

20. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий

Билет: 12, 26.

В математике можно выделить два способа формирования теорий: аксиоматический подход и структурный подход.

Аксиоматический подход:

Из некоторых соображений выбирается сигнатура $\sigma = \langle P_1, \dots, P_k; f_1, \dots, f_s \rangle$, выбираются предложения сигнатуры σ , которые объявляются истинными, то есть аксиомами. Развитие аксиоматической теории состоит в исследовании тех интерпретаций сигнатуры σ , в которых истинны все аксиомы теории, а также в получении следствий из аксиом.

Определение 1: Аксиоматическая теория $Th_{ax} = (\sigma, \Gamma)$, где σ - некоторая сигнатура, $\Gamma \subseteq sent(\sigma)$, где $sent(\sigma)$ - множество предложений сигнатуры σ .

Определение 2: Предложения из Γ называются аксиомами теории Th_{ax}

Определение 3: Теорема теории Th_{ax} - любое логическое следствие из Γ , то есть A - теорема Th_{ax} , если $A \subseteq sent(\sigma)$ и $\Gamma \vdash A$.

Определение 4: Множество теорем теории Th_{ax} называется её замыканием $[Th_{ax}]$, то есть $[Th_{ax}] = \{A \mid A \subseteq sent(\sigma) \text{ и } \Gamma \vdash A\}$. Часто под теорией понимают её замыкание.

Определение 5: В общем случае под элементарной теорией будем понимать любое логически замкнутое множество предложений рассматриваемой сигнатуры.

Примеры:

1. Теория групп: $\sigma = \langle =, ^\circ, e \rangle$, где $=$ - предикат равенства, $^\circ$ - символ групповой операции, e - символ единичного элемента.

Аксиомы теории групп:

- a) $\forall a \forall b \forall c [(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$ - ассоциативность операции $^\circ$;
- b) $\forall a [a \circ e = a]$ - существование единичного элемента;
- c) $\forall a \exists b [a \circ b = e]$ - существование обратного элемента;

Теорема 1: $\forall a \forall b \exists x [(a \circ x = b) \& \forall x [(a \circ x = b) \rightarrow (x = x)]]$ - уравнение $a \circ x = b$ в группе всегда имеет решение, причем единственное.

2. Теория отношений эквивалентности: $\sigma = \langle =, R \rangle$

Аксиомы теории отношений эквивалентности:

- a) $\forall x [R(x, x)]$ - рефлексивность;
- b) $\forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow R(y, x)]$ - симметричность;
- c) $\forall x \forall y \forall z [R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)]$ - транзитивность;

Теорема 2 (теорема о факторизации): $\forall x \forall y [R(x, y) \& R(y, x) \vee \bar{R}(x, y) \& \bar{R}(y, x)]$ - эту теорему также называют теоремой теории отношений эквивалентности.

Структурный подход:

Данный способ формирования теории начинается с изучения какой-либо конкретной математической структуры или класса структур и тогда, естественно, возникает вопрос о полной аксиоматизации этого класса, т.е. о выборе множества аксиом так, чтобы множество следствий из этих аксиом совпадало с множеством истинных в рассматриваемом классе структур утверждений.

Заранее задан некоторый конкретный универсум и задана некоторая конкретная структура:

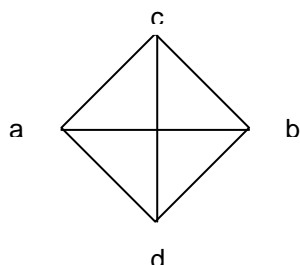
$U^{(I)}, S^{(I)} = \langle P_1^{(I)}, \dots, P_k^{(I)}; f_1^{(I)}, \dots, f_s^{(I)} \rangle$ - тем самым, у нас есть множество теорем теории (пусть и неявно).

Примеры: Наиболее ярким примером структурной теории является планарная Евклидова геометрия. U - множество точек плоскости, $S = \langle =, B, D \rangle$, $\tau = \langle 2, 3, 4 \rangle$.

$B(a, b, c)$ = "точки плоскости a, b, c лежат на одной прямой", $D(a, b, c, d) = "p(a, b) = p(c, d)"$.

А.Тарским была предложена система из 16 аксиом, из которых следует любая теорема планарной Евклидовой геометрии:

- a) $\forall a \forall b [D(a, b, b, a)]$ - симметричность;
- b) $\forall a \forall b \forall c [D(a, b, c, c) \rightarrow (a = b)]$;
- c) $\forall a \forall b \forall c \forall d [D(a, b, c, d) \& D(a, b, e, f) \rightarrow D(c, d, e, f)]$ - транзитивность расстояния;
- d) $\forall a \forall b \forall c \forall d \exists p [D(a, c, b, c) \& D(b, c, b, d) \& D(b, d, a, d) \rightarrow D(a, p, b, p) \& D(c, p, d, p)]$



acbd - ромб, p - точка пересечения диагоналей.