16. Логический вывод. Теоремы о полноте и об адекватности дедуктики. Теорема о компактности, пример ее использования

Билеты 9, 23

Логический вывод – это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению – новому суждению (высказыванию, формуле).

Теорема о полноте дедуктики. Если $\Gamma \vDash A$, то $\Gamma \vdash A$.

Док-во от противного. Пусть $\Gamma \vDash A$ и $\Gamma \nvdash A$, тогда никакое поисковое дерево не является деревом доказательства, а значит, существует хотя бы одна неблокированная ветвь. Пусть T – полное поисковое дерево для утверждения вида «$\Gamma \vDash A$». В нем есть неблокированная ветвь w, насыщенная относительная параметром D, которое может быть и бесконечным. Для простоты будем считать, что в сигнатуре множества формул Γ и формулы A нет функциональных символов. Зададим интерпретацию сигнатуры σ, в которой содержаться только предикатные символы: $U^{(I)} = D$.

Для любого k-местного предикатного символа R и для любого набора констант $a_{i1}, \dots, a_{ik} \in D$ положим:

$$R^{(I)} = \begin{cases} \cup \text{, если } "R(a_{i1}, \dots, a_{ik}) \in w" \\ \cap \text{, если } "\overline{R}(a_{i1}, \dots, a_{ik}) \in w" \\ \text{произвольно, если } "R(a_{i1}, \dots, a_{ik}) \in w" \text{ и } "\overline{R}(a_{i1}, \dots, a_{ik}) \in w" \end{cases}$$

Индукцией по правилам построения формул можно показать, что при таком расширении истинны все формулы ветки w. Поскольку w насыщенна относительно D, то она содержит все формулы из Γ и $\overline{A}$, а значит, это модель для Γ и контрмодель для A. Следовательно, $\Gamma \nvDash A$. Получили противоречие.

Теорема об адекватности дедуктики. $(\Gamma \vDash A) \Leftrightarrow (\Gamma \vdash A)$.

Теорема о компактности. Компактность – перенос свойств с конечных подмножеств бесконечного множества на это множество. Если $|\Gamma| = \infty$ и $\Gamma \vDash A$, то $\exists \Gamma' \subset \Gamma$, что $|\Gamma'| \neq \infty$ и $\Gamma' \vDash A$.

Док-во. Воспользуемся теоремой об адекватности дедуктики. Т.к. $\Gamma \vDash A$, то $\Gamma \vdash A$ и поэтому существует дерево доказательств у которого все ветви блокированы. Это означает, что все ветви конечны и дерево конечно тоже. Значит, множество гипотез, стоящих на этих ветвях, конечно. А это и есть множество Γ'.

Пример. $\Gamma = \{\exists x_1 P(x_1), \exists x_1 (\exists x_2 | x_1) P(x), \exists x_1 (\exists x_2 | x_1)(\exists x_3 | x_1, x_2) P(x), \dots\}$, $A = \forall x P(x)$. Доказать, что $\Gamma \nvDash A$.

От противного, пусть $\Gamma \vDash A$. По теореме о компактности – существует конечное подмножество Γ', из которого логически следует A. Можно считать, что Γ' - первые n формул Γ. I: $U^{(I)} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

x	$P(x)$
a_1	1
$\vdots$	$\vdots$
a_n	1
a_{n+1}	0

I – модель Γ' и контрмодель A, следовательно, $\Gamma' \vDash A$, а это противоречие.
