

**13. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Понятие дерева-доказательства. Понятие выводимости формулы  $A$  из множества гипотез  $\Gamma$ . Теорема о корректности дедуктики**

Билеты 7, 21

Логический вывод – это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению — новому суждению (формуле). Поисковое дерево – дерево доказывающее логическое следование  $\Gamma \Rightarrow A$  или приводящее контрмодель.

Правила расширения дерева:

1. Дерево, состоящее из одного узла, помеченного формулой  $\neg A$ , является поисковым деревом с корнем  $\neg A$ . Единственный узел этого дерева считаем неиспользованным.
2. Если в дереве есть неиспользованный узел  $v$ , которому приписана формула, являющаяся посылкой одного из правил вывода, то с помощью этого правила каждая неблокированная ветвь  $W$ , проходящая через узел  $u$ , расширяется следующим образом:
  - а. если правило разветвляющее, то из конечного узла ветви  $W$  проводятся две дуги, оканчивающиеся новыми вершинами, которым приписываются формулы-заключения данного правила
  - б. если правило, соответствующее узлу  $v$ , – не разветвляющее, то к конечному узлу ветви  $W$  присоединяются последовательно один к другому новые узлы, помеченные формулами-заключениями.
  - с. Уточнения требуют случаи применения правил  $\forall$  и  $\exists$  поскольку они связаны с выбором параметра  $a$ . Используя правило  $\forall$ , в качестве  $a$  выбирается параметр с наименьшим номером, не входящий в список исключений в посылке данного правила. При использовании правила  $\exists$  выбирается параметр с наименьшим номером, не встречающийся в расширяемой ветви, в том числе и в списке  $\alpha$ . После расширения дерева считаем узел  $v$  использованным, а вновь построенные узлы – неиспользованными.
3. Дерево также можно расширить, добавляя к конечным узлам неблокированных ветвей новый узел, помеченный очередной формулой из множества  $\Gamma$  или формулой вида  $[A \vee \neg A]$ , и считать его неиспользованным.

Дерево вывода является деревом доказательств, если каждая из его ветвей блокирована. Ветвь в дереве называется блокированной, если в ней одновременно получены формулы  $F$  и  $\neg F$ . Если для утверждения  $\Gamma \Rightarrow A$  существует дерево-доказательство, то будем говорить, что формула  $A$  выводима из множества гипотез  $\Gamma$ , и обозначать как  $\Gamma \rightarrow A$ .

Теорема о корректности дедуктики. Если  $\Gamma \rightarrow A$ , то  $\Gamma \Rightarrow A$ .

Док-во. Пусть  $\Gamma \rightarrow A$  и  $T$  – соответствующее дерево-доказательство. Если бы  $A$  логически не следовала из  $\Gamma$ , то существовала интерпретация  $I$  сигнатуры  $\sigma$ , в которой были бы истинны все формулы из множества  $\Gamma$  и формула  $\neg A$ . Но тогда по лемме о поисковой последовательности существовала бы ветвь в дереве  $T$ , все формулы которой были бы истинны в некотором расширении интерпретации  $I$ , что противоречит тому, что в  $T$  все ветви блокированы.