13. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Понятие дерева-доказательства. Понятие выводимости формулы A из множества гипотез Γ. Теорема о корректности дедуктики.

Логический вывод — это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению — новому суждению (формуле).

Поисковое дерево — дерево доказывающее логическое следование Γ ⇒ A или приводящее контр модель.

Правила расширения дерева:

(П1) Дерево, состоящее из одного узла, помеченного формулой ¬A, является поисковым деревом с корнем ¬A. Единственный узел этого дерева считаем неиспользованным.

(П2) Если в дереве есть неиспользованный узел v, которому приписана формула, являющаяся посылкой одного из правил вывода, то с помощью этого правила каждая неблокированная ветвь W, проходящая через узел у, расширяется следующим образом:

- если правило разветвляющее, то из концевого узла ветви W проводятся две дуги, оканчивающиеся новыми вершинами, которым приписываются формулы-заключения данного правила;
- если правило, соответствующее узлу v, - не разветвляющее, то к концевому узлу ветви W присоединяются последовательно один к другому новые узлы, помеченные формулами-заключениями.

Уточнения требуют случаи применения правил (∃) и (∀) поскольку они связаны с выбором параметра a. Используя правило (∀), в качестве a выбирается параметр с наименьшим номером, не входящий в список исключений в посылке данного правила. При использовании правила (∃) выбирается параметр с наименьшим номером, не встречающийся в расширяемой ветви, в том числе и в списке α. После расширения дерева считаем узел v использованным, а вновь построенные узлы – неиспользованными.

(П3) Дерево также можно расширить, добавляя к концевым узлам неблокированных ветвей новый узел, помеченный очередной формулой из множества Γ или формулой вида [A v ¬A], и считать его неиспользованным.

Дерево вывода является **деревом доказательств**, если каждая из его ветвей блокирована. Ветвь в дереве называется **блокированной**, если в ней одновременно получены формулы F и ¬F для некоторого F.

Если для утверждения Γ ⇒ A существует дерево-доказательство, то будем говорить, что формула A **выводима** из множества гипотез Γ, и обозначать Γ |— A.

Теорема (о корректности дедуктики). Если Γ |— A, то Γ ⇒ A.

Доказательство:

Пусть Γ |— A и T - соответствующее дерево-доказательство. Если бы A логически не следовала из Γ, то существовала бы интерпретация I сигнатуры σ, в которой были бы истинны все формулы из множества Γ и формула ¬A. Но тогда по лемме о поисковой последовательности существовала бы ветвь в дереве T, все формулы которой были бы истинны в некотором расширении интерпретации I, что противоречит тому, что в T все ветви блокированы. Теорема доказана.