03. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие структуры заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры.Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры, примеры и контрпримеры.

Пусть изначально заданы $\sigma=\langle P_1, P_2, \dots P_n; f_1, \dots f_n\rangle$ - некоторая абстрактная нелогическая структура, $\tau_\sigma=\langle \nu_1, \nu_2, \dots \nu_n; \mu_1, \dots \mu_n\rangle(\nu_i - \text{арность } P_i, \mu_i - \text{арность } f_i)$. - тип структуры σ. Кроме того пусть существует некоторая формула *F,* зависящая только от $\langle P_1, P_2, \dots P_n; f_1, \dots f_n\rangle$. (V – множество переменных, имеющих свободное вхождение в *F).* Процесс приобретения формулой *F* конкретного смысла(при этом σ трансформируется из абстрактной структуры в полноценную сигнатуру) принято обозначать интерпретацией. Формально определение интерпретации для формулы *F* над σ означает отображение, определённое на множестве $\sigma \cup V$, которое 1) ставит каждому предикатному символу $P \in \sigma$ ставит в соответствие конкретное отношение соответствующей арности(если *P* – *n*-местный предикат, то его интерпретация в понимании *I,* конкретное *n*-местное отношение $P^{(I)} \subseteq U^n$, 2) каждому *n*-местному функциональному символу *f* ставит в соответствие конкретное отображение $f^{(I)}: U^k -> U$, 3) кадой свободной переменной $x \in V$ ставит в соответствие конкретный объект $x^{(I)} \in U$. Каждой формуле *F* ставится в соответствие истинностное значение $F^{(I)} \in \{0,1\}$, при этом 0 интерпретируется как ложь, а 1 – истина. Часто вместо символов 0, 1 в таком случае используют, соответственно, символы *f* , и *t* (от слов *false*, *true*). Пример: $\sigma=\langle E, B, D\rangle, \tau_\sigma=\langle 2,3,4\rangle, I: U^{(I)} \subseteq R^2, E^{(I)}$ = “=”, $B^{(I)}$ (a,b,c) = “точка b лежит на отрезке ac”, $D^{(I)}$ (a,b,c,d) = “*p(a,b)=p(c,d)”, F =* ∀*a*∀*b*∀*c*[*B(a,b,c)*∨*B(b,c,a)*∨*B(c,a,b))*∨∃p[*D(a,p,b,p)&D(a,p,c,d)*] $->$ $F^{(I)}=true$. Интерпретация термов происходит слудующим образом: 1) если *t* – простейший терм, то его интерпретация совпадает с интерпретацией этой компоненты или переменной(задается непосредственно отображением *I*), 2) если *t* – сложный терм($t=f(t_1, t_2, \dots t_n)$, где $t_1, t_2, \dots t_n$ - термы, а *f* – функциональный символ, то $t^I=f(t_1^{(I)}, t_2^{(I)}, \dots t_n^{(I)})$ - его интерпретация. Интерпретация формул происходит следующим образом: 1) если *F* - атомарная формула вида $P(t_1, t_2, \dots t_n)$, то $F^{(I)}=1$, если $P(t_1^I, t_2^I, \dots t_n^I) \in P^I$ и $F^{(I)}=0$ во всех остальных возможных случаях, 2) Для формул не являющихся атомарными интерпретация сводится к аналогичному подходу, как к построению сложного терма рекурсивно с помощью булевых функций(кванторы заменяются по смыслу на схожие булевы функции),, обозначения которых совпадают с используемыми логическими связками. Алгебраической системой(структурой) над сужением интерпретации I на сигнатуру δ является заполненная структура $\sigma=I_s=\langle P_1^I, P_2^I, \dots P_n^I; f_1^I, \dots f_n^I\rangle$. (интерпретация содержательна, если в ней дополнительно проинтерпретированы константы из U). Формула называется общезначимой или тождественно истинной,если она истинна в любой интерпретации. Формула называется невыполнимой или тождественно ложной,если она ложна в любой интерпретации. Формула называется выполнимой, если она истинна хотя бы в 1-ой интерпретации(такую интерпретацию называют моделью, в противополжность её ставят контрмодель). Формула *F* логически следует из множества формул *Г* , если в любой интерпретации, в которой истинны все формулы из множества *Г* , истинна также формула *F.* Отношение логического следования обозначают знаком ⇒: *Г* ⇒ *F*, если *F* логически следует из *Г* . Формулы *A* и *B* называются логически равносильными, если {*A* }⇒*B* и {*B*}⇒*A*. Обозначают это соотношение как A = B.(фигурные скобки тоже опускают). Пример: Пусть *P* и *Q* - одноместные предикатные символы. Пусть есть формулы A_1= ∀*xP*(*x*), A_2 = ∀*x*[*P*(*x*)∨¬*P*(*x*)], A_3 = ∀*x*[*P*(*x*)&¬*P*(*x*)], A_4 = ∃*x*[*P*(*x*)∨*Q* (*x*)], A_5 = [∃*xP*(*x*)∨∃*xQ*(*x*)], A_6 = ∀*x*[*P*(*x*)∨*Q*(*x*)], A_7 = ∀*xP*(*x*)∨∀*xQ*(*x*). Все перечисленные выше формулы кроме A_3 выполнимы, формула A_3 невыполнима, формулы A_4 и A_5 логически равносильны, формулы A_6 и A_7 не являются логически равносильными, из формулы A_7 логически следует формула A_6, из формулы A_6 логически не следует формула A_7, формула A_2 общезначима. Изоморфизм на формулах. Пусть заданы две σ-структуры *A* и *B,* основанные на общей *σ*-сигнатуре. Отображение φ:U^A<–>U^B называется изоморфизмом между структурами *A* и *B(*структура *A* изморфна структуре *B)*, если 1) φ - взаимно однозначно, (2) для каждого предикатного *n* -местного символа $P\in\sigma_s$ и для ∀ набора $a_{1,}a_{2,}\ldots a_n\in U^A,$ справедливо следующее взаимно однозначное соответствие $(a_{1,}a_{2,}\ldots a_n)\in P^A \leftrightarrow (\phi(a_1),\phi(a_2),\ldots\phi(a_n))\in P^B;$ 3) для ∀ n-местного функционального символа f и ∀ набора $a_{1,}a_{2,}\ldots a_n\in U^B,$ следует $\phi(f^A(a_{1,}a_{2,}\ldots a_n))=f^B(\phi(a_1),\phi(a_2),\ldots\phi(a_n))$. Изоморфизм есть отношение эквивалентности между структурами, поэтому для него справедливы свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности. Элементарно эквивалентными структурами называют такие струкуры A и B, для которых истинны одни и те же предложения на обеих структурах. В качестве примеров можно привести: 1) $\sigma=\langle E,F,G\rangle\tau_\sigma=\langle 2,2,0\rangle, s1=\langle Z,=,+,0\rangle, s2=\langle 2\mathrm{Z},=,+,0\rangle,$ → проверяя свойства для класса эквивалентности можно доказать, что S_1 и S_2 изоморфны. 2) $s1=\langle Q,=,+,0,1\rangle, s2=\langle 2\mathrm{R},=,+,0,1\rangle,$ → S_1 и S_2 не изоморфны.по теореме Кантора (R – не счетно, Q – счетно, что означает отсутствие биекции).