19. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятие сингулярной и примарной формул. Алгоритм приведения любой сингулярной формулы к булевой комбинации примарных, пример.

Билеты 11, 25.

Вступление. Рассмотрим отношение равносильности $A \equiv B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A \vDash B)\ \&\ (B \vDash A)$

Очевидно это отношение эквивалентности, оно разбивает множество формул на классы эквивалентности. Возникает желание найти канонические формы формул разных классов. Так каноническими являются префиксные и антипрефиксные формулы.

Антипрефиксные формулы характеризуются тем, что в них кванторы продвинуты максимально в глубину.

Рассмотрим случай ***сингулярных*** формул – формул, сигнатуры которых состоят только из одноместных предикатов (не содержат функциональных символов).

Определим несколько формул и установим их эквивалентность (равносильны/неравносильны):

$$A_1 = \forall x[\mathrm{P}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(x)] \ \equiv\ B_1 = [\forall x\mathrm{P}(x)]\ \&\ [\forall x\mathrm{Q}(x)]$$

$$A_2 = \forall \mathrm{x}[\mathrm{P}(x) \cup \mathrm{Q}(x)] \ \not\equiv\ B_2 = [\forall x\mathrm{P}(x)] \cup [\forall x\mathrm{Q}(x)]$$

$$A_3 = \exists x[\mathrm{P}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(x)] \ \not\equiv\ B_3 = [\exists x\mathrm{P}(x)]\ \&\ [\exists x\mathrm{Q}(x)]$$

$$A_4 = \exists x[\mathrm{P}(x) \cup \mathrm{Q}(x)] \ \equiv\ B_4 = [\exists x\mathrm{P}(x)] \cup [\exists x\mathrm{Q}(x)]$$

Можно заключить следующее: распределение кванторов по подформулам возможно в двух случаях:

а) для квантора общности – если подформулы связаны конъюнкцией ($A_1 \equiv B_1$);

б) для квантора существования – если подформулы связаны дизъюнкцией ($A_4 \equiv B_4$).

Эквивалентность первого и четвертого случая является предпосылкой возможности продвижения кванторов вглубь формул.

Рассмотрим формулы, в которых невозможно продвижение кванторов.

Примарная формула – формула, имеющая один из следующих видов:

1. $\forall x[\mathrm{P}_1{}^{a_1}(x) \cup \mathrm{P}_2{}^{a_2}(x) \cup \ldots \cup\ \mathrm{P}_k{}^{a_k}(x)]$

2. $\exists x[\mathrm{P}_1{}^{a_1}(x)\ \&\ \mathrm{P}_2{}^{a_2}(x)\ \&\ \ldots\ \&\ \mathrm{P}_k{}^{a_k}(x)]$ где $\mathrm{P}^a(x) = \begin{cases} P(x), a = 1 \\ \bar{P}(x), a = 0 \end{cases}$

Примарные формулы – это простейшие антипрефиксные формулы.

Утв.: любую сингулярную формулу можно привести к логически равносильной ей булевой комбинации примарных формул. Для обоснования этого утверждения приведем некий алгоритм приведения.

Число шагов алгоритма совпадает с количеством кванторов в формуле. На каждом шаге необходимо найти самую внутреннюю формулу, начинающуюся с квантора, в области действия которого содержится булевая комбинация уже построенных примарных формул. Возможны два случая, относительно вида данной подформулы:

1. *Начинается с квантора общности* ($\forall xA$).

а) привести формулу A к виду КНФ относительно уже построенных примарных формул и предикатов, зависящих от x:

$\text{КНФ}(A) = A_1\ \&\ A_2\ \&\ldots\&\ A_s$. $A_i = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots \cup B_{i_t} \cup P_{j_1}{}^{a_1} \cup P_{j_2}{}^{a_2} \cup \ldots \cup P_{j_k}{}^{a_k}$,

где $B_{i_1},\ldots, B_{i_t}$ – либо независимые x от формулы, либо булевые комбинации уже построенных примарных формул.

б) выполнить процесс распределения:

$\forall xA \equiv [\forall xA_1]\&\ [\forall xA_2]\&\ldots\&\ [\forall xA_s]$ $\forall xA_i = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots \cup B_{i_t} \cup \forall x[P_{j_1}{}^{a_1} \cup P_{j_2}{}^{a_2} \cup \ldots \cup P_{j_k}{}^{a_k}]$

2. *Начинается с квантора существования* ($\exists xA$).

а) привести формулу A к виду ДНФ относительно предикатов и входящих в нее примарных формул

$\text{ДНФ}(A) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$ $A_i = B_{i_1}\ \&\ B_{i_2}\ \&\ \ldots\ \&\ B_{i_t}\ \&\ P_{j_1}{}^{a_1}\ \&\ P_{j_2}{}^{a_2}\ \&\ \ldots\ \&\ P_{j_k}{}^{a_k}$

б) выполнить процесс распределения

$\exists xA \equiv [\exists xA_1] \cup [\exists xA_2] \cup \ldots \cup [\exists xA_s]$ $\exists xA_i = B_{i_1}\ \&\ B_{i_2}\ \&\ \ldots\ \&\ B_{i_t}\ \&\ \exists x[P_{j_1}{}^{a_1}\ \&\ P_{j_2}{}^{a_2}\ \&\ \ldots\ \&\ P_{j_k}{}^{a_k}]$