*) → ¬*M* (*x*)], ∃ *y* [*S* (*y*) & *M* (*y*)]} ⇒ ∃ *z* [*S* (*z*) & ¬*P* (*z*)]**.

1 ∃ *y*[*S*(*y*) & *M*(*y*)]
↓
2 ∀ *x*[*P*(*x*) → ¬*M*(*x*)]
↓
3 ¬ ∃ *z*[*S*(*z*) & ¬*P*(*z*)] отрицание заключения
↓
4 [*S*(*a*) & *M*(*a*)] из (1)
↓
5 [*P*(*a*) → ¬*M*(*a*)] из (2)
↓
6 (∀ *x/a*)[*P*(*x*) → ¬*M*(*x*)] из (2)
↓
7 ∀ *z* ¬[*S*(*z*) & ¬*P*(*z*)] из (3)
↓
8 *S*(*a*) из (4)
↓
9 *M*(*a*) из (4)
↓

↓ 10.1 ¬*P*(*a*) ↓ 10.2 ¬*M*(*a*) из (5)
↓
11.1 ¬ [*S*(*a*)& ¬*P*(*a*)] из (7)
↓
12.1 (∀ *z/a*) ¬[*S*(*z*)& ¬*P*(*z*)] из (7)
↓

↓ 12.1.1 ¬ *S*(*a*) ↓ 12.1.2 ¬¬*P*(*a*) из (11.1)
↓
12.1.3 *P*(*a*) из (12.1.2)