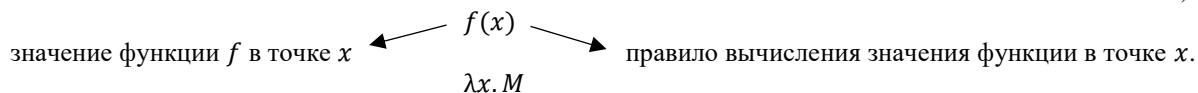
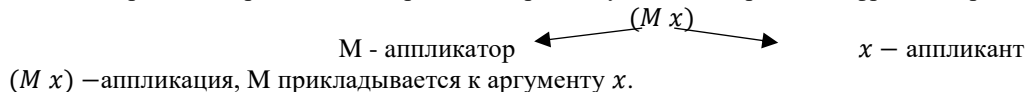


**Вопрос 10. Лямбда-исчисление. Отношения альфа-конверсии и бета-редукции на множестве лямбда-термов. Понятие бета-редекса: внешний и внутренний редексы, правый и левый редексы. Понятие бета-нормальной формы лямбда-терма. Редукционные цепочки: стратегии АПР и НПР для преобразования лямбда-термов к бета-нормальной форме. Примеры редуцирования. Теорема Черча-Россера о ромбическом свойстве бета-редукции и ее следствие. Теорема стандартизации**

Билет: 5, 15, 25



$M$  –  $\lambda$ -абстракция выражение, содержащее переменную  $x$ , в котором зашифровано правило вычисления функции в точке  $x$ .



Основной синтаксический объект в  $\lambda$ -исчислении это  $\lambda$ -терм.

<p>1. <b>Алфавит для построения <math>\lambda</math>-термов:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. символ <math>\lambda</math>, называемый <math>\lambda</math>-абстракторм,</li> <li>b. счетный набор символов, называемый переменными</li> <li>c. символы «(», «)», «.»</li> </ul> <p>В качестве переменных используют малые латинские буквы, возможно с индексами</p>	<p>2. <b>Лямбда-термом (<math>\lambda</math>-термом)</b> называется:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. выражение, состоящее из одной переменной,</li> <li>b. выражение вида <math>(MN)</math>, называемое аппликацией, где <math>M</math> и <math>N</math> — <math>\lambda</math>-термы,</li> <li>c. выражение вида <math>(\lambda x. M)</math>, называемое <math>\lambda</math>-абстракторм, где <math>M</math> — <math>\lambda</math>-терм, называемый <b>схожестью действий</b>, <math>x</math> — переменная, <math>\lambda</math> — называют абстрактой переменной <math>x</math></li> </ul>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

- Парные скобки в термах, соответствующие абстракции, опускаются, если они восстанавливаемы группировкой вправо.  
 $M_1 M_2 \dots M_k = (((\dots (M_1 M_2) M_3) \dots) M_{k-1}) M_k$  — слева направо  
 $\lambda x_1 x_2 \dots x_k. M = (\lambda x_1. (\lambda x_2. (\dots (\lambda x_k. M) \dots)))$  — справа налево
- Подтерм** – любая последовательность подряд идущих символов в терме, являющаяся термом
- В терме  $(\lambda x. M)$  терм  $M$  называется **областью действия**  $\lambda$ -абстрактора по переменной  $x$ .
- Переменная имеет **связанное** вхождение в терм, если она находится в области действия  $\lambda$ -абстрактора по этой переменной. Иначе – **свободным**.
- Комбинатор** – терм без свободных вхождений переменных (аналог предложения).
- $\Lambda$  – множество всех  $\lambda$ -термов.  $\Lambda_0$  – множество комбинаторов.
- $FV(M)$  — множество переменных, имеющих свободные вхождения в  $\lambda$ -терм  $M$ .
- $M_x[N]$  – результат подстановки терма  $N$  в терм  $M$  вместо всех свободных в  $M$  вхождений переменной
- $z = (MN)$ , аппликатор  $M$  имеет в терме **активное вхождение**. Любой другой  $N$  терм, не являющийся аппликатором, имеет **пассивное вхождение**.
- Выражение  $M \equiv N$  означает синтаксическое (графическое) равенство  $\lambda$ -термов  $M$  и  $N$ .

**Пример:**  $T = (\lambda x. (\lambda y. y))((\lambda z. z)(\lambda z. z));$

$y$  – область действия  $\lambda$ -абстрактора по переменной  $y$ ;  $z$  –  $\dots$  по переменной  $z$ ;  $(\lambda y. y)$  –  $\dots$  по переменной  $x$ .

Подтермы:  $y, z, (\lambda y. y), (\lambda z. z), (\lambda x. (\lambda y. y)), (\lambda z. z)(\lambda z. z), T$ . Все переменные  $x, y, z$  – связаны.  $T$  – комбинатор.

**$\alpha$ -конверсия** = переименование

$$(\lambda x. M) =_{\lambda} (\lambda y. M_x[y])$$

$$\alpha = \{ ((\lambda x. M), (\lambda y. M_x[y])), M \in \Lambda, y \in FV(M) \}$$

по Сорочану  
по Малышеву

**$\beta$ -редукция** – суперпозиция

$$((\lambda x. M)N) \rightarrow_{\beta} (M_x[N])$$

$$\beta = \{ ((\lambda x. M)N), (M_x[N]), M, N \in \Lambda, x \notin FV(N) \}$$

по Сорочану  
по Малышеву

<b><math>\beta</math>-свертка</b> - преобразование терма $(\lambda x. M)N$ в терм $M_x[N]$ , где $x \in FV(M)$ . Интуитивно - подстановка аргумента вместо соответствующей переменной.	<b>Редукционная цепочка</b> - это пустая, конечная/бесконечная последовательность термов, полученных с помощью $\alpha$ -конверсии и $\beta$ -редукции, а именно $\forall 2$ соседних члена последовательности, полученных друг из друга, либо $\alpha$ -конверсией, либо $\beta$ -редукцией.
<b><math>\beta</math>-редексом</b> - преобразуемый терм $(\lambda x. M)N$ . (REDucible EXpression)	Терм $P$ $\beta$ -редуцируется к терму $Q$ : $P \rightarrow_{\beta} Q$
<b><math>\beta</math>-нормальный терм</b> – терм без $\beta$ -редексов.	<b><math>\beta</math>-нормальной форма</b> терма $P$ – $\beta$ -нормальный терм $Q$ и $P \rightarrow_{\beta} Q$
<b>Левый редекс</b> - редекс, символ $\lambda$ которого расположен левее символов $\lambda$ других редексов. Аналогично <b>правый редекс</b> .	<b>Внешним редексом</b> называется редекс, который не содержится внутри никакого другого редекса. <b>Внутренний редекс</b> - редекс, не содержащий других редексов.

**Пример построения редукционной цепочки:**

$$(\lambda x. xx)(\lambda x. xx) = (\lambda x. (xx))(\lambda x. (xx)) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. (xx))(\lambda x. (xx)) \rightarrow_{\beta} \dots$$

Бесконечная редукционная цепочка. Терм сам является  $\beta$ -редексом. У него нет нормальной формы.

**Пример (выбор редекса для сворачивания не однозначен)**

$$T = (\lambda x. ((\lambda y. xy)u))(\lambda v. v) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. xu)(\lambda v. v) \rightarrow_{\beta} (\lambda v. v). u$$

$$T = (\lambda x. ((\lambda y. xy)u))(\lambda v. v) \rightarrow_{\beta} (\lambda y. ((\lambda v. v)y))u \rightarrow_{\beta} \begin{matrix} (\lambda y. y)u \\ (\lambda v. v)u \end{matrix} \rightarrow_{\beta} \beta u$$

Выбор разных редексов для свертки дает разные редукционные цепочки.

Стратегия применения сверток: пока  $\exists$  хотя бы один редекс, применить к одному из них редукцию.

Переменные:  $u$  – свободная, остальные связанные.

Активное вхождение имеют  $\lambda$ -термы:  $z$ ,  $(\lambda y. xy)$ ,  $(\lambda x. ((\lambda y. xy)u))$

Два  $\beta$ -редекс: 1)  $(\lambda y. xy)u$  – самый правый, внутренний. 2)  $T$  – самый левый, внешний.

**Аппликативный порядок редукций (АПР)** – всегда выбираем самый левый из внутренних редексов.

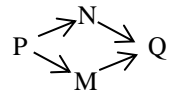
**Нормальный порядок редукций (НПР)** – всегда выбираем самый левый из внешних редексов.

**Ленивое вычисление:**  $(\lambda y. M)N \rightarrow_{\beta} M$

**Теорема Черча-Россера (о ромбическом свойстве  $\beta$ -редукции).** Без доказательства.

Если  $P \rightarrow_{\beta} M$  и  $P \rightarrow_{\beta} N$ , то существует такой терм  $Q$ , что  $M \rightarrow_{\beta} Q$  и  $N \rightarrow_{\beta} Q$ .

**Следствие.** Если у терма существует  $\beta$ -нормальная форма, то она единственная.



**Теорема стандартизации.** Если  $\beta$ -нормальная форма терма  $\exists$ , то стратегия НПР гарантирует её достижение.