5. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления

Билеты 3, 17

Одноместные предикаты и одноместные функции удобно задавать с помощью столбца таблицы и ориентированного графа соответствия. Пусть $U = \{a_1, \dots, a_n\}$ – конечный универс, $\forall i \; P(a_i) \in \{0{,}1\}$

x	a_1	…	a_n
$P(x)$	$P(a_1)$	…	$P(a_n)$

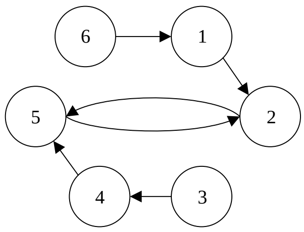
Рассмотрим одноместную функцию f. $U = \{a_1, \dots, a_n\}$. G_f – граф, задающий функцию f. $V(G_f) = U$ – множество вершин графа. Ребро $xy \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$.

Пример. $U = \overline{1{,}6}$, $f(x) = (x^2 + 1) mod\ 6$

Табличное представление:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	5	4	5	2	1

Графовое представление:



Двуместные предикаты удобно рассматривать в виде таблицы. Пусть $U = \{a_1, \dots, a_n\}$, R – двуместный предикат.

	$a_1 \dots a_n$
a_1 $\vdots$ a_n	$r_{i,j}$

Представляется в виде матрицы размера $n \times n$, где элемент $r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ состоит в отношении с } a_j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

В случае предикатов большей арности стоит рассматривать гиперкубы

Рассмотрим сигнатуру $\sigma = \{P_1, \dots, P_k; f_1, \dots, f_s\}$ и определим её тип $\tau = \{\nu_1, \dots, \nu_k; \mu_1, \dots, \mu_s\}$

$S_n(\sigma)$ – число структур сигнатуры σ над n элементным универсом (число способов проинтерпретировать формулу с такой сигнатурой и таким типом)

$S_n(\sigma) = 2^{n^{\nu_1}} \times \dots \times 2^{n^{\nu_k}} \times n^{n^{\mu_1}} \times \dots \times n^{n^{\mu_s}}$, где $2^{n^{\nu_i}}$ – количество способов проинтерпретировать предикат P_i, $n^{n^{\mu_s}}$ – количество способов проинтерпретировать символ f_s ($S_n(\sigma)$ то же самое, что и $S_n(f)$).

$M_n(f)$ – количество моделей формулы f над n-элементным универсом.

$\gamma_n(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{M_n(f)}{S_n(f)}$ – объем выполнимости.

$\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(f) = \gamma(f)$ – если предел существует, то он называется долей выполнимости формулы f

Пример 1. $F_1 = \forall x P(x)$

$S_n(F_1) = 2^n$

$M_n(F_1) = 1$ – выполняется только одном случае, если все $x_i = 1$

$\gamma_n(F_1) = \frac{1}{2^n} \to \gamma(F_1) = 0$

При подсчете числа моделей бывает полезно использовать то свойство векторов, матриц, гиперкубов, которое отображает данную формулу.

Еще одна идея состоит в том, что если формула начинается с квантора $\exists$, то полезно перейти к её отрицанию и найти количество моделей для её отрицания.

Пример 2. $F_2 = \exists x \forall y R(x, y)$ – существует строка из единиц

$\overline{F_2} = \forall x \exists y \bar{R}(x, y)$ – в каждой строке есть хотя бы одна единица. (есть всего один неподходящий вариант – строка из нулей)

$M_n(F_2) + M_n(\bar{F}_2) = S_n(F_2) = S_n(\bar{F}_2) = 2^{n^2}$

$M_n(\bar{F}_2) = (2^n - 1)^n$

$M_n(F_2) = 2^{n^2} - (2^n - 1)^n$

$\gamma_n(F_2) = \frac{2^{n^2} - (2^n - 1)^n}{2^{n^2}} = 1 - \frac{(2^n - 1)^n}{2^{n^2}} \to 0 = \gamma(F_2)$