Вопрос 01. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех k-местных предикатов и функций на n-элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения.Примеры.

Основным предметом изучения в рамках нашего курса является математическая логика — дисциплина, в которой при помощи специальной математической модели, называемой логическим языком 1-ого порядка, формулируются и анализируются утвердительные высказыания относительно объектов и отношений между ними. Математическую логику принято делить на классическую(принимается закон «исключение третьего» - утверждение либо верно, либо не верно) и некласическую(не принимается последний закон). Уточнение: предполагается, что каждому высказыанию может быть дана истиностная оценка. Для языка логики 1-ого порядка справедливы следующие термины: U — универс(конечный или счетный), являющийся множеством математических объектов, представляемых предмет исследований; U^k есть k-ая декартова степень множества U — или множество $\{(x_1,\dots,x_k)|x_1\in U, x_2\in U,\dots x_k\in U\}$, $\text{если}|U|=n, \text{то}|V^k|=n^k$ (местность = арность = кол-во аргументов); k-местная функция f – произвольное отображение вида $U^k->U$, то есть отображение, ставящее каждому k-местному набору элементов множества U некоторый элемент из U(общее количество k-арных функций над n-элементным универсом равно значению $(n^n)^k$); k-местный предикат P(отношение) — произвольное отношение вида $U^k->\{0,1\}$, где 0 и 1 — логические константы(являются нуль-местными предикатами) (любые костанты из множества U являются нуль-местными функциями)(общее количество k-местных предикат над n-элементным множеством равно $(2^n)^k$. В качестве примера: $(U=\{0,1\}, n=5, P(x,y,z)=x+y+z \text{ делится на } 3:(0,2,4)\in P->P(0,2,4)=1,(1,3,4)\notin P->P(1,3,4)=0)$. Си нтаксис логического языка 1 порядка представлен следующим. Алфавит состоит из 3 групп символов: логичекие(($\& V \neg ->$) -логические связки, (∀ ∃) — кванторы - логические операторы, ограничивающие область истинности предиката), вспомогательные символы - (вариации скобок -)([][, символы переменных с индексами или без(имеют тот же смысл, что и булевой алгебре) — x,y,z_0(строится счётный набор с помощью конечного набора символов)(V(var)-множество переменных), символы костант из универса — $a_1, a_2, \dots a_n$ и символы логических констант — (0,1), нелогическая сигнатура($\sigma=\langle P_1, P_2,\dots P_n; f_1,\dots f_n\rangle$ — заранее незафиксированный набор предикатных и функциональных символов(по умолчанию содержин =) и тип $\tau_\sigma=\langle\nu_1,\nu_2,\dots\nu_n;\mu_1,\dots\mu_n\rangle(\nu_i-\text{арность}\, P_i, \mu_i-\text{арность}\, f_i)$.

1) Правила построения термов(имен) — a) ∀ константа или переменная из U есть терм(простейшее имя), b) Если f – имя k-местного функционального символа, а $t_1, t_2,\dots t_n$ - термы, то $f(t_1, t_2,\dots t_n)$ - тоже терм.

2) Правила построения формул: a) Если P - предикатный k-местный символ и $t_1, t_2,\dots t_n$ - термы, то выражение $P(t_1, t_2,\dots t_n)$ - атомарная формула. В частности, при k = 0 список $t_1, t_2,\dots t_n$ - пустой, и скобки опускаются. (для упрощения для k = 2 используют инфиксную запись — xPy, x и y – переменные, а P-предикат). b) Если A и B — уже построенные формулы, то [A&B],[A–>B],[AvB], ¬ A,∀yA,∃yA — тоже формулы.(Приоритет операций — отрицание, конъюнкция, всё остальное). Подформула — любая подряд идущая группа символов, сама являющаяся формулой(подчиняется правилам построения). В качестве примера: ∃[[x + 2 < 5]f[3 < x + 2]], где x, 2, 5, 3, 2 - термы; x + 2 < 5 и 3 < x + 2 - атомарные формулы; [x + 2 < 5] , [3 < x + 2] , [[x + 2 < 5]f[3 < x + 2]] и ∃x[[x + 2 < 5]f[3 < x + 2]] — подформулы. Область действия квантора по переменной x – подформула, стоящая после (∃x) или (∀x). Вхождение переменной в формуле связанно, если находится в области действия квантора по ней(иначе вхождение свободно). Пример: ∃x[P(x)]∨Q(x), где в P(x) – связанное вхождение, а Q(x) – свободное). Предложение — формула без вхождения свободных переменных(∀x[P(x) ∨∃y(Q(y))] — пример).