

*Следование (\Rightarrow) на лекциях обозначалось как (\vdash) только с двумя горизонтальными чертами, вместо одной.

Вступление.

Рассмотрим отношение равносильности $A \equiv B \stackrel{def}{\iff} (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$

Очевидно это отношение эквивалентности, оно разбивает множество формул на классы эквивалентности. Возникает желание найти канонические формы формул разных классов. Так каноническими являются префиксные и антипрефиксные формулы.

Префиксные формулы (предваренная нормальная форма).

Формула A называется префиксной, если она имеет вид:

$$A = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B,$$

где Q_i – кванторы \forall или \exists ; x_i – индивидуальные переменные; B – бескванторная формула; ($\forall i$).

На содержательном уровне – это формулы, у которых кванторы вынесены максимально вперед.

Утв.: любую формулу языка логики первого порядка можно привести к префиксному виду.

Алгоритм основан на применении следующих правил:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\neg \forall x A = \exists x \neg A$ | 5. $[\forall x A] \& B = \forall x [A \& B]$ | * 3-4: A не имеет свободных вхождений переменной y |
| 2. $\neg \exists x A = \forall x \neg A$ | 6. $[\exists x A] \& B = \exists x [A \& B]$ | * 5-8: B не имеет свободных вхождений переменной x |
| 3. $\forall x A = \forall y A_x[y]$ | 7. $[\forall x A] \cup B = \forall x [A \cup B]$ | * A, B – формулы, $A_x[y]$ – результат подстановки y вместо |
| 4. $\exists x A = \exists y A_x[y]$ | 8. $[\exists x A] \cup B = \exists x [A \cup B]$ | всех вхождений x в A |

Примеры.

- $[\forall x P(x)] \cup [\forall x Q(x)] \stackrel{3}{=} [\forall x P(x)] \cup [\forall y Q(y)] \stackrel{7}{=} \forall x [P(x) \cup [\forall y Q(y)]] \stackrel{7}{=} \forall x \forall y [P(x) \cup Q(y)]$
- $[\forall x P(x)] \rightarrow [\forall x Q(x)] \neq \forall x \forall y [P(x) \rightarrow Q(y)]$
 $[\forall x P(x)] \rightarrow [\forall x Q(x)] = [\exists x \bar{P}(x)] \cup [\forall x Q(x)] = [\exists x \bar{P}(x)] \cup [\forall y Q(y)] = \exists x \forall y [\bar{P}(x) \cup Q(y)] = \exists x \forall y [P(x) \rightarrow Q(y)]$

Продвижение вперед возможно только для булевых связок.