8. Понятие комбинатора, примеры комбинаторов. Реализация арифметики и логических функций в рамках комбинаторной логики

Билеты 4, 11, 21

Комбинатор – терм без свободного вхождения переменных. Переменная в терме называется связанной, если она находится в области действия λ-абстрактора по этой переменной. В противном случае – свободной.
Примеры полезных комбинаторов:

Определение	Название	Характеристика
$I = \lambda x.x$	тождественный	$Ix \to_\beta x$
$B = \lambda xyz.x(yz)$	композитор	$Bxyz \to_\beta x(yz)$
$C = \lambda xyz.xzy$	пермутатор	$Cxyz \to_\beta xzy$
$K = \lambda xy.x$	канцелятор	$Kxy \to_\beta x$
$S = \lambda xyz.xz(yz)$	коннектор	$Sxyz \to_\beta xz(yz)$
$W = \lambda xy.xyy$	дупликатор	$Wxy \to_\beta xyy$

Реализация арифметики

Нумералы Чёрча:
$\boxed{0} = \lambda fx.x (= \lambda f.\lambda x.x)$, $\boxed{1} = \lambda fx.fx$, $\boxed{2} = \lambda fx.f^2x, \dots$, $\boxed{n} = \lambda fx.f^n x = \lambda f.f(f^{n-1}x) = \lambda fx.f^{n-1}(fx)$
Добавление единицы: $\underline{Succ} \overset{\text{def}}{=} \lambda nfx.f(nfx)$

$$\underline{Succ}\boxed{n} = (\lambda nfx.f(nfx))\boxed{n} \to_\beta \lambda fx.f(\boxed{n}fx) \to_\beta \lambda fx.f(f^n x) \equiv \lambda fx.f^{n+1}x \equiv \boxed{n+1}$$

Сложение: $\underline{Plus} \overset{\text{def}}{=} \lambda mnfx.nf(mfx)$

$$\underline{Plus}\boxed{n}\boxed{m} \equiv \lambda mnfx.nf(mfx)\boxed{m}\boxed{n} \to_\beta (\lambda nfx.nf(\boxed{m}fx))\boxed{n} \to_\beta \lambda fx.\boxed{n}f(\boxed{m}fx) \to_\beta \lambda fx.f^n(\boxed{m}fx) \to_\beta \lambda fx.f^n(f^m x) \equiv$$
$$\equiv \lambda fx.f^{m+n}x = \boxed{m+n}$$

Умножение: $\underline{Mult} \overset{\text{def}}{=} \lambda mn.m(\underline{Plus}\boxed{n})\boxed{0}$

$$\underline{Mult}\boxed{m}\boxed{n} \equiv (\lambda mn.m(\underline{Plus}\boxed{n})\boxed{0})\boxed{m}\boxed{n} \to_\beta \boxed{m}(\underline{Plus}\boxed{n})\boxed{0} \to_\beta (\underline{Plus}\boxed{n})^m\boxed{0} \equiv$$
$$\equiv (\underline{Plus}\boxed{n})^{m-1}\underline{Plus}\boxed{n}\boxed{0} \to_\beta (\underline{Plus}\boxed{n})^{m-1}\boxed{n} \equiv$$
$$\equiv (\underline{Plus}\boxed{n})^{m-2}\underline{Plus}\boxed{n}\boxed{n} \to_\beta (\underline{Plus}\boxed{n})^{m-1}\boxed{2n} \to_\beta \dots \to_\beta \boxed{mn}$$

Вычитание единицы: $\underline{Pred} \overset{\text{def}}{=} \lambda nfx.n(\lambda gh.h(gf))(\lambda u.x)(\lambda u.u)$

Логические функции

$\underline{True} \overset{\text{def}}{=} \lambda xy.x$
$\underline{False} \overset{\text{def}}{=} \lambda xy.y$
$\underline{And} \overset{\text{def}}{=} \lambda pq.pq\underline{False}$
$\underline{Or} \overset{\text{def}}{=} \lambda pq.p\underline{True}q$
$\underline{Not} \overset{\text{def}}{=} \lambda p.p\underline{True}\underline{True}$

Примеры:

$$\underline{And}\,P \equiv (\lambda pq.pq\underline{False})PQ \to_\beta PQ\underline{False} = \begin{cases} \underline{True}Q\underline{False} \to_\beta Q \\ \underline{False}Q\underline{True} \to_\beta \underline{False} \end{cases}$$

$$\underline{Not}\,P \to_\beta P\underline{False}\,\underline{True} \to_\beta \begin{cases} \underline{False}, \text{ если } P = \underline{True} \\ \underline{True}, \text{ если } P = \underline{False} \end{cases}$$