15. Понятие комбинатора. Неподвижная точка лямбда-терма. Теоремы о существовании неподвижной точки любого лямбда-терма и комбинатора неподвижной точки, примеры

Билет: 8,16,20

Ответ на вопрос

Терм X называется <u>неподвижной точкой</u> терма F, если выполняется соотношение $X = FX$.

Комбинатор M называется <u>комбинатором неподвижной точки</u>, если для любого терма F выполняется соотношение $MF = F(MF)$.

Другими словами: применяя комбинатор M к произвольному терму F, получаем неподвижную точку терма F.

1) Одним из возможных комбинаторов неподвижной точки является так называемый парадоксальный комбинатор Карри:

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Действительного для любого терма F имеем:

$$\begin{aligned}
YF &= \lambda f.\big(\lambda x.f(xx)\big)\big(\lambda x.f(xx)\big)F = \\
&= \ \lambda f.\big(\lambda x.F(xx)\big)\big(\lambda x.F(xx)\big) = \\
&= F\big(\lambda x.F(xx)\big)\big(\lambda x.F(xx)\big) = \\
&= F(\big(\lambda f.\big(\lambda x.f(xx)\big)\big(\lambda x.f(xx)\big)F\big) = \\
&= F(YF)
\end{aligned}$$

Заметим, что переход от третьей строчки к четвертой выполнен с помощью «обратной» $\beta -$ редукции.

2) Комбинатор Тьюринга:
   $T = (\ \lambda xy.y(xxy))\big(\lambda xy.y(xxy)\big)$
   Обозначим $A = \lambda xy.y(xxy)$,
   тогда T=AA=$\big(\ \lambda xy.y(xxy)\big)\big(\lambda xy.y(xxy)\big) \to \beta \quad \lambda y.y(AAy)$
   $TF = AAF \to \beta\ \big(\lambda y.y(AAy)\big)F = F(AAF) = F(TF)$